Chapitre 1

Formulation générale et identification dans le cas anisotrope

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on postule l'existence d'une mesure de déformation $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$ permettant d'écrire le potentiel d'énergie libre sous forme quadratique. Par la suite, après avoir défini le tenseur de contrainte associé à la mesure de déformation $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$, on développe les lois de comportement à partir de l'inégalité de Clausius-Duhem. Après avoir donné la forme générale de la mesure de déformation ainsi que ses conditions d'existence, on développe la procédure d'identification des paramètres du modèle et ce, en deux phases:

- tenseur de relaxation: par équivalence aux petites déformations
- mesure de déformation: par des essais de relaxation pure.

On montre également les limites d'une telle identification dans le cas général des matériaux anisotropes.

1.2 Potentiel d'énergie libre

On se limite à l'étude d'un certain type de matériaux pour lesquels on suppose que ladite mesure de déformation $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$ existe et est telle que le potentiel d'énergie libre soit linéaire au sens de Boltzmann, soit:

II.4 $$\rho_0\Psi\ (t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} \dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}(t_1) : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}\ (2\ t - t_1 - t_2) : \dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}(t_2)\ dt_1\ dt_2$$

avec:

$$\begin{cases} \rho_0 : \text{masse volumique exprimée dans la configuration de référence} \\ \underline{\underline{\mathbb{R}}} : \text{tenseur de relaxation d'ordre 4} \end{cases}$$

La mesure de déformation est recherchée sous la forme d'une fonction tensorielle isotrope du tenseur de déformation de Green-Lagrange.

1.3 Tenseur de contrainte

On associe à cette mesure de déformation $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$ le tenseur de contrainte $\underline{\underline{\mathbb{S}}}$ qui lui est énergétiquement associé:

$$\underline{\underline{\mathbb{S}}}(t) = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\mathbb{E}}}}(t)$$

Par conséquent, si $d\Omega_0$ est un élément de volume du domaine Ω_0 dans la configuration de référence, et sachant que $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$ est une fonction tensorielle isotrope de $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$ ou de $\underline{\underline{\Delta}}$ $\left(\underline{\underline{\mathbb{E}}} = f\left(\underline{\underline{\Delta}}\right) \text{ ou } \underline{\underline{\mathbb{E}}} = g\left(\underline{\underline{\mathbb{C}}}\right)\right.$ où f et g sont deux fonctions continûment dérivables), on a, en notant $\mathcal{P}$ la densité volumique de puissance:

II.5 $$\mathcal{P}\, d\Omega_0 = \underline{\underline{\Pi}} : \dot{\underline{\underline{\Delta}}}\, d\Omega_0 = \underline{\underline{\mathbb{S}}} : \dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}\, d\Omega_0$$

Bien entendu, le tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff 2 est défini, dans le cas isotherme, par la relation générale suivante:

II.6 $$\underline{\underline{\Pi}}(t) = \mathcal{F}\begin{bmatrix} t \\ \underline{\underline{\Delta}}(\tau) \\ -\infty \end{bmatrix}$$

Le modèle que l'on veut définir doit inclure les comportements en petites déformations et les comportements viscoélastiques linéaires. Par conséquent, le tenseur de déformation $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$ doit être équivalent, aux petites déformations, au tenseur de déformation linéarisée $\underline{\underline{\varepsilon}}$.

1.4 Lois de comportement

Le potentiel d'énergie libre étant postulé par (II.4), nous allons vérifier si le processus ainsi défini est thermodynamiquement admissible, c'est à dire que la puissance dissipée $\mathcal{D}$ est positive (inégalité de Clausius-Duhem). En formalisme

Lagrangien et dans l'hypothèse de grandes déformations isothermes, cette inégalité s'écrit [Mandel, 1977]:

$$\textbf{II.7} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}\ (t) \ = \ \underline{\underline{\Pi}}\ (t)\ :\ \dot{\underline{\underline{\Delta}}}\ (t)\ -\ \rho_0 \dot{\Psi}\ (t) \ = \ \underline{\underline{\mathbb{S}}}\ (t)\ :\ \dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}\ (t)\ -\ \rho_0 \dot{\Psi}\ (t) \\ \\ \mathcal{D}\ (t) \ \geq \ 0,\ \forall\ \dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}(t) \end{array} \right.$$

Dérivons par rapport au temps la relation (II.4):

$$\textbf{II.8} \quad \begin{aligned} \rho_0 \dot{\Psi}\ (t) \ &= \ \left[\int_{-\infty}^{t} \underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}\ (t\ -\ t_1) : \dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}(t_1)\ dt_1 \right] : \dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}\ (t) \\ &+ \ \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{t} \dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}(t_1) : \dot{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}\ (2\ t\ -\ t_1\ -\ t_2) : \dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}(t_2)\ dt_1\ dt_2 \end{aligned}$$

avec $\dot{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}\ (u) \ = \ \dfrac{\partial \underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}{\partial u}\ (u)$

En substituant (II.8) dans l'équation (II.7), on obtient:

$$\textbf{II.9} \quad \begin{aligned} \mathcal{D}\ (t) \ &= \ \left[\underline{\underline{\mathbb{S}}}\ (t)\ -\ \int_{-\infty}^{t} \underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}\ (t\ -\ t_1) : \dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}(t_1)\ dt_1 \right] : \dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}\ (t) \\ &- \ \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{t} \dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}(t_1) : \dot{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}\ (2\ t\ -\ t_1\ -\ t_2) : \dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}(t_2)\ dt_1\ dt_2 \geq 0 \end{aligned}$$

L'inégalité de Clausius-Duhem doit être positive quelle que soit la valeur de $\dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}\ (t)$ à chaque instant t de l'évolution, donc en particulier pour deux valeurs opposées de $\dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}\ (t)$. On obtient alors:

$$\textbf{II.10} \quad \left[\underline{\underline{\mathbb{S}}}\ (t)\ -\ \int_{-\infty}^{t} \underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}\ (t\ -\ t_1) : \dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}(t_1)\ dt_1 \right] : \dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}\ (t) \ = \ 0$$

qui doit être vérifée pour tout tenseur $\dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}\ (t)$ symétrique. On en conclut:

$$\textbf{II.11} \quad \underline{\underline{\mathbb{S}}}\ (t) \ = \ \int_{-\infty}^{t} \underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}\ (t\ -\ t_1) : \dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}(t_1)\ dt_1$$

On obtient donc une loi de comportement linéaire reliant la contrainte $\underline{\underline{\mathbb{S}}}$ à la déformation qui lui est thermodynamiquement associée $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$ où le noyau $\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}$ est un tenseur de relaxation. Ceci n'est cependant valable que si le tenseur de relaxation est une fonction positive et décroissante du temps. C'est généralement le cas car il est souvent choisi sous forme exponentielle décroissante $\left(\sum_i b_i \exp^{-c_i t}\right)$ ou sous forme puissance à exposant négatif $\left(\sum_i b_i t^{-c_i}\right)$ [1].

Partant de la relation (II.5) et sachant que $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$ est une fonction tensorielle isotrope de $\underline{\underline{\Delta}}$, on obtient la relation liant $\underline{\underline{\Pi}}$ à $\underline{\underline{\mathbb{S}}}$:

$$\textbf{II.12} \quad \underline{\underline{\Pi}}\,(t) = \underline{\underline{\mathbb{S}}}\,(t) : \left[{}^t\!\left(\frac{d\underline{\underline{\mathbb{E}}}}{d\underline{\underline{\Delta}}}\right)\right](t)$$

Par conséquent, les lois de comportement dans le cas compressible et la puissance dissipée, issues du second principe de la thermodynamique, s'écrivent:

$$\textbf{II.13} \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\mathbb{S}}}\,(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}\,(t - t_1) : \dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}(t_1)\, dt_1 \\ \underline{\underline{\Pi}}\,(t) = \left[\displaystyle\int_{-\infty}^{t} \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}\,(t - t_1) : \dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}(t_1)\, dt_1\right] : \dfrac{d\underline{\underline{\mathbb{E}}}}{d\underline{\underline{\Delta}}}\,(t) \\ \mathcal{D}\,(t) = - \displaystyle\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} \dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}(t_1) : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}\,(2\,t - t_1 - t_2) : \dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}(t_2)\, dt_1\, dt_2 \end{array} \right.$$

Dans le cas incompressible, la contrainte de Piola-Kirchhoff 2 s'écrit:

$$\textbf{II.14} \quad \underline{\underline{\Pi}}\,(t) = \left[\int_{-\infty}^{t} \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}\,(t - t_1) : \dot{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}(t_1)\, dt_1\right] : \frac{d\underline{\underline{\mathbb{E}}}}{d\underline{\underline{\Delta}}}\,(t) + p(t)\, \underline{\underline{\mathbb{C}}}^{-1}(t)$$

Ainsi, l'identification du comportement thermodynamiquement admissible, qui est étudiée au paragraphe suivant, se réduit à la détermination du tenseur de déformation linéarisant $\underline{\underline{\mathbb{E}}}\left(\underline{\underline{\Delta}}\right)$ et du tenseur de relaxation d'ordre 4 $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}(t)$.

1.5 Forme générale de la mesure de déformation

On a vu dans le paragraphe 1.3 que l'on choisissait $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$ sous forme d'une fonction tensorielle isotrope de $\underline{\underline{\Delta}}$, définie sur l'ensemble des tenseurs symétriques d'ordre 2. Par conséquent, on peut écrire la forme générale pour $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$ [Serrin, 1959]:

$$\textbf{II.15} \quad \underline{\underline{\mathbb{E}}} = a_0\left(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta\right)\, \underline{\underline{1}} + a_1\left(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta\right)\, \underline{\underline{\Delta}} + a_2\left(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta\right)\, \underline{\underline{\Delta}}^2$$

où a_0, a_1 et a_2 sont des fonctions continues et continûment dérivables de trois invariants de $\underline{\underline{\Delta}}$, I_1^Δ , I_2^Δ , I_3^Δ. On a vu également (paragraphe 1.3) que $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$ devait être équivalente, aux petites déformations, au tenseur linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$.

1. Dans les deux cas, les paramètres b_i et c_i sont positifs

◇ **Conditions sur a_0, a_1 et a_2**

En prenant $I_1^\Delta = tr\left(\underline{\underline{\Delta}}\right)$, $I_2^\Delta = \frac{1}{2}\, tr\left(\underline{\underline{\Delta}}^2\right)$ et $I_3^\Delta = \frac{1}{3}\, tr\left(\underline{\underline{\Delta}}^3\right)$, l'équivalence entre $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ aux petites déformations impose sur a_0, a_1 et a_2 les conditions suivantes:

- Première condition: les fonctions doivent être bornées de façon à ce que la déformation ne diverge pas lors du passage aux limites

II.16 $\quad a_0,\ a_1$ *et* a_2 bornées au voisinage de $\underline{\underline{\Delta}} \approx \underline{\underline{\varepsilon}}$

Cette condition est naturellement vérifiée du fait que les $(a_i)_{i=0\cdots 2}$ sont C^1.

- Deuxième condition: équivalence de $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$ aux petites déformations

$$\textbf{II.17} \quad \underline{\underline{\mathbb{E}}}\left(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta\right) \approx \underline{\underline{\varepsilon}} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} \lim\limits_{\substack{I_1^\Delta \to 0 \\ I_2^\Delta \to 0 \\ I_3^\Delta \to 0}} a_0 \left(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta\right) & = & 0 \\ \\ \lim\limits_{\substack{I_1^\Delta \to 0 \\ I_2^\Delta \to 0 \\ I_3^\Delta \to 0}} a_1 \left(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta\right) & = & 1 \end{array} \right.$$

- Troisième condition: équivalence de la dérivée de $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$

$$\textbf{II.18} \quad \lim\limits_{\substack{I_1^\Delta \to 0 \\ I_2^\Delta \to 0 \\ I_3^\Delta \to 0}} \frac{d\underline{\underline{\mathbb{E}}}}{d\underline{\underline{\Delta}}} \left(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta\right) = \underline{\underline{\underline{\underline{1}}}} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} \lim\limits_{\substack{I_1^\Delta \to 0 \\ I_2^\Delta \to 0 \\ I_3^\Delta \to 0}} \dfrac{\partial a_0}{\partial I_1} \left(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta\right) & = & 0 \\ \\ \lim\limits_{\substack{I_1^\Delta \to 0 \\ I_2^\Delta \to 0 \\ I_3^\Delta \to 0}} a_1 \left(I_1^\Delta, I_2^\Delta, I_3^\Delta\right) & = & 1 \end{array} \right.$$

où $\underline{\underline{\underline{\underline{1}}}}_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)$.

En revanche, il n'y a aucune condition sur a_2 ainsi que sur les autres dérivées puisque, dans l'hypothèse des petites perturbations, $\underline{\underline{\Delta}}^2$ est un infiniment petit du second ordre.

On suppose, dans la suite, que toutes les fonctionnelles sont continues et différentiables au sens de Fréchet [Hassani *et al.*, 1997].

1.6 Identification du tenseur de relaxation

L'identification du tenseur de relaxation $\underline{\underline{\mathbb{R}}}$ se fait par équivalence aux petites déformations. En effet, dans ce cas, le potentiel pseudo-linéaire est équivalent à:

$$\textbf{II.19} \qquad \Psi_{eq}(t) = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} \frac{1}{2}\,\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}(t_1) : \underline{\underline{\mathbb{R}}}\;(2\,t \;-\; t_1 \;-\; t_2) : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}(t_2)\; dt_1\; dt_2$$

Il suffit alors de considérer des cas particuliers de chargements en petites déformations, selon le nombre de coefficients indépendants de $\underline{\underline{\mathbb{R}}}$ pour pouvoir identifier complètement le tenseur. Dans le cas isotrope compressible, par exemple, deux essais suffisent.

Remarque 1.1 *Cette méthode d'identification du tenseur de relaxation est exacte si le matériau est rigoureusement pseudo-linéaire. Si le comportement ne l'est pas mais que l'on cherche à l'approcher par un comportement pseudo-linéaire, cette technique nous conduira vers un tenseur de relaxation qui, au voisinage de la déformation désirée, ne sera pas exact puisqu'il aura été identifié au voisinage des petites déformations. En pratique, il faudra, après avoir identifié la mesure de déformation, apporter une correction sur le tenseur de relaxation.*

1.7 Identification de la mesure linéarisante

Dans ce paragraphe, on suppose que le tenseur de relaxation a été identifié par la méthode décrite au paragraphe précédent. Nous allons identifier la mesure linéarisante par des essais de relaxation. Imposons-nous une déformation de la forme $\underline{\underline{\mathbb{E}}}(t) \;=\; \tilde{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}\; H(t)$ où $H(t)$ est la fonction de Heaviside définie par:

$$\textbf{II.20} \qquad H(t) \;=\; \begin{cases} 1 \;\; si\, t \geq 0 \\ \\ 0 \;\; si\, t < 0 \end{cases}$$

Par conséquent, la relation (II.4) se réduit à:

$$\textbf{II.21} \qquad \Psi(t) \;=\; \frac{1}{2}\,\tilde{\underline{\underline{\mathbb{E}}}} \;:\; \underline{\underline{\mathbb{R}}}\,(t) \;:\; \tilde{\underline{\underline{\mathbb{E}}}}$$

L'identification de la mesure linéarisante se fait aux temps courts (élasticité instantanée) et aux temps longs (équilibre). Utilisons les potentiels initial et à l'équilibre Ψ_0 et Ψ_∞ respectivement, valeurs limites en 0 et à l'infini du potentiel d'énergie libre Ψ. Les relations (II.4) et (II.21) conduisent alors à:

$$\textbf{II.22} \qquad \begin{cases} \Psi_0 \;=\; \dfrac{1}{2}\,\tilde{\underline{\underline{\mathbb{E}}}} \;:\; \underline{\underline{\mathbb{R}}}_0 \;:\; \tilde{\underline{\underline{\mathbb{E}}}} \\ \\ \Psi_\infty \;=\; \dfrac{1}{2}\,\tilde{\underline{\underline{\mathbb{E}}}} \;:\; \underline{\underline{\mathbb{R}}}_\infty \;:\; \tilde{\underline{\underline{\mathbb{E}}}} \end{cases}$$

où on a noté $\Psi_i = \lim\limits_{t \to i} \Psi(t)$ et $\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}_i = \lim\limits_{t \to i} \underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}(t)$.

Etant donnée la forme de la mesure linéarisante (relation (II.15)), qui suppose trois inconnues (a_0, a_2 et a_2), il faudrait connaître le potentiel d'énergie libre Ψ à un instant t_0 différent de 0 et de l'infini. Un tel potentiel s'écrirait, par analogie avec (II.22):

$$\textbf{II.23} \qquad \Psi_{t_0} = \frac{1}{2} \, \underline{\underline{\tilde{\mathbb{E}}}} : \underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}_{t_0} : \underline{\underline{\tilde{\mathbb{E}}}}$$

Remarque 1.2 *Il s'agit ici d'une étude théorique car, en pratique, nous n'avons pas accès à $\Psi(t)$. En revanche, on connaît les histoires de $\Pi(t)$ et de $\Delta(t)$ lors d'un quelconque essai. On peut alors, par intégration de la courbe (effort-déformation) pour un essai convenablement choisi, déterminer le potentiel d'énergie libre.*

En substituant (II.15) dans (II.22) et (II.23), on obtient le système suivant en a_0, a_1 et a_2:

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{rcl}
2\,\Psi_0(\underline{\underline{\Delta}}) & = & a_0^2 \; \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}_0 : \underline{\underline{1}} \; + \; 2\,a_0\,a_1\,\underline{\underline{1}} : \underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}_0 : \underline{\underline{\Delta}} \; + \; 2\,a_0\,a_2\,\underline{\underline{1}} : \underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}_0 : \underline{\underline{\Delta}}^2 \\
 & + & a_1^2 \; \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}_0 : \underline{\underline{\Delta}} \; + \; 2\,a_1\,a_2\,\underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}_0 : \underline{\underline{\Delta}}^2 \; + \; a_2^2 \; \underline{\underline{\Delta}}^2 : \underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}_0 : \underline{\underline{\Delta}} \\
2\,\Psi_{t_0}(\underline{\underline{\Delta}}) & = & a_0^2 \; \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}_{t_0} : \underline{\underline{1}} \; + \; 2\,a_0\,a_1\,\underline{\underline{1}} : \underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}_{t_0} : \underline{\underline{\Delta}} \; + \; 2\,a_0\,a_2\,\underline{\underline{1}} : \underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}_{t_0} : \underline{\underline{\Delta}}^2 \\
 & + & a_1^2 \; \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}_{t_0} : \underline{\underline{\Delta}} \; + \; 2\,a_1\,a_2\,\underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}_{t_0} : \underline{\underline{\Delta}}^2 \; + \; a_2^2 \; \underline{\underline{\Delta}}^2 : \underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}_{t_0} : \underline{\underline{\Delta}} \\
2\,\Psi_\infty(\underline{\underline{\Delta}}) & = & a_0^2 \; \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}_\infty : \underline{\underline{1}} \; + \; 2\,a_0\,a_1\,\underline{\underline{1}} : \underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}_\infty : \underline{\underline{\Delta}} \; + \; 2\,a_0\,a_2\,\underline{\underline{1}} : \underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}_\infty : \underline{\underline{\Delta}}^2 \\
 & + & a_1^2 \; \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}_\infty : \underline{\underline{\Delta}} \; + \; 2\,a_1\,a_2\,\underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}_\infty : \underline{\underline{\Delta}}^2 \; + \; a_2^2 \; \underline{\underline{\Delta}}^2 : \underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}_\infty : \underline{\underline{\Delta}}
\end{array} \right.$$

Ce système de trois équations à trois inconnues (a_0, a_1 et a_2) est non linéaire d'ordre 2 ce qui rend sa résolution extrêmement complexe. Nous allons néanmoins tenter de le résoudre dans le paragraphe suivant.

1.8 Résolution du système ($\mathcal{S}$)

Le système ($\mathcal{S}$) étant extrêmement non linéaire, on peut, moyenant la connaissance du potentiel d'énergie libre à d'autres instants, changer d'inconnues pour se ramener à un système linéaire de six équations à six inconnues. En notant les nouvelles inconnues $x = a_0^2$, $y = 2\,a_0\,a_1$, $z = 2\,a_0\,a_2$, $t = a_1^2$, $u = 2\,a_1\,a_2$ et $v = a_2^2$, le système devient:

$$
(\mathcal{S}')\left\{
\begin{array}{lcl}
2\,\Psi_0\left(\underline{\underline{\Delta}}\right) & = & x\ \underline{\underline{\mathbf{1}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_0:\underline{\underline{\mathbf{1}}} \;+\; y\ \underline{\underline{\mathbf{1}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_0:\underline{\underline{\Delta}} \;+\; z\ \underline{\underline{\mathbf{1}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_0:\underline{\underline{\Delta}}^2 \\
 & + & t\ \underline{\underline{\Delta}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_0:\underline{\underline{\Delta}} \;+\; u\ \underline{\underline{\Delta}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_0:\underline{\underline{\Delta}}^2 \;+\; v\ \underline{\underline{\Delta}}^2:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_0:\underline{\underline{\Delta}} \\[2ex]
2\,\Psi_{t_0}\left(\underline{\underline{\Delta}}\right) & = & x\ \underline{\underline{\mathbf{1}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_0}:\underline{\underline{\mathbf{1}}} \;+\; y\ \underline{\underline{\mathbf{1}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_0}:\underline{\underline{\Delta}} \;+\; z\ \underline{\underline{\mathbf{1}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_0}:\underline{\underline{\Delta}}^2 \\
 & + & t\ \underline{\underline{\Delta}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_0}:\underline{\underline{\Delta}} \;+\; u\ \underline{\underline{\Delta}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_0}:\underline{\underline{\Delta}}^2 \;+\; v\ \underline{\underline{\Delta}}^2:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_0}:\underline{\underline{\Delta}} \\[2ex]
2\,\Psi_{t_1}\left(\underline{\underline{\Delta}}\right) & = & x\ \underline{\underline{\mathbf{1}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_1}:\underline{\underline{\mathbf{1}}} \;+\; y\ \underline{\underline{\mathbf{1}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_1}:\underline{\underline{\Delta}} \;+\; z\ \underline{\underline{\mathbf{1}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_1}:\underline{\underline{\Delta}}^2 \\
 & + & t\ \underline{\underline{\Delta}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_1}:\underline{\underline{\Delta}} \;+\; u\ \underline{\underline{\Delta}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_1}:\underline{\underline{\Delta}}^2 \;+\; v\ \underline{\underline{\Delta}}^2:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_1}:\underline{\underline{\Delta}} \\[2ex]
2\,\Psi_{t_2}\left(\underline{\underline{\Delta}}\right) & = & x\ \underline{\underline{\mathbf{1}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_2}:\underline{\underline{\mathbf{1}}} \;+\; y\ \underline{\underline{\mathbf{1}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_2}:\underline{\underline{\Delta}} \;+\; z\ \underline{\underline{\mathbf{1}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_2}:\underline{\underline{\Delta}}^2 \\
 & + & t\ \underline{\underline{\Delta}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_2}:\underline{\underline{\Delta}} \;+\; u\ \underline{\underline{\Delta}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_2}:\underline{\underline{\Delta}}^2 \;+\; v\ \underline{\underline{\Delta}}^2:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_2}:\underline{\underline{\Delta}} \\[2ex]
2\,\Psi_{t_3}\left(\underline{\underline{\Delta}}\right) & = & x\ \underline{\underline{\mathbf{1}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_3}:\underline{\underline{\mathbf{1}}} \;+\; y\ \underline{\underline{\mathbf{1}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_3}:\underline{\underline{\Delta}} \;+\; z\ \underline{\underline{\mathbf{1}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_3}:\underline{\underline{\Delta}}^2 \\
 & + & t\ \underline{\underline{\Delta}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_3}:\underline{\underline{\Delta}} \;+\; u\ \underline{\underline{\Delta}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_3}:\underline{\underline{\Delta}}^2 \;+\; v\ \underline{\underline{\Delta}}^2:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_3}:\underline{\underline{\Delta}} \\[2ex]
2\,\Psi_{\infty}\left(\underline{\underline{\Delta}}\right) & = & x\ \underline{\underline{\mathbf{1}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{\infty}:\underline{\underline{\mathbf{1}}} \;+\; y\ \underline{\underline{\mathbf{1}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{\infty}:\underline{\underline{\Delta}} \;+\; z\ \underline{\underline{\mathbf{1}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{\infty}:\underline{\underline{\Delta}}^2 \\
 & + & t\ \underline{\underline{\Delta}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{\infty}:\underline{\underline{\Delta}} \;+\; u\ \underline{\underline{\Delta}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{\infty}:\underline{\underline{\Delta}}^2 \;+\; v\ \underline{\underline{\Delta}}^2:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{\infty}:\underline{\underline{\Delta}}
\end{array}\right.
$$

On peut récrire ce système sous forme matricielle:

II.24 $\left[\underline{\mathbf{A}}\right]\cdot\{\underline{\mathbf{X}}\} = \{\underline{\mathbf{B}}\}$

avec:

$$\left\{\begin{array}{l}
[\underline{\underline{\mathbf{A}}}] = \begin{bmatrix}
\underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{0} : \underline{\underline{\mathbf{1}}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{0} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{0} : \underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{0} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{0} : \underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}}^2 : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{0} : \underline{\underline{\Delta}} \\
\underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_0} : \underline{\underline{\mathbf{1}}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_0} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_0} : \underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_0} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_0} : \underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}}^2 : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_0} : \underline{\underline{\Delta}} \\
\underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_1} : \underline{\underline{\mathbf{1}}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_1} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_1} : \underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_1} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_1} : \underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}}^2 : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_1} : \underline{\underline{\Delta}} \\
\underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_2} : \underline{\underline{\mathbf{1}}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_2} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_2} : \underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_2} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_2} : \underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}}^2 : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_2} : \underline{\underline{\Delta}} \\
\underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_3} : \underline{\underline{\mathbf{1}}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_3} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_3} : \underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_3} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_3} : \underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}}^2 : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_3} : \underline{\underline{\Delta}} \\
\underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{\infty} : \underline{\underline{\mathbf{1}}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{\infty} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{\infty} : \underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{\infty} : \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{\infty} : \underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}}^2 : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{\infty} : \underline{\underline{\Delta}}
\end{bmatrix} \\
{}^t\{\underline{\mathbf{X}}\} = \{x \;\; y \;\; z \;\; t \;\; u \;\; v\} \\
{}^t\{\underline{\mathbf{B}}\} = \{2\,\Psi_0 \;\; 2\,\Psi_{t_0} \;\; 2\,\Psi_{t_1} \;\; 2\,\Psi_{t_2} \;\; 2\,\Psi_{t_3} \;\; 2\,\Psi_{\infty}\}
\end{array}\right.$$

La matrice $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ est pleine et non symétrique.

En revanche, étant donnée la symétrie du tenseur de relaxation

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{ijkl} = \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{klij}$$

on a:

$$\underline{\underline{\Delta}}^2 : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}} : \underline{\underline{\Delta}} = \underline{\underline{\Delta}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}} : \underline{\underline{\Delta}}^2$$

La matrice $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ est donc singulière et son déterminant est nul. Cela signifie que les variables u et v sont liées. On peut alors récrire ce système en remplaçant les variables u et v par une seule variable $s = u + v$, ce qui donne:

II.25 $\quad [\underline{\underline{\mathbf{A}}}'] \cdot \{\underline{\mathbf{X}}'\} \;=\; \{\underline{\mathbf{B}}'\}$

avec:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
[\underline{\underline{\mathbf{A}'}}] = \begin{bmatrix}
\underline{\underline{\mathbf{1}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_0:\underline{\underline{\mathbf{1}}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_0:\underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_0:\underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_0:\underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\Delta}}^2:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_0:\underline{\underline{\Delta}} \\
\underline{\underline{\mathbf{1}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_0}:\underline{\underline{\mathbf{1}}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_0}:\underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_0}:\underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_0}:\underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\Delta}}^2:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_0}:\underline{\underline{\Delta}} \\
\underline{\underline{\mathbf{1}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_1}:\underline{\underline{\mathbf{1}}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_1}:\underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_1}:\underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_1}:\underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\Delta}}^2:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_1}:\underline{\underline{\Delta}} \\
\underline{\underline{\mathbf{1}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_2}:\underline{\underline{\mathbf{1}}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_2}:\underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_2}:\underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_2}:\underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\Delta}}^2:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{t_2}:\underline{\underline{\Delta}} \\
\underline{\underline{\mathbf{1}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{\infty}:\underline{\underline{\mathbf{1}}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{\infty}:\underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\mathbf{1}}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{\infty}:\underline{\underline{\Delta}}^2 & \underline{\underline{\Delta}}:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{\infty}:\underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\Delta}}^2:\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}_{\infty}:\underline{\underline{\Delta}}
\end{bmatrix} \\
{}^t\{\underline{\mathbf{X}'}\} = \{x \quad y \quad z \quad t \quad s\} \\
{}^t\{\underline{\mathbf{B}'}\} = \{2\ \Psi_0 \quad 2\ \Psi_{t_0} \quad 2\ \Psi_{t_1} \quad 2\ \Psi_{t_2} \quad 2\ \Psi_{\infty}\}
\end{array}
\right.
$$

Dans ce cas et sous certaines conditions sur le tenseur de relaxation $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}}$, la matrice $\underline{\underline{\mathbf{A}'}}$ est inversible et on peut obtenir la solution du système (II.25) à l'aide du logiciel de calcul formel **MATHEMATICA®**. Après avoir trouvé les solutions x, y, z, t, s du système (II.25), afin d'obtenir les solutions a_0, a_1 et a_2 du système $\mathcal{S}$, nous devons résoudre le système de trois équations à trois inconnues:

II.26 $$\left\{ \begin{array}{lcl} 2\ a_0\ a_1 & = & y \\ 2\ a_0\ a_2 & = & z \\ 2\ a_1\ a_2 + a_2^2 & = & s \end{array} \right.$$

avec les conditions de compatibilités

II.27 $$\left\{ \begin{array}{lcl} a_0^2 & = & x \\ & & \\ a_1^2 & = & t \end{array} \right.$$

La résolution du système (II.26) conduit aux trois solutions suivantes:

II.28 $$\left\{ \begin{array}{lcl} a_0^2 & = & \dfrac{z \cdot (2\ y + z)}{4\ s} \\ & & \\ a_1^2 & = & \dfrac{y^2 \cdot s}{z \cdot (2\ y + z)} \\ & & \\ a_2^2 & = & \dfrac{z \cdot s}{2\ y + z} \end{array} \right.$$