
Forme et évolution de la surface libre au cours du trempage	
1.1.1	Drainage dans l'épaisseur..... 26
1.1.2	Forme du ménisque 27
1.1.3	Rupture du fil 28
1.2	Etudes du trempage isotherme..... 30
1.2.1	Définition du problème 30
1.2.2	Approches analytiques de la prédiction de l'épaisseur 32
1.2.2.1	<i>Cas d'une plaque plongée verticalement</i> 32
1.2.2.2	<i>Cas d'un cylindre plongé verticalement</i> 39
1.2.3	Approche numérique du trempage 43
1.2.3.1	<i>Définitions du problème</i> 43
1.2.3.1.1	Cas des fluides newtoniens..... 43
1.2.3.1.2	Cas des fluides non newtoniens..... 45
1.2.3.2	<i>Application au trempage</i> 48
1.3	Cas du trempage à chaud 50
1.3.1	Les problèmes de transfert thermique 50
1.3.1.1	<i>La démarche de Stefan</i> 50
1.3.1.2	<i>La démarche de Stefan appliquée au trempage</i> 51
1.3.2	Solutions analytiques au problème de croissance d'un front de matière 54
1.3.2.1	<i>Croissance d'un front de solidification sur une plaque isotherme</i> 54
1.3.2.2	<i>Croissance d'un front de solidification sur une plaque non isotherme</i> 55
1.3.3	Modélisation du trempage à chaud..... 55
1.3.3.1	<i>Modèle à suivi de l'interface</i> 57
1.3.3.1.1	Maillage fixe sur l'ensemble du domaine liquide-solide 57

1.3.3.1.2	Immobilisation de l'interface par transformation de coordonnées.....	58
1.3.3.2	<i>Modèle enthalpique</i>	59
1.3.3.2.1	Formulation du modèle enthalpique.....	59
1.3.3.2.2	Application du modèle enthalpique au trempage.....	62

Ce chapitre a pour objectif de présenter les principales études expérimentales, analytiques et numériques existantes dans la littérature au sujet du procédé de trempage. Le premier paragraphe est consacré aux mécanismes physiques intervenant lors du trempage et influençant la forme de l'épaisseur. Ensuite, nous présenterons les principales études analytiques et numériques qui ont eu pour but de prédire l'épaisseur extraite. Les cas de trempage isotherme et anisotherme sont traités séparément car les phénomènes physiques mis en jeu sont différents.

1.1 Forme et évolution de la surface libre au cours du trempage

Dans un cas de trempage classique, la forme de la surface libre et l'épaisseur extraite sont dépendantes de quatre principales forces différentes : la viscosité, la gravité, la tension de surface et les forces d'inertie. Sous l'effet de ces paramètres, la forme du film présente trois zones distinctes (*Figure 1-1-a*) pour le cas d'un moule cylindrique ou d'une plaque de longueur infinie :

- La région I, dite transitoire, a son épaisseur $h(z,t)$ qui diminue avec le temps.
- La région II, qui constitue la majorité du film, est stationnaire et a une épaisseur h_0 constante.
- La région III est celle formée par le ménisque, lui-même divisible en deux parties (*Figure 1-1-b*) : le ménisque dynamique et le ménisque statique [Spiers73]. Dans le ménisque dynamique, les effets de gravité ainsi que ceux des contraintes normales peuvent être négligés. L'épaisseur y varie en fonction de la viscosité et de la tension de surface. Dans le ménisque statique, l'écoulement est négligé ; la forme de la surface libre y varie en fonction de la tension de surface et des forces de pressions.

De nombreuses études aussi bien expérimentale, théorique que analytique ont cherché à prédire l'évolution de la forme des ces différentes zones dans le temps et sous l'effet de différents paramètres. Ce paragraphe fait une synthèse des phénomènes intervenant dans l'épaisseur et conduisant à l'évolution de sa forme.

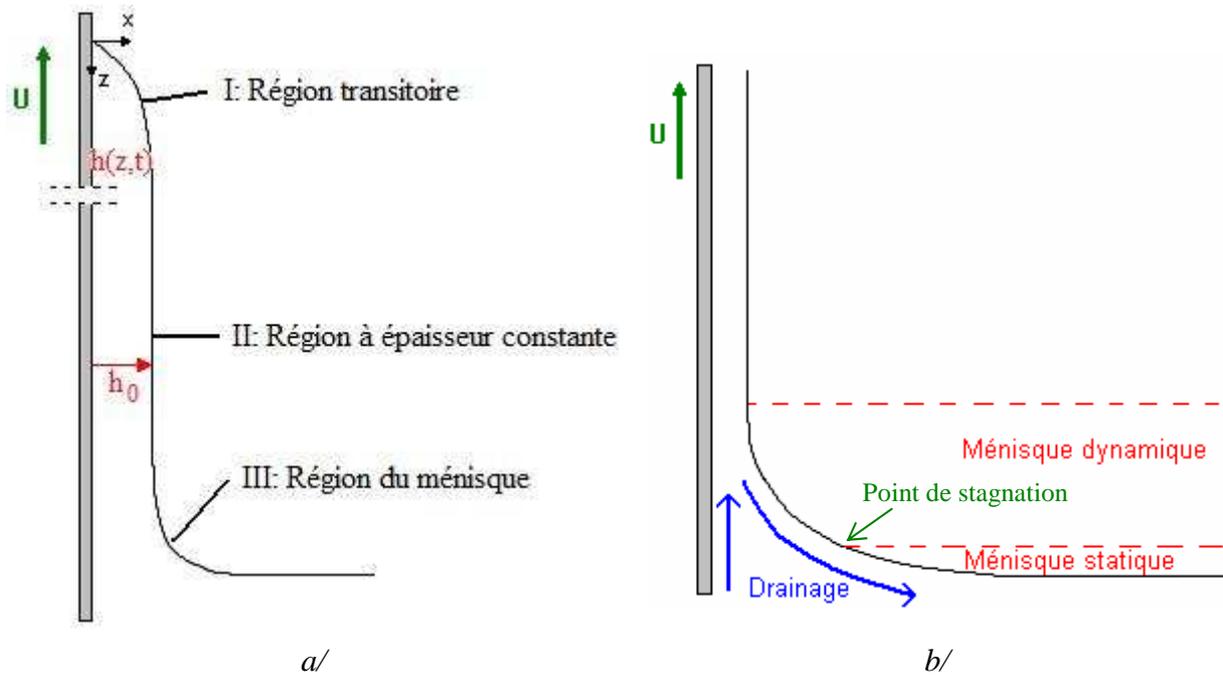


Figure 1-1 : Profil du film liquide adhérant à une surface verticale en mouvement a/ le long du moule et b/ dans le ménisque

1.1.1 Drainage dans l'épaisseur

Durant les premiers instants de la remontée, il se forme la région I où le liquide est drainé sous l'effet de la gravité. Le phénomène d'écoulement dans cette zone est temporaire et, au bout d'un certain temps, sa forme se stabilise. Jeffreys en 1930 [Jeffreys30] est le premier à avoir cherché à y prédire l'évolution de l'épaisseur en fonction du temps pour un fluide newtonien. Il a alors montré que le profil dans la région I au bout d'un long temps de drainage est celui d'une parabole décrite par l'expression suivante :

$$h(z,t) = \left(\frac{\eta z}{g t} \right)^{1/2} \quad \text{Eq. 1-1}$$

où η est la viscosité cinématique, g la gravité et t le temps. Cette expression est valable quand l'écoulement est laminaire et négligeable dans le sens horizontal (selon x).

Denson [Denson70] a poursuivi les travaux de Jeffreys. Tout en les améliorant en prenant en compte les effets liés à la forme initiale du film, il a déterminé le temps critique τ_c à partir duquel l'équation 1-1 est valide. L'expression permettant d'approcher ce temps critique τ_c est la suivante :

$$\tau_c = \frac{\eta L_p}{g \left(h(z = L_p, t = 0) \right)^2} \quad \text{Eq. 1-2}$$

où L_p est la longueur de la zone transitoire.

Ce temps critique est dépendant de l'épaisseur initiale, de la viscosité du liquide et de la longueur de la plaque. L'équation 1-2 montre qu'il décroît lorsque l'épaisseur initiale augmente, et/ou diminue lorsque la viscosité diminue.

1.1.2 Forme du ménisque

La forme du ménisque a également fait l'objet de nombreuses études expérimentales visant à prédire sa forme. De manière générale, son épaisseur diminue asymptotiquement depuis le niveau du bain de liquide jusqu'à la région II où l'épaisseur est constante. Les premiers grands investigateurs dans ce domaine sont Groenveld [Groenveld70b] et Groenveld et Van Dortmond en 1970 [Groenveld70a] suivis par Lee et Tallmadge avec une série d'articles dans les années 70 ([Lee72], [Lee73], [Lee74]). Ils ont cherché à déterminer l'influence de paramètres tels que la vitesse de retrait et les propriétés du fluide (viscosité, densité, tension de surface) sur la forme du ménisque. Tanguy et al. en 1984 se sont ensuite intéressés à ce problème d'un point de vue numérique, ce qui sera présenté plus loin dans ce paragraphe.

Le ménisque est divisible en deux zones bien distinctes, le ménisque dynamique et le ménisque statique. Le point de passage d'une zone à l'autre est situé au niveau d'un point dit « de stagnation ». A l'aide d'essais expérimentaux, il a été cherché des formules empiriques permettant la prédiction de sa position :

- Selon Groenveld, le point de stagnation se situe au niveau de de l'épaisseur $h_{stagnation}$:

$$\frac{h_{stagnation}}{h_0} = 3 \quad \text{Eq. 1-3}$$

- Lee et Tallmadge quant à eux ont observé que la position du point de stagnation variait en fonction de la vitesse de retrait U_0 et de la viscosité dynamique ($\mu = \eta / \rho$) tel que :

$$\frac{h_{stagnation}}{h_0} = 3 - h_0^2 \left(\frac{\rho g}{\mu U_0} \right)^2 \quad \text{Eq. 1-4}$$

Les études menées se sont principalement intéressées à l'étude de l'écoulement dans le ménisque dynamique. Il a été montré expérimentalement par Groenveld et Van Dortmond, puis confirmé par Lee et Tallmadge, que la hauteur z dans le moule au dessus du bain était linéairement fonction de $\ln(h(z) - h_0)$ tel que :

$$z = b - d \ln(h(z) - h_0) \quad \text{Eq. 1-5}$$

où b et d sont des constantes ; soit sous forme adimensionnelle :

$$\lambda = B - D \ln(1 - L) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{z}{h_0} \\ L = \frac{h(z)}{h_0} \\ D = \frac{d}{h_0} \\ B = \frac{b}{h_0} - D \ln(h_0) \end{cases} \quad \text{Eq. 1-6}$$

1.1.3 Rupture du fil

Après retrait du support un filament de liquide reliant le bain au film d'épaisseur autour du moule se forme. La rupture de ce fil influence l'épaisseur finale qui sera obtenue. L'étirement du filament est fonction des propriétés rhéologiques du fluide ainsi que de sa viscosité élongationnelle. Sa rupture est dépendante également de la vitesse de retrait et de la tension de surface.

Yasuda *et al.* [Yasuda04] ont regardé expérimentalement les dépendances existantes entre rupture du filament, vitesse de retrait et viscosité sur des liquides newtoniens. Ils ont montré que hauteur à laquelle se casse le filament H_r (Figure 1-2) augmente quand la vitesse de retrait augmente. Cette dépendance est d'autant plus grande que le liquide présente une grande viscosité de cisaillement. De même, pour une vitesse de retrait fixe, la hauteur de rupture du filament augmente linéairement avec la viscosité de cisaillement.

La relation reliant hauteur de rupture et vitesse dans le cas d'un liquide newtonien est la suivante :

$$H_r = C\mu U_0 + H_r' \quad \text{Eq. 1-7}$$

où μ est la viscosité dynamique, C un coefficient proportionnel en Pa^{-1} et H'_r la hauteur initiale de rupture quand $U_0 = 0 m/s$. Les paramètres C et H'_r sont déterminés expérimentalement et sont dépendants de la tension de surface, de la mouillabilité du liquide sur le support et de la forme du moule.

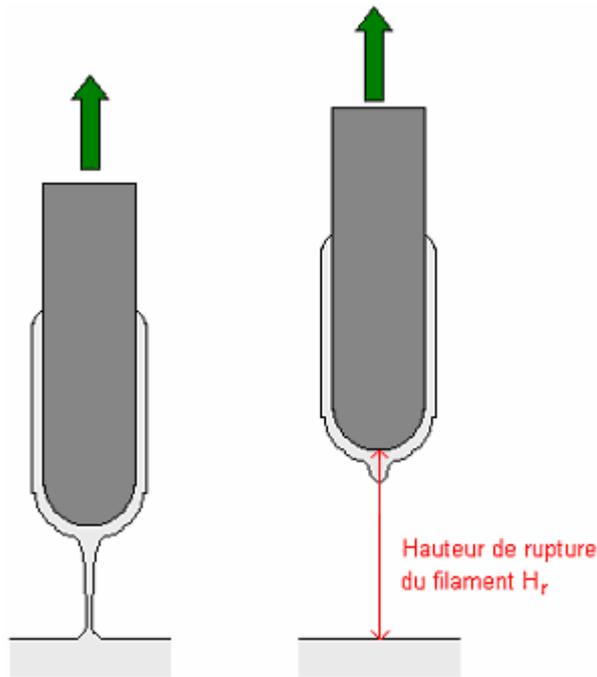


Figure 1-2 : Schéma de la rupture du filament

Il est également possible de quantifier la rupture du filament en terme de temps. Le temps de rupture t_r diminue monotonement quand augmente la vitesse de retrait. Il peut être déterminé par l'équation suivante :

$$t_r = \frac{H_r}{U_0} = C\mu + \frac{H'_r}{U_0} \quad \text{Eq. 1-8}$$

Dans ce paragraphe, nous avons apporté des informations concernant l'évolution de la forme de la surface libre extraite autour du moule au cours du temps. Dans les paragraphes suivants vont être présentés les principaux modèles théoriques et numériques qui ont pour but la prédiction de l'épaisseur extraite au cours du trempage.

1.2 Etudes du trempage isotherme

Dans ce paragraphe nous présenterons les principales études visant à déterminer l'épaisseur de matière extraite au cours du trempage lorsque la température n'a pas d'influence. La première partie posera le problème à résoudre. Suivra l'étude des différentes théories analytiques et numériques développées dans la littérature.

1.2.1 Définition du problème

Les cas de trempage traités dans la littérature se sont fait sur des géométries simples, une plaque verticale (*Figure 1-3-a*) ou un cylindre (*Figure 1-3-b*) de longueur infinie et à deux dimensions. Ces supports sont extraits hors du bain à une vitesse constante U_0 .

La détermination de la forme de la surface libre Γ_F , i.e. l'épaisseur extraite, se fait en résolvant les équations de mouvements pour les fluides incompressibles :

$$\begin{cases} \rho(\dot{\mathbf{u}} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + \nabla \tau = \rho f \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \tau = \tau^D - p\delta \end{cases} \quad \text{Eq. 1-9}$$

où \mathbf{u} est la vitesse dans le fluide, p la pression et τ le tenseur de contrainte. La force f est de la forme $f = (0, g)$. Il est considéré que le problème est traité en régime permanent, donc $\dot{\mathbf{u}} = \partial \mathbf{u} / \partial t = 0$.

τ^D est le déviateur tel que $\tau^D = \phi(\dot{\gamma}(\mathbf{u}))$ avec $\dot{\gamma}$ le tenseur des vitesses de déformation.

Pour un liquide newtonien, on a $\phi(\dot{\gamma}(\mathbf{u})) = 2\mu \dot{\gamma}(\mathbf{u})$ avec μ constante. Pour un fluide non newtonien, pseudoplastique par exemple, il est possible d'écrire la loi puissance $\phi(\dot{\gamma}(\mathbf{u})) = 2K |\dot{\gamma}|^{m-1} (\dot{\gamma}(\mathbf{u}))$, où K est la consistance et $|\dot{\gamma}| = \sqrt{2 \dot{\gamma}(u) : \dot{\gamma}(u)}$ le produit des tenseurs.

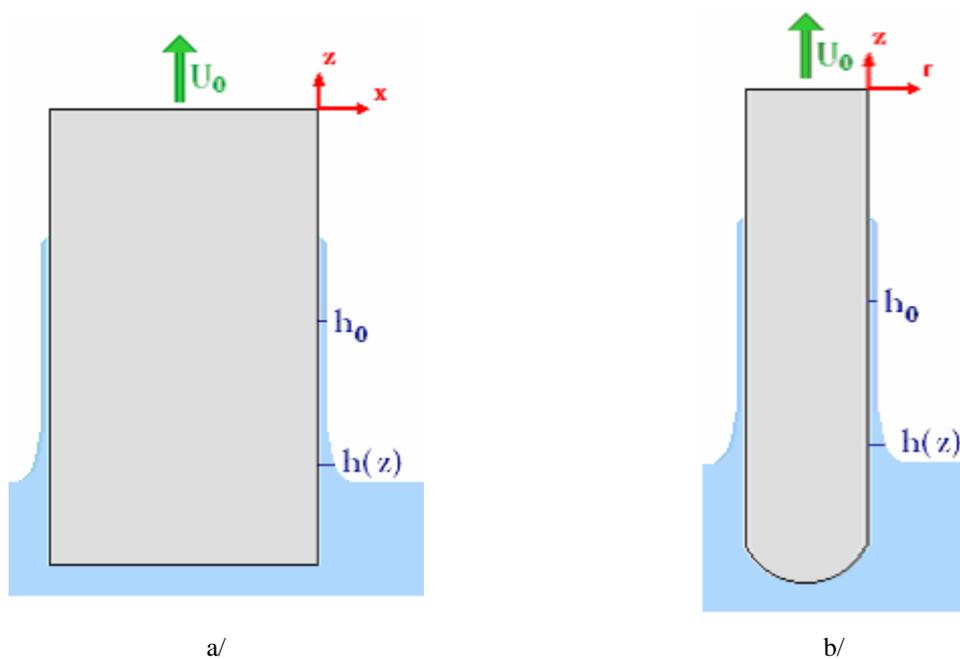


Figure 1-3 : Géométries de supports trempés dans un bain dans les cas a/ d'une plaque et b/ d'un cylindre

Pour le trempage d'une plaque, c'est-à-dire en coordonnées cartésiennes, le tenseur des vitesses de déformation $\dot{\gamma}$ est défini par :

$$\dot{\gamma} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 & \frac{\partial v}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 1-10}$$

Pour le trempage d'un cylindre, c'est-à-dire en coordonnées cylindriques, le tenseur des vitesses de déformation $\dot{\gamma}$ est défini par :

$$\dot{\gamma} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) \\ 0 & \frac{u}{r} & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) & 0 & \frac{\partial v}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 1-11}$$

où les termes u et v sont les composantes du vecteur \mathbf{u} .

Pour compléter la définition du problème, il faut ajouter les conditions aux limites qui sont de types Dirichlet. Sur la surface libre, où \mathbf{n} est la normale sortante et \mathbf{t} le vecteur tangentiel, les composantes des contraintes normale et tangentielle s'écrivent :

$$\begin{cases} \tau_{nn} = \frac{\sigma}{R_1} - p_0 & \text{pour la plaque} \\ \tau_{nn} = \frac{\sigma}{R_1} - \frac{\sigma}{R_2} - p_0 & \text{pour le cylindre} \\ \tau_{nt} = \mu \left[\frac{\partial u_t}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial t} \right] = 0 \end{cases} \quad \text{Eq. 1-12}$$

où σ est la tension de surface, R_1 et R_2 les rayons de courbures.

Une autre condition sur la surface libre est :

$$u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{Eq. 1-13}$$

L'ensemble de ce système est à résoudre pour prédire la forme de la surface libre. La suite de ce paragraphe portera sur les différentes approches qui en ont été faites et quelles en sont les limites.

1.2.2 Approches analytiques de la prédiction de l'épaisseur

Les études analytiques sur la prédiction de l'épaisseur du film extrait autour d'un support lors de trempage se sont développées depuis les années 30. Vu la complexité des paramètres mis en jeu simultanément, ces approches ont toutes été réalisées pour des géométries simples de longueur infinie : une plaque rectangulaire trempé verticalement (*Figure 1-3-a*) ou encore le cas d'un cylindre (*Figure 1-3-b*). Seuls les cas de liquides newtoniens ont été examinés ; en effet, l'introduction d'une loi de comportement propre à un liquide non newtonien conduit à un système difficile à résoudre.

1.2.2.1 *Cas d'une plaque plongée verticalement*

L'estimation de l'épaisseur h_0 en régime permanent autour d'une plaque de longueur infinie trempée verticalement à une vitesse constante U_0 a été étudiée par de nombreux auteurs. La méthode analytique la plus couramment utilisée est d'intégrer une forme simplifiée de l'équation 1-9 dans le cas d'un liquide newtonien :

$$\begin{cases} \mu \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \\ \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad \text{Eq. 1-14}$$

La solution de l'équation 1-14 est obtenue grâce aux conditions aux limites. Dans la région II à épaisseur constante, au niveau de la surface de la plaque, il est supposé qu'il n'y a pas de glissement et que le contact est parfaitement collant entre le liquide et le support ; ainsi la première condition aux limites est :

$$u = U_0 \quad \text{quand } x = 0 \quad \text{Eq. 1-15}$$

Sur la surface il est considéré que la contrainte tangentielle est nulle et que la pression atmosphérique p_0 est négligeable par rapport à la pression du liquide p ; ceci nous donne les conditions aux limites suivantes :

$$p = -\frac{\sigma}{R_1} \quad \text{avec} \quad R_1 = \frac{\left[1 + \left(\frac{dh}{dz}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2 h}{dz^2}} \quad \text{quand } x = h \quad \text{Eq. 1-16}$$

En considérant que $\left(\frac{dh}{dz}\right)^2$ comme négligeable, on trouve ainsi :

$$p = -\sigma \frac{d^2 h}{dz^2} \quad \text{quand } x = h \quad \text{Eq. 1-17}$$

La solution trouvée à l'équation 1-14 est :

$$u = U_0 + \left(\frac{\rho g}{\mu} - \frac{\sigma}{\mu} \frac{d^3 h}{dz^3}\right) \left(\frac{x^2}{2} - hx\right) \quad \text{Eq. 1-18}$$

L'équation 1-18 peut être intégrée à z constant pour donner l'expression du flux Q dans une unité de largeur de la plaque :

$$Q = \int_0^h u dx = U_0 h - \left(\rho g - \sigma \frac{d^3 h}{dz^3} \right) \frac{h^3}{3\mu} = U_0 h_0 - \frac{\rho g h_0^3}{3\mu}$$

Eq. 1-19

$$\Rightarrow u = U_0 + \frac{3}{h_0^2} \left(U_0 - \frac{Q}{h_0} \right) \left(\frac{x^2}{2} - h_0 x \right)$$

L'équation 1-19 définit la vitesse dans le fluide loin de la surface du liquide, c'est-à-dire loin du ménisque. Elle peut être réécrite à l'aide des nombres adimensionnels suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{z}{h_0} \left(\frac{3\mu U_0}{\sigma} \right)^{1/3} \\ L = \frac{h}{h_0} \\ T_0 = h_0 \left(\frac{\rho g}{\mu U_0} \right)^{1/2} \end{array} \right.$$

Eq. 1-20

L'équation 1-19 devient alors :

$$\frac{d^3 L}{d\lambda^3} - \frac{1-L}{L^3} - \frac{T_0^3 (1-L^3)}{L^3} = 0$$

Eq. 1-21

L'équation 1-21 est donc celle à résoudre pour pouvoir prédire analytiquement l'épaisseur du film extrait autour d'une plaque.

Historiquement, les premiers à s'être intéressés à ce problème sont Landau et Levich en 1942 [Landau42] ; comme cela va être montré par la suite, la solution qu'ils apportent n'est applicable que dans des cas où les effets de gravités sont négligeables devant la tension de surface. Par la suite, d'autres études ont été menées pour apporter des solutions avec des hypothèses différentes, et donc applicables dans des conditions différentes. Une des plus connues est celle de White et Tallmadge [White64] : leur solution donne de bonne corrélation avec l'expérimentation dans les cas où le nombre capillaire $Ca = \mu u_0 / \sigma$ est inférieur à 2. Spiers et al. ont généralisé la solution de White et Tallmadge à des cas avec un nombre capillaire inférieur à 2.

✓ *Solution de Landau et Levich*

Ces auteurs ont approximé l'équation 1-21 en considérant la gravité comme négligeable devant les effets de la viscosité dans le ménisque dynamique, c'est à dire quand $T_0^2 \ll 1$ ce qui réduit l'équation 1-21 à :

$$\frac{d^3L}{d\lambda^3} = \frac{1-L}{L^3} \quad \text{Eq. 1-22}$$

Les conditions aux limites pour résoudre l'équation 1-22 sont :

$$\text{quand } h = h_0 : L = 1 \text{ et } \frac{dL}{d\lambda} = 0 \quad \text{Eq. 1-23}$$

$$\text{et quand } L \rightarrow \infty : \frac{d^3L}{d\lambda^3} \rightarrow 0 \quad \text{Eq. 1-24}$$

$$\text{donc quand } L \rightarrow \infty : \frac{d^2L}{d\lambda^2} \rightarrow \beta \quad \text{Eq. 1-25}$$

β est une constante numérique, Landau et Levich l'ont trouvée égale à 0,63 et Deryagin *et al.* [Deryagin45] quant à eux l'ont trouvée équivalente à 0,64. Utilisant les conditions aux limites le flux Q s'écrit :

$$Q = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \frac{U_0^{5/3} (3\mu)^{2/3}}{\sigma^{2/3} a} \quad \text{avec } a = \left(\frac{\rho g}{\sigma} \right)^{1/2} \quad \text{Eq. 1-26}$$

Soit :

$$Q = 0,93 \frac{U_0^{5/3} \mu^{2/3}}{\sigma^{1/6} (\rho g)^{1/2}} \quad \text{Eq. 1-27}$$

Connaissant Q , il est possible de déterminer l'expression de l'épaisseur du film loin du ménisque :

$$h_0 = 0,93 \frac{(U_0 \mu)^{2/3}}{\sigma^{1/6} (\rho g)^{1/2}} \quad \text{Eq. 1-28}$$

Ce qui donne en introduisant le nombre de capillaire Ca qui représente le rapport entre les forces visqueuses par rapport aux forces de tension de surface sur la surface libre :

$$T_0 = 0,93(Ca)^{1/6} \quad \text{Eq. 1-29}$$

Cependant cette équation n'est applicable que dans les cas particuliers où la gravité est négligée dans le ménisque dynamique, c'est-à-dire lorsque les vitesses de remontée sont faibles. L'utilisation de cette équation est donc limitée mais elle a été le point de départ à d'autres nombreuses investigations théoriques. Les études menées ensuite se sont faites à chaque fois sur des cas bien précis et donc avec des conditions particulières (vitesse plus ou moins lente, viscosité du fluide newtonienne ou non, etc). Aucune solution générale théorique n'a été trouvée.

✓ *Solution de White et Tallmadge*

Une des études les plus connues s'inspirant de celle de Landau et Levich est celle de White et Tallmadge [White65] qui ont résolu l'équation 1-21 en prenant en compte la gravité. Pour cela, il ne faut plus considérer T_0 comme négligeable dans l'équation 1-21 qui est linéarisé en introduisant $L = 1 + \varepsilon$, où ε est très petit. En négligeant les termes en ε^2 et ε^3 , 1-21 se réécrit :

$$\frac{d^3 \varepsilon}{d\lambda^3} = -(1 - T_0^2) \varepsilon \quad \text{Eq. 1-30}$$

On retrouve le cas traité par Landau et Levich en considérant $T_0^2 \ll 1$:

$$\frac{d^3 \varepsilon}{d\lambda^3} = -\varepsilon \quad \text{Eq. 1-31}$$

En substituant $\chi = (1 - T_0^2)^{1/3} \lambda$ dans l'équation 1-30 :

$$\frac{d^3 \varepsilon}{d\chi^3} = -\varepsilon \quad \text{Eq. 1-32}$$

L'équation 1-32 est de la même forme que celle obtenue avec l'hypothèse de Landau et Levich (Eq. 1-31). Comme dans le paragraphe précédent, quand $L \rightarrow \infty$:

$$\frac{d^2L}{d\chi^2} = \beta = 0,642 \quad \text{Eq. 1-33}$$

La valeur de β employée est celle donnée par Derjaguin [Derjaguin45]. Ainsi, en remplaçant χ pour exprimer le résultat en fonction de λ , il est possible d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d^2L}{d\lambda^2} &= (1-T_0^2)^{2/3} \frac{d^2L}{d\chi^2} \\ \Rightarrow \frac{d^2L}{d\lambda^2} &\approx \beta (1-T_0^2)^{2/3} \end{aligned} \quad \text{Eq. 1-34}$$

La solution trouvée par White et Tallmadge est :

$$\frac{T_0}{(1-T_0^2)^{2/3}} \approx 0,944(Ca)^{1/6} \quad \text{Eq. 1-35}$$

La comparaison faite par White et Tallmadge de leur modèle avec des essais expérimentaux montre que cette équation n'est applicable que dans le cas particulier où le nombre de capillaire Ca est supérieur à 2. En fait, selon Spiers et al. leur approximation pour calculer la contrainte normale dans la région du ménisque peut introduire des erreurs.

✓ Solution de Spiers et al.

Spiers et al. a cherché à améliorer le modèle de White et Tallmadge pour l'étendre à des cas où le nombre capillaire est inférieur à 2 en prenant en compte la contribution de la contrainte normale imposée au niveau du ménisque dynamique.

Les conditions aux limites qui sont considérées dans la région II par Spiers et al. sont :

- $u(0, z) = U_0$
- Contrainte tangentielle sur la surface libre quand $x = h(z)$:

$$\frac{1}{2}(\tau_{zz} - \tau_{xx}) \sin 2\theta + \tau_{zx} \cos 2\theta$$
- Contrainte normale à la surface libre quand $x = h(z)$:

$$p + \tau_{zz} (\sin \theta)^2 + \tau_{xx} (\cos \theta)^2 + \tau_{zx} \sin 2\theta = p_0 - \frac{\sigma}{R}$$

où θ est l'angle entre la normale à la surface et l'axe x et R la courbure à la surface libre.

Sur le même principe de résolution que White et Tallmadge, la solution finale pour la détermination de l'épaisseur est la suivante :

$$T_0 = \frac{3^{2/3}}{\sqrt{2}} \alpha(Ca, T_0) (1 - T_0^2)^{2/3} Ca^{1/6} \quad \text{Eq. 1-36}$$

Dans la résolution de White et Tallmadge, les valeurs de α dans la dérivation dégènèrent vers une constante alors que dans le cas de Spiers et al., elles sont obtenues en intégrant numériquement l'équation 1-37 à l'aide d'une méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4.

$$\frac{d^3 L}{d\chi^3} - (3Ca)^{2/3} \left(1 - \frac{T_0^2}{3}\right) (1 - T_0^2)^{-1/3} \frac{d}{d\chi} \left(\frac{1}{L^2} \frac{dL}{d\chi}\right) + \frac{L-1}{L^3} = 0 \quad \text{Eq. 1-37}$$

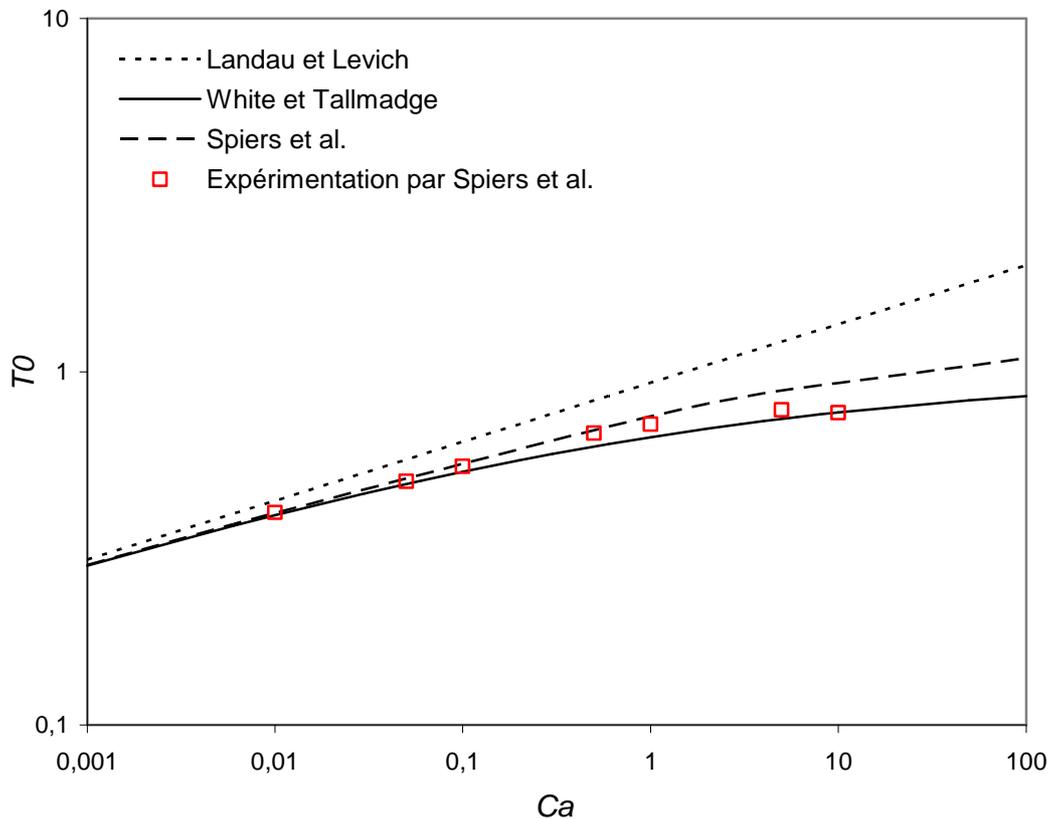


Figure 1-4 : Comparaison des modèles de Landau et Levich, de White et Tallmadge et de Spiers et al. avec des résultats d'essais expérimentaux selon [Spiers73] présentant le nombre adimensionnel T_0 en fonction du nombre capillaire Ca

La Figure 1-4 met en évidence que pour de grands nombres capillaires, le modèle de White et Tallmadge présente les meilleures corrélations avec l'expérimentation et pour un Ca plus petit, il s'agit de celui de Spiers et al.

1.2.2.2 Cas d'un cylindre plongé verticalement

Le cas du trempage d'un cylindre de longueur infinie a été très peu étudié analytiquement. La théorie a été développée en détail par Deryagin *et al.* dans une série d'articles depuis 1943. La démarche pour trouver une solution permettant la prédiction de l'épaisseur extraite au cours du trempage est la même que pour le cas d'une plaque mais en coordonnées cylindriques.

✓ *Modèle 1 pour déterminer l'épaisseur maximale développé par Deryagin*

L'équation 1-9 de mouvement d'un fluide newtonien autour d'un cylindre de rayon R_m s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r + R_m} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\rho g}{\mu} \quad \text{Eq. 1-38}$$

Les conditions aux limites permettant la résolution de cette équation sont :

$$\begin{cases} \text{quand } r = 0, u = U_0 \\ \text{quand } r = h, \frac{\partial u}{\partial r} \end{cases} \quad \text{Eq. 1-39}$$

Ainsi, il est possible d'écrire :

$$u = \frac{\rho g}{2\mu} (h-r)^2 - \frac{\rho g}{2\mu} r + U_0 \quad \text{Eq. 1-40}$$

Le flux dans l'épaisseur autour du cylindre est à déterminer à partir de l'équation suivante :

$$Q = 2\pi \int_0^{h_0} (r + R_m) u dx \quad \text{Eq. 1-41}$$

En considérant $\frac{h}{R_m} \ll 1$, le flux devient :

$$Q = U_0 h - \frac{1}{3} \frac{\rho g}{\mu} h^3 \quad \text{Eq. 1-42}$$

Si les effets d'inertie sont négligés alors l'expression du flux peut se simplifier :

$$Q = U_0 h \quad \text{Eq. 1-43}$$

Il a été montré par Deryagin *et al.* que le maximum d'épaisseur extraite autour du moule est atteint lorsque :

$$Q_m = \frac{2}{3} U \cdot h_m = \frac{2}{3} U^{3/2} \left(\frac{\mu}{\rho g} \right)^{1/2} \quad \text{Eq. 1-44}$$

Ce qui permet d'écrire l'expression de l'épaisseur maximale possible d'atteindre autour d'un cylindre en mouvement :

$$h_\infty = \frac{2}{3} \left(\frac{\mu U_0}{\rho g} \right)^{1/2} \quad \text{Eq. 1-45}$$

Cette expression est correcte pour les cas de trempage où les effets capillaires au niveau du ménisque sont négligeables.

✓ *Modèle 2 pour déterminer l'épaisseur maximale développé par Deryagin*

Deryagin [Deryagin64] a développé par la suite une autre solution permettant de déterminer l'épaisseur maximale qu'il est possible d'atteindre autour d'un cylindre au cours du trempage en considérant, cette fois, les effets capillaires dans le ménisque. L'équation 1-9 (mouvement d'un fluide newtonien autour d'un cylindre dans le cas présent) peut alors s'écrire :

$$\mu \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r + R_m} \frac{du}{dr} = \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \quad \text{Eq. 1-46}$$

La pression sur la surface libre peut s'exprimer à l'aide des conditions aux limites 1-12 suivantes :

$$p = -p_0 + \frac{\sigma}{R_1} - \frac{\sigma}{R_2} \quad \text{Eq. 1-47}$$

Avec les rayons de courbures R_1 et R_2 équivalents aux expressions suivantes :

$$\begin{cases} R_1 \approx R_m = c^{ste} \\ \frac{1}{R_2} \approx \frac{d^2h}{dz^2} \end{cases} \quad \text{Eq. 1-48}$$

A partir de ces simplifications, il est possible de réécrire l'équation 1-44 de la manière suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r + R_m} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\rho g}{\mu} - \frac{\sigma}{\mu} \frac{d^3h}{dz^3} \quad \text{Eq. 1-49}$$

La vitesse u et le flux Q s'exprime de la manière suivant :

$$\begin{cases} u = - \left[\frac{\sigma}{2\mu} \frac{d^3h}{dz^3} + \frac{\rho g}{2\mu} \right] (h-r)^2 + \left[\frac{\sigma}{2\mu} \frac{d^3h}{dz^3} + \frac{\rho g}{2\mu} \right] h^2 - U_0 \\ Q = U_0 h - \frac{1}{3} \left[\frac{\sigma}{\mu} \frac{d^3h}{dz^3} + \frac{\rho g}{2\mu} \right] h^3 \end{cases} \quad \text{Eq. 1-50}$$

Loin de la surface du bain, le flux Q vaut :

$$Q = U_0 h_0 - \frac{\rho g}{3\mu} h_0^3 \quad \text{Eq. 1-51}$$

L'équation 1-51 peut se simplifier en introduisant les nombres L et λ définis précédemment et $\alpha = h_0^2 \left(\frac{\rho g}{3\mu U_0} \right)^{1/2}$:

$$\frac{d^3L}{d\lambda^3} + \alpha = \frac{1}{L^2} - \frac{1-\alpha}{L^3} \quad \text{Eq. 1-52}$$

La solution à l'équation trouvée par Deryagin [Deryagin64] est la suivante :

$$h_{\infty} = 1,32 R_m \left(\frac{\mu u}{\sigma} \right)^{2/3} \quad \text{Eq. 1-53}$$

Cette équation n'est applicable que lorsque $\mu u / \sigma \ll 1$.

La Figure 1-5 montre la comparaison entre les deux modèles de Deryagin et al. Le deuxième modèle est applicable lorsque les effets capillaires ne peuvent pas être négligés alors que le premier a été développé pour les cas où ces effets ne sont pas importants. A faible vitesse de retrait, le premier modèle surestime l'épaisseur alors qu'à forte vitesse, c'est le deuxième modèle qui la surestime.

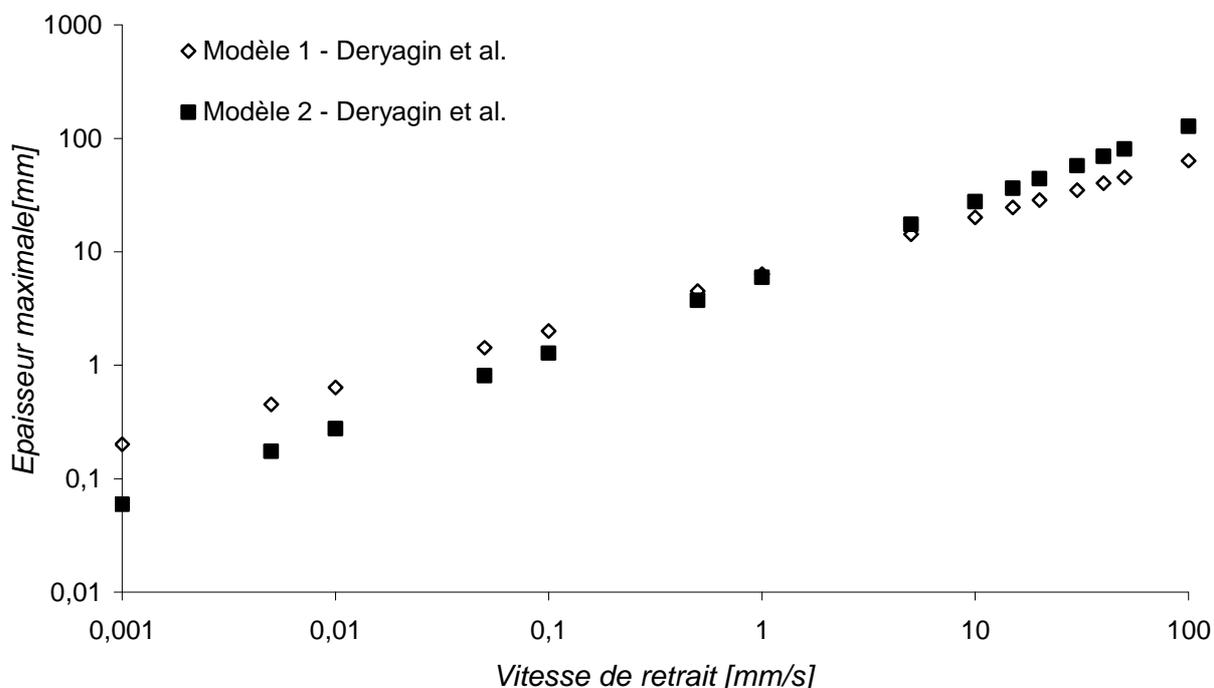


Figure 1-5 : Comparaison des deux modèles de Deryagin : calculs des épaisseurs maximales possibles de retirer autour d'un moule cylindrique lors du trempage en fonction de la vitesse de retrait à l'aide des deux méthodes 1/ équation 1-45 et 2/ équation 1-53

Comme pour le cas de la plaque trempée, les expressions pour calculer l'épaisseur extraite autour d'un cylindre ne sont pas générales et à chaque cas particulier doit être employée une équation différente. De plus, les études se sont limitées à des cas bidimensionnels avec des géométries simples semi infinies.

Pour déterminer l'épaisseur extraite lors du trempage, les méthodes analytiques restent imparfaites et trop simplifiées. Dans les cas par exemple de fluides non-newtoniens, le

comportement rhéologique est complexe puisqu'il introduit des non-linéarités dans l'équation de mouvement. Le problème mathématique devient alors compliqué. Le recours à la modélisation numérique s'avère donc indispensable car c'est le seul moyen de conjuguer ensemble tous les facteurs physiques présents lors du trempage.

1.2.3 Approche numérique du trempage

Beaucoup se sont intéressés à développer une méthode de prédiction de l'épaisseur constante h_0 d'un point de vue analytique. Cependant, la littérature recense très peu d'études numériques. L'étude la plus complète est celle de Tanguy [Tanguy82] et de Tanguy *et al.* ([Tanguy84-I], [Tanguy84-II] et [Tanguy85]) qui ont modélisés par éléments finis les cas de trempage d'une plaque et d'un cylindre en prenant en compte la tension de surface, la viscosité et la gravité et cela pour des fluides newtonien et non-newtonien. A l'aide de ce travail, ils ont tenté de prédire la forme du ménisque et son évolution au cours du temps ainsi que l'épaisseur constante, cependant leur étude s'est limitée aux cas bi-dimensionnel.

Le traitement numérique d'un cas d'un fluide newtonien est différent de celui d'un fluide non-newtonien qui ajoute des non-linéarités dans le problème.

1.2.3.1 *Définitions du problème*

1.2.3.1.1 Cas des fluides newtoniens

✓ *Forme variationnelle du problème*

La première étape de résolution du problème consiste formuler le problème 1-19 sous sa forme variationnelle :

$$\begin{cases} (U \cdot \nabla)U + \nabla \cdot \tau = \rho F \\ \nabla \cdot U = 0 \\ \tau = -2\mu \dot{\gamma}(U) \end{cases} \quad \text{Eq. 1-54}$$

avec le vecteur des valeurs nodales noté U et des pressions nodales p noté P .

Résoudre ce problème consiste à considérer le problème sous la forme suivante :

$$\mathfrak{S}(U, P) = \mu \int_{\Omega} \left| \dot{\gamma}(U) \right|^2 d\Omega - \int_{\Omega} F \cdot U d\Omega - \int_{\Omega} U \cdot \nabla P d\Omega \quad \text{Eq. 1-55}$$

Pour résoudre le système 1-55 revient à chercher le point selle (U, P) de $\mathfrak{S}(U, P)$, c'est-à-dire à annuler au point (U, P) les dérivées directionnelles de $\mathfrak{S}(U, P)$. On écrit ainsi la forme faible du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \psi' \cdot \nabla \cdot U d\Omega = 0, \quad \forall \psi' \\ \int_{\Omega} B_h(U, \psi) d\Omega = 2\mu \int_{\Omega} \dot{\gamma}(U) : \dot{\gamma}(\psi) d\Omega + \int_{\Omega} (U \cdot \nabla) U \cdot \psi d\Omega \\ \quad + \int_{\Omega} \psi \cdot \nabla P d\Omega - \int_{\Omega} F \cdot \psi d\Omega + \int_{\Gamma} (-P + \tau_{nn}) \psi \cdot nd\Gamma + \int_{\Gamma} \tau_{ny} \psi \cdot td\Gamma = 0, \quad \forall \psi \end{array} \right. \quad \text{Eq. 1-56}$$

✓ *Discrétisation*

Le choix de Tanguy *et al.* pour la modélisation du trempage s'est porté sur une méthode par éléments finis décrite en vitesse et en pression. Les éléments choisis pour la description du domaine sont de type quadratique Q et tétraédrique T (Figure 1-6). La combinaison de ces deux types d'éléments permet plus de flexibilité dans la génération du maillage.

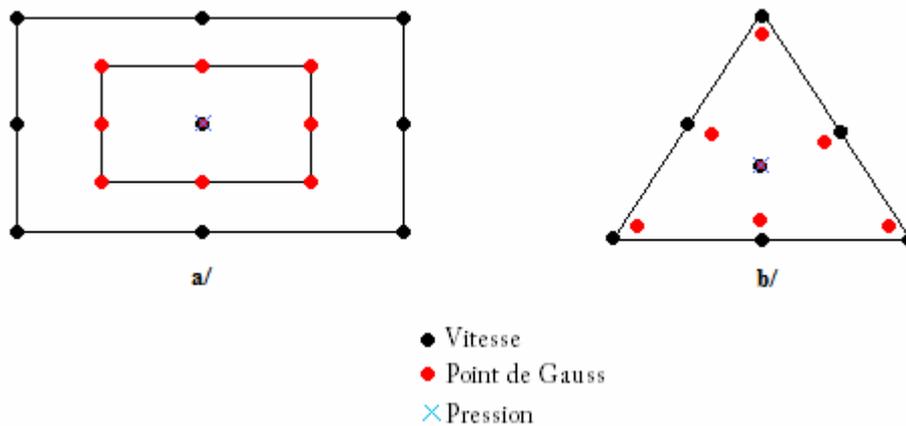


Figure 1-6 : Eléments a/ quadratique Q et b/ tétraédrique T

En transposant le système de l'équation 1-54, il est possible d'écrire :

$$\begin{cases} AU + B(U)U + C^T P = F \\ CU = 0 \end{cases} \quad \text{Eq. 1-57}$$

Pour les éléments quadratiques, la matrice C est de forme (18×3) et pour les tétraèdres elle est de forme (14×3) . La résolution du système se fait à l'aide d'une méthode de pénalité exacte avec :

$$P = \frac{1}{\kappa} S^{-1} C U \quad \text{Eq. 1-58}$$

avec S une matrice non singulière et κ le paramètre de pénalisation. L'équation 1-57 devient :

$$A U_{\kappa} + B(U_{\kappa}) U_{\kappa} + \frac{1}{\kappa} C^T S^{-1} C U_{\kappa} = F \quad \text{Eq. 1-59}$$

L'erreur introduite par la pénalisation peut être éliminée à l'aide d'un schéma itératif en définissant la pression ainsi :

$$P^{n+1} = P^n + \frac{1}{\kappa} S^{-1} C U^n \quad \text{Eq. 1-60}$$

Ce qui permet de déduire :

$$A U_{\kappa}^{n+1} + B(U_{\kappa}^{n+1}) U_{\kappa}^{n+1} + C^T P^n + \frac{1}{\kappa} C^T S^{-1} C U_{\kappa}^{n+1} = F \quad \text{Eq. 1-61}$$

1.2.3.1.2 Cas des fluides non newtoniens

Pour les cas des fluides non newtoniens il a été employé la méthode du Lagrangien augmenté (ALM) couplée à une méthode par pénalité. Ceci permet de traiter les irrégularités introduites par les modèles rhéologiques séparément du champ de vitesse dans l'itération.

✓ *Forme variationnelle du problème*

Comme dans le cas newtonien, la première étape revient formuler le problème 1-19 sous sa forme variationnelle :

$$\begin{cases} (U \cdot \nabla)U + \nabla \cdot \tau = \rho F \\ \nabla \cdot U = 0 \\ \tau = -2\mu \left(\left| \dot{\gamma} \right| \right) \dot{\gamma}(U) \end{cases} \quad \text{Eq. 1-62}$$

Résoudre ce problème consiste à considérer le problème sous la forme suivante :

$$\mathfrak{S}(U, P) = \int_{\Omega} \phi \left| \dot{\gamma} \right|^2 d\Omega - \int_{\Omega} F \cdot U d\Omega - \int_{\Omega} U \cdot \nabla P d\Omega \quad \text{Eq. 1-63}$$

où $\phi \left(\left| \dot{\gamma} \right|^2 \right)$ est dépendant de la viscosité $\mu \left(\left| \dot{\gamma} \right| \right)$.

La résolution du problème à l'aide d'une méthode par éléments finis conduit à résoudre un système non linéaire. Pour cela, il faut employer une méthode itérative. La résolution de ce type de système se fait en deux étapes : factorisation de la matrice, très coûteuse en temps, et calcul des paramètres. L'ALM est une méthode permettant de découpler le calcul de cette non-linéarité du calcul du champ de pression et de vitesse. Pour cela, il faut introduire une variable artificielle ϑ liée à la contrainte $\dot{\gamma}$. La forme faible du problème devient alors :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(\vartheta, U, P, \xi) = & \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} \phi \vartheta d\Omega + \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} P \nabla \cdot U d\Omega - \int_{\Omega} F \cdot U d\Omega \\ & + \int_{\Omega} a(x) \left(\xi - \dot{\gamma}(U) \right) d\Omega + \frac{r}{2} \int_{\Omega} a(x) \left(\xi - \dot{\gamma}(U) \right)^2 d\Omega \end{aligned} \quad \text{Eq. 1-64}$$

avec r est le paramètre de pénalité, $a(x)$ un coefficient relié à la viscosité et ξ un multiplicateur lagrangien.

✓ Modèles rhéologiques des fluides non newtoniens

Tanguy *et al.* ont considéré deux types de description pour des fluides non newtoniens.

Le premier est le modèle de *Carreau-A* défini par :

$$\tau^D = -\mu_0 \left[1 + \left| t_c \dot{\gamma}(\mathbf{u}) \right|^2 \right]^{-s} \dot{\gamma}(\mathbf{u}) \quad \text{Eq. 1-65}$$

avec μ_0 la viscosité dynamique à cisaillement nul, t_c le temps caractéristique et s un paramètre à déterminer.

La fonction $\Phi(\vartheta)$ devient alors :

$$\Phi(\vartheta) = \frac{\mu_0}{2(1-s)t_c^2} \left[\left(1 + t_c^2 |\vartheta|^2 \right)^{1-s} - 1 \right] \quad \text{Eq. 1-66}$$

Et l'équation 1-66 s'écrit :

$$\left(\frac{\mu_0}{\left[1 + t_c^2 |\vartheta|^2 \right]^s} + ra(x) \right) \vartheta = a(x) \left[r \dot{\gamma}(\mathbf{u}) - \xi \right] \quad \text{Eq. 1-67}$$

Le deuxième cas est celui d'un modèle de second ordre défini par :

$$\tau^D = -2\mu_0 \dot{\gamma} - 2\Pi_1 \left(\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma} \right) = \left(-2\mu_0 \delta - 2\Pi_1 \dot{\gamma} \right) \cdot \dot{\gamma} \quad \text{Eq. 1-68}$$

avec Π_1 le coefficient de contraintes normales.

L'équation 1-72 devient alors :

$$2\mu_0 \vartheta + 2\Pi_1 \vartheta \cdot \vartheta + ra(x) \vartheta = a(x) \left(r \dot{\gamma}(\mathbf{u}) - \xi \right) \quad \text{Eq. 1-69}$$

✓ *Discrétisation*

Il faut maintenant procéder à la discrétisation des équations 1-63 à 1-64. La procédure est assez proche de celle employée dans le cas newtonien. Les approximations de \mathbf{u} et p se font employant les éléments Q_{93} et T_{73} . Il faut également discrétiser de ξ et ϑ . Les composantes ϑ sont équivalentes à celle de $\dot{\gamma}(\mathbf{u})$, donc il a été choisi pour chaque élément d'approximer ϑ par un polynôme biquadratique sur les éléments quadrilatéraux et par un polynôme quadratique sur les tétraèdres.

La procédure d'itération est la suivante :

1. ξ^0 , p^0 et \mathbf{u}^0 sont connus
2. A partir de la $i^{\text{ème}}$ itération, ϑ^i calculé à partir de ξ^{i-1} , \mathbf{u}^i et p^i

3. Mise à jour de ξ et calcul de $\xi^{i+1} = \xi^i + r \left(\vartheta^i - \dot{\gamma}^{i-1} (\mathbf{u}^{i-1}) \right)$
4. Résolution du problème de Stokes en \mathbf{u}^i
5. Test de convergence $\max \left| \frac{\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i-1}}{\mathbf{u}^{i-1}} \right| < 10^{-2}$

1.2.3.2 Application au trempage

Les études menés par Tanguy et al. se sont concentrées sur la description de la forme du ménisque. Pour cela, à partir de l'estimation initiale de la position de la surface libre, l'ensemble des conditions initiales permettent de déterminer le flux et ainsi de réactualiser sa position. La position de la surface libre initiale est déterminée dans les cas newtoniens à partir des modèles de Groenveld et Van Dortmond [Groenveld70] et de Lee et Tallmadge [Lee73] et dans les cas non newtoniens à partir des essais expérimentaux.

Les conditions aux limites sont celles données équation 1-12 car elles présentent l'avantage d'être incluses dans la formulation variationnelle. La position de la surface libre est actualisée à chaque incrément et son déplacement est gouverné par l'équation suivante :

$$x^{k+1} = x^k + \chi(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad \text{Eq. 1-70}$$

où χ est le pas de temps. Seuls les sommets des éléments sont déplacés à partir de l'équation 1-70 et leurs centres de gravité sont interpolés à l'aide d'une approximation de type spline cubique. La description de cette méthode est donnée dans [Tanguy82]. Cet ajustement n'est employé que sur la partie incurvée du ménisque alors que l'épaisseur constante est fixée et imposée ainsi que la hauteur du bain.

Les prédictions numériques à l'aide de cette méthode donnent de très bons résultats lorsqu'ils sont comparés à des cas de trempages expérimentaux dans les cas newtoniens.

Pour les cas des fluides non newtoniens, Tanguy et al. ont mis en évidence l'importance de la prise en compte du couplage rhéofluidité – élasticité qui intervient de manière importante dans la réduction d'entraînement qu'ils ont observé expérimentalement dans la zone du ménisque dynamique. La loi rhéologique de Carreau-A ne permet pas de décrire ce couplage d'où l'apparition de différences entre l'expérimentation et les prédictions numériques. Cette étude a mis en évidence l'importance de la bonne mesure des propriétés rhéologiques des fluides de trempage et de l'utilisation de modèles adéquats pour sa description.

Le modèle rhéologique employé pour la description des liquides de second ordre montre de bonnes corrélations avec l'expérimentation.