

Chapitre 4

FORMULATION ET ALGORITHME DE RÉOLUTION NUMÉRIQUE PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Si l'on désire prendre en compte des particularités du modèle de comportement que l'on a négligés en première analyse (dilatance, écrouissage plus sophistiqué, etc...) ou si l'on souhaite tester des cas de chargements plus complexes (creusement des tunnels par exemple), il est nécessaire de développer des méthodes numériques par éléments finis.

En effet, la méthode des éléments finis est par excellence l'outil moderne de calcul, unanimement adoptée pour sa généralité et sa facilité de programmation. Elle ne peut cependant être appliquée facilement au modèle viscoplastique avec rupture dans sa forme classique standard comportant une intégration dans le temps pour des problèmes viscoplastiques et un schéma itératif pour les problèmes de plasticité. Le traitement numérique du modèle viscoplastique avec rupture devient complexe en raison de l'évolution simultanée des déformations plastiques et viscoplastiques pendant le chargement.

Quelques auteurs se sont intéressés à ces types de problèmes numériques [Runesson&al, 1981], [Borja&Kavazandjian, 1981]. Ces auteurs ont utilisé le principe de la décomposition du tenseur des déformations irréversibles en une partie plastique et une viscoplastique pour décrire le comportement de certaines argiles de surface. Pour les premiers par exemple, l'intégration dans le temps est effectuée à l'aide d'une méthode de Runge-Kutta d'ordre 2; dans les travaux des seconds la déformation viscoplastique dépend explicitement du temps. Pour tous ces auteurs, les critères de plasticité et de viscoplasticité sont de type Cam-Clay, faisant ainsi intervenir la pression interstitielle dans le milieu.

D'autres auteurs comme [Sharifi P&Yates, 1974] , [Pifko&Levy, 1981] ou [Snyder&Bathe, 1981] ont utilisé la même décomposition pour représenter cette fois le comportement de certains aciers à très haute température. De même [Lemaître&Chaboche, 1984] se sont intéressés à cette décomposition et plus précisément d'un point de thermodynamique. [Sharifi P&Yates, 1974] utilisent une loi viscoplastique sans seuil de Norton-Odqvist pour représenter la loi de fluage dans leur décomposition du tenseur des déformations irréversibles. [Pifko&Levy, 1981] proposent une approche plus générale basée sur un schéma d'Euler explicite pour l'intégration dans le temps.

Une des difficultés majeures d'un algorithme reste toujours son implémentation pratique. L'algorithme que nous proposons dans ce chapitre s'inspire en partie des travaux de tous ces auteurs, mais plus précisément des travaux de [Snyder&Bathe, 1981] et [Lemaître&Chaboche, 1984]. Pour les premiers, l'intégration dans le temps s'effectue suivant un schéma semi-implicite d'Euler, et utilisent plutôt des critères de Von-Mises pour représenter la plasticité et la viscoplasticité. Les seconds présentent un cadre thermodynamique qui nous assure l'existence de la solution numérique. C'est aussi en nous basant sur les outils numériques de GEOMEQ91 [Bernaud, 1991] que nous avons implanté notre méthode de résolution par éléments finis qui se démarque de celle de Bathe&Snyder par les critères que nous utilisons

Le premier paragraphe de ce chapitre est consacré à la formulation générale du modèle et la détermination du multiplicateur plastique. Dans le dernier paragraphe,

nous présentons de manière détaillée l'algorithme VPR (viscoplastique avec rupture) qui a été mis au point et implanté dans GEOMECC91.

4.1 FORMULATION EN PLASTICITÉ AVEC VISCOPLASTICITÉ

4.1.1 Hypothèses générales et équations fondamentales

Rappelons que l'hypothèse fondamentale dans la formulation de notre modèle est la partition du tenseur des déformations. La déformation totale est somme de trois termes : la déformation élastique, la déformation plastique et la déformation viscoplastique.

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p + \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp} \quad (4.1)$$

Cette hypothèse permet ainsi l'utilisation des théories de la plasticité et de la viscoplasticité dans la résolution du problème d'évolution des structures avec un comportement viscoplastique avec rupture. La loi de comportement élastique s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^p - \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}) \quad (4.2)$$

$\underline{\underline{D}}$ étant le tenseur d'élasticité.

Dans le cadre de cette formulation, nous allons supposer que le matériau est standard, le potentiel plastique sera donc confondu avec la surface de charge (plastique). La partie viscoplastique du tenseur des déformations totales obéit à une règle de normalité.

La vitesse de déformation viscoplastique dérive d'un potentiel dont l'expression générale est donnée par :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp} = \frac{1}{2\eta} \langle F^{vp}(\underline{\underline{\sigma}}) \rangle^2 \quad (4.3)$$

La fonction F^{vp} représente le critère de viscoplasticité, η étant la viscosité du matériau. Les critères de viscoplasticité considérés dans le cadre des argiles raides sont ceux de Tresca ou Mohr-Coulomb.

L'expression de la vitesse de déformation viscoplastique est donnée par :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp} = \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (4.4)$$

La vitesse de déformation plastique dérive quant à elle d'un potentiel G et son expression est donnée par :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = \lambda \frac{\partial G}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad G \text{ étant le potentiel plastique.} \quad (4.5)$$

Avec $G = F^p$ critère de plasticité.

Le calcul du multiplicateur plastique λ nécessite l'utilisation de la condition de consistance pendant l'écoulement plastique

Détermination du multiplicateur plastique λ

Soient $\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^P$, $\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{VP}$, $\delta \underline{\underline{\varepsilon}}$, les vitesses de déformation plastique, viscoplastique, et totale. La loi de comportement élastique nous permet d'écrire la vitesse des contraintes sous la forme :

$$\delta \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}} : (\delta \underline{\underline{\varepsilon}} - \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^P - \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{VP}) \quad (4.6)$$

Le critère de plasticité dans le cas général peut s'écrire sous la forme suivante :

$$F^P = F^P(\underline{\underline{\sigma}}, \alpha) \quad \alpha \text{ étant le paramètre d'écrouissage}$$

En se limitant au cas des matériaux à écrouissage isotrope, la loi d'écoulement s'écrit alors :

$$\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^P = \delta \lambda \frac{\partial F^P}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (4.7)$$

$$\delta \alpha = \delta \lambda \psi(\underline{\underline{\sigma}}, \alpha) \quad \text{avec} \quad \psi(\underline{\underline{\sigma}}, \alpha) = \frac{\partial F^P}{\partial \alpha} \quad (4.8)$$

La variation de F^P s'écrit ;

$$\delta F^P = \frac{\partial F^P}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \delta \underline{\underline{\sigma}} + \frac{\partial F^P}{\partial \alpha} \cdot \delta \alpha \quad (4.9)$$

$\delta F^P = 0$ s'écrit donc, grâce à l'équation (4.6) sous la forme :

$$\frac{\partial F^P}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{D}} : (\delta \underline{\underline{\varepsilon}} - \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^P - \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{VP}) + \frac{\partial F^P}{\partial \alpha} \cdot \delta \lambda \psi(\underline{\underline{\sigma}}, \alpha) = 0 \quad (4.10)$$

Ce qui nous permet d'obtenir le multiplicateur plastique $\delta \lambda$

$$\delta \lambda = \frac{\frac{\partial F^P}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{D}} : \delta \underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{\partial F^P}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{D}} : \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}}{\frac{\partial F^P}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{D}} : \frac{\partial F^P}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} - \frac{\partial F^P}{\partial \alpha} \cdot \psi} \quad (4.11)$$

S'il n'y a pas d'écrouissage, l'expression devient:

$$\delta\lambda = \frac{\frac{\partial F^P}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : D : \delta \underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{\partial F^P}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : D : \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}}{\frac{\partial F^P}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : D : \frac{\partial F^P}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}} \quad (4.12)$$

Remarque:

Dans le cas d'un matériau non standard en viscoplasticité et sans écrouissage, les vitesses de déformations viscoplastique et plastique s'écrivent respectivement :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp} = \frac{1}{\eta} \langle F^{vp} \rangle \frac{\partial G^{vp}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = \lambda \frac{\partial F^P}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (4.13)$$

G^{vp} étant le potentiel viscoplastique.
Le multiplicateur $\delta\lambda$ devient;

$$\delta\lambda = \frac{\frac{\partial F^P}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : D : \delta \underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{\partial F^P}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : D : \frac{1}{\eta} \langle F^{vp} \rangle \frac{\partial G^{vp}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}}{\frac{\partial F^P}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : D : \frac{\partial F^P}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}} \quad (4.14)$$

4.1.2 Intégration en plasticité avec viscoplasticité

Nous exposons dans ce paragraphe le principe d'intégration numérique de la loi de comportement viscoplastique avec rupture. L'intégration utilise le principe itératif du schéma implicite de la résolution numérique classique en plasticité. En chaque point le problème est résolu incrémentalement de la manière suivante :

A partir de l'état n où toutes les grandeurs du problème sont supposées connues, l'incrément de charge se traduit par un incrément de déformation $\delta \underline{\underline{\varepsilon}}$ (solution d'un problème élastique). On pose alors :

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{\sigma}}_n + D : \delta \underline{\underline{\varepsilon}}$$

A l'état $n+1$, le trajet élastoplastique impose qu'on doit avoir $F^P(\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}) = 0$ avec :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{n+1} = \underline{\underline{\sigma}}^* - D : (\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p + \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp})$$

Un développement limité de $F(\underline{\underline{\sigma}}_{n+1})$ au premier ordre au voisinage de $\underline{\underline{\sigma}}^*$ nous donne l'expression numérique du multiplicateur plastique pour un matériau non écrouissable soit :

$$\delta\lambda = \frac{\langle F^P(\underline{\underline{\sigma}}^*) - \frac{\partial F^P}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}^*):D:\frac{\partial \Omega}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}^*) \rangle}{\frac{\partial F^P}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}^*):D:\frac{\partial F^P}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}^*)} \quad (4.15)$$

Dans le cas d'un matériau non standard, nous avons :

$$\delta\lambda = \frac{\langle F^P(\underline{\underline{\sigma}}^*) - \frac{1}{\eta} \langle F^{VP}(\underline{\underline{\sigma}}^*) \rangle \frac{\partial F^P}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}^*):D:\frac{\partial G^{VP}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}^*) \rangle}{\frac{\partial F^P}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}^*):D:\frac{\partial F^P}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}^*)} \quad (4.16)$$

Remarque:

En suivant la même démarche que celle effectuée dans le cas d'un matériau plastique par [Bernaud, 1991], les vitesses de déformation plastique peuvent être déterminées de façon explicite pour les matériaux de Von-Mises et Drucker-Prager, pour des problèmes d'évolution en déformation plane et en axisymétrie. Nous obtenons donc l'expression exacte du multiplicateur plastique.

Pour les matériaux obéissant au critère de Von Mises nous avons :

$$\delta\lambda = \frac{\langle F^P(\underline{\underline{\sigma}}^*) - \frac{2\mu b^2}{\eta} \langle F^{VP} \rangle \rangle}{2\mu b^2} \quad (4.17)$$

Pour des matériaux obéissant au critère de Drucker-Prager, nous avons;

$$\delta\lambda = \frac{\langle F^P(\underline{\underline{\sigma}}^*) - (\frac{2\mu b b_p + 9k a a_p}{\eta}) F^{VP} \rangle}{2\mu b b_p + 9k a a_p} \quad (4.18)$$

Les constantes sont définies de la façon suivante :

$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ coefficient de Lamé. E et ν étant respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau.

Soit F le critère de Drucker-Prager, il peut s'écrire sous la forme suivante :

$$F(\underline{\underline{\sigma}}) = a \operatorname{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) + b \|\underline{\underline{\sigma}}^D\| - \sigma_s, \text{ le potentiel s'écrit } G(\underline{\underline{\sigma}}) = a_p \operatorname{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) + b_p \|\underline{\underline{\sigma}}^D\|$$

$$\text{Avec } a = \frac{k-1}{3}, b = \frac{k_1}{\sqrt{6}}, a_p = \frac{k'-1}{3}, b_p = \frac{k'_1}{\sqrt{6}}$$

$k_1=2k+1$ (cône inscrit dans la pyramide de Mohr-Coulomb) ou $k_1=k+2$ (cône circonscrit).

k est le coefficient de poussée.

k' est donné par l'angle de dilatance

k'_1 a la même expression que k_1 en remplaçant k par k'

On pourra se rapporter à la thèse de Bernaud[1991] pour plus de détails.

4.2 ALGORITHME DE RÉOLUTION PAR ÉLÉMENTS FINIS

Dans le cadre de la formulation décrite au paragraphe précédent, l'algorithme de résolution par la méthode des éléments finis est basé sur le schéma semi-implicite d'Euler de la résolution numérique des équations différentielles ordinaires. A chaque pas de temps sont effectués les calculs des déplacements nodaux, et des contraintes aux points de Gauss, ainsi que les déformations plastiques et viscoplastiques aux mêmes points de Gauss [Snyder&Bathe 1981].

4.2.1 Principes et bases de résolution

La Méthode Semi-Implicite d'Euler

Considérons un système d'équations différentielles du premier ordre de la forme suivante :

$$\dot{\underline{X}} = F(\underline{X}, t) \text{ pour } t > t_0$$

$$\text{avec } \underline{X}(t_0) = \underline{X}_0$$

En supposant l'existence d'une solution approximative à l'instant t , la méthode semi-implicite d'Euler consiste à écrire le système précédent à l'instant $t+\alpha\Delta t$ avec $0 \leq \alpha \leq 1$; la formule d'Euler s'écrit [Dhatt&Touzot, 1984] alors :

$$\underline{X}(t + \Delta t) = \underline{X}(t) + \Delta t F(\underline{X}(t + \alpha\Delta t), t + \alpha\Delta t) \quad (4.19)$$

avec

$$\underline{X}(t + \alpha\Delta t) = \alpha \underline{X}(t + \Delta t) + (1 - \alpha) \underline{X}(t) \quad (4.20)$$

On retrouve la méthode classique d'Euler explicite lorsque $\alpha=0$, et la méthode d'Euler implicite lorsque $\alpha=1$; le cas $\alpha=0,5$ correspond à la méthode du trapèze lorsque le système correspondant est linéaire.

Stabilité de la Méthode Semi-Implicite

Dans l'analyse générale de la stabilité d'une méthode de résolution numérique des équations différentielles, on s'intéresse d'abord à la propagation des erreurs au cours du temps. La stabilité de la solution numérique est une des conditions nécessaires pour la précision des résultats numériques. Cependant une solution numérique bien que stable peut ne pas être précise ce qui est souvent le cas des méthodes simples.

Une condition de stabilité dans le cas d'un système linéaire d'équations différentielles peut s'écrire [Dhatt&Touzot, 1984] :

$$(1 - 2\alpha)\Delta t \lambda_{\max} \leq 2 \text{ où}$$

λ_{\max} est la plus grande valeur propre de la matrice associée au système.

Cette inégalité donne une première valeur maximale imposée au pas de temps dans la résolution numérique. Cette condition est imposée par la stabilité de la méthode de résolution numérique. Nous verrons plus loin qu'il existe une autre condition sur le pas de temps, qui sera imposée par le comportement viscoplastique du matériau.

4.2.2 Formulation par éléments finis

Dans cette partie, nous développons l'algorithme de résolution numérique du problème d'évolution de la structure dans le cadre de la méthode des éléments finis. L'algorithme ainsi décrit sera par la suite implanté dans le code de calcul par éléments finis GEOMEQ91. D'une façon générale, nous utilisons un pas de temps constant Δt et le problème revient donc de rechercher la solution numérique au temps $t + \Delta t$ connaissant celle à l'instant t .

Équations d'Équilibre et Lois de Comportement

A l'instant $t + \Delta t$, le principe des travaux virtuels appliqué à l'assemblage de la structure discrétisée par élément finis (N éléments), les équations du comportement viscoplastique avec rupture, donnent les équations sous forme vectorielle [Bathe, 1982] suivante :

$$\sum_{m=1}^N \int_{V_m} \underline{\underline{B}}^T : \underline{\underline{\sigma}}(t + \Delta t) dv = \underline{\underline{F}}(t + \Delta t) \quad (4.21)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(t + \Delta t) = \underline{\underline{D}} : (\underline{\underline{\epsilon}}(t + \Delta t) - \underline{\underline{\epsilon}}^P(t + \Delta t) - \underline{\underline{\epsilon}}^{VP}(t + \Delta t)) \quad (4.22)$$

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^P(t + \Delta t) = \lambda \frac{\partial F^P}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (4.23)$$

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^{VP}(t + \Delta t) = \frac{1}{\eta} \langle F^{VP} \rangle \frac{\partial F^{VP}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (4.24)$$

où on a

$$\underline{\underline{\epsilon}}(t + \Delta t) = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{U}}(t + \Delta t) \quad (4.25)$$

Avec les notations suivantes;

$\underline{\underline{B}}$ = matrice de transformation déplacements-déformations.

$\underline{\underline{U}}(t + \Delta t)$ = vecteur des déplacements nodaux à l'instant $t + \Delta t$

$\underline{\underline{F}}(t + \Delta t)$ = vecteur des forces nodales extérieures à l'instant $t + \Delta t$

Toutes ces équations sont valables partout dans la structure du milieu continu discrétisé. Cependant, pour des raisons de simplicité et de clarté, nous ne considérerons par la suite ces équations que sur un seul élément de volume du milieu et non plus la sommation sur tout le volume discrétisé.

En remplaçant les équations (4.25) et (4.22) dans l'équation (4.21), nous avons alors les équations suivantes:

$$\underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{U}}(t + \Delta t) = \underline{\underline{F}}(t + \Delta t) + \int_v \underline{\underline{B}}^T : \underline{\underline{D}} : (\underline{\underline{\epsilon}}^P(t + \Delta t) + \underline{\underline{\epsilon}}^{VP}(t + \Delta t)) dv \quad (4.26)$$

où

$$\underline{\underline{K}} = \int_v \underline{\underline{B}}^T : \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{B}} dv \text{ est la matrice de rigidité élastique} \quad (4.27)$$

Par la suite, on expose l'algorithme de la méthode semi-implicite d'Euler pour obtenir les déformations plastiques et viscoplastiques $\underline{\underline{\epsilon}}^P(t + \Delta t)$, $\underline{\underline{\epsilon}}^{VP}(t + \Delta t)$.

A l'instant $t + \Delta t$ en supposant connues toutes les quantités à l'instant précédent t , nous avons alors la décomposition suivante basée sur la méthode semi-implicite d'Euler :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^P(t + \Delta t) = \underline{\underline{\epsilon}}^P(t) + \Delta \underline{\underline{\epsilon}}^P \quad (4.28)$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}^{VP}(t + \Delta t) = \underline{\underline{\epsilon}}^{VP}(t) + \Delta \underline{\underline{\epsilon}}^{VP} \text{ avec} \quad (4.29)$$

$$\Delta \underline{\underline{\epsilon}}^P = \Delta t \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^P(t + \alpha \Delta t) = \Delta t \lambda \frac{\partial F^P}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(t + \alpha \Delta t) \quad (4.30)$$

$$\Delta \underline{\underline{\epsilon}}^{VP} = \Delta t \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^{VP}(t + \alpha \Delta t) = \Delta t \frac{1}{\eta} \left\langle F^{VP} \right\rangle \frac{\partial F^{VP}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(t + \alpha \Delta t) \quad (4.31)$$

Pour des raisons de simplicité et de présentation de l'algorithme de résolution, nous ne considérons dans la suite que le cas particulier $\alpha=0$, qui correspond au schéma explicite d'Euler, bien que la méthode reste valable pour toute autre valeur de α .

Les équations précédentes constituent un ensemble couplé d'équations non linéaires appliquées aux points d'intégration numérique qui sont dans le cadre d'un calcul par éléments finis des points de Gauss pour le calcul des contraintes et des déformations, et des noeuds de l'élément pour le calcul des déplacements.

4.2.3 Algorithme itératif de résolution viscoplastique avec rupture (VPR)

La résolution des systèmes non linéaires nécessite généralement l'utilisation des méthodes itératives. Pour cela, nous avons utilisé l'algorithme itératif proposé dans [Snyder&Bathe, 1981] traitant le même type de problème.

Itération i

A l'itération (i), les déformations plastiques, viscoplastiques, et totales sont supposées connues ainsi que le vecteur déplacement et les contraintes aux points d'intégration numérique, soient :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^{p(i)}(t + \Delta t), \underline{\underline{\epsilon}}^{vp(i)}(t + \Delta t), \underline{\underline{\epsilon}}^{(i)}(t + \Delta t)$$

$$\underline{\underline{U}}^{(i)}(t + \Delta t), \underline{\underline{\sigma}}^{(i)}(t + \Delta t)$$

Les valeurs initiales correspondant à l'itération i=0 sont celles de la solution à l'instant précédent t supposées connues. Celles correspondant à l'instant initial t=0 sont les valeurs de l'état initiale de la structure.

Itération i+1

Les équations suivantes nous permettent de déterminer les déformations et les contraintes aux points de Gauss de l'élément considéré, ainsi que le vecteur déplacement aux noeuds de l'élément soit :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^{p(i+1)}(t + \Delta t) = \underline{\underline{\epsilon}}^p(t) + \Delta t \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^{p(i)}(t)$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}^{vp(i+1)}(t + \Delta t) = \underline{\underline{\epsilon}}^{vp}(t) + \Delta t \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^{vp(i)}(t)$$

$$\underline{\underline{KU}}^{(i+1)}(t + \Delta t) = \underline{\underline{F}}(t + \Delta t) + \int_v \underline{\underline{B}}^T : \underline{\underline{D}} : (\underline{\underline{\epsilon}}^{p(i+1)}(t + \Delta t) + \underline{\underline{\epsilon}}^{vp(i+1)}(t + \Delta t)) dv$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}^{(i+1)}(t + \Delta t) = \underline{\underline{BU}}^{(i+1)}(t + \Delta t)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(i+1)}(t + \Delta t) = \underline{\underline{D}} : (\underline{\underline{\epsilon}}^{(i+1)}(t + \Delta t) - \underline{\underline{\epsilon}}^{p(i+1)}(t + \Delta t) - \underline{\underline{\epsilon}}^{vp(i+1)}(t + \Delta t))$$

Posons :

$$\Delta \underline{\underline{U}}^{(i+1)} = \underline{\underline{U}}^{(i+1)}(t + \Delta t) - \underline{\underline{U}}^{(i)}(t + \Delta t)$$

Le schéma ci-dessus dont les inconnues étaient :

$(\underline{\underline{\epsilon}}^{p(i+1)}, \underline{\underline{\epsilon}}^{vp(i+1)}, \underline{\underline{U}}^{(i+1)}, \underline{\underline{\sigma}}^{(i+1)})$ peut être ramené à un système dont l'inconnue $\underline{\underline{U}}^{(i+1)}$ est remplacée par $\Delta \underline{\underline{U}}^{(i+1)}$

Il s'écrit alors :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^{p(i+1)}(t + \Delta t) = \underline{\underline{\epsilon}}^p(t) + \Delta t \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^{p(i)}(t)$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}^{vp(i+1)}(t + \Delta t) = \underline{\underline{\epsilon}}^{vp}(t) + \Delta t \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^{vp(i)}(t)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(i+1)}(t + \Delta t) = \underline{\underline{D}} : (\underline{\underline{\epsilon}}^{(i)}(t + \Delta t) - \underline{\underline{\epsilon}}^{p(i+1)}(t + \Delta t) - \underline{\underline{\epsilon}}^{vp(i+1)}(t + \Delta t))$$

$$\underline{\underline{K}} \Delta \underline{\underline{U}}^{(i+1)} = \underline{\underline{F}}(t + \Delta t) - \int_v \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{\sigma}}^{(i+1)}(t + \Delta t) dv$$

Lorsque $\Delta \underline{\underline{U}} \rightarrow 0$, l'itération converge et toutes les équations sont satisfaites.

Les schémas 4.1 et 4.2 ci-dessous résument l'algorithme (VPR) de résolution viscoplastique avec rupture implanté dans le code de calcul GEOMEQ91, dans le cas où le système est résolu pour les déplacements totaux.

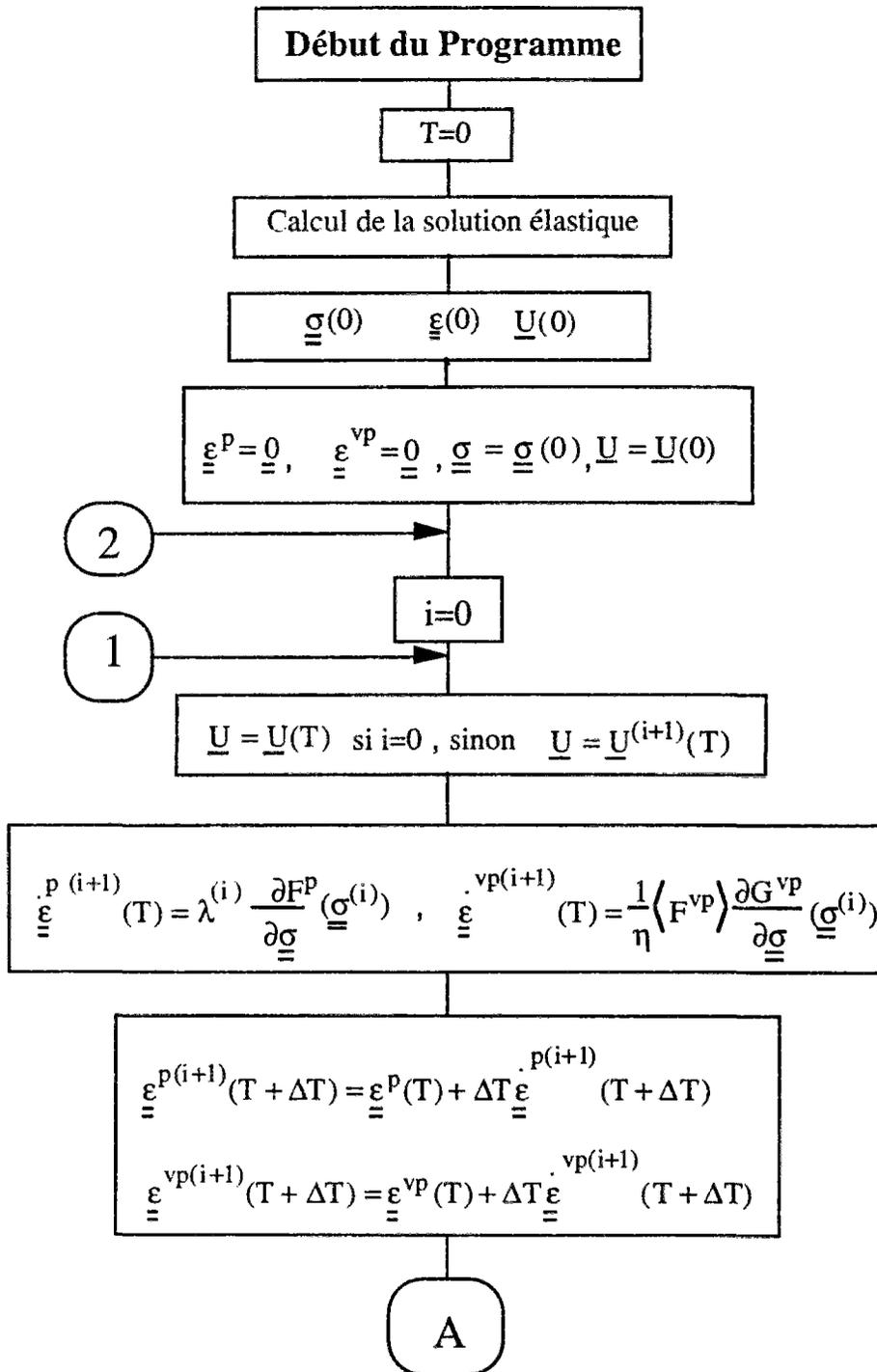


Schéma 4.1. Algorithme de résolution

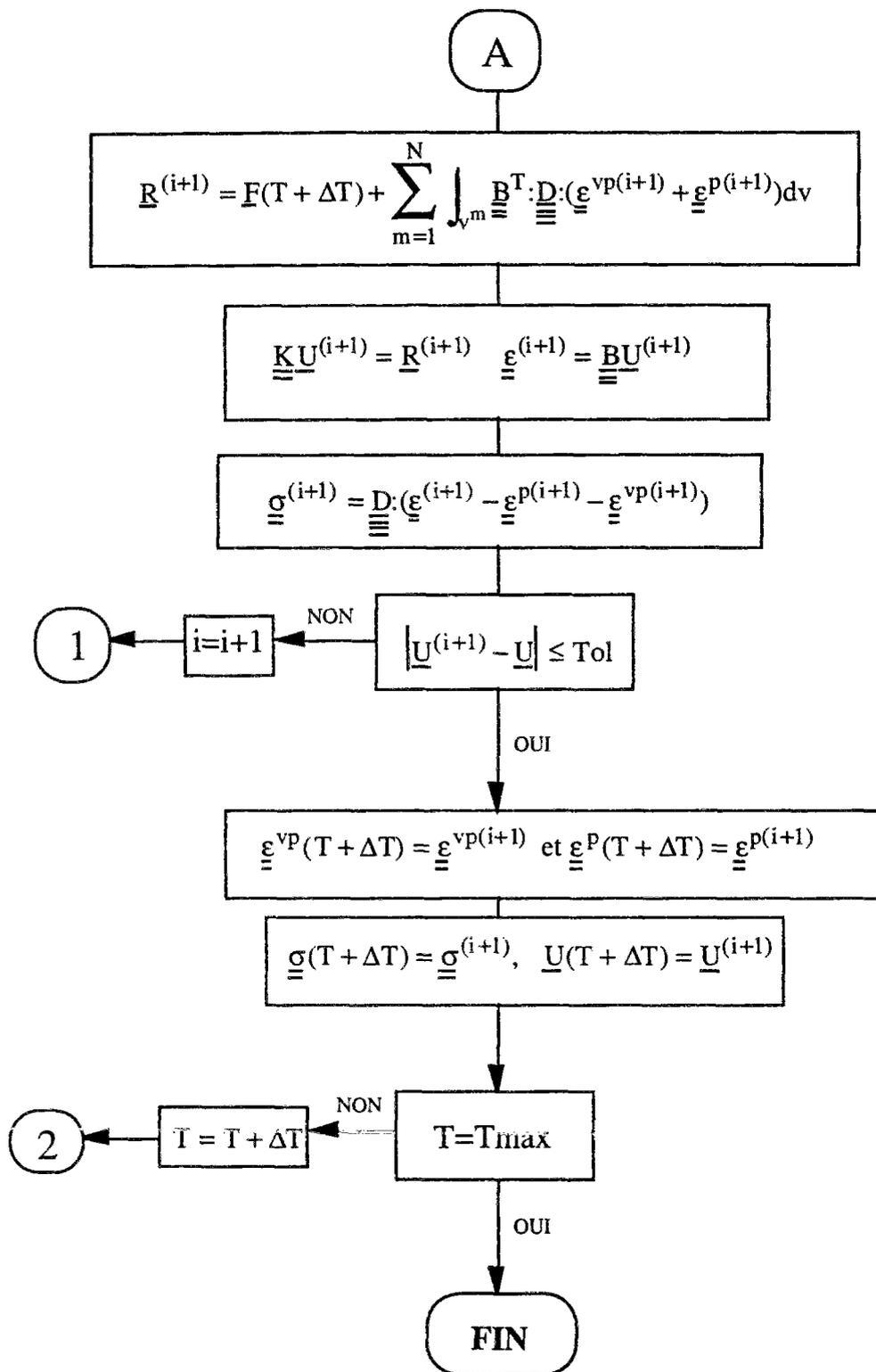


Schéma 4.2. Algorithme de résolution

La stabilité de cet algorithme (et donc du problème de viscoplasticité associé) dépend également du choix de la discrétisation temporelle. Les pas de temps Δt utilisés dans l'algorithme VPR respectent les valeurs limites établies par [Cormeau, 1975], qui sont nécessaires pour assurer la convergence et la stabilité des calculs effectués en viscoplasticité.

Cette restriction impose ainsi une deuxième valeur maximale pour le pas de temps. La génération automatique du pas de temps peut également être envisagée. On peut aussi remplacer les itérations sur U^i par celles sur ΔU^i .

Dans le cas où α est différent de zéro, il est nécessaire de faire des itérations supplémentaires aux points de Gauss pour assurer la convergence et la précision des résultats en ces points. Dans ce cas, on peut avantageusement accélérer la convergence de l'algorithme en utilisant une méthode itérative de type Newton-Raphson. Cependant, l'augmentation de la vitesse de convergence sera facilement compensée par le nombre de calculs à effectuer. Dans ce cas, le schéma viscoplastique devient implicite.

CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons montré comment à partir de la formulation générale de notre modèle dans le cadre des matériaux standard ou non, l'algorithme de résolution par la méthode des éléments finis (VPR) a été implanté dans GEOMEQ91.

Cette formulation est valable pour n'importe quel type de critère de plasticité ou de viscoplasticité. C'est pourquoi bien que ce soit le critère de Tresca ou Mohr-Coulomb qui détermine notre modèle, nous avons implanté deux autres critères comme nous allons le voir dans le chapitre 5, entièrement consacré à la validation de l'algorithme VPR.