Généralités en théorie de Hodge

L'objectif de cette section est d'introduire les notions de théorie de Hodge qui nous seront utiles dans la suite, à savoir les notions de structures de Hodge et de variations de structure de Hodge. Nous verrons également à quelles conditions un système local sur la droite affine privée d'un nombre fini de points est induit par une variation de structure de Hodge polarisable.

5.1 Structures de Hodge

On raisonne dans toute la suite sur le corps des nombres complexes. La notion de structure de Hodge (polarisée) a été à l'origine introduite pour étudier les propriétés de la cohomologie de variétés complexes. De manière résumée :

— une structure de Hodge est un espace vectoriel de dimension finie gradué

— un morphisme de structures de Hodge est un morphisme compatible à la décomposition donnée par la graduation

— une polarisation est une forme hermitienne définie positive telle que la décomposition donnée par la graduation est orthogonale par rapport à la forme hermitienne

Néanmoins, cette description des structures de Hodge ne se comporte pas bien lorsque l'on considère des familles holomorphes. En particulier, la graduation ne se déforme pas holomorphiquement, mais seulement de manière C^∞. Pour remédier à cela, on remplace la graduation par deux filtrations décroissantes, l'une variant holomorphiquement et l'autre anti-holomorphiquement. Posons alors les deux définitions suivantes :

Définition 5.1.1 *Soient $w \in \mathbb{Z}$, $F'^\bullet H$ et $F''^\bullet H$ deux filtrations décroissantes d'un espace vectoriel H. On dit que les filtrations $F'^\bullet H$ et $F''^\bullet H$ sont w-opposées si pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a*

$$F'^p H \cap F''^{w-p+1} H = 0 \quad \text{et} \quad F'^p H + F''^{w-p+1} H = H.$$

Définition 5.1.2 (Structures de Hodge)

— *Une structure de Hodge de poids $w \in \mathbb{Z}$ est un espace vectoriel H muni de deux filtrations décroissantes $F'^\bullet H$ et $F''^\bullet H$ w-opposées.*

— *Un morphisme de structures de Hodge est un morphisme compatible aux deux filtrations.*

On voit que les deux définitions d'une structure de Hodge sont équivalentes en remarquant qu'étant données deux filtrations décroissantes $F'^\bullet H$ et $F''^\bullet H$ d'un espace vectoriel H, les deux conditions suivantes sont équivalentes :
(i) les filtrations $F'^\bullet H$ et $F''^\bullet H$ sont w-opposées.
(ii) on a la décomposition $H = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} H^{p,w-p}$ avec $H^{p,w-p} = F'^p H \cap F''^{w-p} H$.

On en déduit en particulier qu'un morphisme de structures de Hodge donné par la définition est compatible à la décomposition. Plus précisément, on a la proposition suivante :

Proposition 5.1.3 *Soit $\varphi : H_1 \longrightarrow H_2$ un morphisme de structures de Hodge avec H_1 et H_2 de poids respectifs w_1 et w_2.*
(i) Si $w_1 = w_2 = w$, alors φ est strictement compatible aux deux filtrations et à la décomposition (i.e. $\varphi(F^\bullet H_1) = \varphi(H_1) \cap F^\bullet H_2$ pour $F = F'$ et $F = F''$, et $\varphi(H_1^{p,w-p}) = \varphi(H_1) \cap H_2^{p,w-p}$).
(ii) Si $w_1 > w_2$, alors $\varphi = 0$.

Preuve. (i) Les inclusions $\subset$ étant triviales, regardons les inclusions $\supset$.

• Commençons par montrer pour $p \in \mathbb{Z}$ que $\varphi(F'^p H_1) \supset \varphi(H_1) \cap F'^p H_2$, la preuve étant complètement identique pour la filtration $F''^\bullet$. Soit $y = \varphi(x) \in \varphi(H_1) \cap F'^p H_2$, on décompose alors x en $x = \sum_{q \in \mathbb{Z}} x_q$ où les $x_q \in H_1^{q,w-q}$ sont presque tous nuls. On a alors

$$y = \sum_{q \leq p-1} \varphi(x_q) + \sum_{q \geq p} \varphi(x_q) \in F'^p H_2.$$

On sait que $\sum_{q \geq p} \varphi(x_q) \in F'^p H_2$ par décroissance de la filtration $F'^\bullet$, et que $\sum_{q \leq p-1} \varphi(x_q) \in F''^{w-p+1} H_2$ par décroissance de la filtration $F''^\bullet$. Il en résulte que $\sum_{q \leq p-1} \varphi(x_q) \in F'^p H_2 \cap F''^{w-p+1} H_2 = 0$, ce qui donne finalement $y = \varphi(\sum_{q \geq p} x_q) \in \varphi(F'^p H_1)$.

• Montrons maintenant pour $p \in \mathbb{Z}$ que $\varphi(H_1^{p,w-p}) \supset \varphi(H_1) \cap H_2^{p,w-p}$. Soit $y = \varphi(x) \in \varphi(H_1) \cap H_2^{p,w-p}$, on décompose alors x en $x = \sum_{q \in \mathbb{Z}} x_q$ où $x_q \in H_1^{q,w-q}$. On a alors $y = \varphi(x) = \varphi(x_p) \in \varphi(H_1^{p,w-p})$.

(ii) Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi(H_1^{p,w_1-p}) \subset F'^p H_2 \cap F''^{w_1-p} H_2 \subset F'^p H_2 \cap F''^{w_2-p+1} H_2 = 0$. $\square$

Exemples. 1) Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ muni des filtrations $F'^p\mathbb{C} = F''^p\mathbb{C} = \mathbb{C}$ pour $p \leq 0$ et $F'^p\mathbb{C} = F''^p\mathbb{C} = 0$ pour $p \geq 1$. Ces filtrations sont 0-opposées, ce qui permet de munir $\mathbb{C}$ d'une structure de Hodge de poids 0.

2) Soit H une structure de Hodge de poids w. On définit $H(k, \ell)$ comme l'espace vectoriel H muni des filtrations $F'^\bullet H(k, \ell) = F'^{\bullet+k} H$ et $F''^\bullet H(k, \ell) = F''^{\bullet+\ell} H$. Ces filtrations sont $(w-k-\ell)$-opposées, ce qui permet de munir $H(k, \ell)$ d'une structure de Hodge de poids $w - k - \ell$. Si $k = \ell$, on note $H(k, k) = H(k)$.

3) Soient H_1 et H_2 des structures de Hodge de poids respectifs w_1 et w_2. On définit les filtrations F^p sur $H_1 \otimes H_2$ (avec $F = F'$ ou $F = F''$) par

$$F^p(H_1 \otimes H_2) = \sum_{p_1+p_2=p} F^{p_1} H_1 \otimes F^{p_2} H_2.$$

Un calcul permet de montrer que ces deux filtrations sont $(w_1 + w_2)$-opposées, ce qui permet de munir $H_1 \otimes H_2$ d'une structure de Hodge de poids $w_1 + w_2$.

4) Soient H_1 et H_2 des structures de Hodge de poids respectifs w_1 et w_2. On définit les filtrations F^p sur $\mathrm{Hom}(H_1, H_2)$ (avec $F = F'$ ou $F = F''$) par

$$F^p\mathrm{Hom}(H_1, H_2) = \{f \in \mathrm{Hom}(H_1, H_2) \mid \forall k \in \mathbb{Z},\ f(F^k H_1) \subset F^{k+p} H_2\}.$$

Un calcul permet de montrer que ces deux filtrations sont $(w_2 - w_1)$-opposées, ce qui permet de munir $\mathrm{Hom}(H_1, H_2)$ d'une structure de Hodge de poids $w_2 - w_1$.

5) Soit H une structure de Hodge de poids w. En combinant 1) et 4), on obtient que l'espace vectoriel dual $H^\vee$ est alors muni d'une structure de Hodge de poids $-w$ avec les deux filtrations $(-w)$-opposées $F'^p H^\vee = (F'^{-p+1} H)^\perp$ et $F''^p H^\vee = (F''^{-p+1} H)^\perp$.

6) Soit H une structure de Hodge de poids w. L'espace vectoriel conjugué $\overline{H}$ est muni d'une structure de Hodge de poids w en posant $F'^p\overline{H} = \overline{F''^p H}$ et $F''^p\overline{H} = \overline{F'^p H}$. On a alors $\overline{H}^{p,w-p} = \overline{H^{w-p,p}}$.

7) Soit H une structure de Hodge de poids w. En combinant 5) et 6), on obtient que l'espace vectoriel adjoint $H^* = \overline{H}^\vee$ est muni d'une structure de Hodge de poids $-w$.

Définition-proposition 5.1.4 (Polarisations)
Soit $(H, F'^{\bullet}H, F''^{\bullet}H)$ une structure de Hodge de poids w. Les deux définitions suivantes sont équivalentes :
(i) Une polarisation est une forme hermitienne h sur H définie positive telle que la décomposition $H = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} H^{p,w-p}$ est h-orthogonale. En particulier, h induit une forme hermitienne définie positive sur chaque $H^{p,w-p}$.
(ii) Une polarisation est une forme sesquilinéaire Q sur H telle que :
(1) Q est $(-1)^w$-hermitienne, i.e. $Q^*(x,\overline{y}) = \overline{Q(y,\overline{x})} = (-1)^w Q(x,\overline{y})$ pour tous $x, y \in H$.
(2) $Q(F'^pH, \overline{F''^qH}) = 0$ et $Q(F''^pH, \overline{F'^qH}) = 0$ pour $p + q > w$.
(3) $h(x,\overline{y}) = Q(Cx,\overline{y})$ est (hermitienne) définie positive, où C est l'opérateur de Weil égal à la multiplication par i^{p-q} sur $H^{p,q}$.

Une structure de Hodge munie d'une polarisation est dite polarisée (ou polarisable si l'on ne souhaite pas faire un choix de polarisation).

Preuve. Montrons que ces deux définitions sont bien équivalentes. Une polarisation au sens de (ii) est une polarisation au sens de (i) car (2) implique que la décomposition $H = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} H^{p,w-p}$ est Q-orthogonale, et donc h-orthogonale d'après (3). Pour voir qu'une polarisation au sens de (i) est une polarisation au sens de (ii), il suffit de poser $Q(x,\overline{y}) = h(C^{-1}x,\overline{y})$. □

Proposition 5.1.5 *La condition (ii)(2) est équivalente à $Q \in \mathrm{Hom}(H \otimes \overline{H}, \mathbb{C}(-w))$.*

Preuve. Commençons par préciser que $H \otimes \overline{H}$ et $\mathbb{C}(-w)$ sont tous deux munis d'une structure de Hodge de poids $2w$, d'après les exemples 1), 2), 3) et 6) vus précédemment. On a alors la suite d'équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}(ii)(2) &\iff \forall p_1, p_2 \in \mathbb{Z} \text{ tels que } p_1 + p_2 > w,\ Q(F'^{p_1}H \otimes \overline{F''^{p_2}H}) = 0 \text{ et } Q(F''^{p_1}H \otimes \overline{F'^{p_2}H}) = 0\\ &\iff \forall p > w,\ Q(F^p(H \otimes \overline{H})) = 0 \text{ pour } F \in \{F', F''\}\\ &\iff \forall p \in \mathbb{Z},\ Q(F^p(H \otimes \overline{H})) \subset F^p\mathbb{C}(-w) \text{ pour } F \in \{F', F''\}\\ &\iff Q \in \mathrm{Hom}(H \otimes \overline{H}, \mathbb{C}(-w)).\end{aligned}$$

□

Remarque. Une autre façon de voir la proposition précédente est de dire que $Q \in \mathrm{Hom}(H, H^*(-w))$. Le morphisme adjoint $Q^* \in \mathrm{Hom}(H(w), H^*)$ peut être vu comme un morphisme de $\mathrm{Hom}(H, H^*(-w))$ et la condition (ii)(1) est équivalente à dire que $Q^* = (-1)^\omega Q$. En outre, les conditions (ii) impliquent que la forme sesquilinéaire Q est non dégénérée, en particulier Q induit un isomorphisme d'espaces vectoriels $H \longrightarrow H^*$, qui vérifie donc $Q^* = (-1)^w Q$. On a alors $F''^pH = Q^{-1}(F'^{p-w}H^*) = (F'^{w-p+1}H)^{\perp_Q}$. En d'autres termes, il y a de la redondance dans la définition d'une structure de Hodge polarisée. Cela nous amène à donner la définition équivalente suivante :

Définition 5.1.6 *Une structure de Hodge polarisée de poids w est la donnée de :*
(i) Un espace vectoriel filtré $(H, F^p H)$.
(ii) Une forme sesquilinéaire Q sur H telle que :
(1) Q est $(-1)^w$-hermitienne non dégénérée, en particulier Q induit un isomorphisme $H \longrightarrow H^*$.
(2) $F^\bullet H$ et $Q^{-1}(F^\bullet H^*)$ sont 0-opposées.
(3) $h(x, \overline{y}) = Q(Cx, \overline{y})$ est définie positive, où $Cx = (-1)^p i^{-w} x$ sur $H^{p,w-p} = F^p H \cap (F^{p+1}H)^{\perp_Q}$.

5.2 Variations de structure de Hodge

La définition d'une variation de structure de Hodge est motivée par l'étude du comportement de la cohomologie d'une famille de variétés projectives lisses paramétrisée par une variété algébrique lisse. On suppose que X est une variété complexe connexe, commençons par donner la définition suivante :

Définition 5.2.1 *Une variation de structure de Hodge de poids $w \in \mathbb{Z}$ consiste en la donnée d'un fibré $\mathcal{C}^\infty$ à connexion plate (H, D) muni d'une décomposition $H = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H^{p,w-p}$ par des sous-fibrés $\mathcal{C}^\infty$ satisfaisant la transversalité de Griffiths :*

$$D' H^{p,q} \subset \Omega^1_X \otimes (H^{p,q} \oplus H^{p-1,q+1}) \quad \text{et} \quad D'' H^{p,q} \subset \overline{\Omega^1_X} \otimes (H^{p,q} \oplus H^{p+1,q-1}),$$

où $D = D' + D''$ est décomposée selon le type (holomorphe et anti-holomorphe).

Comme dans la partie précédente avec les structures de Hodge, faisons l'analogie entre décomposition et filtrations w-opposées. La filtration $F'^p H = \bigoplus_{q \geq p} H^{q,w-q}$ vérifie par transversalité de Griffiths la propriété $D' F'^p H \subset \Omega^1_X \otimes F'^{p-1} H$. Le fibré holomorphe $V' = \ker D''$ est muni d'une connexion holomorphe plate $\nabla' = D'_{|\ker D''}$ et d'une filtration $F'^p V = F'^p H \cap V'$ en sous-fibrés holomorphes vérifiant la transversalité de Griffiths, ici $\nabla' F'^p V' \subset \Omega^1_X \otimes F'^{p-1} V'$. On a des propriétés tout à fait analogues avec le pendant anti-holomorphe. Vient alors la définition-proposition suivante :

Définition-proposition 5.2.2 *Une variation de structure de Hodge de poids $w \in \mathbb{Z}$ consiste en la donnée d'un fibré $\mathcal{C}^\infty$ à connexion plate (H, D), muni d'une filtration $F'^\bullet H$ qui induit sur $(\ker D'', D'_{|\ker D''})$ une filtration en sous-fibrés holomorphes satisfaisant la transversalité de Griffiths, et d'une filtration $F''^\bullet H$ qui induit sur $(\ker D', D''_{|\ker D'})$ une filtration en sous-fibrés anti-holomorphes satisfaisant l'anti-transversalité de Griffiths, et telle que la restriction de ces données à $x \in X$ est une structure de Hodge de poids w.*

Preuve. La seule chose qui reste à voir pour démontrer l'équivalence des deux définitions est que les données de la définition 5.2.2 sont suffisantes. On pose $H^{p,w-p} = F'^p H \cap F''^{w-p} H$ qui satisfait bien la transversalité de Griffiths. En outre, il s'agit bien d'un sous-fibré car sa fibre en $x \in X$ est de dimension constante. $\square$

En reprenant l'analogie avec les structures de Hodge, on définit maintenant les morphismes de variations de structure de Hodge, ainsi que la notion de polarisation.

Définition 5.2.3 *Un morphisme $\varphi : H_1 \longrightarrow H_2$ est un morphisme de fibrés $\mathcal{C}^\infty$ horizontal par rapport aux connexions, et compatible à la décomposition, ou de manière équivalente compatible aux deux filtrations (holomorphe et anti-holomorphe).*

Définition 5.2.4 *Une polarisation sur une variation de structure de Hodge $(H, \oplus H^\bullet, D)$ de poids w est un morphisme D-horizontal $H \otimes \overline{H} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty_X(-w)$, dont la restriction à tout $x \in X$ est une polarisation de la structure de Hodge H_x. Une variation de structure de Hodge munie d'une polarisation est dite polarisée (ou polarisable si l'on ne souhaite pas faire un choix de polarisation).*

Remarque. Si $(H, \oplus H^\bullet, D, Q)$ est une variation de structure de Hodge de poids w alors $(H, \oplus H^\bullet, D, i^{-w}Q)$ est une variation de structure de Hodge de poids 0. On peut donc supposer sans perte de généralité que le poids est 0, d'autant plus lorsque l'on considère des variations de structure de Hodge polarisables, où le choix de la polarisation nous importe peu.

Considérons une variation de structure de Hodge polarisée $(H, \oplus H^\bullet, D, Q)$, que l'on suppose de poids 0 d'après la remarque précédente. En reprenant la constatation de la définition 5.1.6 comme quoi certaines données sont redondantes, il suffit de se donner $(V, F^\bullet V, \nabla, Q)$ pour caractériser la variation de structure de Hodge polarisée, où $V = \ker D''$, $F^p V = (\bigoplus_{q \geq p} H^{q,-q}) \cap V$ et $\nabla = D'_{|V}$. Ainsi quand on considèrera dans la suite une variation de structure de Hodge polarisable, on la notera $(V, F^\bullet V, \nabla)$.

5.3 Existence d'une variation de structure de Hodge sous-jacente à un système local

On note $\boldsymbol{x} \subset \mathbb{A}^1$ un ensemble fini de points, $U = \mathbb{A}^1 \setminus \boldsymbol{x}$ et $j : U \hookrightarrow \mathbb{A}^1$ l'inclusion. Une variation de structure de Hodge polarisable $(V, F^\bullet V, \nabla)$ sur U induit un $\mathbb{C}$-système local sur U défini par $\mathcal{V} = V^\nabla$. Réciproquement, si on se donne $\mathcal{V}$ un $\mathbb{C}$-système local sur U, on cherche à savoir à quelles conditions $\mathcal{V}$ est induit par une variation de structure de Hodge polarisable sur U.

Les deux conditions suivantes sont nécessaires :
(i) Le système local $\mathcal{V}$ est semi-simple, à savoir somme directe de systèmes locaux irréductibles.
(ii) Les valeurs propres des monodromies autour des singularités sont de module 1.

On a le résultat suivant dû à Simpson (corollaire 8.1 de [Sim90]) :

Proposition 5.3.1 *Supposons que le système local $\mathcal{V}$ est semi-simple et rigide. Alors $\mathcal{V}$ est induit par une variation de structure de Hodge polarisable si et seulement si la condition (ii) est satisfaite.*

La notion de rigidité est bien comprise dans le cas irréductible (d'après le théorème 3.2.4), et la réduction au cas irréductible ne pose pas réellement de problème lorsque l'on considère des variations de structure de Hodge grâce au résultat suivant :

Proposition 5.3.2 *Soit $(V, F^\bullet V, \nabla)$ une variation de structure de Hodge polarisable sur U. Le système local semi-simple induit $\mathcal{V}$, se décompose en $\mathcal{V} = \oplus_{\alpha \in A}(\mathcal{V}_\alpha)^{n_\alpha}$, où les systèmes locaux $\mathcal{V}_\alpha$ sont irréductibles et deux à deux non isomorphes. On a $(\mathcal{V}, \nabla) = \oplus_{\alpha \in A}(\mathcal{V}_\alpha, \nabla)^{n_\alpha}$, et la polarisation ∇-horizontale se décompose selon les $\alpha \in A$.*

Pour cette raison, nous travaillerons dans le cas irréductible dans la suite. Notons en outre que dans ce cas, d'après un résultat dû à Deligne, il y a unicité d'une telle variation de structure de Hodge polarisable à renumérotation de la filtration $p \mapsto p + n$ près (partie (i) de la proposition 1.13 de [Del87]).

Lien avec l'algorithme de Katz. Il y a deux façons de voir les choses :

1) Considérons un système local irréductible rigide dont les valeurs propres des monodromies $T_1, ..., T_r$ sont de module 1. D'après la proposition 5.3.1, il est induit par une variation de structure de Hodge polarisable. On a vu dans la troisième remarque du bas de la sous-section 3.4 que le fait que les valeurs propres des monodromies soient de module 1 est une propriété conservée à chaque étape de l'algorithme de Katz. On peut donc appliquer la proposition 5.3.1 à chaque étape de l'algorithme de Katz, ce qui implique qu'à chaque étape le système local obtenu est induit par une variation de structure de Hodge polarisable, jusqu'à arriver au système local de rang 1 de monodromies triviales $(1, ..., 1)$. On peut alors étudier le comportement d'invariants de théorie de Hodge à chaque étape de l'algorithme de Katz. Cela nous permet en outre d'appliquer le schéma suivant :

1. On explicite l'algorithme de Katz $(T_1, ..., T_r) \rightsquigarrow (1, ..., 1)$.
2. On munit $(1, ..., 1)$ de la structure de Hodge triviale.
3. On calcule les invariants qui nous intéressent dans l'algorithme pris dans l'autre sens $(1, ..., 1) \rightsquigarrow (T_1, ..., T_r)$.
4. On obtient alors les invariants qui nous intéressent pour notre système local de départ $(T_1, ..., T_r)$.

2) En prenant le schéma ci-dessus, on part du système local $(1, ..., 1)$ muni de la structure de Hodge triviale. On sait qu'à chaque étape, on applique soit une multiplication $(T_1, ..., T_r) \rightsquigarrow (\lambda_1 T_1, ..., \lambda_r T_r)$ où les λ_i sont de module 1, soit une convolution intermédiaire avec $\mathcal{L}_\chi$ où χ est de module 1. On peut montrer que ces deux opérations explicites préservent les structures de Hodge polarisables (selon la théorie générale de M. Saito [Sai88]), ce qui permet d'éviter d'avoir à utiliser le théorème d'existence de Simpson.