Formulation du problème de l'évolution élasto-plastique vérifiant par construction le critère à chaque instant

Dans le premier paragraphe, nous allons proposer une nouvelle écriture de la transformation élastique dans la zone en cours d'évolution plastique. Cette écriture fait intervenir un champ d'angle θ et le champ de la déformation plastique cumulée p_{cum} .

Remarque : La notation de l'angle θ dans les chapitres 4, 5 et 6 n'est pas l'angle d'attaque θ que nous avons utilisé dans le chapitre 2.

Dans le deuxième paragraphe, nous allons établir les équations d'évolution de ces 2 champs si l'évolution de la transformation est connue

Dans le troisième paragraphe, nous allons illustrer cette démarche sur un essai non trivial dit essai de compression plane ou Chanel Die. C'est l'essai à déformation uniforme qui se rapproche le plus du processus de laminage.

4.1. Nouvelle écriture de la transformation élastique dans la zone en cours d'évolution plastique

Rappelons la factorisation de $\underline{F}(\underline{X},t)$

 $\underline{\underline{F}} = J^{\frac{1}{3}} \underline{\underline{\underline{E}}} \underline{\underline{P}} \text{ avec } J = \det(\underline{\underline{F}}), \ \underline{\underline{\underline{E}}} \text{ symétrique, } \det(\underline{\underline{\underline{E}}}) = \det(\underline{\underline{P}}) = 1.$

Nous avons introduit au chapitre 3, $\underline{\underline{D}} = J^{-\frac{2}{3}} \left[{}^{t}\underline{\underline{\underline{E}}} \underline{\underline{\underline{E}}} - \frac{tr\left({}^{t}\underline{\underline{\underline{E}}},\underline{\underline{\underline{E}}}\right)}{3} \underline{\underline{I}} \right]$ la partie déviatorique de ${}^{t}\underline{\underline{\underline{E}}},\underline{\underline{\underline{E}}}$

Notons $T = \frac{tr\left({}^{t}\underline{\underline{E}}.\underline{\underline{E}}\right)}{3}, \left({}^{t}\underline{\underline{E}}.\underline{\underline{E}}=T\underline{\underline{I}}+\underline{\underline{D}}\right).$

La partie déviatorique de la contrainte plastique s'écrit $\underline{\psi}^d_{\underline{\underline{D}}} = \mu_0 \underline{\underline{D}}$ et le critère de plasticité

peut donc se réécrire $\underline{\underline{D}}: \underline{\underline{D}} - \frac{2}{3} \frac{k^2 (p_{cum})}{\mu_0^2} = 0$ en tous les points où la plasticité évolue (Equation (3.28)).

Le tenseur $\underline{\underline{E}}$, symétrique peut être diagonalisé dans une base orthonormée, c'est-à-dire qu'il existe un tenseur orthogonal $\underline{\underline{O}}$ et trois valeurs $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) / \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 1$ tels que

$$\underline{\underline{E}} = J^{\frac{1}{3}} \underline{\underline{O}} \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix} \cdot \overset{t}{\underline{O}}$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{O}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\alpha_1^2 - \frac{1}{3}(\alpha_2^2 + \alpha_3^2) & 0 & 0\\ 0 & \frac{2}{3}\alpha_2^2 - \frac{1}{3}(\alpha_1^2 + \alpha_3^2) & 0\\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\alpha_3^2 - \frac{1}{3}(\alpha_2^2 + \alpha_1^2) \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{O}}$$

Que nous réécrivons $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{O}} \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0\\ 0 & \beta_2 & 0\\ 0 & 0 & \beta_3 \end{bmatrix} \overset{t}{\underline{\underline{O}}}$

Comme $tr(\underline{\underline{D}}) = 0$ et $\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}} - \frac{2}{3} \frac{k^2(p_{cum})}{\mu_0^2} = 0$ dans la zone plastique, nous avons les relations :

$$\beta_{1} + \beta_{2} + \beta_{3} = 0$$

$$\beta_{1}^{2} + \beta_{2}^{2} + \beta_{3}^{2} = \frac{2}{3} \frac{k^{2} (p_{cum})}{\mu_{0}^{2}}$$
(4.1)

Dans cette situation, si les β_i sont rangés dans l'ordre décroissant, il existe un paramètre $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ tel que :

$$\beta_{1} = \frac{2}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_{0}} \cos(\theta)$$

$$\beta_{2} = \frac{2}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_{0}} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\beta_{3} = \frac{2}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_{0}} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$
(4.2)

Nous noterons ces fonctions $\beta_i(heta, p_{_{cum}})$

Comme
$${}^{t}\underline{\underline{E}}\underline{\underline{E}} = T\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{O}} \begin{bmatrix} \beta_{1}(\theta, p_{cum}) + T & 0 & 0\\ 0 & \beta_{2}(\theta, p_{cum}) + T & 0\\ 0 & 0 & \beta_{3}(\theta, p_{cum}) + T \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{O}} \begin{bmatrix} \beta_{1}(\theta, p_{cum}) + T & 0\\ 0 & \beta_{2}(\theta, p_{cum}) + T \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{O}} \begin{bmatrix} \beta_{1}(\theta, p_{cum}) + T & 0\\ 0 & \beta_{2}(\theta, p_{cum}) + T \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{O}} \begin{bmatrix} \beta_{1}(\theta, p_{cum}) + T & 0\\ 0 & \beta_{2}(\theta, p_{cum}) + T \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{O}} \begin{bmatrix} \beta_{1}(\theta, p_{cum}) + T & 0\\ 0 & \beta_{2}(\theta, p_{cum}) + T \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{O}} \begin{bmatrix} \beta_{1}(\theta, p_{cum}) + T & 0\\ 0 & \beta_{2}(\theta, p_{cum}) + T \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{O}} \begin{bmatrix} \beta_{1}(\theta, p_{cum}) + T & 0\\ 0 & \beta_{2}(\theta, p_{cum}) + T \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{O}} \begin{bmatrix} \beta_{1}(\theta, p_{cum}) + T & 0\\ 0 & \beta_{2}(\theta, p_{cum}) + T \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{O}} \begin{bmatrix} \beta_{1}(\theta, p_{cum}) + T & 0\\ 0 & \beta_{2}(\theta, p_{cum}) + T \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{O}} \begin{bmatrix} \beta_{1}(\theta, p_{cum}) + T & 0\\ 0 & \beta_{2}(\theta, p_{cum}) + T \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{O}} \begin{bmatrix} \beta_{1}(\theta, p_{cum}) + T & 0\\ 0 & \beta_{2}(\theta, p_{cum}) + T \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{O}} \begin{bmatrix} \beta_{1}(\theta, p_{cum}) + T & 0\\ 0 & \beta_{2}(\theta, p_{cum}) + T \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{O}} \begin{bmatrix} \beta_{1}(\theta, p_{cum}) + T & 0\\ 0 & \beta_{2}(\theta, p_{cum}) + T \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{O}} \begin{bmatrix} \beta_{1}(\theta, p_{cum}) + T & 0\\ 0 & \beta_{2}(\theta, p_{cum}) + T \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{O}} \begin{bmatrix} \beta_{1}(\theta, p_{cum}) + T & 0\\ 0 & \beta_{2}(\theta, p_{cum}) + T \end{bmatrix} + \underline{\underline{O}} \begin{bmatrix} \beta_{1}(\theta, p_{cum}) + T & 0\\ 0 & \beta_{2}(\theta, p_{cum}) + T \end{bmatrix} + \underline{\underline{O}} \begin{bmatrix} \beta_{1}(\theta, p_{cum}) + T & 0\\ 0 & \beta_{2}(\theta, p_{cum}) + T \end{bmatrix} + \underline{\underline{O}} \begin{bmatrix} \beta_{1}(\theta, p_{cum}) + T & 0\\ 0 & \beta_{2}(\theta, p_{cum}) + T \end{bmatrix} + \underline{\underline{O}} \begin{bmatrix} \beta_{1}(\theta, p_{cum}) + T & 0\\ 0 & \beta_{2}(\theta, p_{cum}) + T \end{bmatrix} + \underline{\underline{O}} \begin{bmatrix} \beta_{1}(\theta, p_{cum}) + T & 0\\ 0 & \beta_{2}(\theta, p_{cum}) + T \end{bmatrix} + \underline{\underline{O}} \begin{bmatrix} \beta_{1}(\theta, p_{cum}) + T & 0\\ 0 & \beta_{2}(\theta, p_{cum}) + T \end{bmatrix} + \underline{\underline{O}} \begin{bmatrix} \beta_{1}(\theta, p_{cum}) + T & 0\\ 0 & \beta_{2}(\theta, p_{cum}) + T \end{bmatrix} + \underline{D} \begin{bmatrix} \beta_{1}(\theta, p_{cum}) + T & 0\\ 0 & \beta_{2}(\theta, p_{cum}) + T \end{bmatrix} + \underline{D} \begin{bmatrix} \beta_{1}(\theta, p_{cum}) + T & 0\\ 0 & \beta_{2}(\theta, p_{cum}) + T \end{bmatrix} + \underline{D} \begin{bmatrix} \beta_{1}(\theta, p_{cum}) + T & 0\\ 0 & \beta_{2}(\theta, p_{cum}) + T \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \underline{D} \begin{bmatrix} \beta_{1}(\theta, p_{cum}) + T & 0\\ 0 & \beta_{2}(\theta, p_{cum}) + T \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \underline{D} \begin{bmatrix} \beta_{1}(\theta, p_{cum}) + T & 0\\ 0 & \beta_{2}(\theta, p_{cum}) + T \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \underline{D} \begin{bmatrix} \beta_{1}(\theta, p_{cum}) + T & 0\\ 0 & \beta_{2}(\theta, p_{cum}) + T \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \underline{D} \begin{bmatrix} \beta_{1}(\theta, p_{cum}) + T & 0\\ 0 & \beta_{2}(\theta, p_{cum}) + T \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \underline{D} \begin{bmatrix} \beta_{1}(\theta, p_{cu$$

et det $\begin{pmatrix} {}^{t}\underline{\overline{E}},\underline{\overline{E}} \end{pmatrix} = 1$, T vérifie l'équation :

$$f(T) = (\beta_1 + T)(\beta_2 + T)(\beta_3 + T) = 1$$
(4.3)

Or, à partir de l'équation (4.2), on peut calculer trois termes suivants :

$$\beta_{1} + \beta_{2} + \beta_{3} = 0$$

$$\beta_{1}\beta_{2} + \beta_{1}\beta_{2} + \beta_{1}\beta_{2} = \frac{(\beta_{1} + \beta_{2} + \beta_{3})^{2} - (\beta_{1}^{2} + \beta_{2}^{2} + \beta_{3}^{2})}{2} = -\frac{1}{3}\frac{k^{2}(p_{cum})}{\mu_{0}^{2}} \qquad (4.4)$$

$$\beta_{1}\beta_{2}\beta_{3} = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\frac{k(p_{cum})}{\mu_{0}}\right)^{3}\cos(3\theta)$$

Donc, on peut réécrire le trinôme en T :

$$f(T) = (\beta_1 + T)(\beta_2 + T)(\beta_3 + T) - 1 = T^3 - 3T \left(\frac{1}{3}\frac{k(p_{cum})}{\mu_0}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\frac{k(p_{cum})}{\mu_0}\right)^3 \cos(3\theta) - 1 \quad (4.5)$$

f(T) est un polynôme de degré 3 dont la dérivée admet $\pm \frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0}$ comme racine.

Or, $(\beta_3 + T)$ est une valeur propre de $\overline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}}$ donc $(\beta_3 + T) > 0$.

Comme $\beta_3 \leq -\frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0}, T \geq \frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0}.$ Pour $T \geq \frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0}, f(T)$ est croissante et $f\left(\frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0}\right) < 0.$

Le polynôme f(T) n'admet donc qu'une racine pour $T \ge \frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0}$.

La valeur de T est donc la plus grande racine de f(T). Elle est donnée analytiquement par les formules de Cardan.

Nous la noterons $T(\theta, p_{cum})$.

Ainsi <u>dans la zone en cours d'évolution plastique</u> il existe, en chaque point, un tenseur orthogonal \underline{O} , une valeur de $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ et une valeur de p_{cum} tels que

$$\underline{\underline{E}} = J^{\frac{1}{3}} \underline{\underline{O}}. \begin{bmatrix} \left(\beta_{1}\left(\theta, p_{cum}\right) + T\left(\theta, p_{cum}\right)\right)^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\beta_{2}\left(\theta, p_{cum}\right) + T\left(\theta, p_{cum}\right)\right)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\beta_{3}\left(\theta, p_{cum}\right) + T\left(\theta, p_{cum}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}. \overset{'}{\underline{\underline{O}}}$$

Avec

$$J = \det\left(\underline{\underline{F}}\right)$$

$$\beta_{1}(\theta, p_{cum}) = \frac{2}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_{0}} \cos(\theta)$$
$$\beta_{2}(\theta, p_{cum}) = \frac{2}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_{0}} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$
$$\beta_{3}(\theta, p_{cum}) = \frac{2}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_{0}} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

et $T(\theta, p_{cum})$ la plus grande des racines de :

$$T^{3} - 3T \left(\frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_{0}}\right)^{2} + 2 \left(\frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_{0}}\right)^{3} \cos(3\theta) - 1 = 0$$
(4.6)

Comme $\frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0}$ est petit, cette racine est proche de 1 et vaut au troisième ordre en $\frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0}$

$$T \approx 1 + \left(\frac{1}{3}\frac{k(p_{cum})}{\mu_0}\right)^2 \left[1 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\frac{k(p_{cum})}{\mu_0}\right)\cos(3\theta)\right]$$

Donc, $T \approx 1$ au premier ordre en $\frac{1}{3}\frac{k(p_{cum})}{\mu_0}$.

Pour ces valeurs de $\underline{\underline{E}}$ la contrainte plastique est sur la frontière du domaine de plasticité, <u>par</u> <u>construction</u>.

Dans la suite nous noterons $\gamma_i(\theta, p_{cum}) = (\beta_i(\theta, p_{cum}) + T(\theta, p_{cum}))^{\frac{1}{2}}$

$$\left(\gamma_{1}\left(\theta, p_{cum}\right)\gamma_{2}\left(\theta, p_{cum}\right)\gamma_{3}\left(\theta, p_{cum}\right) = 1\right)$$
Au premier ordre en $\frac{1}{3}\frac{k\left(p_{cum}\right)}{\mu_{0}}$ on a :

$$\gamma_{1}\left(\theta, p_{cum}\right) = 1 + \frac{1}{3}\frac{k\left(p_{cum}\right)}{\mu_{0}}\cos\left(\theta\right)$$

$$\gamma_{2}\left(\theta, p_{cum}\right) = 1 + \frac{1}{3}\frac{k\left(p_{cum}\right)}{\mu_{0}}\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\gamma_{3}\left(\theta, p_{cum}\right) = 1 + \frac{1}{3}\frac{k\left(p_{cum}\right)}{\mu_{0}}\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

4.2. Détermination des grandeurs θ et p_{cum} si la transformation est connue

Nous supposons donc ici que la transformation $\underline{\Phi}(\underline{X},t)$ dans le voisinage d'une particule \underline{X} en cours d'évolution plastique est connue.

Le gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)$, ainsi que $\underline{\underline{\dot{F}}}(\underline{X},t)$ et $J(\underline{X},t) = \det(\underline{\underline{F}}(\underline{X},t))$ sont donc, aussi connus.

Nous savons alors qu'il existe en chaque point \underline{X} un tenseur orthogonal \underline{Q} , une valeur de $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, une valeur de p_{cum} et un tenseur \underline{P} tels que :

$$\underline{\underline{F}} = J^{\frac{1}{3}} \underline{\underline{O}} \begin{bmatrix} \gamma_1(\theta, p_{cum}) & 0 & 0\\ 0 & \gamma_2(\theta, p_{cum}) & 0\\ 0 & 0 & \gamma_3(\theta, p_{cum}) \end{bmatrix} \stackrel{!}{\underline{O}} \underline{\underline{P}}$$
(4.7)

Nous souhaitons déterminer $\underline{\underline{O}}$, θ , p_{cum} et $\underline{\underline{P}}$.

Pour cela donnons une expression de $\underline{\underline{\dot{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}$ en utilisant une décomposition de $\underline{\underline{\dot{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}$ en sa partie antisymétrique $\underline{\underline{\Omega}}^{p}$ et sa partie symétrique $\underline{\underline{d}}^{p}$

$$\begin{split} & \underline{\dot{F}} \underbrace{\underline{F}}^{-1} = \frac{1}{3} \underbrace{\dot{j}}_{J} \underbrace{\underline{I}} + \underline{\dot{\Theta}} \underbrace{\underline{O}}^{-1} + \underline{O}_{\cdot} \left[\begin{array}{c} \frac{\dot{\gamma}_{1}(\theta, p_{cum})}{\gamma_{1}(\theta, p_{cum})} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{\gamma}_{2}(\theta, p_{cum})}{\gamma_{2}(\theta, p_{cum})} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{\gamma}_{3}(\theta, p_{cum})}{\gamma_{3}(\theta, p_{cum})} \end{array} \right] \cdot \underbrace{\dot{O}}_{\cdot} \underbrace{\underline{O}}_{\cdot} \underbrace{\underbrace{\left[\begin{array}{c} \gamma_{1}(\theta, p_{cum}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{\gamma}_{3}(\theta, p_{cum})}{\gamma_{3}(\theta, p_{cum})} \\ 0 & 0 & \gamma_{2}(\theta, p_{cum}) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{3}(\theta, p_{cum}) \end{array} \right] \cdot \underbrace{\dot{O}}_{\cdot} \underbrace{\underline{O}}_{\cdot} \underbrace{\left[\begin{array}{c} \gamma_{1}^{-1}(\theta, p_{cum}) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{2}^{-1}(\theta, p_{cum}) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{3}^{-1}(\theta, p_{cum}) \end{array} \right] \cdot \underbrace{\dot{O}}_{\cdot} \underbrace{\underline{O}}_{\cdot} \underbrace{\left[\begin{array}{c} \gamma_{1}(\theta, p_{cum}) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{2}^{-1}(\theta, p_{cum}) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{3}^{-1}(\theta, p_{cum}) \end{array} \right] \cdot \underbrace{\dot{O}}_{\cdot} \underbrace{\underline{O}}_{\cdot} \underbrace{\left[\begin{array}{c} \gamma_{1}^{-1}(\theta, p_{cum}) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{2}^{-1}(\theta, p_{cum}) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{3}^{-1}(\theta, p_{cum}) \end{array} \right] \cdot \underbrace{\dot{O}}_{\cdot} \underbrace{\underline{O}}_{\cdot} \underbrace{\left[\begin{array}{c} \gamma_{1}(\theta, p_{cum}) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{2}^{-1}(\theta, p_{cum}) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{3}^{-1}(\theta, p_{cum}) \end{array} \right] \cdot \underbrace{\dot{O}}_{\cdot} \underbrace{\underline{O}}_{\cdot} \underbrace{\underline{O}}_{\cdot} \underbrace{\left[\begin{array}{c} \gamma_{1}(\theta, p_{cum}) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{2}^{-1}(\theta, p_{cum}) & 0 \\ 0 & \gamma_{3}^{-1}(\theta, p_{cum}) \end{array} \right] \cdot \underbrace{\dot{O}}_{\cdot} \underbrace{\underline{O}}_{\cdot} \underbrace{\underline{O}$$

Ainsi $\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}$ comprend 6 termes dans l'expression ci-dessus.

Nous allons nous intéresser à $\left(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}\right)_{sym}^{dev}$, la partie symétrique déviatorique de $\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}$. Nous verrons plus loin pourquoi.

Le premier est un tenseur isotrope. Le second est un tenseur antisymétrique. Comme $\gamma_i(\theta, p_{cum}) \approx 1$, les quatrième et cinquième termes sont approximativement antisymétriques au premier ordre.

Seuls les troisième et sixième termes vont donc participer à l'expression de $\left(\underline{\dot{F}} \cdot \underline{F}^{-1}\right)_{sym}^{dev}$

La loi d'écoulement plastique s'écrit :

$$\underline{\underline{d}}^{p} = \frac{3}{2} \dot{p}_{cum} \frac{\mu_{0}}{k(p_{cum})} \underline{\underline{D}} = \frac{3}{2} \dot{p}_{cum} \frac{\mu_{0}}{k(p_{cum})} \underline{\underline{Q}}. \begin{bmatrix} \beta_{1}(\theta, p_{cum}) & 0 & 0\\ 0 & \beta_{2}(\theta, p_{cum}) & 0\\ 0 & 0 & \beta_{3}(\theta, p_{cum}) \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{Q}} = (4.8)$$

Ce qui se réécrit en tenant compte du fait que $\beta_1(\theta, p_{cum}) = \frac{2}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \cos(\theta),...$

$$\underline{d}^{p} = \dot{p}_{cum}\underline{Q}.\begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & 0\\ 0 & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & 0\\ 0 & 0 & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}.^{t}\underline{Q}$$
(4.9)
Notons que $\frac{\dot{\gamma}_{1}(\theta, p_{cum})}{\gamma_{1}(\theta, p_{cum})} + \frac{\dot{\gamma}_{2}(\theta, p_{cum})}{\gamma_{2}(\theta, p_{cum})} + \frac{\dot{\gamma}_{3}(\theta, p_{cum})}{\gamma_{3}(\theta, p_{cum})} = 0$

Ainsi la partie symétrique déviatorique de $\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}$ s'écrit au premier ordre :

$$\left(\underline{\dot{F}} \cdot \underline{F}^{-1}\right)_{sym}^{d\acute{ev}} = \underline{\underline{O}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\dot{\gamma}_1}{\gamma_1} + \dot{p}_{cum} \cos\left(\theta\right) & 0 & 0\\ 0 & \frac{\dot{\gamma}_2}{\gamma_2} + \dot{p}_{cum} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & 0\\ 0 & 0 & \frac{\dot{\gamma}_3}{\gamma_3} + \dot{p}_{cum} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{O}} \quad (4.10)$$

La diagonalisation de $\left(\underline{\dot{F}} \cdot \underline{F}^{-1}\right)_{sym}^{dev}$ va nous donner l'information que nous recherchons. Tout d'abord, elle permet de déterminer le tenseur orthogonal \underline{O} .

Ensuite les valeurs propres de $\left(\underline{\dot{F}} \cdot \underline{F}^{-1}\right)_{sym}^{d\acute{e}v}$ permettent d'établir deux équations linéaires portant sur $\dot{\theta}$ et \dot{p}_{cum} conduisant à une expression analytique de $\dot{\theta}$ et \dot{p}_{cum} en fonction de θ , p_{cum} et des valeurs propres de $\left(\underline{\dot{F}} \cdot \underline{F}^{-1}\right)_{sym}^{d\acute{e}v}$.

Il est ainsi possible de faire une intégration semi analytique pour déterminer θ et p_{cum} . Ceci détermine :

$$\underline{\underline{E}} = J^{\frac{1}{3}} \underline{\underline{O}}. \begin{bmatrix} \left(\beta_{1}\left(\theta, p_{cum}\right) + T\left(\theta, p_{cum}\right)\right)^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\beta_{2}\left(\theta, p_{cum}\right) + T\left(\theta, p_{cum}\right)\right)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\beta_{3}\left(\theta, p_{cum}\right) + T\left(\theta, p_{cum}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{O}} \quad (4.11)$$

donc $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{E}}^{-1} \cdot \underline{\underline{F}}$.

Etablissons les équations analytiques que doivent vérifier $\dot{\theta}$ et \dot{p}_{cum} .

Notons λ_1 , λ_2 , λ_3 les trois valeurs propres de $\left(\underline{\underline{\dot{F}}}.\underline{\underline{F}}^{-1}\right)_{sym}^{d\acute{e}v}$

Seules deux équations sont indépendantes car $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0)$

$$\lambda_{1} = \frac{\dot{\gamma}_{1}}{\gamma_{1}} + \dot{p}_{cum} \cos\left(\theta\right)$$

$$\lambda_{2} = \frac{\dot{\gamma}_{2}}{\gamma_{2}} + \dot{p}_{cum} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$
(4.12)

Rappelons que $\gamma_i(\theta, p_{cum}) = (\beta_i(\theta, p_{cum}) + T(\theta, p_{cum}))^{\frac{1}{2}}$, donc:

$$\frac{\gamma_{i}}{\gamma_{i}} = \frac{1}{2} \frac{\beta_{i}(\theta, p_{cum}) + T(\theta, p_{cum})}{\beta_{i}(\theta, p_{cum}) + T(\theta, p_{cum})}$$
(4.13)

Où :

L'équation

permet de déterminer :

4.3. Application de la nouvelle écriture dans le cas de compression plane Channel Die

La compression plane Channel Die ressemble beaucoup au processus de laminage. Pour les deux processus, on compresse le matériau dans une direction et on le laisse s'écouler dans une autre direction. Donc, dans ce paragraphe, nous étudions le test Channel Die dans une évolution élastoplastique (avec écrouissage) avec la nouvelle écriture du champ de transformation.

Généralement le modèle de comportement adopté pour étudier ce problème est un modèle rigide plastique. Or le point le plus intéressant dans cet exercice est l'élargissement de l'éprouvette après relâchement de la contrainte. C'est en effet une manière simplifiée d'étudier la variation de largeur d'une bande en sortie de la cage de laminage. Pour cette étude, il est nécessaire de tenir compte de l'élasticité dans le modèle élastoplastique. C'est ce que nous allons faire ici pour améliorer les approches habituelles.

4.3.1. Description du test Channel Die

Figure 4-1 : Test Channel Die

Considérons un repère orthonormé $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ et supposons que la « compression » est effectuée suivant \underline{e}_3 sur une plaque rigide (en noir) au-dessus de l'échantillon. La direction suivant \underline{e}_1 est libre et la direction suivant \underline{e}_2 est fixée par deux cloisons rigides. Les contacts entre l'échantillon et les cloisons, sont des contacts sans frottement. Donc, dans ce cas, nous pouvons exprimer le champ de transformation sous la forme :

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} F_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & F_3(t) \end{bmatrix}$$

Avec $F_3(t)$ connu dans la direction \underline{e}_3 . De plus, le champ de contrainte peut s'écrire :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

L'objectif de cette étude est de tracer les contraintes , en fonction de

Ou encore :

$$2\overline{E}_{1}^{2} + \left(-\overline{E}_{3}^{2}\right) = J^{-\frac{2}{3}} - 3\frac{k_{0}}{\mu_{0}}J(J-1)$$
(4.18)

De plus, $\overline{E}_1 \overline{E}_3 = J^{\frac{1}{3}}$ ou encore $2\overline{E}_1^2 \left(-\overline{E}_3^2\right) = -2J^{\frac{2}{3}}$

Donc, $2\overline{E}_1^2$, $-\overline{E}_3^2$ sont les deux solutions de l'équation trinomiale dont on connait la somme et le produit :

$$y^{2} - \left(J^{-\frac{2}{3}} - 3\frac{k_{0}}{\mu_{0}}J(J-1)\right)y - 2J^{\frac{2}{3}} = 0$$
(4.19)

Comme $2\overline{E}_1^2$ positif et $-\overline{E}_3^2$ négatif, on peut déduire facilement ces valeurs et ensuite les valeurs de \overline{E}_1 , \overline{E}_3 comme ci-dessous :

$$\overline{E}_{1} = \frac{1}{2} \sqrt{J^{-\frac{2}{3}} - 3\frac{k_{0}}{\mu_{0}}J(J-1) + \sqrt{\left(J^{-\frac{2}{3}} - 3\frac{k_{0}}{\mu_{0}}J(J-1)\right)^{2} + 8J^{\frac{2}{3}}}}$$

$$\overline{E}_{3} = \sqrt{\frac{\sqrt{\left(J^{-\frac{2}{3}} - 3\frac{k_{0}}{\mu_{0}}J(J-1)\right)^{2} + 8J^{\frac{2}{3}} - J^{-\frac{2}{3}} + 3\frac{k_{0}}{\mu_{0}}J(J-1)}{2}}$$

$$(4.20)$$

A l'aide $\overline{E}_1(J)$, $\overline{E}_3(J)$, nous pouvons aussi exprimer les autres paramètres en fonction de . Par exemple :

$$F_{3} = J^{\frac{1}{3}} \overline{E}_{3} = J^{-\frac{1}{3}} \sqrt{\sqrt{\left(J^{-\frac{2}{3}} - 3\frac{k_{0}}{\mu_{0}}J(J-1)\right)^{2} + 8J^{\frac{2}{3}}} - J^{-\frac{2}{3}} - 3\frac{k_{0}}{\mu_{0}}J(J-1)}{2}}$$

$$\sigma_{2} = \frac{\mu_{0}}{J} \left(\frac{2}{3\overline{E}_{1}^{2}\overline{E}_{3}^{2}} - \frac{1}{3}\overline{E}_{1}^{2} - \frac{1}{3}\overline{E}_{3}^{2}}\right) + k_{0}(J-1)$$

$$\sigma_{3} = \frac{\mu_{0}}{J} \left(\frac{2}{3}\overline{E}_{3}^{2} - \frac{1}{3\overline{E}_{1}^{2}\overline{E}_{3}^{2}} - \frac{1}{3}\overline{E}_{1}^{2} -$$

Donc, on peut tracer , en fonction de $\ln(F_3)$ à l'aide de ces expressions paramétrées par décroissant à partir de 1, pendant cette phase élastique.

4.3.3. La fin de la première phase élastique

Le tenseur de contrainte $\underline{\psi}^{d}_{\text{Re}l}$ est un tenseur fonction de . On appelle J^{el} la première valeur de J qui permet de vérifier le critère d'élasticité

$$\underline{\underline{\psi}}^{d}_{\mathrm{Re}l}:\underline{\underline{\psi}}^{d}_{\mathrm{Re}l}-\frac{2}{3}\sigma_{0}^{2}=0$$

Pour J décroissant à partir de J^{el} , on entre dans la phase plastique.

4.3.4. Dans la phase plastique

Dans cette phase, nous avons toujours le tenseur de transformation totale et le tenseur de contrainte sous forme

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} F_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & F_3(t) \end{bmatrix}, \ \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Notons le tenseur de transformation élastique et le tenseur de transformation plastique comme ci-dessous

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0\\ 0 & E_2 & 0\\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix}, \ \underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0\\ 0 & p_2 & 0\\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix} \text{ avec } p_1 p_2 p_3 = 1$$

Comme dans le chapitre précédant, avec la nouvelle écriture du champ de transformation, on peut exprimer le tenseur $\underline{\underline{E}}$ en fonction de J, θ, p_{cum} avec $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$

$$\underline{\underline{E}} = J^{\frac{1}{3}} \begin{bmatrix} \gamma_1(\theta, p_{cum}) & 0 & 0\\ 0 & \gamma_2(\theta, p_{cum}) & 0\\ 0 & 0 & \gamma_3(\theta, p_{cum}) \end{bmatrix}$$

Où $\gamma_1(\theta, p_{cum}) = 1 + \frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \cos(\theta)$
 $\gamma_2(\theta, p_{cum}) = 1 + \frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$
 $\gamma_3(\theta, p_{cum}) = 1 + \frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$
Done on réécrit explicitement :

Donc, on réécrit explicitement :

$$\begin{cases} E_{1}(\theta, p_{cum}, J) = J^{\frac{1}{3}} \left[1 + \frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_{0}} \cos(\theta) \right] \\ E_{2}(\theta, p_{cum}, J) = J^{\frac{1}{3}} \left[1 + \frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_{0}} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \right] \\ E_{3}(\theta, p_{cum}, J) = J^{\frac{1}{3}} \left[1 + \frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_{0}} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \end{cases}$$
(4.22)

134

De plus, à partir de la relation $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{EP}}$, on déduit $p_2 = \frac{1}{E_2}$, $p_3 = \frac{F_3}{E_3}$, prenons le logarithme et ensuite dérivons, on a :

$$\frac{\dot{p}_2}{p_2} = -\frac{\dot{E}_2}{E_2} , \quad \frac{\dot{p}_3}{p_3} = \frac{\dot{F}_3}{F_3} - \frac{\dot{E}_3}{E_3}$$

En remplaçant l'expression de $\underline{\underline{E}}$ dans le comportement Néo-Hookien

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\underline{\mu}_0}{J^{\frac{5}{3}}} \underline{\underline{E}}^{t} \underline{\underline{E}} + \left(k_0 \left(J - 1 \right) - \frac{\underline{\mu}_0}{J^{\frac{5}{3}}} \frac{tr\left(\underline{\underline{E}}^{t}, \underline{\underline{E}}\right)}{3} \right) \underline{\underline{I}}$$

On obtient :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mu_0 J^{-1} \begin{bmatrix} \gamma_1^2(\theta, p_{cum}) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2^2(\theta, p_{cum}) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3^2(\theta, p_{cum}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_0 (J-1) - \frac{1}{3} \mu_0 J^{-1} (\gamma_1^2(\theta, p_{cum}) + \gamma_2^2(\theta, p_{cum}) + \gamma_3^2(\theta, p_{cum})) \end{bmatrix} \underline{I}$$
(4.23)

Comme $\sigma_{11} = 0$, on peut déduire :

$$\mu_{0}J^{-1}\gamma_{1}^{2}(\theta, p_{cum}) + k_{0}(J-1) - \frac{1}{3}\mu_{0}J^{-1}(\gamma_{2}^{2}(\theta, p_{cum}) + \gamma_{3}^{2}(\theta, p_{cum}) + \gamma_{1}^{2}(\theta, p_{cum})) = 0$$

Ou encore :

$$J^{2} - J - \frac{1}{3} \frac{\mu_{0}}{k_{0}} \left(\gamma_{2}^{2} \left(\theta, p_{cum}\right) + \gamma_{3}^{2} \left(\theta, p_{cum}\right) - 2\gamma_{1}^{2} \left(\theta, p_{cum}\right) \right)$$
(4.24)

La variation de volume J est une valeur positive et proche de 1, donc, J peut être exprimé en fonction de θ , p_{cum} :

$$J(\theta, p_{cum}) = \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{3} \frac{\mu_0}{k_0} (\gamma_2^2(\theta, p_{cum}) + \gamma_3^2(\theta, p_{cum}) - 2\gamma_1^2(\theta, p_{cum}))}}{2}$$
(4.25)

Avec cette expression, nous pouvons calculer la dérivée de la variation de volume J en fonction de temps

$$\dot{J} = \frac{\partial J(\theta, p_{cum})}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial J(\theta, p_{cum})}{\partial p_{cum}} \dot{p}_{cum}$$

$$O\dot{u} : \frac{\partial J(\theta, p_{cum})}{\partial \theta} = \frac{2}{3} \frac{\mu_0}{k_0} \frac{\left(\gamma_2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial \theta} + \gamma_3 \frac{\partial \gamma_3}{\partial \theta} - 2\gamma_1 \frac{\partial \gamma_3}{\partial \theta}\right)}{\sqrt{1 + \frac{4}{3} \frac{\mu_0}{k_0} \left(\gamma_2^2(\theta, p_{cum}) + \gamma_3^2(\theta, p_{cum}) - 2\gamma_1^2(\theta, p_{cum})\right)}}$$

135

$$\frac{\partial J(\theta, p_{cum})}{\partial p_{cum}} = \frac{2}{3} \frac{\mu_0}{k_0} \frac{\left(\gamma_2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial p_{cum}} + \gamma_3 \frac{\partial \gamma_3}{\partial p_{cum}} - 2\gamma_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial p_{cum}}\right)}{\sqrt{1 + \frac{4}{3} \frac{\mu_0}{k_0} \left(\gamma_2^2(\theta, p_{cum}) + \gamma_3^2(\theta, p_{cum}) - 2\gamma_1^2(\theta, p_{cum})\right)}}$$

A l'aide des expressions ci-dessus, on peut réécrire $\frac{\dot{p}_2}{p_2}$, $\frac{\dot{p}_3}{p_3}$ en fonction de (θ, p_{cum})

$$\frac{\dot{p}_2}{p_2}(\theta, p_{cum}) = -\frac{\dot{E}_2}{E_2} = -\frac{1}{E_2} \left(\frac{\partial E_2}{\partial J} \dot{J} + \frac{\partial E_2}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial E_2}{\partial p_{cum}} \dot{p}_{cum} \right)$$
$$\frac{\dot{p}_3}{p_3}(\theta, p_{cum}) = \frac{\dot{F}_3}{F_3} - \frac{\dot{E}_3}{E_3} = \frac{\dot{F}_3}{F_3} - \frac{1}{E_3} \left(\frac{\partial E_3}{\partial J} \dot{J} + \frac{\partial E_3}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial E_3}{\partial p_{cum}} \dot{p}_{cum} \right)$$

De plus, comme dans le paragraphe précédent (équation (4.8)), le taux de déformation plastique s'écrit :

$$\underline{\underline{d}}^{p} = \dot{p}_{cum} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

Ou encore

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{1} & 0 & 0 \\ p_{1} & & \\ 0 & \frac{\dot{p}_{2}}{p_{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{p}_{3}}{p_{3}} \end{bmatrix} = \dot{p}_{cum} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

Avec ces deux expressions de $\frac{\dot{p}_2}{p_2}$, $\frac{\dot{p}_3}{p_3}$, on en déduit les équations:

$$\begin{cases} -\frac{1}{E_2} \left(\frac{\partial E_2}{\partial J} \dot{J} + \frac{\partial E_2}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial E_2}{\partial p_{cum}} \dot{p}_{cum} \right) = \dot{p}_{cum} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{\dot{F}_3}{F_3} - \frac{1}{E_3} \left(\frac{\partial E_3}{\partial J} \dot{J} + \frac{\partial E_3}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial E_3}{\partial p_{cum}} \dot{p}_{cum} \right) = \dot{p}_{cum} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Ou encore :

$$\begin{cases} \dot{p}_{cum} \left(\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{E_2} \frac{\partial E_2}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial p_{cum}} + \frac{1}{E_2} \frac{\partial E_2}{\partial p_{cum}} \right) + \frac{1}{E_2} \left(\frac{\partial E_2}{\partial \theta} + \frac{\partial E_2}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} = 0 \\ \dot{p}_{cum} \left(\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{E_3} \frac{\partial E_3}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial p_{cum}} + \frac{1}{E_3} \frac{\partial E_3}{\partial p_{cum}} \right) + \frac{1}{E_3} \left(\frac{\partial E_3}{\partial \theta} + \frac{\partial E_3}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} = \frac{\dot{F}_3}{F_3} \end{cases}$$

Enfin, on peut exprimer les paramètres \dot{p}_{cum} et $\dot{\theta}$ en fonction de (p_{cum}, θ) :

$$\begin{vmatrix} \dot{p}_{cum} \left(p_{cum}, \theta \right) \\ = \frac{\dot{F}_{3}}{F_{3}} \frac{1}{E_{2}} \left(\frac{\partial E_{2}}{\partial \theta} + \frac{\partial E_{2}}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \theta} \right) \begin{bmatrix} -\frac{1}{E_{3}} \left(\frac{\partial E_{3}}{\partial \theta} + \frac{\partial E_{3}}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \theta} \right) \left(\cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{1}{E_{2}} \frac{\partial E_{2}}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial p_{cum}} + \frac{1}{E_{2}} \frac{\partial E_{2}}{\partial p_{cum}} \right) \\ + \frac{1}{E_{2}} \left(\frac{\partial E_{2}}{\partial \theta} + \frac{\partial E_{2}}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \theta} \right) \left(\cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{1}{E_{3}} \frac{\partial E_{3}}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial p_{cum}} + \frac{1}{E_{3}} \frac{\partial E_{3}}{\partial p_{cum}} \right) \end{bmatrix}^{-1} \\ \dot{\theta} \left(p_{cum}, \theta \right) \\ = \frac{\dot{F}_{3}}{F_{3}} \left(\cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{1}{E_{2}} \frac{\partial E_{2}}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial p_{cum}} + \frac{1}{E_{2}} \frac{\partial E_{2}}{\partial p_{cum}} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{3}} \left(\frac{\partial E_{3}}{\partial \theta} + \frac{\partial E_{3}}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \theta} \right) \left(\cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{1}{E_{2}} \frac{\partial E_{2}}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial p_{cum}} + \frac{1}{E_{2}} \frac{\partial E_{2}}{\partial p_{cum}} \right) \\ - \frac{1}{E_{2}} \left(\frac{\partial E_{2}}{\partial \theta} + \frac{\partial E_{3}}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \theta} \right) \left(\cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{1}{E_{2}} \frac{\partial E_{2}}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial p_{cum}} + \frac{1}{E_{2}} \frac{\partial E_{2}}{\partial p_{cum}} \right) \end{bmatrix}^{-1} \\ (4.26)$$

En résumé, dans la phase plastique, on commence avec

$$p_{cum}(t = t^{el}) = 0$$

$$\theta(t = t^{el}) = \operatorname{acos}\left((J^{el})^{-\frac{2}{3}} \frac{3}{2} \frac{\mu_0}{\sigma_0} \left(\frac{2}{3} E_1^{el} - \frac{1}{3} E_3^{el} - \frac{1}{3} \right) \right)$$

Les formules $\dot{p}_{cum}(p_{cum},\theta), \dot{\theta}(p_{cum},\theta)$ ci-dessus nous permettent de déterminer p_{cum},θ en fonction du temps.

Donc, on peut calculer tous les autres paramètres grâce à p_{cum} , θ en utilisant les formules $J(\theta, p_{cum}), \underline{E}(J, \theta, p_{cum}), \underline{\sigma}(\theta, p_{cum})$ ci-dessus (équation (4.20), (4.21) et (4.23)).

4.3.5. Application numérique

Pour l'application numérique, on utilise Matlab avec les données ci-dessous

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} F_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & F_3(t) \end{bmatrix} \text{ avec } F_3(t) = 1 + \alpha_3 * t, \ \alpha_3 = -0.01$$

 $\sigma_{\scriptscriptstyle 0}$ = 600 MPa, $k_{\scriptscriptstyle 0}$ =175000 MPa, $\mu_{\scriptscriptstyle 0}$ =80769 MPa

$$k(p_{cum}) = \sigma_0 \left(1 + \alpha \left(e^{p_{cum}} - 1 \right) \right), k'(p_{cum}) = \sigma_0 \alpha e^{p_{cum}}, \ \alpha = 0.1$$

Les résultats numériques nous donnent $J^{el} = 0.9983249$ et $-\log(F_3^{el}) = 0.00127$. On voit bien que la composante $\sigma_{11} = 0$ dans Figure 4-2



Figure 4-2 : La composante de contrainte $\sigma_{_{11}}$

La composante σ_{22} (Figure 4-3) est « linéaire » dans la phase élastique et « parabolique » dans la phase plastique, elle a tendance à se stabiliser vers la valeur 350 MPa.



Figure 4-3 : La composante de contrainte $\sigma_{_{22}}$

Identiquement, la composante σ_{33} (Figure 4-4) est « linéaire » dans la phase élastique et « parabolique » dans la phase plastique, elle a tendance à se stabiliser vers la valeur 700 MPa.



Figure 4-4 : La composante de contrainte $\sigma_{_{33}}$

On dessine aussi les autres grandeurs comme $\log(F_1)$ (Figure 4-5) et la variation de volume J (Figure 4-6) en fonction de $-\log(F_3)$



Figure 4-5 : Logarithme de F_1



Figure 4-6 : La variation de volume

Nous allons présenter maintenant la composante p_2 du tenseur $\underline{\underline{P}}$ dans la Figure 4-7



Figure 4-7 : La composante p_2

Cette grandeur est la plus intéressante pour la simulation extrêmement simplifiée d'un processus de laminage à l'aide de cet essai uniforme car elle donne l'élongation dans la direction 2 de l'éprouvette une fois que les contraintes ont été relaxées. Cela correspond à la partie retour élastique faisant varier la largeur de la bande dans le processus de laminage. L'exercice ci-dessus permet donc une détermination quasi analytique de cette approximation.

4.3.6. Résultat avec Abaqus :

Afin de vérifier les résultats numériques déterminés avec Matlab dans la partie précédente, on utilise Abaqus pour modéliser le test de Channel Die et dessiner les courbes de contrainte en fonction de $-\log(F_3)$

Avec Abaqus, on utilise un échantillon qui a une hauteur de 50 unités et une largeur de 10 unités (l'unité est bien sûr quelconque) dans le cas de déformation plane. Deux plaques rigides sont appliquées sans frottement aux deux extrémités de l'échantillon. Enfin, on fixe la plaque en bas, et on applique un champ de vitesse v=0.01 unité/s sur la plaque en haut (voir la Figure 4-8)



Figure 4-8 : Modèle Abaqus

Avec ce modèle, on retrouve des courbes de contraintes en fonction de $-\log(F_3)$



Figure 4-9 : La composante de contrainte $\sigma_{_{22}}$



Figure 4-10 : La composante de contrainte $\sigma_{_{33}}$

Nous constatons que la nouvelle écriture du champ de transformation donne les résultats exactement identiques à ceux obtenus par Abaqus. Donc, dans le cas de compression plane Channel Die, nous pouvons obtenir une solution quasi analytique avec la nouvelle écriture du champ de transformation.

4.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons formulé une autre approche du problème de l'étude de l'évolution élastoplastique d'une structure à l'aide de champs auxiliaires qui permettent de reconstruire des champs physiques dont les contraintes vérifient par construction le critère de plasticité. L'application de cette approche à l'essai de compression plane qui est proche d'un processus de laminage peut nous encourager à chercher des fonctions approchées pour un processus de laminage.

Cependant en conclusion du chapitre précédent, nous avons ressenti le besoin de tenter d'écrire un principe de minimum qui permet une détermination plus commode de solutions approchées. C'est ce que nous allons entreprendre au chapitre suivant.