

# Formalisme mathématique des impulsions ultracourtes

Ce chapitre présente les bases mathématiques nécessaires à l'étude de la propagation non-linéaire d'une impulsion ultracourte dans une fibre creuse : la définition complexe d'une impulsion ultracourte dans le domaine temporel et spectral, l'effet de dispersion dans un milieu, l'équation de propagation non-linéaire et les modes spatiaux d'une fibre creuse. La dernière section lève les ambiguïtés entre certaines définitions physiques et mathématiques. L'intégralité de la théorie de l'optique non-linéaire est décrite dans le livre de R. W. Boyd [21].

## 1.1 Champ électrique d'une impulsion

Les ondes électromagnétiques usuelles sont représentées temporellement par une oscillation infinie du champ électrique à une fréquence donnée :  $E(t) = A_0 e^{-i\omega_0 t}$ . Cette représentation est correcte pour un laser continu à la fréquence  $\omega_0$ . Dans le cas d'une impulsion laser, on doit ajouter une enveloppe à cette oscillation pour représenter sa localisation dans le temps. On écrit alors  $E(t) = A_0(t) e^{-i\omega_0 t}$ , l'enveloppe réelle  $A_0(t)$  varie dans le temps et  $A_0(\pm\infty) = 0$ . Enfin, pour représenter l'ensemble des impulsions courtes dont les oscillations du champ ne sont pas forcément régulières, on écrit :

$$E(t) = A_0(t) e^{i\phi(t)} \tag{1.1}$$

$A_0(t)$  est l'enveloppe (fonction réelle) et  $\phi(t)$  est la phase temporelle de l'impulsion. La phase temporelle se décompose en trois éléments :  $\phi(t) = \phi_0 - \omega_0 t + \phi_{NL}(t)$  (développement de Taylor en  $t = 0$ , centre de l'impulsion),  $\phi_0 = \phi(0)$  est la phase entre l'enveloppe et la

porteuse (Carrier Envelope Phase CEP),  $\omega_0 = -(\partial\phi/\partial t)_0$  est la pulsation de la porteuse à  $t = 0$  et  $\phi_{NL}(t)$  est la phase non-linéaire temporelle. On définit l'amplitude complexe du champ  $A(t) = A_0(t) e^{i(\phi_0 + \phi_{NL}(t))}$ , le champ s'exprime alors  $E(t) = A(t)e^{-i\omega_0 t}$ . L'amplitude complexe est utile pour l'étude des phénomènes où la pulsation  $\omega_0$  ne varie pas. Dans le domaine spectral, le champ  $E(\omega)$  d'une impulsion courte est la transformée de Fourier de  $E(t)$ . On définit  $A(\omega)$  comme la transformée de Fourier de  $A(t)$ , on a ainsi la relation :

$$E(\omega) = A(\omega - \omega_0) = A_0(\omega) e^{i\Phi(\omega)} \quad (1.2)$$

$A_0(\omega)$  est l'enveloppe (fonction réelle) et  $\Phi(\omega)$  la phase spectrale, on décompose de même  $\Phi(\omega) = \Phi_0 + t_0\omega + \Phi_{NL}(\omega)$ . Une variation de la composante continue  $\Phi_0$  modifie la CEP, une variation de la composante linéaire  $t_0$  déplace temporellement l'impulsion sans la déformer et enfin une variation de la phase spectrale non-linéaire  $\Phi_{NL}$  et/ou de l'enveloppe spectrale  $A_0(\omega)$  modifie l'impulsion.

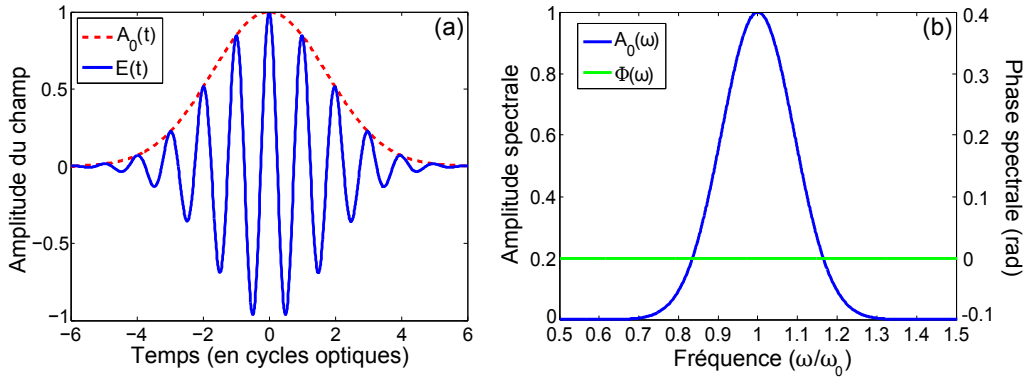


FIGURE 1.1 – Représentation temporelle (a) et spectrale (b) d'une impulsion ultracourte gaussienne ( $\sigma = \sqrt{3}$ ).

Pour une impulsion d'enveloppe gaussienne (de la forme  $A(t) = e^{-t^2/2\sigma^2}$  représentée Fig. 1.1), la largeur temporelle  $\tau$  et la largeur spectrale  $\Delta\nu$  satisfont la relation d'incertitude  $\tau\Delta\nu \geq a$  (Cauchy-Schwarz), où  $a$  dépend de la forme de l'impulsion et de la définition des largeurs. L'égalité est vraie quand  $\phi_{NL}(t) \equiv 0$  ou  $\Phi_{NL}(\omega) \equiv 0$  (ces deux conditions sont équivalentes), c'est le cas de l'impulsion Fig. 1.1. Cela signifie que pour une largeur spectrale donnée, l'ajout d'une phase spectrale non-linéaire augmente la durée de l'impulsion. C'est un des effets de la dispersion d'une impulsion dans un milieu.

## 1.2 Dispersion d'une impulsion

Dans un milieu optique (verre, air, etc.), la vitesse de propagation (vitesse de groupe) dépend de la longueur d'onde, cela provient de la présence d'absorption aux fréquences de résonance du milieu (relation de Kramers-Krönig). Une impulsion ultracourte ayant une distribution de fréquences (voir Fig. 1.1(b)), on assiste à un étalement temporel des différentes fréquences lors de la propagation dans un milieu. Ce phénomène, appelé dispersion de vitesse de groupe, conduit au "chirp" (décalage linéaire de fréquence) de l'impulsion, visible sur la porteuse (Fig. 1.2(a)). Cet effet s'exprime mathématiquement par l'ajout d'un terme quadratique  $\Phi^{(2)}$  dans la phase spectrale. Les termes d'ordre supérieur de la phase spectrale sont définis ainsi :

$$\Phi_{NL}(\omega) = \frac{\Phi^{(2)}}{2}\omega^2 + \frac{\Phi^{(3)}}{6}\omega^3 + \dots \quad (1.3)$$

$$\Phi^{(2)} = \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \omega^2} \right)_{\omega_0} \quad \text{et} \quad \Phi^{(3)} = \left( \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \omega^3} \right)_{\omega_0} \quad (1.4)$$

L'effet de la phase spectrale quadratique sur l'impulsion se décrit analytiquement dans le cas d'une impulsion d'enveloppe gaussienne. On part du champ  $E_0$  d'une impulsion comprimée, dont les expressions temporelle et spectrale sont :

$$E_0(t) = \exp \left\{ -\frac{t^2}{2\sigma_t^{(o)2}} \right\} e^{-i\omega_0 t} \quad (1.5)$$

$$E_0(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma_\omega^{(o)}} \exp \left\{ -\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma_\omega^{(o)2}} \right\} \quad (1.6)$$

On remarque qu'une impulsion comprimée ne possède pas de terme de phase dans le domaine spectral. Pour un spectre donné, la durée minimale d'une impulsion correspond en effet à la transformée de Fourier du spectre sans terme de phase, cette durée est dite limitée par transformée de Fourier. On recherche maintenant l'effet d'un chirp  $\Phi^{(2)}$  sur cette impulsion, on définit d'abord le chirp normalisé  $\xi$  :

$$\xi = \frac{\Phi^{(2)}}{\sigma_t^{(o)2}} \quad (1.7)$$

On note le champ chirpé  $E_1$ , il s'écrit facilement dans le domaine spectral :

$$E_1(\omega) = E_0(\omega) e^{i\Phi^{(2)}(\omega - \omega_0)^2/2} \quad (1.8)$$

En utilisant la formule suivante où  $p$  est un nombre complexe (transformée de Fourier **TF** d'une impulsion gaussienne complexe) :

$$\mathbf{TF} \left\{ e^{-pt^2} \right\} = \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-t^2/4p}, \quad (1.9)$$

on obtient la description temporelle du champ  $E_1$  :

$$E_1(t) = A_1 \exp \left\{ -\frac{t^2}{2\sigma_t^{(1)2}} \right\} \exp \left\{ \frac{-i\alpha t^2}{2} \right\} e^{-i\omega_0 t} e^{i\phi_1/2} \quad (1.10)$$

où  $A_1$  est le maximum de l'impulsion :

$$A_1 = \left( \frac{1}{1 + \xi^2} \right)^{1/4} \leq 1, \quad (1.11)$$

$\sigma_t^{(1)}$  est la durée de l'impulsion chirpée :

$$\sigma_t^{(1)} = \sigma_t^{(o)} \sqrt{1 + \xi^2} \geq \sigma_t^{(o)}, \quad (1.12)$$

$\alpha$  est la phase quadratique temporelle :

$$\alpha = \frac{1}{\sigma_t^{(o)2}} \frac{\xi}{1 + \xi^2} \quad (1.13)$$

et  $\phi_1$  est un décalage de CEP :

$$\phi_1 = \arctan \xi \quad (1.14)$$

La dispersion d'une impulsion implique ainsi une diminution de son maximum  $A_1 \leq 1$ , un allongement de sa durée  $\sigma_t^{(1)} \geq \sigma_t^{(o)}$ , une phase temporelle quadratique qui correspond à une variation linéaire de fréquence  $-\partial\phi/\partial t = \omega_0 + \alpha t$ , et un changement de CEP. Dans le domaine spectral, seule la phase est changée (voir Fig. 1.2).

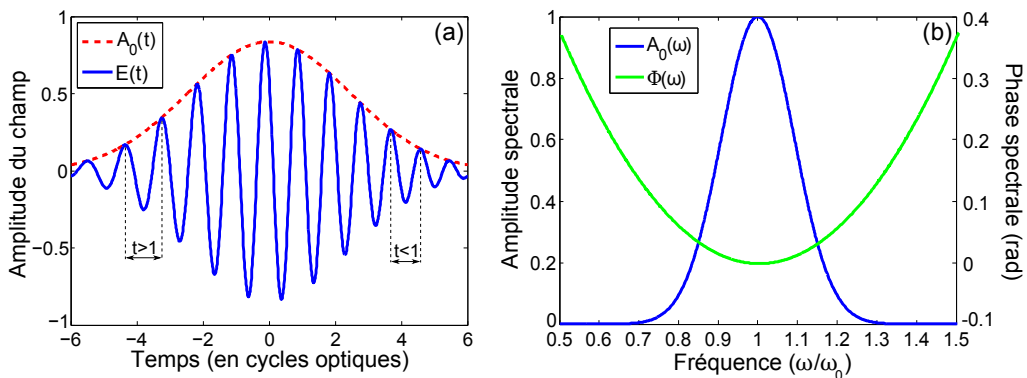


FIGURE 1.2 – Représentation temporelle (a) et spectrale (b) de l'impulsion de la Fig. 1.1 chirpée positivement ( $\sigma_t^{(o)} = \sqrt{3}$  et  $\xi = 1$ ).

Le chirp normalisé  $\xi$  quantifie l'ensemble de ces changements.  $\xi$  étant inversement proportionnel au carré de la durée d'impulsion, la propagation dans un milieu modifie l'impulsion laser d'autant plus fortement que sa durée est courte. Il est important de noter que cet effet est indépendant de l'intensité laser (effet linéaire). Cet effet est donc à différencier des effets non linéaires, dépendants de l'intensité, et amplement décrits dans le chapitre 2.

En réalité, l'ajout d'une phase spectrale quadratique seule correspond à une approximation à l'ordre 1 de la dispersion d'une impulsion dans un milieu. A l'ordre 2, il faut ajouter un terme en  $\omega^3$ , cette phase d'ordre trois agit de manière asymétrique sur l'élargissement de l'impulsion, créant une pré-impulsion ou post-impulsion selon son signe.

### 1.3 Equation de propagation

Pour prendre en compte l'ensemble des effets (linéaires et non-linéaires) lors de la propagation d'une impulsion on doit résoudre l'équation de propagation non-linéaire du champ  $\vec{E}$  qui dérive des équations de Maxwell :

$$\Delta \vec{E} - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}}{\partial t^2}, \quad (1.15)$$

où  $\vec{P}_{NL}$  est un terme source qui contient l'ensemble des effets non-linéaires. La dispersion de l'impulsion est ici contenue dans la permittivité  $\epsilon$  du milieu qui dépend de la fréquence  $\omega$ . Les solutions de cette équation sont de la forme :

$$\vec{E} = \vec{A}(x, y, z, t) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (1.16)$$

où  $A$  est l'amplitude complexe du champ,  $\vec{k}$  est le vecteur d'onde et  $\vec{r}$  la direction de propagation. Si on choisit la direction de propagation  $\vec{r} = \vec{z}$  et on étudie une impulsion polarisée linéairement sur  $\vec{x}$  en négligeant les effets de polarisation croisée ( $\vec{P}_{NL} \cdot \vec{y} = 0$ ) on obtient l'équation scalaire :

$$\Delta E - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2} \quad (1.17)$$

et la solution scalaire :

$$E = A(x, y, z, t) e^{i(kz - \omega t)} \quad (1.18)$$

Les Chapitres 2, 3 concernent l'étude des effets non-linéaires suivants dans le cadre de la propagation dans une fibre creuse remplie de gaz : l'effet Kerr ( $P_{NL} \propto |E|^2 E$ ) et l'ionisation

( $P_{NL} \propto f(E)E$ , où  $f$  est une fonction non-linéaire en  $E$ ), ces effets sont détaillés dans le Chapitre 2.

Des hypothèses supplémentaires sont nécessaires pour simplifier cette équation afin de pouvoir la résoudre numériquement. On peut notamment faire l'approximation de l'enveloppe lentement variable (Slowly Varying Envelope Approximation SVEA), qui est omniprésente dans la théorie des impulsions courtes. Cette approximation s'écrit mathématiquement :

$$k|A| \gg \frac{\partial|A|}{\partial z} \quad (1.19)$$

Physiquement, cela signifie que l'enveloppe de l'impulsion varie très peu après propagation sur une distance de l'ordre de la longueur d'onde. On pourra ainsi négliger la dérivée seconde en  $z$  devant la dérivée première en  $z$  dans le Laplacien.

La propagation dans un guide d'onde tel que la fibre creuse simplifie aussi l'équation de propagation comme décrit ci-dessous.

## 1.4 Modes spatiaux d'une fibre creuse

Quand une impulsion se propage dans un guide d'onde, elle est spatialement confinée ce qui se traduit par des conditions aux limites sur l'équation de propagation, la variation spatiale (transverse) du champ étant imposée par la forme du guide d'onde. Dans le cas d'un guide d'onde cylindrique (fibre), la dépendance radiale du champ est une somme discrète de fonctions définies par le rayon de la fibre, ce sont les modes de Bessel. Dans une fibre, si on néglige les effets non-linéaires et la dispersion, l'amplitude spatiale  $A(r, \theta)$  doit satisfaire la relation :

$$\nabla_{\perp}^2 A + (k_0^2 - k^2)A = 0, \text{ avec } A(a, \theta) = 0, \quad (1.20)$$

où  $\nabla_{\perp}^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$  est le Laplacien transverse en coordonnées cylindriques,  $k_0 = 2\pi/\lambda$  est le vecteur d'onde de propagation sans guide d'onde,  $k$  le vecteur d'onde dans le guide d'onde et  $a$  est le rayon de la fibre. Avec les conditions aux limites de nullité du champ à l'interface coeur-gaine, cette équation admet comme solutions les modes de Bessel :

$$A_{nm}(r, \theta) = J_n \left( \frac{u_{nm}r}{a} \right) \cos(n\theta) \text{ et } A_{nm}(r, \theta) = J_n \left( \frac{u_{nm}r}{a} \right) \sin(n\theta), \quad n = 0, 1, \dots \text{ et } m = 1, 2, \dots \quad (1.21)$$

$J_n$  est la fonction de Bessel d'ordre  $n$  et  $u_{nm}$  est le  $m$ -ième zéros de  $J_n$ . Pour indication, les valeurs de  $u_{0m}$  des premiers modes sont données dans le tableau 1.1, les  $A_{nm}$  sont dégénérés

pour  $n \geq 1$ . Le vecteur d'onde de propagation prend les valeurs discrètes suivantes :

$$k_{nm} = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{u_{nm}}{a}\right)^2} \quad (1.22)$$

$u_{nm}$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
$n = 0$	2.4048	5.5201	8.6537
$n = 1$	3.8317	7.0156	10.1735
$n = 2$	5.1356	8.4172	11.6198

TABLE 1.1 – Valeurs arrondies des premiers zéros des fonctions de Bessel  $J_0$ ,  $J_1$  et  $J_2$ .

Les impulsions se propagent ainsi avec un profil spatial qui est une somme de modes  $A_{nm}$ , les premiers sont représentés sur la Fig. 1.3. Une fois normalisés, les  $A_{nm}$  forment une base orthonormée, i.e.  $\int_{(r,\theta)} A_{ik} A_{jl} r dr d\theta = \delta_{ij} \delta_{kl}$ .

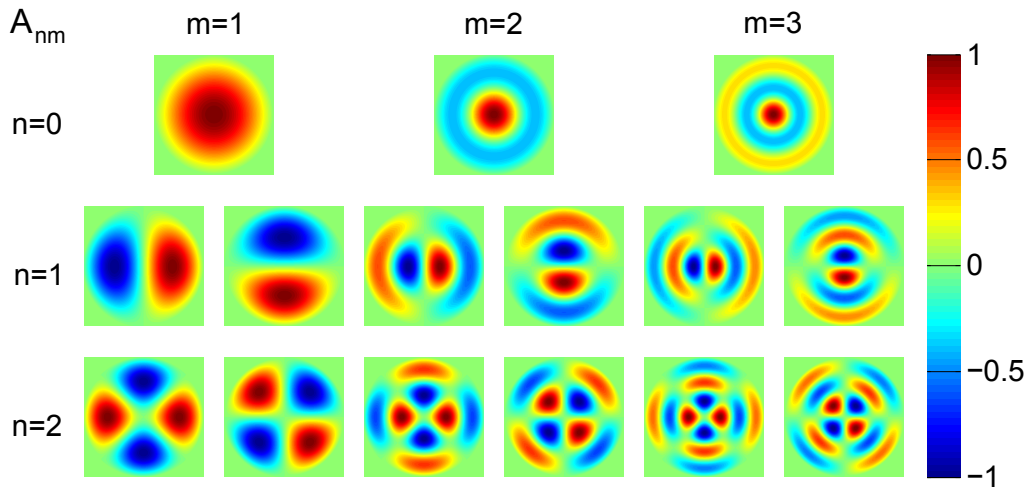


FIGURE 1.3 – Profils d'amplitude des différents modes  $A_{nm}$ .

Dans le cadre de la propagation d'un faisceau à symétrie cylindrique (faisceau gaussien par exemple), seuls les modes ayant cette symétrie (indépendant de  $\theta$ ) sont peuplés. Il s'agit des modes  $A_{0m}(r)$ , les intensités normalisées en énergie des trois premiers ( $m = 1, 2$  et  $3$ ) sont représentées Fig. 1.4. On voit que pour la même énergie, l'intensité pic est plus grande pour les modes d'ordre supérieur que pour le mode fondamental  $A_{01}$ . Dans le cadre de la propagation non-linéaire, la répartition d'énergie sur les différents modes a ainsi une importance cruciale, cela constitue la base de l'étude du Chapitre 3.

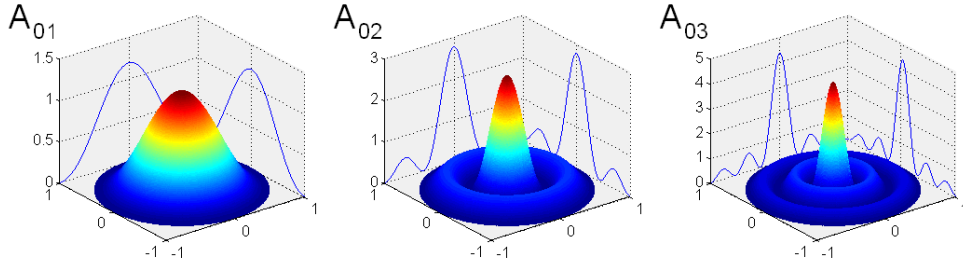


FIGURE 1.4 – Intensité des trois premiers modes spatiaux  $A_{0m}$  normalisés en énergie.

## 1.5 Formalisme mathématique et grandeur physique

Avant de passer à l'étude de la compression d'impulsion par propagation non-linéaire dans une fibre creuse, il convient de définir proprement certaines notions. En effet, mathématiquement, on n'utilise pas les mêmes définitions qu'en physique, ce qui conduit à des confusions voire des erreurs. C'est en particulier le cas de la durée d'impulsion, la CEP et la variable spectrale dont les différentes définitions sont détaillées ci-dessous.

### 1.5.1 FWHM *vs* $\sigma$

A partir du champ électrique  $E$  d'une impulsion, on définit son intensité par la relation :

$$I = \frac{n_0 |E|^2}{2\mu_0 c} \quad (1.23)$$

les physiciens définissent ensuite la durée  $\tau$  d'une impulsion comme la largeur à mi-hauteur (Full Width at Half Maximum FWHM) en intensité. Cependant mathématiquement, c'est la demie largeur à  $1/e$  en intensité,  $\sigma_t$  qui est utilisée pour représenter une impulsion gaussienne. Ces deux grandeurs sont reliées par la relation omniprésente :

$$\tau = 2\sqrt{\ln 2} \sigma_t \quad (1.24)$$

On définit de même la largeur spectrale  $\Delta\nu$  comme la FWHM de l'intensité spectrale :

$$\Delta\nu = 2\sqrt{\ln 2} \sigma_\omega \quad (1.25)$$

Pour une impulsion gaussienne, la relation d'incertitude s'écrit alors selon la définition des largeurs :

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq 1/2\pi, \text{ ou } \tau \Delta\nu \geq 2 \ln 2 / \pi \approx 0.44. \quad (1.26)$$



### 1.5.2 CEP temporelle ou spectrale ?

Selon la définition mathématique, la CEP est la phase spectrale continue  $\Phi_0$ . En revanche, en physique, la CEP est liée au délai entre le maximum de l'enveloppe et celui de la porteuse illustré Fig. 1.5 (phase temporelle continue  $\phi_0$ ). Comme c'est le champ électrique qui interagit avec les électrons d'un milieu dans les processus non-linéaires, c'est la CEP physique qui importe. Nous en verrons un exemple dans le chapitre 6. Cependant, la mesure usuelle de la CEP par montage f-2f [22] fournit la CEP spectrale (mathématique) donc celle-ci a aussi son importance dans le laboratoire. La distinction entre ces deux CEP est primordiale car une modification de la CEP temporelle n'est pas toujours équivalente à une variation de la CEP spectrale. Dans le cas de la propagation dans un milieu, la différence entre la vitesse de phase et la vitesse de groupe modifie la CEP spectrale et temporelle de manière identique, mais on a vu précédemment que la présence de phase spectrale non-linéaire modifie la CEP temporelle sans changer la CEP spectrale (le décalage de CEP  $\phi_1$ ).

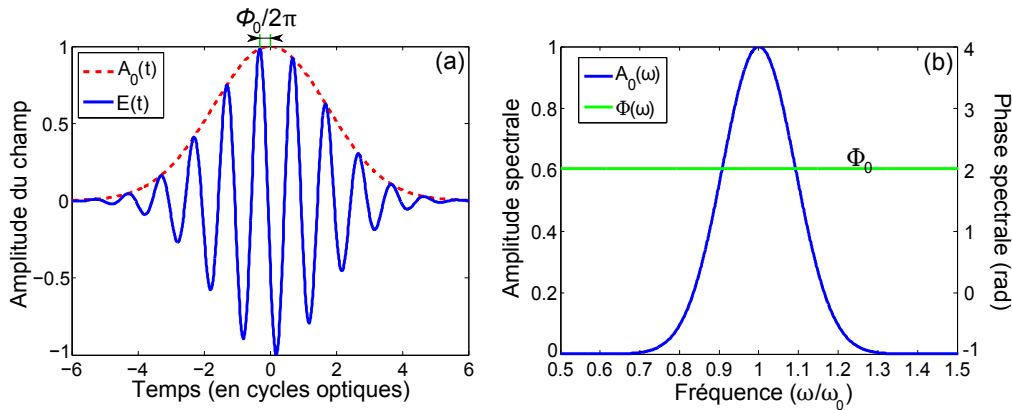


FIGURE 1.5 – Représentation temporelle (a) et spectrale (b) d'une impulsion dont la phase CEP  $\phi_0 = \Phi_0 = 2 \text{ rad}$ .

### 1.5.3 Longueur d'onde vs fréquence

La fréquence  $\nu = \omega/2\pi$  est l'unité spectrale, duale du temps  $t$ . Expérimentalement, les physiciens préfèrent parler de longueur d'onde  $\lambda = c/\nu$  dans le domaine spectral des lasers femtosecondes. On va ainsi parler d'impulsions laser à  $800 \text{ nm}$  et non pas à  $375 \text{ THz}$ . Il faut cependant se méfier de la représentation en longueurs d'onde (qui est utilisée par la plupart des spectromètres) car cela peut donner de fausses impressions. Déjà, la relation d'incertitude temps-longueur d'onde n'est plus triviale, il faut utiliser la longueur d'onde centrale  $\lambda_0$  :

$$\frac{c}{\lambda_0^2} \tau \Delta\lambda \geq 0.44 \quad (1.27)$$

D'autre part un spectre symétrique en fréquence ne l'est plus en longueur d'onde (et réciproquement) comme illustré sur la Fig. 1.6 où le même spectre est représenté selon les deux variables. On verra dans le chapitre suivant l'importance d'avoir un spectre symétrique en fréquence pour comprimer proprement une impulsion (absence de pré ou post-impulsion).

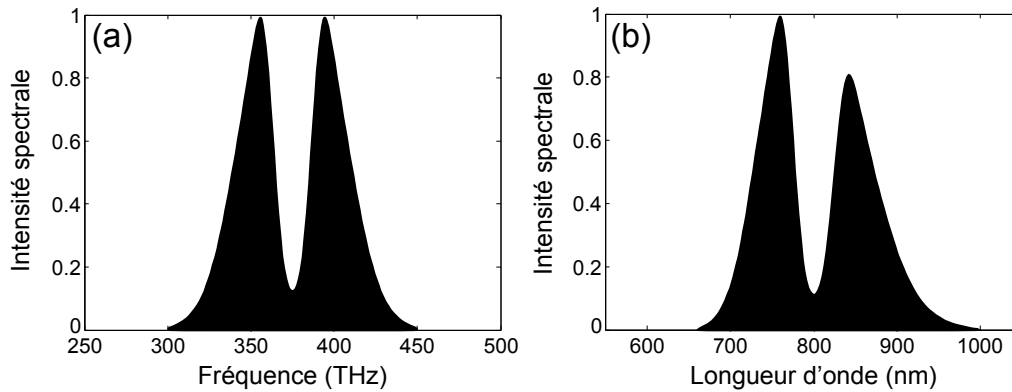


FIGURE 1.6 – Représentation du spectre d'une impulsion ultracourte proche infrarouge en fréquence (a) et en longueur d'onde (b).