Fonctions séquentielles par morceaux

Dans la suite, nous nous intéressons à la fonction successeur d'un langage rationnel, en particulier à son calcul. Il apparaît donc utile de pouvoir classer cette fonction dans une sous-classe de fonctions rationnelles dans laquelle les fonctions peuvent avoir un calcul déterministe par des transducteurs.

Nous étudions dans ce chapitre la classe des fonctions séquentielles par morceaux. Cette classe de fonctions a été définie dans [21] sous le nom de fonctions plurisousséquentielles. Les fonctions séquentielles par morceaux étendent naturellement les fonctions séquentielles, qui sont les fonctions qui peuvent être réalisés par des transducteurs 'déterministes en entrée', c'est-à-dire tels que la lecture d'un mot se fait de manière déterministe et permet d'obtenir l'image de ce mot en un seul passage déterministe dans l'automate. Les fonctions séquentielles par morceaux peuvent être réalisées par une union finie de transducteurs réalisants des fonctions séquentielles ou, comme il a été montré dans [3], par des cascades de transducteurs séquentiels, c'est-à-dire une succession finie de transducteurs séquentiels telle que pour avoir l'image d'un mot, il faut lire celui-ci dans un transducteurs séquentiel puis l'état de sortie atteint détermine le transducteur séquentiel suivant qui lira l'image du mot obtenue.

Nous étudions ensuite les classes Seqpm et coSeqpm des fonctions séquentielles et co-séquentielles par morceaux et leur positionnement dans l'espace des fonctions rationnelles par rapport aux classes des fonctions séquentielles et co-séquentielles [3].

Les transducteurs réalisant les fonctions séquentielles par morceaux ont déjà été étudiés dans [21], et, en particulier, une preuve de la décidabilité de ces fonctions, que nous retranscrirons, est donnée dans ce même papier.

7.1 Fonctions séquentielles

Les fonctions séquentielles sont particulièrement étudiées car elles peuvent être réalisées par des transducteurs dont le comportement ressemble à celui des automates déterministes. C'est-à-dire que l'on peut lire le mot d'entrée de manière déterministe dans le transducteur et obtenir ainsi l'image du mot avec une complexité linéaire en la taille du mot d'entrée. Nous rappelons dans cette section la définition et certaines caractérisations des fonctions séquentielles et des transducteurs qui leur sont associés. Pour les preuves manquantes de ce chapitre, le lecteur peut se référer à [43, IV].

7.1.1 Séquentialité

Par fonction séquentielle nous entendons ce qui est également communément appelé dans la littérature *fonction sous-séquentielle* (cf. [19] ou [7]). Nous définissons tout d'abord les transducteurs séquentiels :

Définition 35 ([45])**.** *Un* transducteur séquentiel τ *de* A^* *dans* B^* *est un transducteur dont l'automate d'entrée sous-jacent est déterministe. En particulier, la fonction initiale* I *est une fonction dont le domaine est l'unique état initial* i*.*

Définition 36 ([45])**.** *Une fonction rationnelle est* séquentielle *si elle est réalisée par un transducteur séquentiel.*

Nous notons Seq la famille des fonctions séquentielles. Il est possible de définir les notions duales :

Définition 37. *Un transducteur* co-séquentiel τ *de* A^* *dans* B^* *est un transducteur dont l'automate d'entrée sous-jacent est co-déterministe. En particulier, la fonction finale* T *est une fonction dont le domaine est l'unique état terminal* t*.*

Définition 38. *Une fonction rationnelle est* co-séquentielle *si elle est réalisée par un transducteur co-séquentiel.*

La famille des fonctions co-séquentielles sera notée coSeq. Et, comme pour les fonctions séquentielles, nous avons naturellement :

Remarque 13. Il est également possible de voir les transducteurs co-séquentiels, en prenant leur transposé, comme des transducteurs séquentiels qui lisent les mots de droite à gauche. Un tel transducteur sera appelé *transducteur séquentiel droit* – par opposition aux transducteurs séquentiels classiques qui pourront également être qualifiés de *gauche* –. Il est à noter que le terme gauche ou droit ne change pas la définition du transducteur séquentiel mais uniquement le sens de lecture du mot.

Nous choisissons de ne pas transcrire la notion de gauche/droit aux fonctions car elles associent des images à des mots sans tenir compte du sens de lecture du mot. Ainsi un fonction séquentielle sera réalisée par un transducteur séquentiel – gauche – ou par un transducteur co-séquentiel droit – par exemple le transposé du précédent –. Les fonctions co-séquentielles sont réalisées par des transducteurs séquentiels droits ou des transducteurs co-séquentiels gauches.

7.1.2 Caractérisation

Nous avons vu que les fonctions séquentielles sont les fonctions réalisées par des transducteurs séquentiels. Nous donnons maintenant une autre caractérisation, quasi-topologique, classique des fonctions séquentielles.

Pour cela, nous définissons tout d'abord la *distance préfixe* sur les mots d'un monoïde libre :

$$\mathsf{d_p}(u,v) = |u| + |v| - 2|u \wedge v| \quad , \tag{7.1}$$

où $u \wedge v$ est le plus long commun préfixe de u et de v.

La donnée d'une distance permet d'énoncer la définition de fonctions lipschitziennes pour cette distance :

Définition 39. *Une fonction α de A^* dans B^* est dite k-Lipschitz (pour la distance préfixe) si :*

$$\forall u,v \in \mathsf{Dom}\,\alpha \quad , \quad \mathsf{d_p}(\alpha(u),\alpha(v)) \leqslant k \; \mathsf{d_p}(u,v) \quad .$$

Une fonction sera dite lipschitzienne si il existe k pour lequel elle est k-Lipschitz.

Cette définition donne une autre caractérisation des fonctions séquentielles :

Théorème 62 ([19])**.** *Soit α une fonction rationnelle de A^* dans B^*. La fonction α est séquentielle si, et seulement si, elle est lipschitzienne.*

Il existe naturellement une définition duale en prenant une distance suffixe $\mathsf{d_s}$ et pour laquelle les fonctions rationnelles lipschitziennes sont les fonctions co-séquentielles.

Il existe des fonctions rationnelles qui ne sont ni séquentielles ni co-séquentielles. En particulier ce résultat est connu pour les fonctions successeurs de langages rationnels (cf. par exemple [25]) : la fonction successeur d'un langage rationnel n'est pas nécessairement séquentielle ou co-séquentielle.

Exemple 56. Nous considérons la fonction $\alpha_0 = \mathsf{Succ}_{A^*}$, la fonction successeur sur A^* lui-même. Pour cet exemple nous prendrons l'alphabet A_2 à deux lettres : $A_2 = \{0, 1\}$. La fonction α_0 est co-séquentielle mais pas séquentielle.

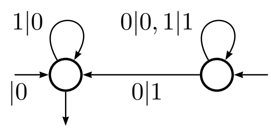

FIGURE 7.1 – Transducteur co-séquentiel réalisant α_0

La fonction α_0 est réalisée par le transducteur co-séquentiel de la Figure 7.1.

La caractérisation lipschitzienne des fonctions séquentielles nous permet de montrer la non séquentialité de α_0 : soit k un entier, posons $u_n = 1^n0$ et $v_n = 1^n$. La distance préfixe entre u_n et v_n vaut :

$$\mathsf{d_p}(u, v) = 1 \ .$$

Les images de u_n et de v_n par α_0 sont $\alpha_0(u_n) = 1^{n+1}$ et $\alpha_0(v_n) = 10^n$. Nous avons :

$$\mathsf{d_p}(\alpha_0(u_n), \alpha_0(v_n)) = 2n \ .$$

Il est donc possible de choisir n tel que $\mathsf{d_p}(\alpha_0(u_n), \alpha_0(v_n)) > k \ \mathsf{d_p}(u_n, v_n)$. La fonction α_0 n'est donc pas k-Lipschitz.

Comme séquentialité et co-séquentialité sont deux notions duales, il est facile d'imaginer à partir de cet exemple une fonction qui serait séquentielle mais non co-séquentielle. Ainsi, la fonction réalisée par le transducteur séquentiel de la Figure 7.2 n'est pas co-séquentielle.

Nous allons maintenant montrer par un nouvel exemple qu'il existe des fonctions qui ne sont ni séquentielles, ni co-séquentielles :

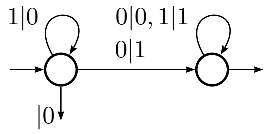

FIGURE 7.2 – Transducteur séquentiel réalisant la transposée de α_0

Exemple 57. [[25]] Considérons le système de numération de base le carré de la suite de Fibonacci. La base de ce système est définie par l'induction $u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$. C'est-à-dire que la base est $U_\tau = \{1, 3, 8, 21, ...\}$. Les représentations dans ce système sont caractérisées par le langage rationnel $L_{sqf} = A^* \setminus \{A^*(21^*2)A^* \cup 0A^*\}$ où $A = \{0, 1, 2\}$.

La fonction $\alpha_{sqf} = \mathsf{Succ}_{L_{sqf}}$ n'est ni séquentielle, ni co-séquentielle.

Considérons $u_n = 2(1)^n$ et $v_n = 1^n$. Nous avons :

$$\mathsf{Succ}_{L_{sqf}}(u_n) = 1(0)^{n+1} \qquad \text{et} \qquad \mathsf{Succ}_{L_{sqf}}(v_n) = 1^{n-1}2 \ ,$$

Or, comme $\mathsf{d_s}(u_n, v_n) = 1$ et $\mathsf{d_s}(1(0)^{n+1}, 1^{n-1}2) = 2n+1$, la fonction α_{sqf} n'est pas lispchitzienne pour la distance suffixe, ce qui montre la non co-séquentialité.

Une étude similaire à l'exemple précédent avec α_0 montre également que la fonction α_{sqf} n'est pas séquentielle :

$$\mathsf{Succ}_{L_{sqf}}(21^n0) = 2(1)^{n+1} \qquad \text{et} \qquad \mathsf{Succ}_{L_{sqf}}(21^n) = 10^{n+1} \ .$$

On a donc 21^n0 et 21^n deux mots de distance préfixe 1 dont les successeurs ont pour distance préfixe $2n + 4$.

Rappelons qu'un ensemble de mots X est préfixe si et seulement si pour tout mot u de X il n'y a pas de préfixe propre de u dans X. Il est intéressant de donner le résultat suivant, qui correspond au Lemme 2 de [21] :

Proposition 63. *Soient α et β deux fonctions séquentielles. Si le domaine de α est un ensemble préfixe, alors le produit de α et β, défini par le produit des graphes de α et β :*

$$\alpha\beta(uv) = \alpha(u)\alpha(v)$$

est une fonction séquentielle.

7.1.3 Décidabilité

Afin d'étudier la décidabilité de la séquentialité de fonctions rationnelles – ou co-séquentialité par dualité –, nous allons donner une caractérisation des fonctions séquentielles. Plus précisément, le problème est de décider si un transducteur fonctionnel τ donné réalise une fonction séquentielle ou non. Ce problème a été résolu pour la première fois dans [19] (cf. également [7]) par une méthode qui utilise une caractérisation structurelle des transducteurs qui réalisent des fonctions séquentielles, à savoir que tous les états sont jumeaux deux à deux.

Afin de pouvoir exprimer plus simplement la propriété des transducteurs réalisants des fonctions séquentielles par morceaux, nous choisissons, dans la suite, de modifier la définition des états jumeaux qui est donnée dans [19] en séparant la notion de conjugaison et la notion de jumelage :

Définition 40. *Deux états q_1 et q_2 d'un automate sont dits jumeaux s'il existe deux mots u et v tels que $u \in L'_{q_1}$ et $u \in L'_{q_2}$ et s'il existe des cycles étiquetés par v sur q_1 et q_2.*

Par extension, deux états d'un transducteur fonctionnel sont dits jumeaux si les états correspondants dans l'automate d'entrée sous-jacent sont jumeaux (cf. Figure 7.3).

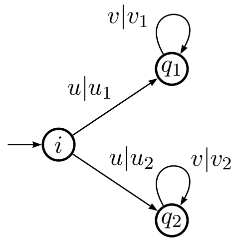

FIGURE 7.3 – Deux états jumeaux q_1 et q_2

Pour simplifier les définitions qui viennent, nous prendrons en hypothèse que le transducteur étudié est standard, avec pour unique état initial i. Cette hypothèse n'est pas trop forte puisqu'il est possible de transformer directement un transducteur en transducteur standard.

Définition 41. *Soit τ un transducteur fonctionnel standard de A^* dans B^*. Soient q_1 et q_2 deux états de τ. Les états q_1 et q_2 sont dits* q-conjugués *si pour tout couple (u, v) tel que u étiquette un chemin de q à q_1 et q_2 dont les images sont respectivement u_1 et u_2 et v étiquette l'entrée de circuits autour de q_1 et q_2 dont les images sont respectivement v_1 et v_2, on a :*

(i) *soit $v_1 = v_2 = 1_{B^*}$,*

(ii) *soit il existe w tel que $u_2 = u_1 w$ et $wv_2 = v_1 w$,*
(iii) *soit il existe w tel que $u_2 w = u_1$ et $v_2 w = wv_1$.*

Deux états états jumeaux d'un transducteur standard sont dits *conjugués* si ils sont i-conjugués. Il peut être intéressant d'insister sur le fait qu'il suffit d'un chemin d'entrant et d'un circuit ayant les mêmes entrées sur deux états pour être jumeaux. En revanche ce sont tous les couples des sorties qui doivent être vérifiés pour tester la conjugaison.

Dans la définition originale de [19], les états jumeaux sont définis comme deux états q_1 et q_2 tels que pour tout mots u et v qui satisfont la Figure 7.3 alors q_1 et q_2 sont conjugués. Nous avons changé ces définitions afin de décorreler la notion de jumelage de celle de conjugaison, ce qui est intéressant car on peut envisager de repérer dans un transducteur d'abord les états jumeaux – comme d'un motif sur un graphe – avant de tester leur conjugaison.

Le théorème donné dans [19] dit qu'un transducteur fonctionnel réalise une fonction séquentielle si tous les états sont deux-à-deux jumeaux – avec la définition d'états jumeaux de ce même papier –. Avec nos définitions, cela s'énonce :

Théorème 64 ([19])**.** *Soit τ un transducteur émondé réalisant une fonction rationnelle α. La fonction α est séquentielle si et seulement si tous les états jumeaux de τ sont conjugués.*

Ce théorème, qui donne donc une caractérisation des transducteurs fonctionnels qui réalisent une fonction séquentielle, permet de résoudre le problème de la décidabilité de la séquentialité d'une fonction rationnelle. La résolution du problème de jumelage des états est donnée en complexité exponentielle dans le papier original mais il a été montré qu'il est possible de l'obtenir en temps polynomial dans [48] et dans [6]. Dans ce dernier papier la séquentialité est prouvée en effectuant le produit par une action donnée sur le carré du transducteur – la preuve n'utilise pas directement le jumelage des états mais la Remarque 5 de [6] montre que les conditions énoncées pour la décidabilité sont les mêmes que la propriété de jumelage énoncée ci-dessus –.

7.2 Fonctions séquentielles par morceaux

Comme nous allons montrer par la suite que la fonction successeur d'un langage rationnel est une fonction qui peut-être réalisée par une union finie de transducteurs co-séquentiels par morceaux, nous allons étudier la classe de telles fonctions. Plus particulièrement, par dualité, nous allons étudier les fonctions qui sont séquentielles sur un nombre fini de "morceaux" rationnels. Nous appelons ces fonctions les fonctions séquentielles par morceaux. Ces fonctions sont également réalisables par des passages successifs dans des transducteurs séquentiels qui permettent d'avoir l'image d'un mot de manière déterministe et en complexité linéaire en la taille du mot. La différence d'avec les fonctions séquentielles est qu'il faut lire le mot deux fois pour avoir l'image. Les fonctions séquentielles par morceaux sont même exactement les fonctions réalisées par de telles cascades de transducteurs séquentiels.

Dans cette section nous allons donc définir les fonctions séquentielles – et co-séquentielles – par morceaux, ainsi que donner des exemples de fonctions qui permettent de cerner la 'géographie' de ces classes de fonctions par rapport à l'ensemble des fonctions rationnelles, et aux classes des fonctions séquentielles et co-séquentielles. Pour finir, nous donnons une caractérisation structurelle des transducteurs qui réalisent des fonctions séquentielles par morceaux. Cette caractérisation reprend la notion d'états jumeaux appliquée à la caractérisation des fonctions séquentielles par morceaux donnée dans [21].

7.2.1 Définition

Définition 42. *Une fonction est dite séquentielle par morceaux si elle est une union finie de fonctions séquentielles dont les domaines sont deux à deux disjoints. Nous notons* Seqpm *la famille des fonctions séquentielles par morceaux.*

De cette définition il apparaît qu'une fonction séquentielle par morceaux peut être réalisée par une union finie de transducteurs séquentiels dont les domaines sont deux à deux disjoints. En fait, si l'union réalise une fonction, il est possible de se débarrasser de la condition de disjonction :

Proposition 65. *Une fonction est séquentielle par morceaux si, et seulement si, elle est réalisable par une union finie de transducteurs séquentiels.*

Démonstration. Si une fonction α est séquentielle par morceaux alors il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ séquentielles et dont les domaines sont deux à deux disjoints tels que α soit l'union des α_i. Pour chaque i, il existe une transducteur séquentiel τ_i qui réalise α_i. L'union des transducteurs τ_i réalise α.

Réciproquement, soient $\tau_1, \ldots, \tau_n$ des transducteurs séquentiels dont l'union réalise une fonction α. Pour tout i, τ_i réalise une fonction séquentielle α_i. Les domaines des α_i ne sont pas nécessairement disjoints mais comme ils sont rationnels, l'intersection du domaine de α_i et du domaine de α_j est un langage rationnel $X_{i,j}$. Comme l'union de α_i et α_j est une fonction, alors c'est également l'union de α_i et de la restriction de α_j a $\mathsf{Dom}\,\alpha_j - X$ et c'est donc une union de deux fonctions séquentielles à domaines disjoints. En réalisant la même opération pour tous les i et les j, on trouve que si l'union des transducteurs est une fonction, alors elle est séquentielle par morceaux. □

Les fonctions *co-séquentielles par morceaux* sont définie de manière duale par une union finie de fonctions co-séquentielles dont les domaines sont deux à deux disjoints. Leur famille est notée coSeqpm.

Comme les fonctions séquentielles et co-séquentielles sont fermées par composition, on a :

Proposition 66. *Les fonctions (co-)séquentielles par morceaux sont fermées par composition.*

7.2.2 Cascades de transducteurs séquentiels

Cette sous-section présente une nouvelle famille de machine déterministes qui permettent, comme les unions finies de transducteurs séquentiels, de réaliser les fonctions séquentielles par morceaux. Ces machines sont appelées cascades de transducteurs séquentiels et l'idée de ces cascades est de lire l'image d'un mot u par un transducteurs séquentiel dans un autre transducteur séquentiel qui dépend de l'état de sortie dans le premier transducteur. On peut très bien imaginer répéter ce processus h fois et obtenir ce que l'on appellera une cascade de hauteur h.

Définition 43 ([3])**.** *Une cascade de transducteurs séquentiels de hauteur h est un ensemble fini de transducteurs séquentiels*

$$\tau_0 \cup \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant h-1} \tau_{i,q_{i,j}} \quad , \tag{7.2}$$

où les $q_{1,j}$ sont les états finaux de τ_0 et les $q_{i,j}$ sont tous les états finaux des transducteurs $\tau_{(i-1),q_{(i-1),j}}$.

La fonction réalisée par une telle cascade est la fonction rationnelle α telle que :

$$\alpha(u) = \tau_{h,q_{i,j}}(\tau_{h-1,q_{i-1,j'}} \dots (\tau_0(u))) \quad , \tag{7.3}$$

où $q_{i,j}$ est l'état de sortie de $(\tau_{h-1,q_{i-1,j'}} \dots (\tau_0(u)))$.

Une cascade de hauteur 1 est donc un unique transducteur séquentiel et la fonction réalisée est une fonction séquentielle. Le transducteur de hauteur 1, τ_0, d'une cascade pourra être appelé *transducteur initial* de la cascade.

Exemple 58 (*Ex. 57 cont.*)**.** La fonction α_{sqf} est une fonction que nous avons montré être ni séquentielle ni co-séquentielle. La Figure 7.4 montre une cascade de transducteurs séquentiels droits réalisant la fonction α_{sqf}. Pour avoir l'image d'un mot u, il faut le lire dans le transducteur τ puis, suivant l'état de sortie p ou q, lire respectivement le mot de sortie alors obtenue dans le transducteur du haut σ_p ou du bas σ_q.

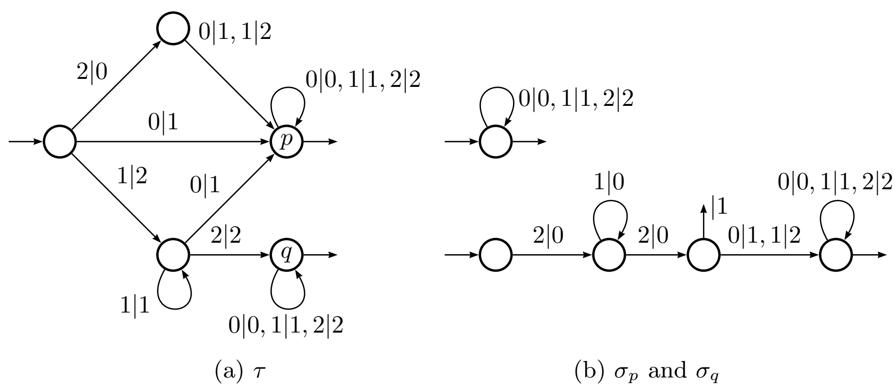

FIGURE 7.4 – Cascade de transducteurs séquentiels droits réalisant α_{fibo^2}

Nous montrons maintenant que les fonctions réalisées par les cascades de transducteurs séquentiels sont exactement les fonctions séquentielles par morceaux.

Théorème 67 ([3])**.** *Soit α une fonction rationnelle de A^* dans B^*. Les propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) *α est une fonction séquentielle par morceaux ;*
(ii) *α est réalisable par une cascade de transducteurs séquentiels de hauteur* 1 *ou* 2 *;*
(iii) *α est réalisable par une cascade de transducteurs séquentiels de hauteur $h \geqslant 1$.*

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$: Si α est séquentielle par morceaux, il est possible de construire une union finie de transducteurs séquentiels dont les domaines sont deux à deux disjoints et réalisant α. Notons ces transducteurs $\tau_1, \ldots, \tau_n$ et leurs domaines respectifs $L_1 \cdots L_n$. Il est possible de construire un automate déterministe $\mathcal{A}$ dont l'ensemble T des états finaux est partitionné en $T_1, \ldots, T_n$ de telle manière que le langage des mots reconnus dans $\mathcal{A}$ par les états de T_i est L_i.

Soit τ_0 le transducteur dont l'automate sous-jacent d'entrée est $\mathcal{A}$ et dont la fonction de sortie est l'identité sur chaque transition – ce transducteur réalise une restriction de l'identité –. La cascade de hauteur 2 dont le transducteur initial est τ_0 et dont les transducteurs de hauteurs 2 sont les $\tau_1, \ldots, \tau_n$ – associés aux états finaux $T_1, \ldots, T_n$ de τ_0 – réalise la fonction α.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Cette implication est triviale.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Décomposons tout transducteur séquentiel τ^k de la hauteur k d'une cascade en une union de transducteurs identiques à τ^k mais avec chacun un unique état final. Comme τ^k est séquentiel, cette décomposition est une union finie de transducteurs, notés $\tau_1^k, \ldots, \tau_n^k$, séquentiels.

La composition de fonctions séquentielles est une fonction séquentielle donc la composition les fonctions réalisées par τ_i^k avec les fonctions réalisées τ_j^{k+1} est une fonction séquentielle. L'union de toutes ces fonctions séquentielles forme donc une fonction séquentielle par morceaux. $\square$

Naturellement il y a également le théorème dual suivant :

Théorème 68. *Soit α une fonction rationnelle de A^* dans B^*. Les propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) *α est une fonction co-séquentielle par morceaux ;*
(ii) *α est réalisable par une cascade de transducteurs co-séquentiels de hauteur 1 ou 2 ;*
(iii) *α est réalisable par une cascade de transducteurs co-séquentiels de hauteur $h \geqslant 1$.*

L'exemple précédent montre donc que la fonction α_{sqf} est co-séquentielle par morceaux.

7.2.3 coSeqpm et Seqpm

Dans un souci de complétude, nous étudions maintenant les familles des fonctions séquentielles et co-séquentielles par morceaux afin d'établir une "géographie" de cette classe relativement aux familles des fonctions séquentielles et co-séquentielles.

Par les exemples précédents, nous avons déjà montré que Seq $\subsetneq$ RatF et coSeq $\subsetneq$ RatF. Par définition, nous avons également Seqpm $\subseteq$ RatF, coSeqpm $\subseteq$ RatF ainsi que Seq $\subseteq$ Seqpm et coSeq $\subseteq$ coSeqpm.

L'exemple 57 montre également qu'il existe des fonctions qui sont co-séquentielles par morceaux sans être ni séquentielles, ni co-séquentielles :

Il existe des fonctions qui sont séquentielles sans être co-séquentielles et qui sont à la fois séquentielles et co-séquentielles par morceaux (cf. [3]).

Exemple 59. Considérons la fonction α_1 de A^* dans lui même, avec $A = \{0,1\}$ dont le domaine est $\mathsf{Dom}\,\alpha_1 = \{u_n = 00^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{v_n = 10^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et définie par :

$$\alpha_1(u_n) = 11^n \quad , \quad \alpha_1(v_n) = 1^n 0 \ .$$

La fonction α_1 est séquentielle mais pas co-séquentielle mais elle trivialement l'union de fonctions séquentielles et co-séquentielles donc une fonction séquentielle et co-séquentielle par morceaux.

Nous montrons enfin qu'il existe des fonctions qui ne sont ni séquentielles par morceaux, ni co-séquentielles par morceaux.

Soit $A = \{a, b\}$ et $\varphi\colon A^* \to A^*$ la fonction, que l'on appelle *réduction de Fibonacci*, et qui associe à chaque mot w de A^* l'unique mot $\varphi(w)$ obtenu à partir de w en appliquant la règle de réécriture $abb \to baa$ et qui ne contient plus aucun facteur abb. La réduction de Fibonacci est une fonction rationnelle (cf. par exemple [7, Exer. III.5.5] ou [37]) qui n'est ni séquentielle, ni co-séquentielle (cf. par exemple [23]).

Proposition 69 ([3])**.** *La réduction de Fibonacci n'est ni une fonction séquentielle par morceaux, ni une fonction co-séquentielle par morceaux.*

Démonstration. Pour montrer que la fonction n'est pas séquentielle par morceaux, nous montrons que, pour tout K, on ne peut pas trouver k fonctions K-Lipschitz dont l'union réalise φ. Pour cela, étant donné K, il suffit de trouver, pour tout k, $k+1$ mots pour lesquels la fonction φ ne satisfait pas le critère K-Lipschitz deux à deux.

Notons tout d'abord que, même si $\varphi(uv) \neq \varphi(u)\varphi(v)$, le facteur aa permet de séparer un mot :

$$\varphi(u\,a\,a\,v) = \varphi(u)\,a\,\varphi(a\,v) \ . \tag{7.4}$$

Considérons tout d'abord les mots $u_n = (ab)^n a$ et $v_n = (ab)^n b$. Nous avons $\mathsf{d_p}(u_n, v_n) = 2$ et :

$$\mathsf{d_p}(\varphi(u_n), \varphi(v_n)) = \mathsf{d_p}(u_n, (aa)^n b) = 4n + 1 \ .$$

Considérons les $k+1$ mots suivants (pour $1 \leqslant i \leqslant k+1$) :

$$w_i = w_{i,k}\,a\,a\,w_{i,k-1}\,a\,a \ldots a\,a\,w_{i,1} \ ,$$

où :

$$w_{i,j} = \begin{cases} v_{l_i} & \text{si i=j} \\ u_{l_i} & \text{sinon} \end{cases} \ .$$

où les l_i forment une suite croissante qui sera définie explicitement par la suite. De (7.4) nous tirons que :

$$\varphi(w_i) = u_{l_k} a\, a\, u_{l_{k-1}} a\, a \dots a\, a\, u_{l_{i+1}} a\, a\, b\,(a\, a)^{l_i} a\, a\, u_{l_{i-1}} a\, a \dots a\, a\, u_{l_1}$$

pour $1 \leqslant i \leqslant k$, et :

$$\varphi(w_{k+1}) = X_{k+1} = u_{l_k} a\, a\, u_{l_{k-1}} a\, a \dots a\, a\, u_{l_1} \quad .$$

Nous déduisons alors que pout tous i, j, $1 \leqslant i < j \leqslant k+1$, nous avons :

$$\mathsf{d_p}(w_i, w_j) = 2\left(\sum_{1 \leqslant m \leqslant i-1} (2l_m + 3)\right) \quad ,$$
$$\mathsf{d_p}(\varphi(w_i), \varphi(w_j)) = 2\left(\sum_{1 \leqslant m \leqslant i-1} (2l_m + 3) + 2l_i + 1\right) \quad .$$

Si nous choisissons les longueurs $l_1, \dots, l_k$ inductivement avec :

$$l_1 > \frac{1}{2}(K-1)$$
$$l_i > \frac{1}{2}(K-1)\left(\sum_{1 \leqslant m \leqslant i-1} (2l_m + 3)\right)$$

alors pour tous i, j, $1 \leqslant i < j \leqslant n+1$, nous avons :

$$\mathsf{d_p}(\varphi(w_i), \varphi(w_j)) > K\mathsf{d_p}(w_i, w_j)$$

ainsi φ ne peut être l'union de k fonctions K-Lipschitz et n'est donc pas une fonction séquentielle par morceaux.

Une méthode similaire, en prenant $u_n = a\,(b\,b)^n$ et $v_n = a\,b\,(b\,b)^n$ montre également que φ n'est pas une fonction co-séquentielle par morceaux. $\square$

Nous pouvons finalement établir la géographie des fonctions rationnelles comme le montre la Figure 7.5 où les inclusions sont toutes strictes.

7.2.4 Décidabilité

Finalement, dans cette sous-section, nous étudions la décidabilité de la séquentialité par morceaux des fonctions rationnelles. La décidabilité a déjà été prouvée dans [21] à l'aide d'une caractérisation des fonctions rationnelles par morceaux qui utilise la notion de branchement que nous allons rappeler.

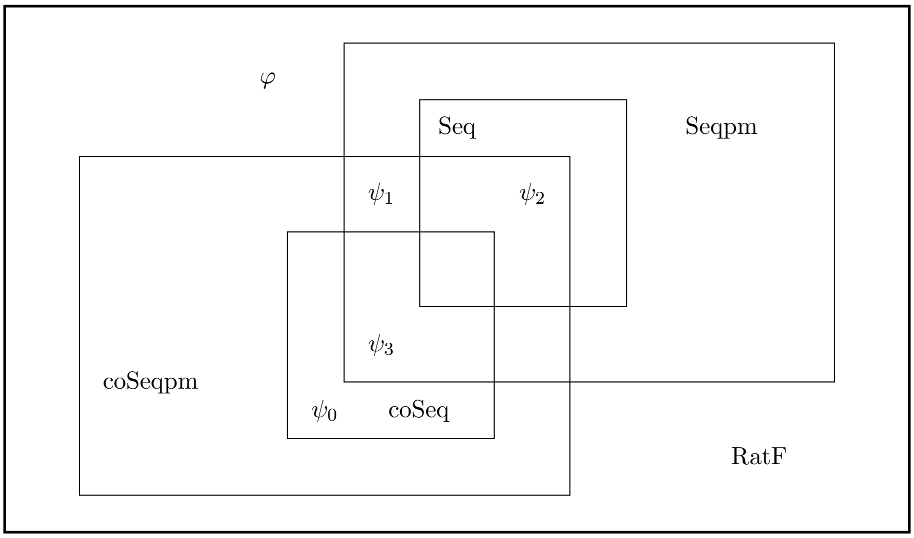

FIGURE 7.5 – Géographie des fonctions rationnelles

Nous allons ensuite transcrire les définitions de branchements et les caractérisations associées afin de reprendre une terminologie proche de celle des états jumeaux et de la conjugaison. Ce travail de transcription est la première étape pour envisager une décidabilité structurelle de la séquentialité par morceaux : c'est-à-dire la reconnaissance d'un motif dans le transducteur qui réalise la fonction.

Définition 44 ([21])**.** *Soit τ un transducteur fonctionnel. Un* branchement *est un triplet d'états (q, q_1, q_2) tel que l'intersection des langages des mots lus de q à q_1 et des mots lus de q à q_2 est non vide (cf. Figure 7.6).*

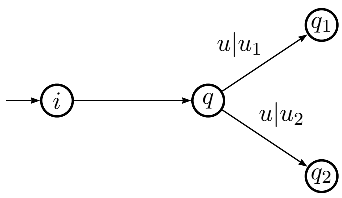

FIGURE 7.6 – Un branchement

Un branchement faible *est un branchement (q, q_1, q_2) tel que la distance préfixe des images de chemins étiquetés par le même mot de q à q_1 et q_2 est bornée : il existe un entier $k > 0$ tel que pour tout u qui est l'étiquette d'entrée d'un chemin de q à q_1 et à q_2 dont les images respectives sont u_1 et u_2 on a :* $\mathsf{d_p}(u_1, u_2) < k$.

Un branchement fort *est un branchement qui n'est pas faible. Un* branchement absolu *est un branchement fort (q, q_1, q_2) où $q = q_1$ ou $q = q_2$.*

L'existence de branchements forts dans un transducteur est en fait directement liée à l'existence d'états jumeaux non-conjugués. Nous retranscrivons ici la caractérisation de [21] avec la terminologie des états jumeaux. En particulier nous montrons par la suite que l'existence de branchements absolus est conjointe à l'existence d'états q_1 et q_2 *monozygotes* non q_1-conjugués :

Définition 45. *Deux états q_1 et q_2 d'un automate ou d'un transducteur standard émondé sont dits* monozygotes *si il existe un mot u tel que q_1 et q_2 sont accessibles à partir de q_1 par u et il existe un mot v qui est l'entrée d'un circuit sur q_1 et q_2 (cf. Figure 7.7)*

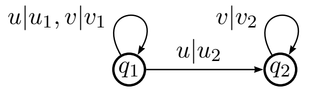

FIGURE 7.7 – Deux états monozygotes q_1 et q_2

Deux états monozygotes q_1 et q_2 sont jumeaux. Ce qui nous intéresse dans cette section, pour caractériser les transducteurs fonctionnels réalisant une fonction séquentielle par morceaux, c'est la q_1-conjugaison – ou q_2-conjugaison – des états monozygotes. C'est-à-dire que nous étudions la notion de conjugaison des états pour les chemins initiaux qui passent par l'un des deux états.

En particulier deux états monozygotes q_1 et q_2 peuvent être simultanément non-conjugués et q_1-conjugués (cf. Figure 7.8). En revanche, deux états monozygotes non q_1-conjugués sont nécessairement également des états jumeaux non-conjugués.

Comme pour les états jumeaux, la notion de q_1-conjugaison des états monozygotes, bien qu'intrinsèquement liée au fait qu'ils soient monozygotes, est séparée pour permettre de tester la séquentialité par morceaux, d'abord par une recherche de motif (celui de la Figure 7.7), puis un test de conjugaison sur les sorties des chemins impliqués.

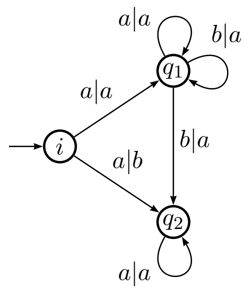

FIGURE 7.8 – Deux états monozygotes non-conjugués et q_1-conjugués

Afin de relier la notion d'états jumeaux et monozygotes au travail de [21] sur les branchements, nous montrons la propriété suivante :

Propriété 70. *Un transducteur standard possède un branchement absolu si, et seulement si, il existe un couple d'états monozygotes* (q_1, q_2) *non* q_1*-conjugués.*

Démonstration. Un branchement est fort s'il n'est pas faible, c'est-à-dire que les distances préfixes des images de chemins qui arrivent en q_1 et q_2 à partir de q par le même mot u ne sont pas bornées. Cette condition implique qu'il existe une infinité de tels mots u. Nous appelons *branchement infini* un tel branchement (q, q_1, q_2), avec une infinité de mots qui sont l'entrée de chemins à la fois de q à q_1 et de q à q_2. Un branchement fort ou absolu est nécessairement infini mais un branchement infini n'est pas nécessairement fort.

Pour qu'un branchement (q, q_1, q_2) soit infini il faut qu'il y ait une infinité de mots lus à la fois de q à q_1 et de q à q_2. Cela implique qu'il y a un état q'_1, respectivement q'_2, sur un chemin de q à q_1, resp. q_2, tels que q_1 et q_2 ont un circuit dont l'entrée est la même. Les états q'_1 et q'_2 sont alors des états jumeaux. La Figure 7.9 montre un branchement infini.

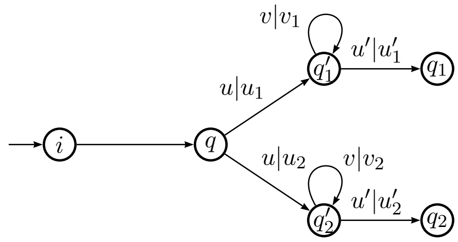

FIGURE 7.9 – Un branchement infini

Nous avons donc montré que l'existence d'un branchement infini implique l'existence d'états jumeaux. La réciproque étant directe, nous montrons maintenant que l'existence d'état jumeaux non-conjugués est équivalente à l'existence de branchements forts.

Il est trivial de montrer que si deux états sont jumeaux non-conjugués alors la distance préfixe des images des mots obtenus en faisant des tours de boucles n'est pas bornée et donc ils forment, avec l'état initial, un branchement fort.

Montrons que si un automate a un branchement fort, alors il a des états jumeaux non-conjugués. Un branchement fort (q, q_1, q_2) induit une branchement infini comme sur la Figure 7.9 où les états q'_1 et q'_2 sont jumeaux et les distances préfixes des mots $u_1 v_1^n u'_1$ avec les mots $u_2 v_2^n u'_2$, pour tout entier n, ne sont pas bornées. Il résulte que, pour tout n, les distances préfixes de $u_1 v_1^n$ et $u_2 v_2^n$ ne sont pas bornées puisque u'_1 et u'_2 sont de longueurs fixes. Cette condition implique directement que les états q'_1 et q'_2 ne sont pas conjugués. Un branchement fort a donc la forme d'un branchement infini dont les états q'_1 et q'_2 ne sont pas conjugués.

Un branchement est absolu s'il est fort et que $q_1 = q$. C'est-à-dire qu'on a la situation de la Figure 7.10. Les états q'_1 et q'_2 sont jumeaux monozygotes avec un circuit commun v et comme boucle sur q'_1 qui amène également en q'_2 le mot $u'u$. Le même argument que pour la non-conjugaisons des états q'_1 et q'_2 lors d'un branchement fort montre que q'_1 et q'_2 sont monozygotes non q'_1-conjugués en cas de branchement absolu.

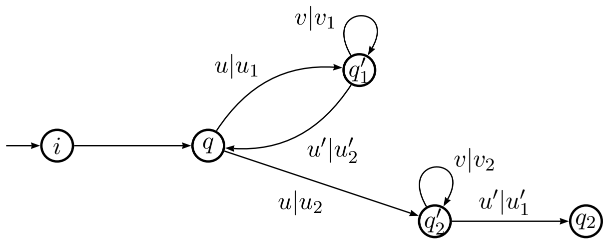

FIGURE 7.10 – Un branchement absolu

Finalement, pour la réciproque, supposons que deux états q_1 et q_2 soient monozygotes non q_1-conjugués, avec les notations de la Figure 7.7. Les distances préfixes des mots $u_1 v_1^n$ et $u_2 v_2^n$, pour tout n, ne sont pas bornées, puisque les états sont non q_1-conjugués, et le branchement (q_1, q_1, q_2) est absolu. □

Théorème 71 ([21])**.** *Soit τ un transducteur émondé standard réalisant une fonction rationnelle α. La fonction α est séquentielle par morceaux si et* *seulement si il n'y a pas d'états q_1 et q_2 de τ qui soient monozygotes non q_1-conjugués.*

Démonstration. Cette preuve est la preuve de [21] adaptée à la terminologie des états jumeaux et monozygotes. Pour simplifier la preuve, nous reprenons l'hypothèse de [21] que τ n'a qu'un seul état initial i. Le sens direct est trivial.

Soit τ un transducteur réalisant la fonction α. Soit Q son ensemble d'états et Q_1 le sous-ensemble de Q des états qui ont un jumeau non conjugué. Montrons que si τ n'a pas d'états monozygotes q_1 et q_2 non q_1-conjugués, alors α est séquentielle par morceaux.

Pour tout état $q \in Q$, notons X_q l'ensemble des mots qui sont l'étiquette d'entrée d'un chemin de i à q dont aucun état intermédiaire n'est dans Q_1. L'union des X_q pour les états de Q_1 est $X = \bigcup_{q \in Q_1} X_q$. L'ensemble Y_q est l'ensemble des mots qui sont l'étiquette d'entrée d'un chemin de q à un état de sortie – c'est-à-dire que Y_q est égal à L_q dans l'automate d'entrée sous-jacent de τ –.

Posons $Z = \mathrm{Dom}(\alpha) \setminus XA^*$ et $W_q = X_q Y_q$. Il est possible de décomposer le domaine de α en :

$$\mathrm{Dom}(\alpha) = \bigcup_{q \in Q_1} W_q \, \cup \, Z$$

Étudions les restrictions de la fonction α à chaque ensemble rationnel W_q et à Z. Posons α' la restriction de α à l'ensemble Z. Cette restriction est réalisée par le transducteur τ', restriction de τ à l'ensemble d'états $Q - Q_1$. Le transducteur τ' n'a donc pas d'états jumeaux non-conjugués et donc, par le Théorème 64, α' est une fonction séquentielle.

Posons α_q la restriction de α à l'ensemble W_q. Comme X_q est un ensemble préfixe, il est possible de voir la fonction α_q comme le produit de deux fonctions β_q et γ_q de domaines respectifs X_q et Y_q. Plus précisément β_q est la fonction qui associe à chaque mot u de X_q l'image du chemin de i à q dont l'entrée est u. Cette fonction est réalisée par un transducteur qui est la restriction de τ à l'ensemble d'états $Q - (Q_1 \setminus \{q\})$ et dont l'ensemble des états finaux est $\{q\}$. Ce transducteur n'a pas d'états jumeaux non-conjugués et donc β_q est une fonction séquentielle.

La fonction γ_q est la fonction qui à tout mot v de Y_q associe le mot de l'image du chemin de q à un état final dont l'entrée est v dans τ. Cette fonction est réalisée par le transducteur τ_q construit à partir de τ mais dans lequel q est le seul état initial. Montrons que dans τ_q, i n'est pas un état accessible, c'est-à-dire qu'il n'y a aucun chemin de q à i dans τ.

Comme $q \in Q_1$, il existe $q' \in Q$ tel que q et q' soient des états jumeaux non-conjugués. Il existe donc un couple de mots (u, v) où u étiquette l'entrée de chemins de i à q et q' et v étiquette l'entrée de circuits sur q et q' et tels que q et q' sont non-conjugués pour le couple (u, v). Supposons qu'il existe un chemin de q à i étiqueté w. Alors q et q' sont tous les deux accessibles par le mot uwu et il y a un chemin de i à q' passant par q étiqueté uwu. Les états q et q' sont donc monozygotes. Comme q et q' sont non i-conjugués pour le couple (u, v), ils sont également non q-conjugués pour (uwu, v), ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. L'état i n'est donc pas accessible dans τ_q.

Il est donc possible d'éliminer l'état i de τ_q sans changer la fonction réalisée. Ce transducteur à un état de moins que τ et pas d'états monozygotes q_1 et q_2 non q_1-conjugués. Par récurrence sur le nombre d'état, comme un transducteur avec un unique état est séquentiel, la fonction γ_q est donc séquentielle par morceaux.

Pour démontrer le théorème il reste juste à montrer que le produit de β_q et γ_q est une fonction séquentielle par morceaux. Notons $\gamma_{q,k}$ des fonctions séquentielles dont l'union donne γ_q. Le produit de β_q et de γ_q est l'union des produit de β_q et des $\gamma_{q,k}$. Comme X_q, le domaine de β_q est préfixe, ce produit est une fonction séquentielle. Il en résulte que α_q est séquentielle par morceaux et donc également α.

$\square$

La preuve du théorème ci-dessus implique également la décidabilité de la séquentialité par morceaux d'une fonction réalisée par un transducteur fonctionnel. Cette décidabilité, qui est celle montrée dans [21], est en complexité exponentielle.