

**FORMULATION ET RESOLUTION DU PROBLEME  
THERMO-MECANIQUE**

## **2. FORMULATION ET RESOLUTION DU PROBLEME THERMO-MECANIQUE**

|            |                                                                                                  |           |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>2.1</b> | <b>Formulation du problème mécanique .....</b>                                                   | <b>68</b> |
| 2.1.2      | Formulation du problème continu .....                                                            | 69        |
| 2.1.2.1    | <i>Equation de conservation de la masse .....</i>                                                | <i>69</i> |
| 2.1.2.2    | <i>Equation de conservation de la quantité de mouvement.....</i>                                 | <i>69</i> |
| 2.1.3      | Conditions aux interfaces .....                                                                  | 70        |
| 2.1.3.1    | <i>Conditions aux limites .....</i>                                                              | <i>70</i> |
| 2.1.3.2    | <i>Contact outil / matière.....</i>                                                              | <i>71</i> |
| 2.1.4      | Lois de comportements .....                                                                      | 71        |
| 2.1.5      | Résolution numérique .....                                                                       | 72        |
| 2.1.5.1    | <i>Formulation faible du problème mécanique .....</i>                                            | <i>72</i> |
| 2.1.5.2    | <i>Discrétisation spatiale.....</i>                                                              | <i>73</i> |
| 2.1.5.3    | <i>Discrétisation temporelle .....</i>                                                           | <i>76</i> |
| <b>2.2</b> | <b>Implémentation de la tension de surface.....</b>                                              | <b>77</b> |
| 2.2.2      | Définition et rôle de la tension de surface.....                                                 | 77        |
| 2.2.2.1    | <i>Définition de la tension de surface.....</i>                                                  | <i>77</i> |
| 2.2.2.2    | <i>Objectif de l'implémentation de la tension de surface dans le cadre du trempage .....</i>     | <i>78</i> |
| 2.2.3      | Revue bibliographique .....                                                                      | 78        |
| 2.2.3.1    | <i>Estimation de la courbure à partir de deux noeuds .....</i>                                   | <i>79</i> |
| 2.2.3.2    | <i>Estimation de la courbure à partir de la divergence des vecteurs normaux aux noeuds .....</i> | <i>79</i> |
| 2.2.3.3    | <i>Utilisation de l'opérateur Laplace-Beltrami.....</i>                                          | <i>81</i> |
| 2.2.4      | Stratégie d'insertion de la tension dans Forge3 .....                                            | 82        |
| 2.2.4.1    | <i>Application nodale .....</i>                                                                  | <i>82</i> |

|            |                                                  |           |
|------------|--------------------------------------------------|-----------|
| 2.2.4.2    | <i>Développement du système à résoudre</i> ..... | 83        |
| 2.2.5      | Validation de l'implémentation.....              | 87        |
| 2.2.5.1    | <i>Equilibre d'une goutte sans gravité</i> ..... | 88        |
| 2.2.5.2    | <i>Equilibre d'une goutte sous gravité</i> ..... | 88        |
| <b>2.3</b> | <b>Formulation du problème thermique</b> .....   | <b>90</b> |
| 2.3.2      | Equation de la chaleur .....                     | 90        |
| 2.3.3      | Conditions aux limites.....                      | 90        |
| 2.3.4      | Résolution du système.....                       | 92        |
| 2.3.4.1    | <i>Discrétisation spatiale</i> .....             | 92        |
| 2.3.4.2    | <i>Discrétisation temporelle</i> .....           | 93        |
| 2.3.4.3    | <i>Thermique asynchrone</i> .....                | 94        |
| 2.3.5      | Le couplage thermo-mécanique .....               | 95        |

La modélisation numérique du trempage dans le cadre de cette thèse se fait à l'aide du logiciel Forge2005® dans sa version 3D développé au Cemef; pour simplifier, nous l'appellerons Forge3. Il a été initialement développé pour simuler numériquement les problèmes de forgeage à chaud et à froid. Pour optimiser ce logiciel, de nombreux développements numériques complexes ont été réalisés comme, par exemple, la description de nombreuses lois de comportement ou encore des techniques de maillage et de remaillage complexes. Nous avons employé certaines de ces techniques pour modéliser le procédé de trempage. Nous avons en plus dû enrichir le logiciel pour prendre en compte certains aspects spécifiques du trempage comme la tension de surface.

Ce chapitre a pour but de présenter les différentes équations du problème tel que nous l'avons posé et tel qu'il sera résolu. Le problème est écrit à l'échelle macroscopique, c'est-à-dire que l'ensemble des matériaux intervenant (pièce et outillage) sont assimilés à des milieux continus et homogènes.

La première partie de ce chapitre sera dédiée à la présentation du modèle mécanique et à sa résolution. Lors de ce procédé, quatre forces déterminent l'épaisseur finale extraite : l'inertie, la gravité, la viscosité et la tension de surface. Cette dernière n'étant initialement pas prise en compte dans Forge3, nous expliquerons dans une seconde partie la méthode employée pour son implémentation dans le code source. Enfin, nous aborderons le problème lié aux aspects thermiques permettant la prise en compte des transferts de chaleur entre les différents domaines et présenterons brièvement la gestion du couplage thermo-mécanique.

## **2.1 Formulation du problème mécanique**

Le logiciel Forge3 est basé sur une formulation mixte en vitesse/pression du problème mécanique. La vitesse et la pression sont considérées comme deux variables complètement indépendantes.

Nous définirons ici le bain comme un domaine fini  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$ . La formulation du problème mécanique est basée sur l'écriture de deux lois de conservation de la mécanique des milieux continus : la conservation de la masse et la conservation de la quantité de mouvement. A cela viennent s'ajouter des lois supplémentaires décrivant le comportement des matériaux : les lois rhéologiques des matériaux et les lois tribologiques aux interfaces.

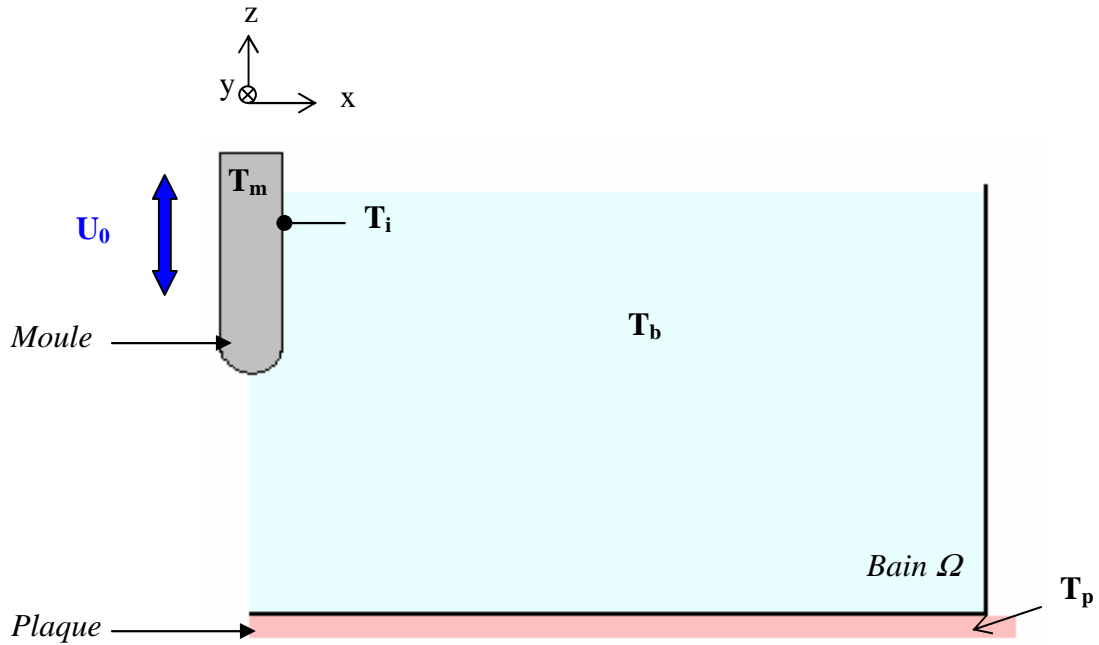


Figure 2-1 : Schéma des géométries du trempage

### 2.1.1 Formulation du problème continu

#### 2.1.1.1 Equation de conservation de la masse

Le principe de conservation de la masse dit que la masse de l'objet reste constante au cours du temps ; l'équation s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho u) = 0 \quad \text{Eq. 2-1}$$

où  $\rho$  est la masse volumique et  $u$  le champ de vitesse dans le domaine matériel.

En considérant le matériau comme incompressible ( $\rho = \text{constante}$ ), l'équation de conservation de la masse se simplifie :

$$\text{div}(u) = 0 \quad \text{Eq. 2-2}$$

#### 2.1.1.2 Equation de conservation de la quantité de mouvement

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla u \cdot u \right) + \text{div} \tau = \rho f \quad \text{Eq. 2-3}$$

avec  $\tau$  le tenseur des contraintes et  $f$  les forces volumiques gravitationnelles tel que  $f = \{0, 0, g\}$  pour le système de coordonnées cartésiennes employé (*Figure 2-1*).

### 2.1.2 Conditions aux interfaces

La fermeture du problème mécanique décrivant le trempage se fait à l'aide des conditions imposées aux niveaux des différentes interfaces.

#### 2.1.2.1 Conditions aux limites

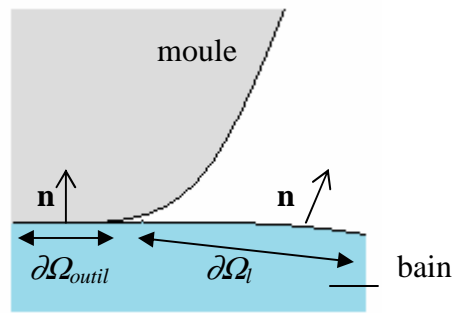


Figure 2-2 : Normale sortante de la pièce

- ✓ Sur la surface libre du bain  $\partial\Omega_l$  on impose :

$$T_{patm} = \sigma \cdot n = -(P_{atm} + \sigma v) n \quad \text{Eq. 2-4}$$

où les forces de tension de surface sont définies par :

$$T_{ts} = -\sigma v n \quad \text{Eq. 2-5}$$

où  $n$  est la normale sortante définie *Figure 2-2*,  $\sigma$  est le paramètre tension de surface et  $v$  la courbure à la surface. Le développement et l'implémentation dans Forge3 de la tension de surface sont développés dans le paragraphe 2-2.

- ✓ Entre le moule et le bain sur  $\partial\Omega_{outil}$ , une condition de non pénétration est employée. Ce problème est formulé à l'aide des conditions de Signorini :

$$\begin{cases} (u - U_0) \cdot n \leq 0 \\ \sigma_n \leq 0 \\ [(u - U_0) \cdot n] \cdot \sigma_n = 0 \end{cases} \quad \text{Eq. 2-6}$$

où  $\sigma_n = \sigma \cdot n \cdot n$  la pression de contact et  $U_0$  la vitesse de l'outil.

### 2.1.2.2 Contact outil / matière

Le contact entre le bain et le moule et entre la plaque et le moule est un contact bilatéral collant. Ce type a été choisi suite à la détermination de l'angle de contact liquide / outil ; la justification physique de ces résultats est présentée dans le *Chapitre 3*. Le contact est dit bilatéral lorsqu'il est impossible de décoller les nœuds en contact et il est de type collant quand tous les déplacements tangentiels relatifs aux nœuds en contact sont impossibles. Les conditions de contact bilatéral collant sont définies par :

$$u - U_0 = 0 \quad \text{Eq. 2-7}$$

### 2.1.3 Lois de comportements

Les lois rhéologiques à intégrer dans la modélisation doivent décrire au mieux le comportement du liquide du bain au cours du procédé de trempage. Nous avons choisi pour la description de nos fluides d'utiliser une loi viscoplastique qui nous a semblé la plus adéquate suite à des séries de mesures rhéologiques (*Chapitre 3*). La modélisation du comportement viscoplastique se fait à l'aide d'une loi de type Norton-Hoff :

$$\begin{cases} S = 2K \left( \sqrt{3} \dot{\varepsilon} \right)^{j-1} \dot{\varepsilon} \\ K(T, \bar{\varepsilon}) = K_0 (\bar{\varepsilon} + \varepsilon_0)^i e^{-\beta T} \\ \bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{3}{2}} \varepsilon : \varepsilon \\ \varepsilon_0 \ll 1 \text{ paramètre assurant } K > 0 \text{ à } \varepsilon = 0 \end{cases} \quad \text{Eq. 2-8}$$

où  $S$  est le déviateur des contraintes,  $K$  la consistance du matériau (dans le cas d'un fluide newtonien,  $K$  correspond à la viscosité),  $j$  la sensibilité à la vitesse de déformation,  $\dot{\varepsilon}$  le tenseur des déformations défini par l'équation 2-9. Dans le cas de trempage anisotherme, la

consistance  $K$  peut dépendre de la température telle que  $i$  est le coefficient de sensibilité à l'écroutissage et  $\beta$  un terme dépendant de la température.

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \text{grad } u + (\text{grad } u)^T \right) \quad \text{Eq. 2-9}$$

et  $\dot{\varepsilon}$  la vitesse de déformation équivalente définie par :

$$\dot{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon} : \dot{\varepsilon}} \quad \text{Eq. 2-10}$$

Le déviateur des contraintes  $s$  s'écrit :

$$\sigma = S - pI \quad \text{avec} \quad p = -\frac{1}{3} \text{Trace}(\sigma) \quad \text{Eq. 2-11}$$

où  $p$  est la pression hydrostatique et  $I$  la matrice identité.

#### 2.1.4 Résolution numérique

##### 2.1.4.1 Formulation faible du problème mécanique

Les équations de conservation de la masse et de conservation du mouvement peuvent s'écrire sous forme variationnelle :

Trouver  $(u, p) \in (U^{Ca}, P)$  tel que :

$$\int_{\Omega} S : \dot{\varepsilon}(u^*) d\omega - \int_{\Omega} p \text{div}(u^*) d\omega - \int_{\partial\Omega_h} \tau \cdot v^* dS = 0 \quad \forall u^* \in U_0^{Ca} \quad \text{Eq. 2-12}$$

$$\int_{\Omega} p^* \text{div}(u) d\omega = 0 \quad \forall p^* \in P$$

Les ensembles  $U^{ca}$  (espace des vitesses cinématiquement admissibles),  $U_0^{ca}$  (espace des vitesses cinématiquement admissibles à zéro) et  $P$  sont définis par :

$$U^{ca} = \left\{ u \in \left( H^1(\Omega)^3 / (u - u_{outil}) \cdot n \leq 0 \text{ sur } \partial\Omega_c \right) \right\}$$

$$U_0^{ca} = \left\{ u \in \left( H^1(\Omega)^3 / u \cdot n \leq 0 \text{ sur } \partial\Omega_c \right) \right\} \quad \text{Eq. 2-13}$$

$$P = L^2(\Omega)$$



### 2.1.4.2 Discrétisation spatiale

La discrétisation du problème à résoudre dans Forge3 se fait à l'aide de la méthode des Eléments Finis mixtes. Les espaces d'admissibilité de la vitesse  $U^{ca}$  et de la pression  $P$  sont approchés par des espaces discrets de dimensions finies  $U_k^{ca}$  et  $P_k$  où  $k$  désigne la taille de maille. Ces espaces  $U_k^{ca}$  et  $P_k$  sont basés sur une triangulation  $\Gamma_k$ , en éléments  $\omega_k$ , de l'espace  $\Omega_k$  qui discrétise le domaine continu  $\Omega$ .

$$\Omega_k = \bigcup_{\omega_k \in \Gamma_k} \omega_k \quad \text{Eq. 2-14}$$

Il est nécessaire que les fonctions  $(u_k, p_k)$  avec  $u_k \in U_k$  et  $p_k \in P_k$  convergent vers les solutions continues  $(u, p)$  lorsque  $k$  tend vers 0. Cette convergence est assurée par la consistance du problème et est vérifiée puisque les espaces d'approximation dans lesquels nous travaillons sont des espaces de polynômes.

A cause du couplage entre les champs de vitesse et de pression, la condition de consistance ne suffit plus, il faut lui ajouter une condition de stabilité spatiale ou condition de Brezzi-Babuska [Babuska73]. Cette condition va influencer directement le choix de l'élément utilisé.

Pour minimiser les temps de calcul tout en obtenant des résultats cohérents, le domaine est discrétisé à partir de l'élément tétraédrique P1+ / P1. Ce type d'élément présente l'avantage de pouvoir décrire des volumes complexes tout en étant maniables pour le maillage et le remaillage.

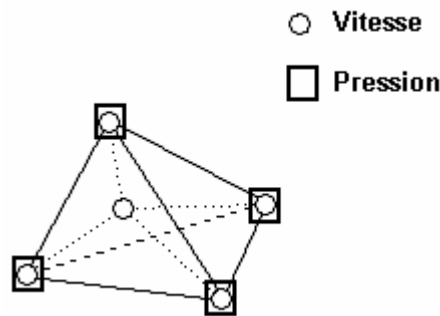


Figure 2-3 : Élément tétraédrique Vitesse / Pression

La vitesse est discrétisée par une partie linéaire  $u_k^l$  sur le tétraèdre enrichi par une partie bulle linéaire  $u_k^b$  définie sur les quatre sous tétraèdres formés par les sommets et le centre de gravité du tétraèdre que nous noterons  $(\omega_k^q)_{q=1,2,3,4}$ . La pression est approximée par une fonction linéaire sur  $w_k$ . Le champs de vitesse  $u_k$  interpolé sur l'élément P1+/P1 se

décompose selon les équations 2-17.  $U_l$  correspond à la partie linéaire du champs de vitesse et  $B_k$  la partie bulle.

$$\begin{aligned}
 U_k &= U_l + B_k \\
 B_k &= \left\{ \begin{array}{l} u_k^b \in (C^0(\Omega_k))^3 / \forall \omega_k \in \Gamma_k \text{ et } b_{k/\omega_k} \in (P^1(\omega_k^q)), q=1, \dots, 4 \\ b_k = 0 \text{ sur } \partial\Omega_k \end{array} \right\} \\
 U_l &= \left\{ u_k^l \in (C^0(\Omega_k))^3 / \forall \omega_k \in \Gamma_k \text{ et } u_{k/\omega_k} \in (P^1(\omega_k))^3 \right\} \\
 P_k &= \left\{ p_k \in (C^0(\Omega_k)) / \forall \omega_k \in \Gamma_k \text{ et } p_{k/\omega_k} \in P^1(\omega_k) \right\}
 \end{aligned} \tag{Eq. 2-15}$$

Les champs de vitesse et de pression résultants sont donnés dans l'équation 2-16.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_k = u_k^l + u_k^b = \sum_{q=1}^{nbnoe} U_q N_q^l + \sum_{j=1}^{nbelt} U_j^b N_j^b \\ p_k = \sum_{q=1}^{nbnoe} P_q N_q^l \end{array} \right. \tag{Eq. 2-16}$$

$nbnoe$  et  $nbelt$  sont respectivement le nombre de nœuds et le nombre d'éléments du maillage.  $N_q^l, q=1, \dots, nbnoe$  est la matrice des fonctions d'interpolation linéaire associée au nœud  $q$ .  $N_j^b, j=1, \dots, nbelt$  est le vecteur de la fonction bulle associée à l'élément  $j$ .

Pour obtenir la formulation faible discrétisée « éléments finis », il suffit de remplacer dans l'équation 2-12 les fonctions tests par les fonctions de base avec  $e_i$  est le vecteur unitaire dans la direction  $i$  de l'espace :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_k} 2K \left( \sqrt{3} \dot{\varepsilon}(u_k^l + u_k^b) \right)^{m-1} \dot{\varepsilon}(u_k^l + u_k^b) : \dot{\varepsilon}(N_q^l e_i) d\Omega_k + \int_{\partial\Omega_k} \sigma \kappa \text{div}(N_q^l \cdot e_i) dS \\ - \int_{\Omega_k} p_k \text{div}(N_q^l \cdot e_i) d\Omega_k = 0 \quad \forall q=1, \dots, nbnoe; \forall i=1, \dots, 3 \\ \int_{\Omega_k^e} 2K \left( \sqrt{3} \dot{\varepsilon}(u_k^l + u_k^b) \right)^{m-1} \dot{\varepsilon}(u_k^l + u_k^b) : \dot{\varepsilon}(N_q^b e_i) d\Omega_k \\ - \int_{\Omega_k^e} p_k \text{div}(N_q^b \cdot e_i) d\Omega_k = 0 \quad \forall e=1, \dots, nbnel; \forall i=1, \dots, 3 \\ \int_{\Omega_k} N_q^l \text{div}(u_k^l + u_k^b) d\Omega_k = 0 \quad \forall q=1, \dots, nbnoe \end{array} \right. \tag{Eq. 2-17}$$

Une fois le problème posé, il est possible de réécrire le système 2-17 sous forme matricielle pour réaliser ensuite la résolution numérique :

$$R(u^l, u^b, p) = \begin{pmatrix} R_l(u^l, u^b, p) \\ R_b(u^l, u^b, p) \\ R_p(u^l, u^b, p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 2-18}$$

Pour résoudre ce système, où  $R$  est non linéaire, il est employé l'algorithme de Newton-Raphson. A partir du triplet initial  $(u_{init}^l, u_{init}^b, p_{init})$ , on cherche à apporter une correction  $(\Delta u^l, \Delta u^b, \Delta p)$  telle que :

$$R(u_{init}^l + \Delta u^l, u_{init}^b + \Delta u^b, p_{init} + \Delta p) = 0 \quad \text{Eq. 2-19}$$

On approche le résidu  $R$  à l'ordre 1 à l'aide d'un développement de Taylor :

$$R(u_{init}^l + \Delta u^l, u_{init}^b + \Delta u^b, p_{init} + \Delta p) \approx R(u_{init}^l, u_{init}^b, p_{init}) + \frac{\partial R}{\partial u^l} \Delta u^l + \frac{\partial R}{\partial u^b} \Delta u^b + \frac{\partial R}{\partial p} \Delta p = 0 \quad \text{Eq. 2-20}$$

Le système linéaire devient :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial R_l}{\partial u^l} & \frac{\partial R_l}{\partial u^b} & \frac{\partial R_l}{\partial p} \\ \frac{\partial R_b}{\partial u^l} & \frac{\partial R_b}{\partial u^b} & \frac{\partial R_b}{\partial p} \\ \frac{\partial R_p}{\partial u^l} & \frac{\partial R_p}{\partial u^b} & \frac{\partial R_p}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u^l \\ \Delta u^b \\ \Delta p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R_l \\ R_b \\ R_p \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 2-21}$$

Ce système peut être simplifié en notant que le terme  $\frac{\partial R_p}{\partial p}$  est nul et que dans le cas des fonctions de forme linéaires  $\frac{\partial R_l}{\partial u^b} = \frac{\partial R_b}{\partial u^l} = 0$ . On obtient ainsi :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial R_l}{\partial u^l} & 0 & \frac{\partial R_l}{\partial p} \\ 0 & \frac{\partial R_b}{\partial u^b} & \frac{\partial R_b}{\partial p} \\ \frac{\partial R_p}{\partial u^l} & \frac{\partial R_p}{\partial u^b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u^l \\ \Delta u^b \\ \Delta p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R_l \\ R_b \\ R_p \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 2-22}$$

En extrayant la seconde ligne du système, le champ de vitesse bulle peut s'exprimer en fonction du champ de pression (condensation statique). Le système à résoudre devient :

$$H_e \begin{pmatrix} \Delta u^l \\ \Delta p \end{pmatrix} = -R_{\text{modif}} \quad \text{Eq. 2-23}$$

où  $H_e$  est la matrice hessienne, symétrique et  $R_{\text{modif}}$  le résidu modifié par l'élimination du terme « bulle » (condensation statique).

Le système 2-23 est résolu dans Forge3 par une méthode itérative de type résidu conjugué préconditionné [Marie97]. Cette méthode itérative permet non seulement un gain de temps mais également un gain du point de vue de coût de stockage.

#### 2.1.4.3 Discrétisation temporelle

La formulation employée dans Forge3 est Lagrangienne avec une réactualisation au cours du temps. On note  $t_0$  et  $t_{\text{fin}}$  les temps initial et final ; l'intervalle de temps  $[t_0, t_{\text{fin}}]$  est discrétisé en plusieurs intervalles  $[t_n, t_{n+1}]$ . La configuration à  $t_{n+1}$  est calculée à partir de la configuration à  $t_n$ , dans le cas en Lagrangien total, la configuration  $t_{n+1}$  serait calculée en fonction de celle à  $t_0$ .

Le schéma est de type Euler explicite :

$$X^{t+\Delta t} = X^t + \Delta t \cdot U^{t+\Delta t} \quad \text{Eq. 2-24}$$

La vitesse est constante au cours de l'incrément de temps  $[t, t + \Delta t]$ .

## 2.2 Implémentation de la tension de surface

Dans ce paragraphe nous présentons la méthode employée pour implémenter les forces de tension de surface dans le code source de Forge3. En effet, les mécanismes induits par la tension superficielle sont importants dans le trempage : ils sont susceptibles d'influencer fortement les épaisseurs extraites autour du moule. La prise en compte de cet effet est donc indispensable à la modélisation du trempage.

### 2.2.1 Définition et rôle de la tension de surface dans le trempage

#### 2.2.1.1 *Définition de la tension de surface*

Au sein d'un liquide, les molécules exercent entre elles des forces d'attraction ou de répulsion (forces de Van der Waals - attraction - électrostatique - attraction ou répulsion -) : On parle de « forces intermoléculaires ». Chaque molécule du liquide est tirée dans toutes les directions par ses voisines de ce même liquide : la résultante des forces est nulle.

A la surface du liquide, les molécules sont tirés vers l'intérieur par d'autres molécules de ce même liquide et ne sont pas, par contre, attirées intensivement par les molécules du milieu ambiant (ici, l'air). Il existe donc un gradient de pression entre les deux domaines (liquide – air) ce qui conduit à l'apparition d'une force normale qui s'annule lorsque la surface se courbe. La forme de la surface résulte donc de l'équilibre entre la pression du gaz, l'attraction par l'intérieur du liquide et le poids si l'on est en présence de la pesanteur.

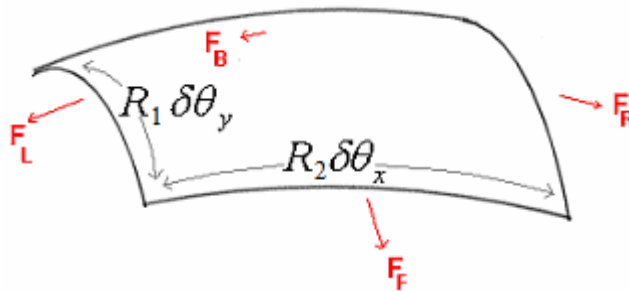


Figure 2-4 : Action des forces de tension interfaciale sur une surface libre  $\delta\theta$

Quand toutes les forces sont à l'équilibre, l'équation résultante est l'équation de Young-Laplace :

$$\Delta P = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad \text{Eq. 2-25}$$

où  $\Delta P$  est la différence de pression,  $\sigma$  la tension de surface et  $R_1$  et  $R_2$  les rayons de courbure. La résultante de la tension de surface sur la surface gauche est donc une contrainte normale à la surface du fluide et elle est inversement proportionnelle aux rayons de courbure.

### 2.2.1.2 Objectif de l'implémentation de la tension de surface

Le trempage est soumis à l'action de quatre paramètres physiques principaux : la viscosité, la gravité, la tension de surface et les forces d'inertie. Selon les conditions de trempage, un ou plusieurs de ces facteurs prédominent. Par exemple, pour de petits nombres capillaires ( $Ca \ll 1$ ), c'est à dire à faible vitesse de remontée, la gravité peut être négligée dans la zone du ménisque; par contre pour de grands nombres capillaires, la tension de surface peut être négligée et ce sont les forces d'inertie qui prédominent [Weinstein01]. Comme notre objectif est de développer un modèle numérique général permettant de simuler le trempage, il est important de prendre en compte l'ensemble des forces jouant un rôle.

### 2.2.2 Revue bibliographique

Dans la littérature, plusieurs méthodes ont été développées pour implémenter la tension de surface.

La tension de surface est en général modélisée en appliquant la force locale « tension de surface » aux nœuds de la surface libre. Comme cela a été expliqué précédemment, la force est équivalente à un saut de pression au travers d'une interface et est donnée par la formule de Laplace :

$$\Delta P = \sigma \cdot \nu \quad \text{Eq. 2-26}$$

où  $\Delta P$  est le saut de pression,  $\sigma$  le coefficient de tension de surface et  $\nu$  la courbure.

Localement, le vecteur contrainte normale  $\vec{T}$  appliquée à la surface libre est donné par:

$$\vec{T} = \vec{\sigma} \vec{n} = -P_{atm} \vec{n} - \sigma \kappa \vec{n} \quad \text{Eq. 2-27}$$

La contribution du terme « tension de surface » dans l'équation des puissances virtuelles est la suivante :

$$-\int_{\partial\Omega_{libre}} \vec{T} \cdot \vec{u}^* dS = \int P_{atm} \vec{u}^* \vec{n} dS + \int \sigma \nu \vec{n} \cdot \vec{u}^* dS \quad \text{Eq. 2-28}$$

La plupart des méthodes développées dans la littérature et permettant l'implémentation de la tension de surface dans un modèle éléments finis sont basées sur la détermination de la courbure. Les deux premiers cas présentés font partis de ceux-là mais montrent des limites ; c'est pourquoi une autre méthode, présentée dans le troisième point, a été développée et est basée sur une reformulation du terme de courbure.

### 2.2.2.1 Estimation de la courbure à partir de deux noeuds

Une première méthode consiste à calculer la courbure pour chaque côté joignant deux noeuds ( $i$  et  $j$ ). Une approximation de la courbure  $\nu$  est déterminée à partir de l'équation suivante [Bellet01]:

$$\nu = \frac{1}{R_c} = \frac{l\delta_a}{A_1 + A_2} \quad \text{Eq. 2-29}$$

où  $R_c$  est le rayon de courbure,  $\delta_a$  l'angle entre les deux adjacentes des triangles,  $A_1$  et  $A_2$  leurs surfaces respectives (Figure 2-5).

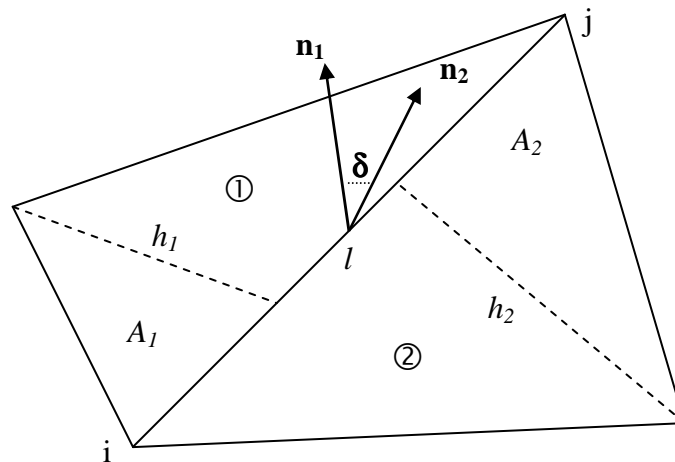


Figure 2-5 : Notations employées dans la définition de la courbure le long d'un côté joint par deux noeuds  $i$  et  $j$  et séparant deux triangle 1 et 2 selon [Bellet01]

### 2.2.2.2 Estimation de la courbure à partir de la divergence des vecteurs normaux aux noeuds

Une autre méthode consiste à calculer la courbure comme la divergence des vecteurs normaux aux noeuds.

Brackbill et al. [Brackbill92], repris par Natvi [Natvi97] en 1997 et Bellet en 2001 [Bellet01], ont montré que la courbure pouvait être donnée par l'opérateur divergent de la surface :

$$\boldsymbol{v} = -\nabla_s \cdot \boldsymbol{n} \quad \text{Eq. 2-30}$$

Pour utiliser cette équation en trois dimensions, il faut déterminer la moyenne nodale des vecteurs normaux. Chaque nœud en surface dépend de un ou plusieurs triangles. Sur chaque facette, la normale est unique. Il est simplement possible de faire une moyenne qui s'écrit ainsi :

$$\boldsymbol{n}^m = \frac{1}{\left\| \sum_{e \in \tau(m)} \boldsymbol{n}^e \right\|} \sum_{e \in \tau(m)} \boldsymbol{n}^e \quad \text{Eq. 2-31}$$

où  $\tau(m)$  est l'ensemble des facettes triangulaires autour du point  $m$  et  $\boldsymbol{n}^e$  le vecteur normal de la facette  $e$ .

Une autre méthode consiste à faire une moyenne pondérale des vecteurs normaux des facettes autour d'un nœud avec comme coefficients pondéraux les surfaces des facettes :

$$\boldsymbol{n}^m = \frac{1}{\left\| \sum_{e \in \tau(m)} \boldsymbol{n}^e \cdot S^e \right\|} \sum_{e \in \tau(m)} \boldsymbol{n}^e \cdot S^e \quad \text{Eq. 2-32}$$

Pour un triangle à trois nœuds ( $m, n, p$ ) dont les moyennes des vecteurs normaux sont  $\boldsymbol{n}^m$ ,  $\boldsymbol{n}^n$  et  $\boldsymbol{n}^p$ , il est possible d'écrire dans un repère local dans le plan de la facette ( $X, Y$ ):

$$\nabla_s \cdot \boldsymbol{n} = \frac{\partial n_x}{\partial X} + \frac{\partial n_y}{\partial Y} = \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial X} \right) n_x^i + \left( \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial Y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial Y} \right) n_y^i \quad \text{Eq. 2-33}$$

où  $(\xi, \eta)$  sont les coordonnées de l'élément triangulaire de référence et  $N_i$  les fonctions d'interpolations attachées au nœud  $i$ .

Après simplifications, la divergence de  $\boldsymbol{n}$  devient :

$$\nabla_s \cdot \boldsymbol{n} = \frac{1}{2S} \left[ Y^p (n_x^n - n_x^m) - X^p (n_y^n - n_y^m) + X^n (n_y^p - n_y^m) \right] \quad \text{Eq. 2-34}$$



avec  $S$  la surface du triangle,  $(X_i, Y_i)$  les coordonnées au point  $i$ .

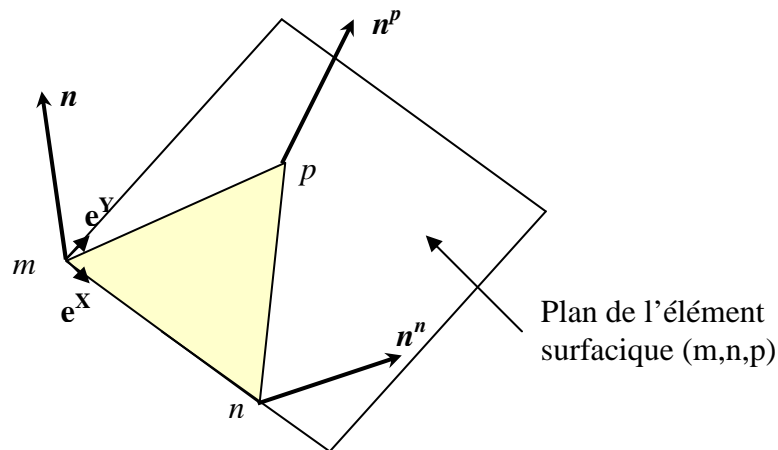


Figure 2-6 : Système de coordonnées local pour calculer  $\nabla_S \cdot n$  dans chaque triangle selon [Bellet01]

Il est à présent possible de donner l'expression du vecteur contrainte décrivant les termes de tension de surface dans l'équilibre mécanique :

$$T(\xi, \eta) = -\sigma(\nabla_S \cdot n)n(\xi, \eta) \quad \text{Eq. 2-35}$$

Si  $\nabla_S \cdot n$  est positif, alors la surface est convexe localement. La discrétisation du terme résidu de l'équation 2-35 s'écrit :

$$R_{nk} = - \int_{\partial\Omega_i} \sigma(\nabla_S \cdot n) N_n n_k^n \cdot N_n dl \quad \text{Eq. 2-36}$$

### 2.2.2.3 Utilisation de l'opérateur Laplace-Beltrami

L'utilisation de l'opérateur Laplace-Beltrami permet de reformuler le terme de tension de surface en son équivalent variationnel. Le premier à avoir introduit cet opérateur aux éléments finis est Dzuik [Dzuik91] en 1991. Bänsch l'a ensuite appliqué aux écoulements aux surfaces libres en 2001 [Bänsch01].

Pour l'application de cette méthode, il est nécessaire dans un premier temps d'introduire certaines notions. L'opérateur de Laplace-Beltrami  $\underline{\underline{\Delta}}$  est donné par :

$$\underline{\underline{\Delta}} \vec{x} = \nu \vec{n} \quad \text{Eq. 2-37}$$

avec  $\vec{x}$  le vecteur des coordonnées du point considéré et le gradient tangentiel par :

$$\underline{\nabla} f(x) = \nabla f(x) - \left( \vec{n} \cdot \nabla f(x) \right) \vec{n} \quad \text{Eq. 2-38}$$

$\underline{\Delta}$  apparaît comme la partie tangentielle de l'opérateur Laplacien appliqué à un vecteur, c'est-à-dire le projecteur de l'opérateur Laplacien sur la surface de normale  $n$ .

La modélisation de la tension de surface se fait à partir de la formulation suivante :

$$F_{TS} = \int_{\Gamma} \sigma \nu \vec{n} \cdot w d\Gamma \quad \text{Eq. 2-39}$$

où  $\Gamma$  est l'interface libre liquide-air.

En remplaçant l'expression du vecteur courbure dans l'expression, on obtient :

$$F_{TS} = \int_{\Gamma} \sigma \left( \underline{\Delta} \vec{x} \right) \cdot w d\Gamma = - \int_{\Gamma} \sigma \underline{\nabla} \vec{x} \cdot \underline{\nabla} w d\Gamma + \int_{\partial\Gamma} \sigma \partial_{\sigma} \vec{x} \cdot w d\gamma \quad \text{Eq. 2-40}$$

Si les effets de bords sont négligés (reliés à l'angle de mouillage) et que l'on considère la configuration à l'incrément  $n$ , on obtient la forme explicite suivante :

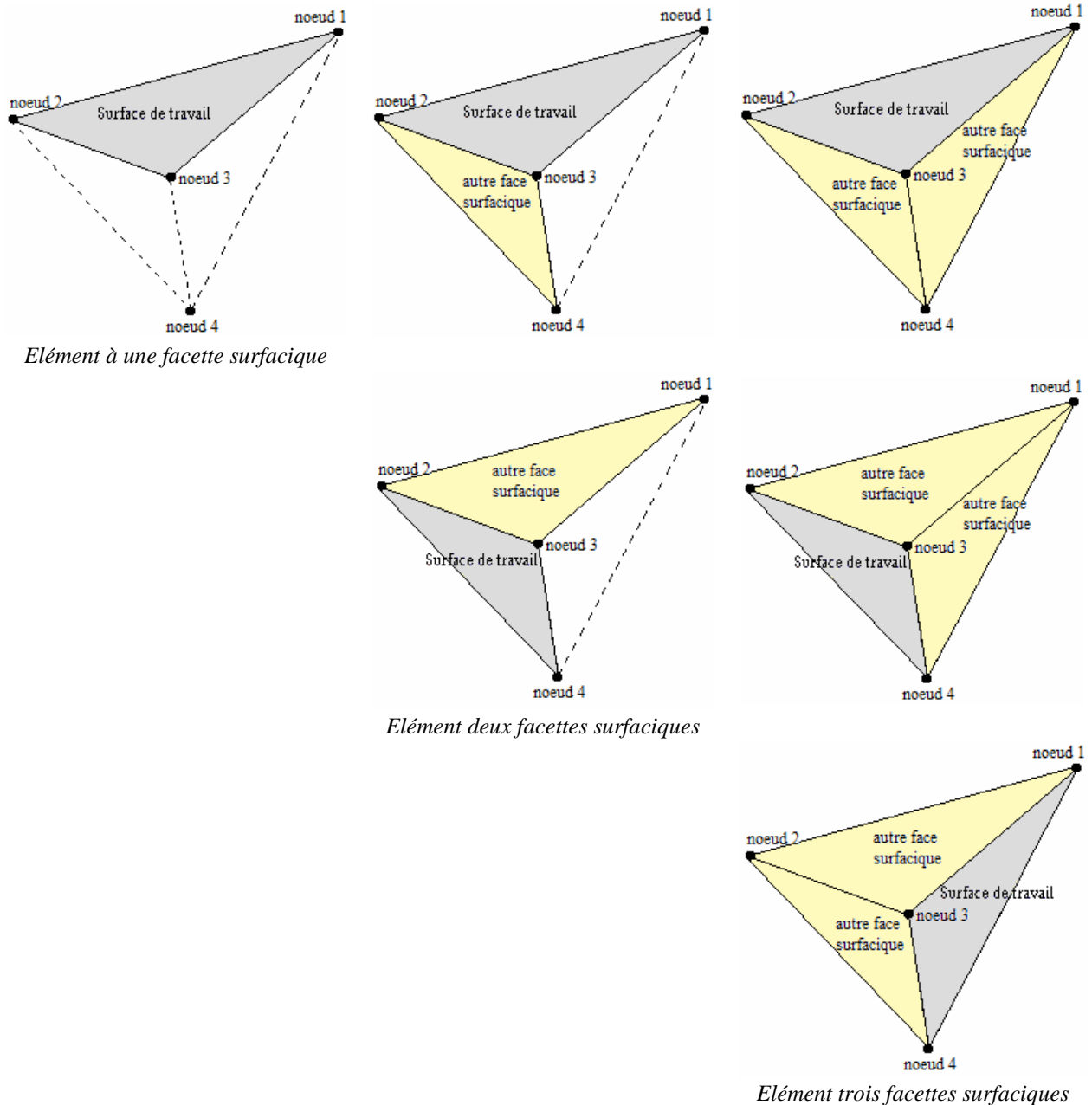
$$F_{TS} = - \int_{\Gamma} \sigma \underline{\nabla} \vec{x} \cdot \underline{\nabla} w d\Gamma \quad \text{Eq. 2-41}$$

L'implémentation numérique de la tension de surface calculée à partir de la courbure (deux premières méthodes) génère des défauts tels que des irrégularités dans les courbures comme cela peut se voir sur les résultats de [Bellet01]. Le modèle qui a été choisi pour l'implémentation de la tension de surface dans Forge3 est celle basée sur la reconstruction de la courbure à partir l'opérateur Laplace-Beltrami.

### 2.2.3 Stratégie d'insertion de la tension dans Forge3

#### 2.2.3.1 Application nodale

La tension de surface ne s'applique qu'au niveau des éléments surfaciques. Il est donc nécessaire dans un premier temps de déterminer l'ensemble des nœuds concernés.



**Figure 2-7 : Différentes configurations de tétraèdres surfaciques avec une ou plusieurs facette surfaciques où vient s'appliquer la tension de surface**

Comme seuls les éléments ayant au moins une facette sur la surface libre sont utilisés, il faut donc sélectionner ces éléments et numéroter les nœuds de telle manière de reconnaître quels sont ceux frontières et ceux qui ne le sont pas. Dans le cas où un même élément possède 1, 2 voire 3 facettes surfaciques (*Figure 2-7*), chaque facette est traitée indépendamment des autres ; i.e. la tension de surface est calculée et appliquée à toutes les facettes surfaciques sans tenir compte de ses voisines. C'est l'étape d'assemblage au niveau global dans la procédure éléments finis qui permettra d'assurer la continuité de la courbure de l'interface.

Le sens de numérotation des nœuds est aléatoire car il ne joue pas de rôle sur le calcul de la tension de surface. Chaque nœud de chaque face appartenant à la surface libre est numéroté de 1 à 3, le quatrième nœud étant le numéro 4. Tout au long de l'incrément, cette numérotation est conservée.

### 2.2.3.2 Développement du système à résoudre

Comme il a été montré précédemment, la contribution du terme « tension de surface » dans l'équation des puissances virtuelles vaut :

$$F_{TS} = - \int_{\Gamma} \underline{\sigma} \underline{\nabla} x \cdot \underline{\nabla} w d\Gamma \quad \text{Eq. 2-42}$$

Il faut transformer ce problème physique de telle manière à le modéliser sous forme d'équations locales.

A l'aide du développement du gradient tangentiel donné dans l'équation 2-37, il est possible de simplifier l'écriture de ce terme à l'aide de la formulation suivante :

$$\begin{aligned} \underline{\nabla}_j x_i &= x_{i,j} - n_k x_{i,k} n_j \\ &= (\delta_{k,j} - n_k n_j) x_{i,k} \\ &= x_{i,k} \cdot [\mathbf{I} - \mathbf{nn}]_{k,j} \end{aligned} \quad \text{Eq. 2-43}$$

$$\text{soit} \quad \underline{\nabla} x = \nabla x \cdot [\mathbf{I} - \mathbf{nn}] \quad \text{Eq. 2-44}$$

où  $n$  est la normale sortante à la facette surfacique et  $x$  est le vecteur des coordonnées du point considéré. Chaque normale est calculée indépendamment des autres, c'est-à-dire si un élément possède plusieurs facettes surfaciques, il sera calculé autant de normales qu'il y a de facettes surfaciques.

Le terme  $F_{TS}$  devient alors :

$$F_{TS} = - \int \underline{\sigma} \cdot [\nabla x (\mathbf{I} - \mathbf{nn})] \cdot [\nabla w (\mathbf{I} - \mathbf{nn})] \quad \text{Eq. 2-45}$$

$$\text{autrement dit} \quad \begin{cases} F_{TS} = - \int_{\Gamma} \underline{\sigma} \cdot [\nabla x (\mathbf{I} - \mathbf{nn})] \cdot [(\mathbf{I} - \mathbf{nn})^T \cdot \nabla w] d\Gamma \\ F_{TS} = - \int_{\Gamma} \underline{\sigma} \cdot \nabla x \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{nn}) (\mathbf{I} - \mathbf{nn})^T \cdot \nabla w d\Gamma \end{cases} \quad \text{Eq. 2-46}$$

Il faut à présent chercher à écrire cette équation de telle manière à définir localement la tension de surface au niveau de chaque élément fini. Pour cela est utilisé la notion de fonctions d'interpolation définies sur l'ensemble du domaine étudié.

Dans un premier temps sont recherchées les composantes du vecteur déplacement  $w$  en chaque nœud de la discrétisation par éléments finis. Il sera noté  $W$  le vecteur des composantes du champ nodal  $w(x)$  sur la facette :

$$W = \begin{pmatrix} w_1^1 \\ w_2^1 \\ w_3^1 \\ \vdots \\ w_1^3 \\ w_2^3 \\ w_3^3 \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 2-47}$$

Pour chaque composante  $w_1(x)$ ,  $w_2(x)$  et  $w_3(x)$  la relation fondamentale d'interpolation sous forme matricielle est :

$$\begin{bmatrix} w_1(x) \\ w_2(x) \\ w_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1^1 \\ w_2^1 \\ w_3^1 \\ \vdots \\ w_1^3 \\ w_2^3 \\ w_3^3 \end{bmatrix} = [N^e] \cdot W^e \quad \text{Eq. 2-48}$$

Il est introduit la matrice de l'opérateur de dérivation  $[\nabla]$  :

$$B = [\nabla] \cdot [N] = \begin{vmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Eq. 2-49

D'autre part, il a été démontré précédemment (équation 2-44) que :  $\underline{\nabla}x = \nabla x \cdot [I - nn]$ .  
Pour simplifier l'écriture il est possible de noter :

$$\underline{\nabla}x = \nabla x \cdot D \quad \text{Eq. 2-50}$$

avec  $D$  un tenseur d'ordre 2 (matrice 3x3).

où sous forme vectorielle :

$$\{\underline{\nabla}x\} = [D^*] \cdot \{\nabla x\} \quad \text{Eq. 2-51}$$

avec  $D^*$  une matrice 12x12 (3 coordonnées x 4 nœuds pour le tétraèdre).

La force résultante de la tension de surface est alors équivalente sous forme matricielle à l'équation suivante :

$$F_{TS} = -\sigma \cdot B^T \cdot D^* \cdot D^{*T} \cdot B \cdot \{x\} \cdot S_f \quad \text{Eq. 2-52}$$

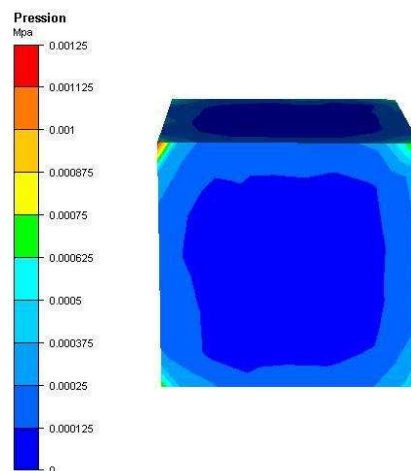
où  $B$  est la matrice des fonctions de forme,  $D^*$  la matrice projection,  $\{x\}$  les coordonnées des quatre nœuds de l'élément et  $S_f$  la surface de la facette.

La force  $F_{TS}$  a 12 composantes correspondant aux 3 coordonnées (selon  $x$ ,  $y$  et  $z$ ) des nœuds du tétraèdre. Seuls les 9 composantes correspondants aux nœuds en surface sont utilisées puisque se sont les seuls nœuds sur lesquels est appliquée la tension de surface.

#### 2.2.4 Validation de l'implémentation

Avant toute application de la tension de surface sur la modélisation du trempage, il est important de valider le bon fonctionnement de l'algorithme développé et implémenté dans le logiciel Forge3. La validation se fait sur un cube soumis à sa viscosité, à son inertie, à sa gravité (ou non selon les cas) et à la tension de surface. Les facteurs de validation du bon fonctionnement de l'algorithme sont la géométrie finale de la figure et la répartition de la pression dans le cube. La distribution de cette dernière dans le cube initial est donnée *Figure 2-8* : elle est maximale au niveau des coins et minimale aux centres des faces.

Le cube initial est de dimension  $1 \times 1 \times 1 \text{ mm}^3$  et est composé de 408 nœuds, 1556 tétraèdres et 496 facettes. Le pas de temps est de  $\Delta t = 0,001 \text{ s}$ . La viscosité dynamique employée est  $\mu = 1 \text{ Pa.s}$  et la masse volumique  $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ . Le facteur tension de surface vaut  $\gamma = 0,02 \text{ N.m}^{-1}$ . Dans le cas où la gravité est prise en compte, le cube est posé sur un support : le contact avec le fluide est de type Tresca. Le calcul se déroule jusqu'à ce que l'équilibre soit atteint.



**Figure 2-8 : Cube initial tel qu'il apparaît dans Forge3 - Répartition des champs de pression**

La tension de surface est une force venant s'appliquer aux nœuds : pour atteindre un état stable, elle intervient comme une force de « contraction » de façon à obtenir la surface la plus faible possible.

### 2.2.4.1 Equilibre d'une goutte sans gravité

Dans le cas d'un cube non soumis à la gravité, l'équilibre est atteint après 0,75 s. Il est obtenu une sphère parfaite de pression constante de 53,50 Pa (Figure 2-9). La forme sphérique est atteinte car en l'adoptant, la surface est minimisée et par conséquent, l'énergie nécessaire est également minimisée.

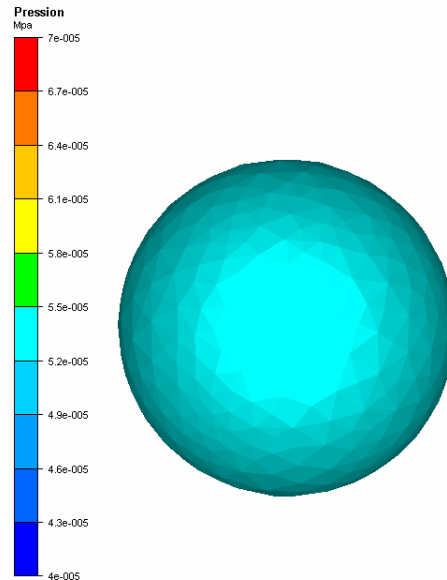


Figure 2-9 : Champ de pression dans le cube soumis à la tension de surface

Selon la formule de Laplace, la pression de la sphère doit être égale à :

$$P = \frac{2 \cdot \sigma}{R_s} \quad \text{Eq. 2-53}$$

où  $R_s$  est le rayon de la sphère (ici  $R_s = 0,75\text{mm}$ ) et  $\sigma = 0,02 \text{ N.m}^{-1}$ . Le calcul à l'aide de cette formule donne une pression de 53,33 Pa, ce qui est très proche de celle trouvée numériquement. Cette vérification confirme le bon fonctionnement de l'implémentation de la tension de surface dans Forge3.

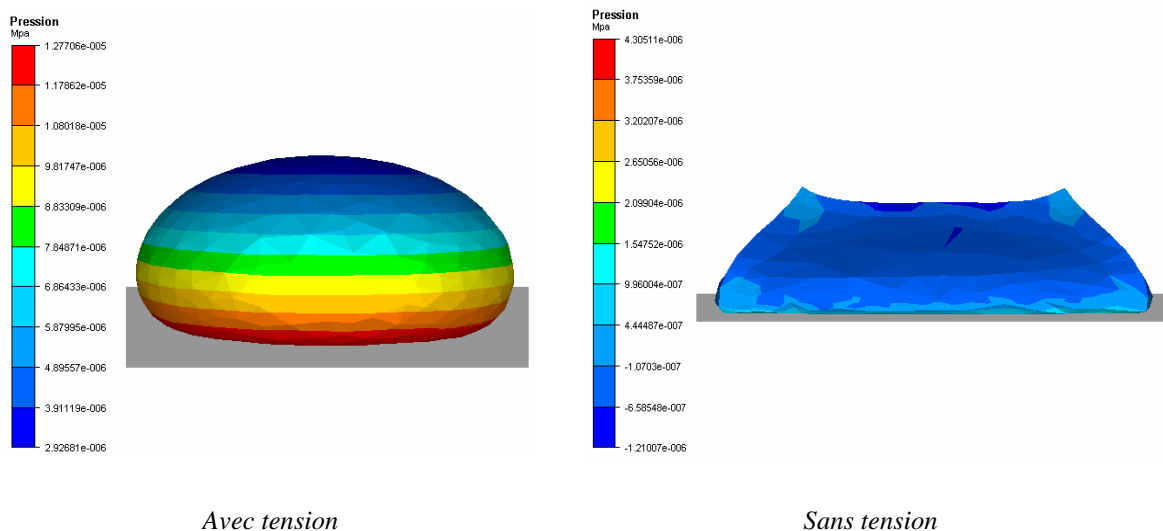
### 2.2.4.2 Equilibre d'une goutte sous gravité

L'évolution d'une goutte de fluide en contact avec une surface plane et soumise à la gravité a été également modélisée. Dans ce cas, l'équilibre est atteint au bout de 1 s.

Sur la Figure 2-10 sont comparés les résultats de deux modélisations réalisées dans les mêmes conditions si ce n'est que dans un cas est pris en compte le terme de tension de surface



et dans l'autre non. Dans le cas où le cube est juste soumis à la gravité, le cube s'est affaissé (sous l'effet de son poids) sans que les endroits anguleux ne se soient arrondis. Dans le cas où le terme de tension de surface a été introduit, la forme finale est celle d'une goutte posée. Le champs de pression à l'intérieur n'est plus homogène mais il dépend à présent de la gravité : la pression est maximale au niveau du contact avec le support et minimale au point le plus haut.



**Figure 2-10 : Comparaison entre le comportement à  $t=1s$  d'une goutte soumise à l'action de la gravité avec et sans tension de surface**

Les essais de l'implémentation de la tension de surface dans Forge3 sur un simple cube ont montré des résultats intéressants et correspondants à ceux attendus. L'algorithme employé est donc validé et pourra être à présent employé dans le cadre du trempage.

Il faut noter ici qu'aucun angle de mouillage n'a été utilisé, l'angle observé ici est donc uniquement le résultat de la gravité et du type de contact matière/support utilisé.

## 2.3 Formulation du problème thermique

Dans le cas de trempage à chaud, il existe des échanges thermiques entre le bain et le moule qu'il est important de prendre en compte. En effet, les variations de température vont avoir une influence sur le comportement rhéologique du fluide et donc sur l'épaisseur finale extraite.

### 2.3.1 Equation de la chaleur

Les échanges thermiques entre le bain, le moule et le milieu extérieur sont régis par l'équation de la chaleur suivante :

$$\rho \cdot C_p \cdot \frac{dT}{dt} + \text{div}(q) = f_p \cdot \tau : \dot{\varepsilon} \quad \text{Eq. 2-54}$$

avec  $\rho$  est la densité,  $C_p$  la chaleur massique,  $T$  le champ de température et  $f_p$  la fraction de puissance de déformation transformée en chaleur (coefficient de Taylor-Quinney).

Le flux  $q$  est défini à l'aide de la loi de Fourier en fonction du gradient de température :

$$q = -\lambda^c \cdot \text{grad}(T) \quad \text{Eq. 2-55}$$

avec  $\lambda^c$  la conductivité du matériau.

On a alors :

$$\rho \cdot C_p \cdot \frac{dT}{dt} - \text{div}(\lambda^c \cdot \text{grad}(T)) = f_p \cdot \tau : \dot{\varepsilon} \quad \text{Eq. 2-56}$$

### 2.3.2 Conditions aux limites

Le procédé de trempage anisotherme regroupe différents types de conditions aux limites en fonction du type de surfaces. Les échanges se font par convection ou rayonnement sur les surfaces libres (bain) et par conduction sur les surfaces de contact (moule et plaque). Il est également possible d'imposer un flux ou une température.

- *Convection et rayonnement*

Ces types d'échange se rencontrent au niveau de la surface du bain  $\partial\Omega_{cr}$ . L'équation régissant la convection est la suivante :

$$(-\lambda^c \cdot \text{grad}T) \cdot n = h_{conv} (T - T_{ext}) \quad \text{Eq. 2-57}$$

avec  $h_{conv}$  est le coefficient de transfert par convection,  $T$  la température du bain et  $T_{ext}$  la température extérieure.

L'équation régissant le rayonnement est la suivante :

$$(-\lambda^c \cdot \text{grad}T) \cdot n = \varepsilon_e \gamma (T^4 - T_{ext}^4) \quad \text{Eq. 2-58}$$

avec  $\varepsilon_e$  l'émissivité et  $\gamma$  la constante de Stephan-Bolzman.

En regroupant les coefficients de transfert de convection et de rayonnement, on obtient :

$$h_{cr} = h_{conv} + \varepsilon_e \gamma (T^2 + T_{ext}^2) (T + T_{ext}) \quad \text{Eq. 2-59}$$

- *Conduction*

Des transferts par conduction ont lieu à l'interface moule / liquide  $\partial\Omega_{cond}$ . L'équation décrivant ce type d'échange est la suivante :

$$(-k \cdot \text{grad}(T)) \cdot n = h_{cond} (T - T_i) \quad \text{Eq. 2-60}$$

avec  $T_i$  la température d'interface entre les deux domaines et  $h_{cond}$  le coefficient de transfert traduisant la résistance thermique de contact.

L'expression permettant de déterminer la température d'interface  $T_i$  est :

$$T_i = \frac{b_1 T_1 + b_2 T_2}{b_1 + b_2} \quad \text{Eq. 2-61}$$

où  $T_j$  est la température du milieu  $j$  et  $b_j$  l'effusivité du milieu  $j$  telle que  $b_j = \sqrt{h_j \rho_j c_j}$ .

- *Température imposée*

Il est également possible d'imposer une température  $T_{imp}$  sur une partie du bord  $\partial\Omega_T$  du domaine ou encore un flux sortant imposé  $\Phi_{imp}$  :

$$\begin{aligned} T &= T_{imp} \\ \Phi_{imp} &= -\lambda^c \text{grad}T \cdot n \end{aligned} \quad \text{Eq. 2-62}$$

Le bain de trempage est posé sur une plaque qui peut permettre de le chauffer en lui imposant une température selon l'équation 2-62.

### 2.3.3 Résolution du système

La forme variationnelle de l'équation de chaleur est :

$$\begin{aligned} \forall T^*, \int_{\Omega} \rho C_p \frac{dT}{dt} T^* dV + \int_{\Omega} \lambda^c \cdot \text{grad}(T) \cdot \text{grad}(T^*) dV + \int_{\partial\Omega_{cr}} h_{cr} (T - T_{ext}) T^* dS \\ + \int_{\partial\Omega_{cond}} h_{cond} (T - T_i) T^* dS + \int_{\partial\Omega_{flux}} \Phi_{imp} T^* dS - \int_{\Omega} f S : \dot{\epsilon} T^* dV = 0 \end{aligned} \quad \text{Eq. 2-63}$$

#### 2.3.3.1 *Discrétisation spatiale*

La discrétisation du problème thermique s'appuie sur le même maillage que celui qui discrétise le problème mécanique. Le même type d'éléments P1 est utilisé pour l'interpolation et la discrétisation de  $T$  ; la température est interpolée aux nœuds ainsi :

$$T_h = \sum_{k=1}^{nbnoe} T_k N_k \quad \text{Eq. 2-64}$$

A l'aide de cette interpolation, il est possible de réécrire l'équation 2-63:

$$C \frac{dT_h}{dt} + K \cdot T_h = Q \quad \text{Eq. 2-65}$$



$$\begin{cases} \alpha_2 = 1 - \alpha_1 + \left(\frac{1}{2} - \alpha_1\right) \frac{dt_0}{dt} - \frac{1}{2} \gamma_2 \left(1 + \frac{dt_0}{dt}\right) \\ \alpha_3 = \left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\right) \frac{dt_0}{dt} + \frac{1}{2} \gamma_2 \left(1 + \frac{dt_0}{dt}\right) \end{cases} \quad \text{Eq. 2-70}$$

et inconditionnellement stable pour :

$$\begin{aligned} \gamma_2 &\geq \frac{1}{2} \\ \alpha_3 &> \frac{1}{2} \gamma_2 \end{aligned} \quad \text{Eq. 2-71}$$

Les équations 2-69 et 2-70 sont utilisées pour réécrire le problème 2-63 :

$$\begin{aligned} C \left( \frac{\beta_1 T_{n-1} + \beta_2 T_n}{\Delta t_0} + \frac{\gamma_1 T_n + \gamma_2 T_{n+1}}{\Delta t} \right) + K \cdot (\alpha_1 T_{n-1} + \alpha_2 T_n + \alpha_3 T_{n+1}) &= Q \\ \Leftrightarrow \left( C \frac{\gamma_2}{\Delta t} + K \cdot \alpha_3 \right) T_{n+1} &= Q - K \cdot (\alpha_1 T_{n-1} + \alpha_2 T_n) - C \left( \frac{\beta_1 T_{n-1} + \beta_2 T_n}{\Delta t_0} + \frac{\gamma_1 T_n}{\Delta t} \right) \\ \Leftrightarrow GA \cdot T_{n+1} &= \frac{1}{\alpha_3} \left[ Q + K \cdot (\alpha_1 T_{n-1} + \alpha_2 T_n) - C \left( \frac{\beta_1 T_{n-1} + \beta_2 T_n}{dt_0} + \frac{\gamma_1 T_n}{dt} \right) \right] \end{aligned} \quad \text{Eq. 2-72}$$

avec  $GA = C \frac{\gamma_2}{\alpha_3 \cdot dt} + K$

$$\begin{aligned} GA \cdot T_{n+1} &= \frac{1}{\alpha_3} \left[ Q + \left( C \frac{\gamma_2}{\alpha_3 \cdot dt} - GA \right) \cdot (\alpha_1 T_{n-1} + \alpha_2 T_n) - C \left( \frac{\beta_1 T_{n-1} + \beta_2 T_n}{dt_0} + \frac{\gamma_1 T_n}{dt} \right) \right] \\ \Leftrightarrow GA \cdot \frac{T^*}{\alpha_3} &= \frac{1}{\alpha_3} \left( Q + C \left( \left( \frac{\alpha_1 \gamma_2}{\alpha_3 \cdot dt} - \frac{\beta_1}{dt_0} \right) T_{n-1} + \left( \frac{\alpha_2 \gamma_2}{\alpha_3 \cdot dt} - \frac{\beta_2}{dt_0} - \frac{\gamma_1}{dt} \right) T_n \right) \right) \end{aligned}$$

Le système 2-72 est résolu à l'aide de la méthode du gradient conjugué préconditionné par la diagonale. On trouve alors l'expression de  $T_{n+1}$  à partir de :

$$T_{n+1} = \frac{T^*}{\alpha_3} - (\alpha_1 T_{n-1} + \alpha_2 T_n) \quad \text{Eq. 2-73}$$

### 2.3.3.3 Thermique asynchrone

Lors de gradients thermiques importants à l'interface entre la pièce et l'outil, pour minimiser les problèmes numériques liés à ce choc, il faut raffiner très fin le maillage à cette interface. Comme la discrétisation spatiale est la même pour le problème mécanique et pour le problème thermique, un maillage fin conduit à une forte augmentation des temps de calcul

pour la résolution du problème mécanique. La solution à ce problème est l'utilisation de maillages calibrés de manière à ne pas trop pénaliser la résolution du problème mécanique, ce qui peut parfois conduire à des imprécisions lors de la résolution du problème thermique.

Il est possible d'utiliser une méthode de pas de temps asynchrone pour faire face à ces problèmes thermiques. Les oscillations spatio-temporelles dues aux chocs thermiques sont liées au temps de pénétration de la chaleur  $t_p$ , temps nécessaire au flux thermique de parcourir une taille de maille  $h$ . Dans ce cas, le choc thermique ne sera pris en compte que lorsque le gradient thermique aura traversé l'élément frontière au bout d'un temps caractéristique :

$$\Delta t_{\text{asyn}} = \frac{\rho c}{\lambda^c} h \quad \text{Eq. 2-74}$$

On relie ainsi les pas de discrétisation temporelle et spatiale. Pour une taille de maille stable et imposée, le pas de temps défini à l'équation 2-74 ne doit pas être plus grand que le pas de temps stable, soit [Tronel93]:

$$\Delta t \geq \Delta t_{\text{asyn}} \quad \text{Eq. 2-75}$$

Cette équation donne le pas de temps minimal pour qu'il n'y ait pas d'oscillation du champ de température. Il faut ensuite ramener le résultat obtenu à  $t + dt_{\text{asyn}}$  au problème défini à  $t + dt$ . La température  $T_{n+1}$  à  $\Delta t$  est déterminée à partir de  $T_{n+1}^{\text{asyn}}$  calculée à  $\Delta t_{\text{asyn}}$  selon l'expression suivante [Aliaga00] :

$$T_{n+1} = T_n + (T_{n+1}^{\text{asyn}} - T_n) \frac{\Delta t}{\Delta t_{\text{asyn}}} \quad \text{Eq. 2-76}$$

#### 2.3.4 Le couplage thermo-mécanique

Le couplage entre le problème mécanique et le problème thermique est faible. Les équations mécaniques 2-2 et 2-3 et l'équation thermique 2-54 sont résolues indépendamment et de façon séquentielle. A l'instant  $t$ , le problème mécanique est résolu avec la configuration mécanique et thermique de l'instant  $t$ . Le problème thermique est ensuite résolu avec la configuration mécanique de l'instant  $t + \Delta t$  calculé précédemment et la configuration thermique de l'instant  $t$ .

---

*Dans ce chapitre, nous avons présenté la formulation thermo-mécanique du problème lié au trempage. Le problème est résolu à l'aide d'une approche lagrangienne par éléments finis. La tension de surface a été implémentée dans le code à l'aide d'une méthode basée sur la reformulation de la courbure grâce à l'opérateur de Laplace-Beltrami. Un cas de validation de l'implémentation de la tension de surface a été présenté en utilisant le logiciel Forge3.*

---