

# Filtrage spatial par lifting adaptatif

Nous présentons dans ce chapitre des décompositions en ondelettes adaptatives et non-linéaires capables d'appréhender la nature géométrique et directionnelle des images. Ces transformées sont basées sur des structures lifting où l'opérateur de mise à jour est modifié à chaque échantillon, selon une décision prise en fonction d'un gradient local calculé sur le signal d'entrée. Les décisions ne sont pas transmises dans le flux compressé et nous nous intéressons tout particulièrement à la détermination des conditions nécessaires et suffisantes pour que ces décisions soient reconstruites lors de la synthèse, permettant ainsi la reconstruction parfaite du signal original.

Après avoir brièvement introduit notre problématique, nous rappelons en section 6.1 les travaux de Piella, Heijmans et Pesquet-Popescu [59, 113] sur lesquels sont basés nos décompositions. Les auteurs décrivent une structure lifting où l'opérateur de mise à jour est modifié à chaque échantillon en fonction d'une décision *binnaire* prise sur le signal d'entrée. Ces décisions sont prises par seuillage d'une seminorme calculée sur le gradient du signal d'entrée, conduisant ainsi à choisir entre deux filtres de mise à jour. N'étant pas transmises dans le flux compressé, ces décisions doivent être reconstruites lors de la synthèse pour permettre la reconstruction parfaite du signal. Les auteurs montrent alors l'existence de conditions nécessaires et suffisantes liant la prise de décision et les filtres de mise à jour, et permettant cette reconstruction parfaite. Bien que très attractif, cette transformée adaptative n'est cependant pas suffisamment flexible car elle n'autorise qu'un critère de décision *binnaire*. Dans un contexte géométrique 2D, il ne peut ainsi servir qu'à discriminer deux événements géométriques comme un contour et une région homogène.

Afin de pouvoir tenir compte de la richesse et de la variété des images, il est souhaitable de pouvoir utiliser plusieurs critères, laissant ainsi un choix multiple entre plusieurs filtres de mise à jour. Nous proposons ainsi d'étendre le schéma de décomposition adaptatif de Piella à des critères de décisions multivalués. Dans un premier temps, nous étudions en section 6.2 le cas d'une décision prise par comparaison de deux seminormes. Nous établissons alors les conditions nécessaires et suffisantes sur ce type de décision permettant d'assurer la reconstruction parfaite du signal. Nous étendons alors nos conclusions en section 6.3 sur la comparaison de  $N$  seminormes et poursuivons en section 6.4 avec un critère basé sur la comparaison de deux seminormes combinée au critère de seuil.

La multiplicité des valeurs de décisions offertes par ces nouveaux critères nous permet ainsi de construire des transformées inversibles, adaptatives et capables de discriminer plusieurs événements géométriques 2D : contours horizontaux, verticaux, régions homogènes... Nous présentons alors en section 6.5 plusieurs expérimentations de compression d'image sans perte, basées sur des transformées adaptatives utilisant différents critères de décision. Les travaux présentés dans ce chapitre ont fait l'objet de la publication d'un article de conférence [112] et d'un article de revue [114].

---

## 6.1 Mise à jour adaptative avec critère de seuil binaire

### 6.1.1 Motivation

En dépit de son efficacité de décorrélation et de sa polyvalence, la transformée en ondelettes est toutefois limitée par sa linéarité. Ainsi, lors de l'analyse multirésolution d'une image, l'approximation par des opérateurs linéaires peut causer le floutage de certaines zones d'intérêt comme les contours ou certaines singularités, entraînant alors la perte d'informations importantes. De plus, la transformation en ondelettes séparable n'est pas bien adaptée à la géométrie des images. En supposant l'exemple d'une image constituée de régions lisses et séparées par des courbes régulières par morceaux, on constate que les ondelettes séparables ne "voient" pas la régularité présente le long de la courbe. Ces observations nous poussent ainsi à rechercher des représentations qui s'adaptent mieux aux données. On trouvera alors dans la littérature de nombreuses décompositions [29, 40, 42, 41, 47, 51, 58, 72, 148], fournissant chacune un degré divers d'adaptabilité.

Nous rappelons dans cette section les travaux de Piella, Heijmans et Pesquet-Popescu [59, 113] décrivant une transformée en ondelettes adaptative, inversible et basée sur une étape de mise à jour adaptative. Les décisions *binaires* utilisées dans ce schéma proviennent d'un critère de seuil (*Threshold Criterion*), noté TC et obtenu par seuillage d'une seminorme calculée sur le gradient du signal d'entrée.

### 6.1.2 Décomposition avec mise à jour adaptative et critère TC

Nous décrivons comment construire une transformée en ondelettes adaptative sous forme lifting, au moyen d'une étape de mise à jour adaptative suivie d'une étape de prédiction fixe. L'adaptabilité du schéma repose sur le choix entre deux filtres de mise à jour différents, dépendant de l'information locale fournie par les sous-bandes d'entrée. Décrivons tout d'abord la structure générale de la décomposition.

#### Structure générale

Soit un signal d'entrée  $x_0 : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$  que l'on sépare en deux signaux  $x$ ,  $\mathbf{y}$ , où  $\mathbf{y}$  peut éventuellement comporter plus d'une sous-bande, par exemple  $y_{s_1}, y_{s_2}, \dots, y_{s_M}$ . Les sous-bandes  $x, y_{s_1}, \dots, y_{s_M}$ , qui représentent généralement les composantes polyphases du signal à analyser  $x_0$ , sont les sous-bandes d'entrée de notre structure. Nous faisons l'hypothèse que la décomposition  $x_0 \mapsto (x, \mathbf{y})$  est inversible et qu'il est ainsi possible de reconstruire  $x_0$  à partir de ses composantes  $x$  et  $\mathbf{y}$ . Tout d'abord, le signal  $x$  est mis à jour afin d'obtenir le signal d'approximation  $x'$  puis les sous-bandes  $y_{s_1}, \dots, y_{s_M}$  sont alors prédites pour générer le signal de détail  $\mathbf{y}' = \{y'_{s_1}, \dots, y'_{s_M}\}$ . Dans notre schéma lifting, seule l'étape de mise à jour est adaptative tandis que l'étape de prédiction est fixe. Ceci implique que le signal  $\mathbf{y}$  peut être facilement reconstruit à partir de l'approximation  $x'$  et du signal de détail  $\mathbf{y}'$ . La reconstruction de  $x$  à partir de  $x'$  et  $\mathbf{y}$  est cependant moins triviale.

L'idée de base de notre schéma adaptatif illustré en Fig. 6.1 réside dans le choix du filtre de mise à jour, qui est fait en fonction de l'information fournie localement par les signaux  $x$  et  $\mathbf{y}$ . Dans ce schéma,  $D$  est une *carte de décision* qui utilise toutes les bandes des signaux d'entrée, c'est à dire  $D = D(x, \mathbf{y}) = D(x, y_{s_1}, \dots, y_{s_P})$ . Elle prend ses valeurs dans un espace binaire  $\{0, 1\}$  et gouverne le choix du filtre de mise à jour. Plus précisément, si  $d_n$

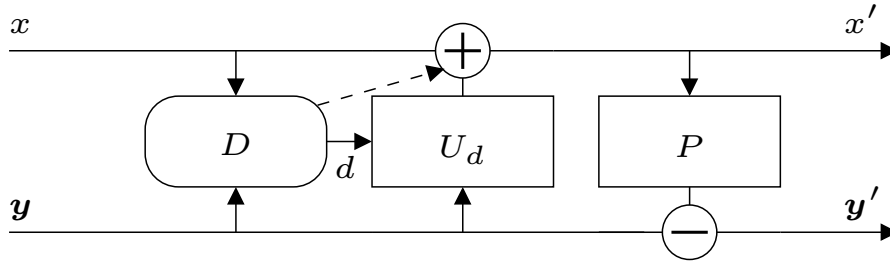


FIG. 6.1 – Structure d’analyse lifting avec mise à jour adaptative.

est la valeur de décision prise par  $D$  à la position  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d$ , alors l’échantillon  $x'(\mathbf{n})$  est mis à jour selon la relation :

$$x'(\mathbf{n}) = \alpha_{d_n} x(\mathbf{n}) + \sum_{j=1}^J \mu_{d_n, j} y_j(\mathbf{n}) \quad (6.1)$$

avec  $y_j(\mathbf{n}) = y_{s_j}(\mathbf{n} + \mathbf{l}_j)$ ,  $s_j \in \{s_1, \dots, s_M\}$ , et  $\mathbf{l}_j \in L$ . L’ensemble  $L$  définit ici une fenêtre de  $\mathbb{Z}^d$  centrée sur l’origine. On notera que les coefficients du filtre de mise à jour  $\mu_{d_n, j}$  dépendent de la valeur de la décision  $d_n \in \{0, 1\}$  de la carte  $D$  au point  $\mathbf{n}$ . Lors de la synthèse, la connaissance de  $d$  en chaque point  $\mathbf{n}$  nous permet alors de reconstruire le signal original  $x$ . On dira alors que la *reconstruction parfaite* (PR) est possible.

### Critère de seuil TC

Rappelons tout d’abord la définition d’une seminorme. On appelle *seminorme* une fonction  $p : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^+$  vérifiant les propriétés suivantes :

- (i)  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N, p(\lambda \mathbf{v}) = |\lambda| p(\mathbf{v})$
- (ii)  $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^N, p(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \leq p(\mathbf{v}_1) + p(\mathbf{v}_2)$

Une seminorme ne vérifie pas  $p(\mathbf{v}) = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = 0$  et est donc plus faible qu’une norme.

Dans notre schéma de lifting adaptatif, supposons que les décisions soient prises par seuillage d’une seminorme :

$$D(\mathbf{v}(\mathbf{n})) = [p(\mathbf{v}(\mathbf{n})) > T]$$

où  $[P]$  vaut 1 si le prédicat  $P$  est vrai et 0 sinon,  $p$  est une seminorme,  $T \in \mathbb{R}^+$  une valeur de seuil et  $\mathbf{v}(\mathbf{n}) \in \mathbb{R}^J$  le vecteur gradient dont les composantes sont données par :

$$v_j(\mathbf{n}) = x(\mathbf{n}) - y_j(\mathbf{n}), \quad j = 1, \dots, J$$

Durant le calcul des coefficients selon l’équation (6.1), nous supposons que :

$$\alpha_0 + \sum_{j=1}^J \mu_{0, j} = \alpha_1 + \sum_{j=1}^J \mu_{1, j} = 1$$

avec  $\alpha_d \neq 0$  pour les deux valeurs de décision  $d = \{0, 1\}$  et  $\mu_{0, j} \neq \mu_{1, j}$  pour tous les  $j \in \{1, \dots, J\}$ .

Il est alors simple de montrer que le vecteur gradient mis en jeu durant la synthèse  $\mathbf{v}'(\mathbf{n}) \in \mathbb{R}^J$ , de composantes  $v'_j(\mathbf{n}) = x'(\mathbf{n}) - y_j(\mathbf{n})$  pour  $j = 1, \dots, J$ , est lié à  $\mathbf{v}(\mathbf{n})$  par la relation linéaire suivante :

$$\mathbf{v}'(\mathbf{n}) = A_d \mathbf{v}(\mathbf{n})$$

où  $A_d = I - \mathbf{u} \mathbf{b}_d^T$ ,  $I$  désigne la matrice identité de taille  $J \times J$ ,  $\mathbf{u} = (1, \dots, 1)^T$  et  $\mathbf{b}_d = (\mu_{d,1}, \dots, \mu_{d,J})^T$  sont des vecteurs de taille  $J$ .

Le filtre de mise à jour adaptatif est alors décrit par :

$$\begin{cases} \mathbf{v}' = A_d \mathbf{v} \\ d = [p(\mathbf{v}) > T] \end{cases} \quad (6.2)$$

où nous avons supprimé l'argument ' $\mathbf{n}$ ' de la notation. Notons que le déterminant de la matrice  $A_d$  vaut  $\det(A_d) = 1 - \mathbf{u}^T \mathbf{b}_d = 1 - \sum_{j=1}^J \mu_{d,j} = \alpha_d$ . Notre hypothèse  $\alpha_d \neq 0$  rend donc la matrice  $A_d$  inversible. Il n'est alors pas difficile de montrer que  $A_d^{-1} = I - \mathbf{u} \mathbf{b}'_d{}^T$  où  $\mathbf{b}'_d = -\mathbf{b}_d / \alpha_d$ .

Considérons l'étape de mise à jour adaptative décrite par l'équation (6.2). Si  $p(\mathbf{v}) \leq T$  à l'analyse alors la décision vaut  $d = 0$  et  $\mathbf{v}' = A_0 \mathbf{v}$ . Au contraire, si  $p(\mathbf{v}) > T$  alors  $d = 1$  et  $\mathbf{v}' = A_1 \mathbf{v}$ . Pour assurer une reconstruction parfaite du signal original, il est nécessaire de reconstruire la décision  $d$  à partir du vecteur gradient  $\mathbf{v}'$  durant la synthèse. Nous nous restreignons ici au cas où la décision  $d$  peut être reconstruite par seuillage de la seminorme  $p(\mathbf{v}')$ , c'est à dire dans le cas :

$$d = [p(\mathbf{v}) > T] = [p(\mathbf{v}') > T']$$

pour une valeur de  $T' > 0$ . Nous formalisons cette condition dans le critère suivant.

**Critère de seuil TC.** Soit un seuil  $T > 0$ , alors il existe un seuil (probablement différent)  $T' > 0$  tel que :

$$\begin{cases} \text{Si } p(\mathbf{v}) \leq T \text{ alors } p(A_0 \mathbf{v}) \leq T' \\ \text{Si } p(\mathbf{v}) > T \text{ alors } p(A_1 \mathbf{v}) > T' \end{cases}$$

Il est clair que le critère de seuil (*Threshold Criterion*) TC garantit la propriété de reconstruction parfaite. Nous énonçons dans [59] les conditions nécessaires et suffisantes pour que le TC soit vérifié et analysons différentes seminormes, dont la seminorme quadratique et la seminorme de gradient pondéré.

Avant d'introduire de nouveaux critères de décisions, nous donnons quelques définitions et propriétés qui seront utiles dans la suite du chapitre.

Soit  $V$  un espace vectoriel muni de la seminorme  $p$ . Pour un opérateur linéaire  $A : V \rightarrow V$ , on définit la *seminorme opérateur*  $p(A)$  et la *seminorme opérateur inverse*  $p^{-1}(A)$  par :

$$\begin{aligned} p(A) &= \sup\{p(A\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V \text{ et } p(\mathbf{v}) = 1\} \\ p^{-1}(A) &= \sup\{p(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V \text{ et } p(A\mathbf{v}) = 1\} \end{aligned}$$

Dans la dernière expression, on utilise la convention  $p^{-1}(A) = \infty$  si  $p(A\mathbf{v}) = 0$  pour tout  $\mathbf{v} \in V$ , si  $p$  n'est pas l'opérateur nul. Dans ce dernier cas que nous ne considérerons pas dans la suite, les seminormes  $p(A)$  et  $p^{-1}(A)$  sont toutes deux nulles. Hormis ce cas, on a donc toujours  $p^{-1}(A) > 0$ . Notons que nous ne pouvons avoir  $p(A) = 0$ . En effet

si  $p(A) = 0$ , nous avons alors pour tout  $\mathbf{v} \in V$ ,  $p(A\mathbf{v}) = 0$ . Cela signifie donc que pour tout opérateur  $A$  inversible et pour tout  $\mathbf{v} \in V$ ,  $p(\mathbf{v}) = 0$ , ce qui est en contradiction avec l'hypothèse selon laquelle  $p$  n'est pas l'opérateur identiquement nul.

**Proposition 2** Soit  $V$  un espace de Hilbert, une seminorme  $p$  définie dans  $V$  et  $A : V \rightarrow V$  un opérateur linéaire borné. Si  $p(A) < \infty$ , alors

$$p(A\mathbf{v}) \leq p(A)p(\mathbf{v}) \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in V$$

*Preuve.* Cette propriété découle directement de la définition de la seminorme opérateur quand  $p(\mathbf{v}) \neq 0$ . Dans le cas  $p(\mathbf{v}) = 0$ , on montre que l'inégalité  $p(A) < \infty$  est équivalente à l'implication  $p(\mathbf{v}) = 0 \Rightarrow p(A\mathbf{v}) = 0$ . ■

## 6.2 Comparaison de deux seminormes

Afin de pouvoir tenir compte de la richesse et de la variété des images, il est souhaitable de pouvoir utiliser des cartes de décision multivaluées, avec un critère autorisant plus de flexibilité que le critère de seuil TC. Nous étudions dans cette section un critère basé sur la comparaison de deux seminormes.

### 6.2.1 Résultats principaux

Nous nous attachons dans cette section à trouver une règle de décision basé sur la comparaison de deux seminormes  $p_0$  et  $p_1$  et assurant la propriété de reconstruction parfaite. Les conditions à l'analyse sont alors données par :

$$\begin{cases} d = 0 & \Leftrightarrow p_0(\mathbf{v}) \leq p_1(\mathbf{v}) \\ d = 1 & \Leftrightarrow p_0(\mathbf{v}) > p_1(\mathbf{v}) \end{cases} \quad (6.3)$$

où  $p_0$  et  $p_1$  sont deux seminormes non-nulles. Une fois la décision obtenue, l'étape de mise à jour est alors effectuée comme dans (6.1). Durant la synthèse, des conditions similaires sont utilisées en remplaçant  $\mathbf{v}$  par le vecteur gradient modifié  $\mathbf{v}' = A_d \mathbf{v}$  :

$$\begin{cases} (i) & p_0(\mathbf{v}') \leq p_1(\mathbf{v}') \Leftrightarrow d' = 0 \\ (ii) & p_0(\mathbf{v}') > p_1(\mathbf{v}') \Leftrightarrow d' = 1. \end{cases} \quad (6.4)$$

Il est clair que la propriété de reconstruction parfaite est assurée si  $d = d'$ . Les conditions nécessaires et suffisantes dans ce cas sont similaires à celles du critère de seuil TC.

**Proposition 3** La reconstruction parfaite PR est assurée si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites.

$$\forall \mathbf{v} \in V, \quad \begin{cases} p_0(\mathbf{v}) \leq p_1(\mathbf{v}) \Rightarrow p_0(A_0 \mathbf{v}) \leq p_1(A_0 \mathbf{v}) \\ p_0(\mathbf{v}) > p_1(\mathbf{v}) \Rightarrow p_0(A_1 \mathbf{v}) > p_1(A_1 \mathbf{v}) \end{cases} \quad (6.5)$$

*Preuve.* Supposons tout d'abord que l'équation (6.5) soit vérifiée. Montrons alors que la PR est assurée seulement si  $d = d'$ .

Supposons  $p_0(\mathbf{v}') \leq p_1(\mathbf{v}')$ , c'est à dire  $d' = 0$  et  $d = 1$ . Nous avons alors  $p_0(A_1 \mathbf{v}) \leq p_1(A_1 \mathbf{v})$ . Nous obtenons alors de la seconde équation de (6.5),  $p_0(\mathbf{v}) \leq p_1(\mathbf{v})$  qui est équivalent à  $d = 0$ , conformément à (6.3). Cette contradiction avec l'hypothèse de départ  $d = 1$  montre alors qu'il est nécessaire d'avoir  $d = 0$  pour assurer la reconstruction parfaite.

Supposons désormais que  $p_0(\mathbf{v}') > p_1(\mathbf{v}')$ , c'est à dire  $d' = 1$  et  $d = 0$ . Nous avons  $p_0(A_0\mathbf{v}) > p_1(A_0\mathbf{v})$ . De la première équation de (6.5), il s'ensuit que  $p_0(\mathbf{v}) > p_1(\mathbf{v})$  et ceci prouve alors la nécessité d'avoir  $d = 1$  pour assurer la PR.

Enfin, en supposant maintenant que la PR soit vérifiée, alors les équations (6.3) et (6.4) montrent clairement que les conditions (6.5) sont satisfaites. ■

**Remarque 1** Les conditions (6.5) montrent que le domaine de  $(A_0, A_1)$ , resp.  $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1)$  et permettant d'assurer la PR est *séparable*. Cela signifie qu'il peut être scindé en un domaine admissible pour  $A_0$ , resp.  $\mathbf{b}_0$  et un autre pour  $A_1$ , resp.  $\mathbf{b}_1$ . En outre, la seconde condition de (6.5) peut être réécrite par :

$$\forall \mathbf{v} \in V, \quad p_0(A_1\mathbf{v}) \leq p_1(A_1\mathbf{v}) \Rightarrow p_0(\mathbf{v}) \leq p_1(\mathbf{v})$$

Comme  $A_1$  est inversible, l'introduction de  $\mathbf{w} = A_1\mathbf{v}$  permet d'aboutir alors à :

$$\forall \mathbf{w} \in V, \quad p_0(\mathbf{w}) \leq p_1(\mathbf{w}) \Rightarrow p_0(A_1^{-1}\mathbf{w}) \leq p_1(A_1^{-1}\mathbf{w})$$

La seconde condition de PR est donc similaire à la première, en remplaçant  $A_0$  par  $A_1^{-1}$ . De plus, comme  $A_0 = I - \mathbf{u}\mathbf{b}_0^T$  et  $A_1 = I - \mathbf{u}\mathbf{b}'_1{}^T$  avec  $\mathbf{b}'_1 = -\alpha_1^{-1}\mathbf{b}_1$ , nous avons une symétrie entre les domaines admissibles pour  $\mathbf{b}_0$  et  $\mathbf{b}_1$  : le second est déduit du premier par le remplacement de  $\mathbf{b}_0$  par  $-\alpha_1^{-1}\mathbf{b}_1$ .

Introduisons désormais quelques définitions qui nous seront utiles dans la suite :

$$p_{10}(A_0) = \inf\{p_1(A_0\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V \text{ et } p_0(\mathbf{v}) \leq p_1(\mathbf{v}) = 1\} \quad (6.6)$$

$$p_{01}(A_1) = \inf\{p_0(A_1\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V \text{ et } p_1(\mathbf{v}) \leq p_0(\mathbf{v}) = 1\} \quad (6.7)$$

Afin de définir  $p_{10}$ , il est nécessaire que l'ensemble  $S_{10}$  défini par :

$$S_{10} = \{\mathbf{v} \mid p_0(\mathbf{v}) \leq p_1(\mathbf{v}) = 1\}$$

soit non-vide<sup>1</sup>. De façon analogue, l'ensemble  $S_{01} = \{\mathbf{v} \mid p_1(\mathbf{v}) \leq p_0(\mathbf{v}) = 1\}$  doit être non-vide afin de pouvoir définir  $p_{01}$ . On remarquera enfin que si les quantités  $p_{01}$  et  $p_{10}$  existent, elles sont nécessairement finies.

**Lemme 1** Les assertions suivantes sont vraies.

- (a) Si  $S_{10} \neq \emptyset$  et  $p_0(\mathbf{v}) \leq p_1(\mathbf{v})$ , alors  $p_1(A_0\mathbf{v}) \geq p_{10}(A_0)p_1(\mathbf{v})$
- (b) Si  $S_{01} \neq \emptyset$  et  $p_1(\mathbf{v}) \leq p_0(\mathbf{v})$ , alors  $p_0(A_1\mathbf{v}) \geq p_{01}(A_1)p_0(\mathbf{v})$

*Preuve.* Prouvons le cas (a). La preuve de (b) est similaire.

Tout d'abord, si  $p_1(\mathbf{v}) \neq 0$ , nous pouvons choisir  $\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}}{p_1(\mathbf{v})}$ . Alors,  $p_0(\mathbf{v}') \leq p_1(\mathbf{v}') = \frac{p_1(\mathbf{v})}{p_1(\mathbf{v})} = 1$  et par définition de  $A_0$ , on a  $p_1(A_0\mathbf{v}') \geq p_{10}(A_0)$ . On obtient donc  $\frac{p_1(A_0\mathbf{v})}{p_1(\mathbf{v})} \geq p_{10}(A_0)$ , ce qui implique  $p_1(A_0\mathbf{v}) \geq p_{10}(A_0)p_1(\mathbf{v})$ .

Enfin, si  $p_1(\mathbf{v}) = 0$ , alors la condition  $p_1(A_0\mathbf{v}) \geq 0$  est toujours vérifiée. ■

Notons que les assertions (a) et (b) du lemme précédent impliquent respectivement :

$$p_{10}(A_0) \leq p_1(A_0) \text{ si } p_1(A_0) < \infty \quad \text{et} \quad p_{01}(A_1) \leq p_0(A_1) \text{ si } p_0(A_1) < \infty$$

Le résultat suivant donne les conditions suffisantes pour vérifier les relations (6.5).

<sup>1</sup>La condition  $S_{10} = \emptyset$  est en fait équivalente à :  $\forall \mathbf{v} \in V, p_0(\mathbf{v}) > p_1(\mathbf{v})$  ou  $p_1(\mathbf{v}) = 0$ . Ceci correspond au cas dégénéré :  $\forall \mathbf{v} \in V, d = 1$  ou  $p_0(\mathbf{v}) = p_1(\mathbf{v}) = 0$ .

**Proposition 4** Des conditions suffisantes permettant de vérifier les relations (6.5) afin d'assurer la PR sont données par :

$$S_{10} \neq \emptyset, S_{01} \neq \emptyset \quad (6.8)$$

$$p_{10}(A_0) \geq p_0(A_0) \quad (6.9)$$

$$p_{01}(A_1) \geq p_1(A_1) \quad (6.10)$$

*Preuve.* Ceci revient à montrer : si les conditions (6.8)-(6.10) sont vérifiées, alors la relation (6.5) doit être satisfaite. Or, du fait de l'existence de  $p_{10}$  et  $p_{01}$ , ces quantités sont bornées et on a donc  $p_d(A_d) < \infty$  pour  $d = 0, 1$ , conformément à (6.9)-(6.10).

Afin de prouver la première relation de (6.5), nous supposons que  $p_0(\mathbf{v}) \leq p_1(\mathbf{v})$ . Or, comme  $p_0(A_0) < \infty$ , nous obtenons  $p_0(A_0\mathbf{v}) \leq p_0(A_0)p_0(\mathbf{v})$  (voir la Proposition 2). Du Lemme 1(a), on a alors  $p_1(A_0\mathbf{v}) \geq p_{10}(A_0)p_1(\mathbf{v})$  et comme  $p_{10}(A_0) \geq p_0(A_0)$ , nous obtenons  $p_1(A_0\mathbf{v}) \geq p_0(A_0)p_1(\mathbf{v}) \geq p_0(A_0)p_0(\mathbf{v}) \geq p_0(A_0\mathbf{v})$ . On montre ainsi la première relation.

Montrons désormais la seconde relation de (6.5). Supposons  $p_0(\mathbf{v}) > p_1(\mathbf{v})$ . Nous savons que  $p_1(A_1\mathbf{v}) \leq p_1(A_1)p_1(\mathbf{v})$ . Du Lemme 1(b), nous avons alors  $p_0(A_1\mathbf{v}) \geq p_{01}(A_1)p_0(\mathbf{v})$  et comme  $p_{01}(A_1) \geq p_1(A_1) \neq 0$ , il s'ensuit que  $p_0(A_1\mathbf{v}) \geq p_1(A_1)p_0(\mathbf{v}) > p_1(A_1)p_1(\mathbf{v}) \geq p_1(A_1\mathbf{v})$ . Ceci implique alors  $p_0(A_1\mathbf{v}) > p_1(A_1\mathbf{v})$  et prouve la deuxième relation de (6.5). ■

On remarquera que si (6.9)-(6.10) sont vérifiées et comme  $p_d(A_d) \neq 0$ , on a alors nécessairement :

$$p_{10}(A_0) \neq 0 \text{ et } p_{01}(A_1) \neq 0$$

### 6.2.2 Un cas d'étude : la seminorme pondérée $p(\mathbf{v}) = |\mathbf{a}^T \mathbf{v}|$

Considérons une transformée en ondelettes adaptative en utilisant un critère de décision basé sur la comparaison de deux seminormes. Les règles de décision (6.3) sont alors utilisées pendant l'analyse et les règles (6.4) durant la synthèse. Soient  $p_0$  et  $p_1$  les seminormes pondérées [59] suivantes :

$$p_0(\mathbf{v}) = |\mathbf{a}_0^T \mathbf{v}|, \quad p_1(\mathbf{v}) = |\mathbf{a}_1^T \mathbf{v}|$$

où  $\mathbf{a}_0 \neq \mathbf{0}$  et  $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$ . Afin d'étudier les conditions de reconstruction parfaite (6.8)-(6.10) associées à ces seminormes, nous devons calculer  $p_{10}(A_0)$  et  $p_{01}(A_1)$ . Détaillons donc le calcul de  $p_{10}(A_0)$ . Par définition,

$$p_{10}(A_0) = \inf\{|\mathbf{a}_1^T A_0 \mathbf{v}| \mid |\mathbf{a}_0^T \mathbf{v}| \leq |\mathbf{a}_1^T \mathbf{v}| = 1\}$$

On distingue deux cas : le cas où  $\mathbf{a}_0$  et  $\mathbf{a}_1$  sont ou ne sont pas colinéaires.

(i) Si  $\mathbf{a}_0$  et  $\mathbf{a}_1$  sont colinéaires. Nous pouvons écrire  $\mathbf{a}_0 = \gamma \mathbf{a}_1$  avec  $\gamma \in \mathbb{R}^*$ . Ce cas n'est cependant pas d'un grand intérêt pratique car il conduit à un schéma non-adaptatif<sup>2</sup>.

(ii) Si  $\mathbf{a}_0$  et  $\mathbf{a}_1$  ne sont pas colinéaires. Introduisons  $\mathbf{c} = A_0^T \mathbf{a}_1$ , que nous pouvons alors exprimer par :

$$\mathbf{c} = c_0 \mathbf{a}_0 + c_1 \mathbf{a}_1 + \tilde{\mathbf{c}},$$

où  $(c_0, c_1) \in \mathbb{R}^2$  et  $\tilde{\mathbf{c}} \in \text{Span}^\perp\{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1\}$ . Nous obtenons alors :

$$p_1(A_0\mathbf{v}) = |\mathbf{a}_1^T A_0 \mathbf{v}| = |\mathbf{c}^T \mathbf{v}| = |c_0 \mathbf{a}_0^T \mathbf{v} + c_1 \mathbf{a}_1^T \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{c}}^T \mathbf{v}| \geq 0.$$

Afin de calculer  $p_{10}(A_0)$ , nous devons minimiser l'expression précédente sous la contrainte  $|\mathbf{a}_0^T \mathbf{v}| \leq |\mathbf{a}_1^T \mathbf{v}| = 1$ . Nous obtenons alors le résultat suivant :

<sup>2</sup>En effet, si  $\mathbf{a}_0 = \gamma \mathbf{a}_1$ , alors  $d$  est fixe :  $d = 0$  si  $|\gamma| \leq 1$  et  $d = 1$  dans le cas contraire. Notons cependant que  $p_{10}(A_0)$  est défini seulement si  $|\gamma| \leq 1$ .

**Lemme 2** Soient les seminormes  $p_0(\mathbf{v}) = |\mathbf{a}_0^T \mathbf{v}|$  et  $p_1(\mathbf{v}) = |\mathbf{a}_1^T \mathbf{v}|$  où  $\mathbf{a}_0$  et  $\mathbf{a}_1$  sont deux vecteurs linéairement indépendants, et  $\mathbf{c} = A_0^T \mathbf{a}_1 = c_0 \mathbf{a}_0 + c_1 \mathbf{a}_1 + \tilde{\mathbf{c}}$ . On a alors :

$$p_{10}(A_0) = \begin{cases} |c_1| - |c_0| & \text{if } \mathbf{u}^T \mathbf{a}_1 \neq 0 \text{ et } \mathbf{b}_0 = \frac{(1 - c_1)\mathbf{a}_1 - c_0 \mathbf{a}_0}{\mathbf{u}^T \mathbf{a}_1}, \text{ avec } |c_1| > |c_0| \text{ et } \tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{0} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

*Preuve.* La preuve de ce lemme est rapportée en Annexe A. ■

Un raisonnement similaire conduit au calcul de  $p_{01}(A_1)$ .

Nous sommes alors en mesure d'étudier les conditions suffisantes de reconstruction parfaite PR (6.8)-(6.10). Modifions tout d'abord légèrement nos notations en introduisant :

$$\mathbf{c}_0 = A_0^T \mathbf{a}_1 = c_0^0 \mathbf{a}_0 + c_1^0 \mathbf{a}_1 + \tilde{\mathbf{c}}_0, \quad \mathbf{c}_1 = A_1^T \mathbf{a}_0 = c_0^1 \mathbf{a}_0 + c_1^1 \mathbf{a}_1 + \tilde{\mathbf{c}}_1,$$

où  $(\tilde{\mathbf{c}}_0, \tilde{\mathbf{c}}_1) \in \text{Span}^\perp\{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1\}$ .

Supposons que les conditions (6.8)-(6.10) soient vérifiées. On a alors  $p_{10}(A_0) \neq 0$ ,  $p_{01}(A_1) \neq 0$  et  $p_d(A_d) < \infty$ . De cette dernière condition, nous obtenons [59] alors : soit  $\mathbf{u}^T \mathbf{a}_d = 0$  et ceci implique  $p_d(A_d) = 1$ , ou soit  $\mathbf{u}^T \mathbf{a}_d \neq 0$ ,  $\mathbf{b}_d = \gamma_d \mathbf{a}_d$  avec  $\gamma_d \in \mathbb{R}$  et conduit alors à  $p_d(A_d) = |\alpha_d|$ .

D'un autre côté et conformément au Lemme 2, nous avons une équivalence entre le fait que  $p_{10}(A_0) \neq 0$  (resp.  $p_{01}(A_1) \neq 0$ ) et l'expression de  $\mathbf{b}_0$  (resp.  $\mathbf{b}_1$ ) :

$$\mathbf{b}_0 = \frac{(1 - c_1^0)\mathbf{a}_1 - c_0^0 \mathbf{a}_0}{\mathbf{u}^T \mathbf{a}_1}, \text{ avec } \mathbf{u}^T \mathbf{a}_1 \neq 0, |c_1^0| > |c_0^0| \text{ et } \tilde{\mathbf{c}}_0 = \mathbf{0}$$

conduisant ainsi à  $p_{10}(A_0) = |c_1^0| - |c_0^0|$ .

En écartant les contraintes non-compatibles pour satisfaire les conditions (6.9)-(6.10) de la Proposition 4, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T \mathbf{a}_0 &\neq 0, & \mathbf{u}^T \mathbf{a}_1 &\neq 0 \\ \mathbf{b}_0 &= \gamma_0 \mathbf{a}_0 = \frac{(1 - c_1^0)\mathbf{a}_1 - c_0^0 \mathbf{a}_0}{\mathbf{u}^T \mathbf{a}_1}, & \text{avec } |c_1^0| &> |c_0^0| \\ \mathbf{b}_1 &= \gamma_1 \mathbf{a}_1 = \frac{(1 - c_0^1)\mathbf{a}_0 - c_1^1 \mathbf{a}_1}{\mathbf{u}^T \mathbf{a}_0}, & \text{avec } |c_0^1| &> |c_1^1| \end{aligned}$$

En rappelant l'hypothèse selon laquelle  $\mathbf{a}_0$  et  $\mathbf{a}_1$  ne sont pas colinéaires, nous obtenons finalement :

$$c_1^0 = c_0^1 = 1, \quad |c_0^0| < 1, \quad |c_1^1| < 1$$

Et par conséquent :

$$\mathbf{b}_0 = -\frac{c_0^0}{\mathbf{u}^T \mathbf{a}_1} \mathbf{a}_0, \quad \mathbf{b}_1 = -\frac{c_1^1}{\mathbf{u}^T \mathbf{a}_0} \mathbf{a}_1$$

Ainsi  $p_{01}(A_1) = 1 - |c_1^1|$  et  $p_{10}(A_0) = 1 - |c_0^0|$ . En rassemblant ces conditions, nous montrons alors le résultat suivant :

**Proposition 5** Des conditions suffisantes permettant d'assurer la reconstruction parfaite avec un critère de décision basé sur la comparaison de deux seminormes,  $p_0(\mathbf{v}) = |\mathbf{a}_0^T \mathbf{v}|$  et  $p_1(\mathbf{v}) = |\mathbf{a}_1^T \mathbf{v}|$ , où  $\mathbf{a}_0$  et  $\mathbf{a}_1$  sont linéairement indépendants, sont données par :

$$\mathbf{u}^T \mathbf{a}_0 \neq 0, \quad \mathbf{u}^T \mathbf{a}_1 \neq 0 \text{ et } \mathbf{b}_0 = \frac{\beta_0}{\mathbf{u}^T \mathbf{a}_1} \mathbf{a}_0, \quad \mathbf{b}_1 = \frac{\beta_1}{\mathbf{u}^T \mathbf{a}_0} \mathbf{a}_1 \quad (6.11)$$

où  $0 < |\alpha_0| \leq 1 - |\beta_0|$  et  $0 < |\alpha_1| \leq 1 - |\beta_1|$ .



Les deux dernières conditions proviennent des inégalités  $1 - |\beta_0| = p_{10}(A_0) \geq p_0(A_0) = |\alpha_0|$  et  $1 - |\beta_1| = p_{01}(A_1) \geq p_1(A_1) = |\alpha_1|$ .

**Exemple 1** Considérons les vecteurs de pondérations  $\mathbf{a}_0 = (1, 0, 1, 0)^T$  et  $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 0, 1)^T$ . Les résultats énoncés précédemment sont vrais dans le cas d'un signal mono-dimensionnel mais aussi dans le cas de signaux multidimensionnels, où le gradient correspondra ainsi à différents voisinages. Dans le cas 2D et en considérant le voisinage illustré sur la Fig. 6.2, les vecteurs  $\mathbf{a}_0$  et  $\mathbf{a}_1$  nous conduisent alors aux seminormes suivantes :

$$p_0(\mathbf{v}) = |v_1 + v_3| \quad \text{et} \quad p_1(\mathbf{v}) = |v_2 + v_4| \quad (6.12)$$

qui sont respectivement apparentées à un filtre horizontal et vertical d'ordre deux.

$y_6(\mathbf{n})$	$y_2(\mathbf{n})$	$y_5(\mathbf{n})$
$y_3(\mathbf{n})$	$x(\mathbf{n})$	$y_1(\mathbf{n})$
$y_7(\mathbf{n})$	$y_4(\mathbf{n})$	$y_8(\mathbf{n})$

FIG. 6.2 – Indexation des échantillons dans une fenêtre  $3 \times 3$  centrée sur  $x(\mathbf{n})$ .

Ces seminormes possèdent l'interprétation géométrique suivante. Si  $p_0(\mathbf{v}) \leq p_1(\mathbf{v})$  et par conséquent  $d = 0$ , alors la dérivée verticale  $2x - y_2 - y_4$  est dominante en valeur absolue par rapport à la dérivée horizontale  $2x - y_1 - y_3$ . Il est alors préférable d'appliquer le filtre de mise à jour sur  $x$  dans la direction horizontale.

Comme démontré dans la Proposition 5, la reconstruction parfaite est possible si :

$$\mathbf{b}_0 = \frac{\beta_0}{2}(1, 0, 1, 0)^T \quad \mathbf{b}_1 = \frac{\beta_1}{2}(0, 1, 0, 1)^T$$

avec  $0 \leq \beta_0, \beta_1 < 1$ .

Plus généralement, soit  $\mathcal{D}_0$  un sous-ensemble de  $\{1, \dots, K\}$  avec  $K \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $\mathbf{a}_0 = (a_0(k))_{1 \leq k \leq K}$  et  $\mathbf{a}_1 = (a_1(k))_{1 \leq k \leq K}$  avec pour tout  $k \in \{1, \dots, K\}$ ,

$$a_0(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in \mathcal{D}_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad a_1(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \notin \mathcal{D}_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En d'autres mots, cela revient à supposer que les composantes de  $\mathbf{a}_0$  et  $\mathbf{a}_1$  sont complémentaires en représentation binaire. Cette caractéristique permet alors de comparer les décisions prises sur deux ensembles disjoints de voisins  $\{y_k, k \in \mathcal{D}_0\}$  et  $\{y_k, k \notin \mathcal{D}_0\}$ . Par exemple, le choix de :

$$\mathbf{a}_0 = (1, 0, 1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{2K}, \quad \mathbf{a}_1 = (0, 1, 0, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^{2K}$$

permet de chercher le plus faible gradient entre  $Kx - \sum_{k=0}^K y_{2k+1}$  et  $Kx - \sum_{k=0}^K y_{2k}$ .

Une condition suffisante pour assurer la reconstruction parfaite dans ce cas plus général est obtenue en appliquant la Proposition 5 :

$$\mathbf{b}_0 = \frac{\beta_0}{K_1} \mathbf{a}_0, \quad \mathbf{b}_1 = \frac{\beta_1}{K_0} \mathbf{a}_1$$

avec  $K_0 = \text{card } \mathcal{D}_0$ ,  $K_1 = K - K_0$ ,  $0 \leq \beta_0 < 1$  et  $0 \leq \beta_1 < 1$ .

Dans ce cas, le filtrage de mise à jour est proportionnel à la moyenne arithmétique des échantillons voisins. Nous pouvons alors prendre par exemple  $\alpha_0$  égal aux coefficients du filtre de mise à jour, c'est à dire  $\alpha_0 = \beta_0/K_0$  et obtenons ainsi :

$$\beta_0 = \frac{K_0}{K_0 + 1}$$

De façon similaire, nous avons  $\alpha_1 = \beta_1/K_1$  et  $\beta_1 = K_1/(K_1 + 1)$ .

**Exemple 2** Considérons désormais les vecteurs  $\mathbf{a}_0 = (1, 1, 0, 0)^T$  et  $\mathbf{a}_1 = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)^T$ . Comparons leur seminormes associées :

$$p_0(\mathbf{v}) = |v_1 + v_2| \quad \text{et} \quad p_1(\mathbf{v}) = \frac{|v_1 + v_2 + v_3 + v_4|}{2}$$

Ce qui, en d'autres termes, revient à chercher quelle moyenne entre  $(y_1 + y_2)/2$  et  $(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)/4$  est la plus proche de l'échantillon  $x$  à mettre à jour.

La Proposition 5 nous permet alors de déterminer les coefficients des filtres de mise à jour (6.11) permettant d'assurer la reconstruction parfaite. Ils sont donnés par :

$$\mathbf{b}_0 = \frac{\beta_0}{2} (1, 1, 0, 0)^T, \quad \mathbf{b}_1 = \frac{\beta_1}{4} (1, 1, 1, 1)^T,$$

où nous avons encore  $0 \leq \beta_0, \beta_1 < 1$ .

Plus généralement, il est possible de montrer que nous pouvons comparer deux "moyennes" calculées sur des voisinages emboîtés arbitrairement, tout en assurant la reconstruction parfaite. Soit  $\mathcal{D}_0 \neq \emptyset \subset \{1, \dots, K\}$ , avec  $K \in \mathbb{N}^*$  et les seminormes  $p_0$  et  $p_1$ , définies par :

$$p_0(\mathbf{v}) = \left| x - \frac{\sum_{k \in \mathcal{D}_0} y_k}{K_0} \right| \quad \text{et} \quad p_1(\mathbf{v}) = \left| x - \frac{\sum_{k=1}^K y_k}{K} \right| \quad \text{avec } K_0 = \text{card } \mathcal{D}_0.$$

Alors,  $\mathbf{a}_0 = (a_0(k))_{1 \leq k \leq K}$  où pour tout  $k \in \{1, \dots, K\}$ , nous avons :

$$a_0(k) = \begin{cases} \frac{1}{K_0} & \text{si } k \in \mathcal{D}_0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{u}/K$ . En accord avec la Proposition 5, nous obtenons  $\mathbf{b}_0 = \beta_0 \mathbf{a}_0$  et  $\mathbf{b}_1 = \beta_1 \mathbf{a}_1$ , avec  $0 \leq \beta_0, \beta_1 < 1$ .

### Contre-exemple : Sélection entre des filtres horizontaux et verticaux

La Proposition 5 (et plus généralement la Proposition 4) donne des conditions *suffisantes* permettant d'assurer la reconstruction parfaite. Cependant et comme nous allons le voir dans ce contre-exemple, ces conditions ne sont pas *nécessaires*.

Considérons une nouvelle fois les critères de décision introduits au début de l'Exemple 1. Les deux seminormes  $p_0$  et  $p_1$  définies par (6.12) mesurent ainsi le gradient local horizontal et vertical d'ordre deux.

Supposons que les filtres de mise à jour  $U_d$  possèdent un support de 4 échantillons en correspondance avec les coefficients de détail indicés par  $y_1, \dots, y_4$ . Les coefficients des filtres  $\mathbf{b}_d$  sont alors choisis afin de vérifier :

$$\mathbf{b}_d = (\mu_d, \eta_d, \mu_d, \eta_d)^T \text{ pour } d = 0, 1 \text{ avec } (\mu_d, \eta_d) \in \mathbb{R}^2 \quad (6.13)$$

Ce choix signifie en particulier que seuls les quatre voisins horizontaux et verticaux  $y_1, y_2, y_3$  et  $y_4$  sont utilisés pour mettre à jour le signal d'approximation. Par exemple, si  $d = 0$ , alors l'opération de mise à jour se réduit à :

$$x' = \alpha_0 x + \mu_0(y_1 + y_3) + \eta_0(y_2 + y_4) \quad (6.14)$$

Soit  $\mathbf{v}'$  le vecteur gradient mis en jeu lors de la synthèse, c'est à dire  $v'_j = x' - y_j$ . Un calcul direct montre que :

$$\begin{aligned} |v'_1 + v'_3| &= |(1 - 2\mu_d)(v_1 + v_3) - 2\eta_d(v_2 + v_4)| \\ |v'_2 + v'_4| &= |-2\mu_d(v_1 + v_3) + (1 - 2\eta_d)(v_2 + v_4)| \end{aligned}$$

Si nous pouvons choisir les coefficients  $\mu_0, \eta_0, \mu_1$  et  $\eta_1$  de telle sorte que :

$$p_0(\mathbf{v}) \leq p_1(\mathbf{v}) \iff p_0(\mathbf{v}') \leq p_1(\mathbf{v}')$$

il est alors possible de retrouver la décision à partir du vecteur gradient durant la synthèse, rendant ainsi possible la reconstruction parfaite.

**Proposition 6** Soient  $p_0$  et  $p_1$  les seminormes définies par (6.12) et considérons les filtres de mise à jour donnés par la relation (6.13). Alors, les conditions nécessaires et suffisantes pour assurer la reconstruction parfaite sont données par :

$$\begin{aligned} \eta_0 \leq \mu_0 \quad \text{et} \quad \mu_0 + \eta_0 < \frac{1}{2}, \\ \mu_1 \leq \eta_1 \quad \text{et} \quad \mu_1 + \eta_1 < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

*Preuve.* La preuve est rapportée en Annexe A. ■

Ces conditions sont clairement moins restrictives que celles déduites de la Proposition 5 car il n'est pas nécessaire que les vecteurs  $\mathbf{b}_0$  et  $\mathbf{b}_1$  soient respectivement colinéaires à  $\mathbf{a}_0$  et  $\mathbf{a}_1$ . La condition suffisante (se conférer à l'Exemple 1) donne les intervalles  $\eta_0 = 0$ ,  $\mu_0 \in [0, \frac{1}{2})$  et  $\mu_1 = 0$ ,  $\eta_1 \in [0, \frac{1}{2})$ , qui sont les plus grands intervalles contenus dans le domaine admissible  $(\mu_0, \eta_0)$  et  $(\mu_1, \eta_1)$ .

### 6.3 Comparaison de N seminormes

Afin d'étendre les résultats obtenus dans la section précédente, nous nous intéressons maintenant à la comparaison de  $N$  seminormes entre elles,  $p_0, p_1, \dots, p_{N-1}$ . On attribue alors en chaque point une valeur de décision  $d$  correspondant à l'indice de la seminorme

possédant la plus petite amplitude. La carte de décision à l'analyse comme à la synthèse n'est donc plus binaire et peut prendre désormais  $N$  valeurs,  $d(\mathbf{v}) \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ .

Durant l'analyse et sans perte de généralités, si  $\min\{p_0(\mathbf{v}), p_1(\mathbf{v}), \dots, p_{N-2}(\mathbf{v})\} < p_{N-1}(\mathbf{v})$ , alors nous sommes dans l'un des cas suivants :

$$\begin{cases} p_0(\mathbf{v}) < p_{N-1}(\mathbf{v}) \\ p_0(\mathbf{v}) \leq p_1(\mathbf{v}) \\ \vdots \\ p_0(\mathbf{v}) \leq p_{N-2}(\mathbf{v}) \end{cases} \Leftrightarrow d(\mathbf{v}) = 0$$

$$\begin{cases} p_1(\mathbf{v}) < p_{N-1}(\mathbf{v}) \\ p_1(\mathbf{v}) < p_0(\mathbf{v}) \\ p_1(\mathbf{v}) \leq p_2(\mathbf{v}) \\ \vdots \\ p_1(\mathbf{v}) \leq p_{N-2}(\mathbf{v}) \end{cases} \Leftrightarrow d(\mathbf{v}) = 1$$

et de même jusqu'à :

$$\begin{cases} p_{N-2}(\mathbf{v}) < p_{N-1}(\mathbf{v}) \\ p_{N-2}(\mathbf{v}) < p_0(\mathbf{v}) \\ p_{N-2}(\mathbf{v}) < p_1(\mathbf{v}) \\ \vdots \\ p_{N-2}(\mathbf{v}) < p_{N-3}(\mathbf{v}) \end{cases} \Leftrightarrow d(\mathbf{v}) = N-2,$$

Si  $\min\{p_0(\mathbf{v}), p_1(\mathbf{v}), \dots, p_{N-2}(\mathbf{v})\} \geq p_{N-1}(\mathbf{v})$ , nous avons :

$$\begin{cases} p_{N-1}(\mathbf{v}) \leq p_0(\mathbf{v}) \\ p_{N-1}(\mathbf{v}) \leq p_1(\mathbf{v}) \\ \vdots \\ p_{N-1}(\mathbf{v}) \leq p_{N-2}(\mathbf{v}) \end{cases} \Leftrightarrow d(\mathbf{v}) = N-1.$$

Durant la synthèse, nous obtenons les mêmes conditions en remplaçant  $\mathbf{v}$  par  $\mathbf{v}' = A_d \mathbf{v}$ .

**Proposition 7** Des conditions *suffisantes* pour assurer la reconstruction parfaite lors de la comparaison de  $N$  seminormes sont données par :

$$\begin{cases} p_0(\mathbf{v}) < p_{N-1}(\mathbf{v}) \\ p_0(\mathbf{v}) \leq p_1(\mathbf{v}) \\ \vdots \\ p_0(\mathbf{v}) \leq p_{N-2}(\mathbf{v}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0(A_0 \mathbf{v}) < p_{N-1}(A_0 \mathbf{v}) \\ p_0(A_0 \mathbf{v}) \leq p_1(A_0 \mathbf{v}) \\ \vdots \\ p_0(A_0 \mathbf{v}) \leq p_{N-2}(A_0 \mathbf{v}) \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} p_{N-1}(\mathbf{v}) \leq p_0(\mathbf{v}) \\ p_{N-1}(\mathbf{v}) \leq p_1(\mathbf{v}) \\ \vdots \\ p_{N-1}(\mathbf{v}) \leq p_{N-2}(\mathbf{v}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{N-1}(A_{N-1} \mathbf{v}) \leq p_0(A_{N-1} \mathbf{v}) \\ p_{N-1}(A_{N-1} \mathbf{v}) \leq p_1(A_{N-1} \mathbf{v}) \\ \vdots \\ p_{N-1}(A_{N-1} \mathbf{v}) \leq p_{N-2}(A_{N-1} \mathbf{v}) \end{cases}$$


---

*Preuve.* Considérons la première implication de la proposition. Supposons que  $d' = 0$ . Si  $d \neq 0$ , alors  $d$  peut prendre n'importe quelle valeur parmi  $\{1, \dots, N-1\}$ . Prenons par exemple  $d = 1$ . Par hypothèse, il s'ensuit que :

$$\begin{cases} p_1(A_1 \mathbf{v}) < p_{N-1}(A_1 \mathbf{v}) \\ p_1(A_1 \mathbf{v}) < p_0(A_1 \mathbf{v}) \\ p_1(A_1 \mathbf{v}) \leq p_2(A_1 \mathbf{v}) \\ \vdots \\ p_1(A_1 \mathbf{v}) \leq p_{N-2}(A_1 \mathbf{v}) \end{cases}$$

La seconde inégalité de ce système  $p_1(A_1 \mathbf{v}) < p_0(A_1 \mathbf{v})$  est en contradiction avec l'hypothèse  $p_0(A_d \mathbf{v}) \leq p_1(A_d \mathbf{v})$  quand  $d = 1$ . Un argument similaire peut être utilisé pour toutes les valeurs de  $d \in \{2, \dots, N-1\}$ . Nous avons alors prouvé par l'absurde que  $d = 0$ . Les autres implications se démontrent de la même façon. ■

Cette proposition apparaît comme une conséquence du résultat général suivant :

**Proposition 8** Considérons à l'analyse, la carte de décision  $d$  définie par :

$$\begin{aligned} d : V &\rightarrow \{0, \dots, N-1\} \\ \mathbf{v} &\mapsto d(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Considérons les régions de décisions  $\mathcal{D}_i$ , formant une partition de  $V$  :

$$\forall i \in \{0, \dots, N-1\}, \quad \mathcal{D}_i = \{\mathbf{v} \in V \mid d(\mathbf{v}) = i\} \quad (6.15)$$

$$\text{avec } V = \bigcup_{i=0}^{N-1} \mathcal{D}_i, \quad \mathcal{D}_i \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j = \emptyset \quad \text{si} \quad i \neq j \quad (6.16)$$

Durant la synthèse, nous avons  $\mathbf{v}' = A_{d(\mathbf{v})} \mathbf{v}$  et la règle de décision est :

$$d'(\mathbf{v}') = d(A_{d(\mathbf{v})} \mathbf{v})$$

Nous avons alors :

- (i) Il y a reconstruction parfaite si et seulement si  $\forall \mathbf{v}, d(A_{d(\mathbf{v})} \mathbf{v}) = d(\mathbf{v})$ .
- (ii) Une condition nécessaire et suffisante pour la vérifier est :

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \quad \text{si } d(\mathbf{v}) = i, \text{ alors } d(A_i \mathbf{v}) = i \quad (6.17)$$

*Preuve.* La preuve de (i) est directe. Prouvons (ii).

Supposons que l'implication (6.17) soit vraie. Comme précédemment, faisons l'hypothèse que  $d(A_{d(\mathbf{v})} \mathbf{v}) = i$  et  $d(\mathbf{v}) \neq i$ . Dans ce cas, comme  $\{\mathcal{D}_i\}, i = 0, \dots, N-1$  est une partition de  $V$ , il existe  $j \neq i \in \{0, \dots, N-1\}$  tel que  $d(\mathbf{v}) = j$ . En accord avec (6.17), cela implique  $d(A_j \mathbf{v}) = j$ . Mais comme nous avons  $d(A_j \mathbf{v}) = i$ , cela conduit à une contradiction car  $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j = \emptyset$ . On montre alors que la condition de reconstruction parfaite est satisfaite.

Réciproquement, si la condition de reconstruction parfaite est vérifiée alors la preuve (6.17) est établie de façon directe. ■

Une condition plus faible pour assurer la reconstruction parfaite (et donc *suffisante* pour satisfaire les conditions nécessaires et suffisantes de la proposition précédente) consiste-

rait à vérifier simultanément toutes les implications suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} p_0(\mathbf{v}) < p_{N-1}(\mathbf{v}) & \Rightarrow p_0(A_0\mathbf{v}) < p_{N-1}(A_0\mathbf{v}) \\ p_0(\mathbf{v}) \leq p_1(\mathbf{v}) & \Rightarrow p_0(A_0\mathbf{v}) \leq p_1(A_0\mathbf{v}) \\ & \vdots \\ p_0(\mathbf{v}) \leq p_{N-2}(\mathbf{v}) & \Rightarrow p_0(A_0\mathbf{v}) \leq p_{N-2}(A_0\mathbf{v}) \\ p_1(\mathbf{v}) < p_{N-1}(\mathbf{v}) & \Rightarrow p_1(A_1\mathbf{v}) < p_{N-1}(A_1\mathbf{v}) \\ p_1(\mathbf{v}) < p_0(\mathbf{v}) & \Rightarrow p_1(A_1\mathbf{v}) < p_0(A_1\mathbf{v}) \\ & \vdots \\ p_1(\mathbf{v}) \leq p_{N-2}(\mathbf{v}) & \Rightarrow p_1(A_1\mathbf{v}) \leq p_{N-2}(A_1\mathbf{v}) \\ & \vdots \\ p_{N-1}(\mathbf{v}) \leq p_0(\mathbf{v}) & \Rightarrow p_{N-1}(A_{N-1}\mathbf{v}) \leq p_0(A_{N-1}\mathbf{v}) \\ & \vdots \\ p_{N-1}(\mathbf{v}) \leq p_{N-2}(\mathbf{v}) & \Rightarrow p_{N-1}(A_{N-1}\mathbf{v}) \leq p_{N-2}(A_{N-1}\mathbf{v}) . \end{array} \right.$$

Ces conditions peuvent être combinées par paires, conduisant ainsi à :

$$\left\{ \begin{array}{ll} p_{N-1}(\mathbf{v}) \leq p_0(\mathbf{v}) & \Rightarrow p_{N-1}(A_{N-1}\mathbf{v}) \leq p_0(A_{N-1}\mathbf{v}) \\ p_{N-1}(\mathbf{v}) > p_0(\mathbf{v}) & \Rightarrow p_{N-1}(A_0\mathbf{v}) > p_0(A_0\mathbf{v}) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} p_0(\mathbf{v}) \leq p_1(\mathbf{v}) & \Rightarrow p_0(A_0\mathbf{v}) \leq p_1(A_0\mathbf{v}) \\ p_0(\mathbf{v}) > p_1(\mathbf{v}) & \Rightarrow p_0(A_1\mathbf{v}) > p_1(A_1\mathbf{v}) \end{array} \right.$$

etc... De cette manière, une condition suffisante de reconstruction parfaite s'exprime comme un ensemble de  $N(N-1)/2$  conditions, chacune d'entre elles mettant en jeu seulement deux seminormes. Ces équations sont en fait semblables aux conditions (6.5) obtenues lors de la comparaison de deux seminormes. Les résultats obtenus dans la section 6.2 peuvent alors être utilisés ici pour traduire les équations précédentes en conditions plus pratiques à manipuler.

**Exemple 3** Un exemple de conditions nécessaires et suffisantes, assurant la reconstruction parfaite dans le cas de la Proposition 8 pour  $N = 3$ , est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} p_0(\mathbf{v}) < p_2(\mathbf{v}) \\ p_0(\mathbf{v}) \leq p_1(\mathbf{v}) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} p_0(A_0\mathbf{v}) < p_2(A_0\mathbf{v}) \\ p_0(A_0\mathbf{v}) \leq p_1(A_0\mathbf{v}) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} p_1(\mathbf{v}) < p_2(\mathbf{v}) \\ p_1(\mathbf{v}) < p_0(\mathbf{v}) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} p_1(A_1\mathbf{v}) < p_2(A_1\mathbf{v}) \\ p_1(A_1\mathbf{v}) < p_0(A_1\mathbf{v}) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} p_2(\mathbf{v}) \leq p_0(\mathbf{v}) \\ p_2(\mathbf{v}) \leq p_1(\mathbf{v}) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} p_2(A_2\mathbf{v}) \leq p_0(A_2\mathbf{v}) \\ p_2(A_2\mathbf{v}) \leq p_1(A_2\mathbf{v}) \end{array} \right.$$

Des conditions suffisantes, vérifiant les conditions précédentes sont alors données par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} p_2(\mathbf{v}) \leq p_0(\mathbf{v}) & \Longrightarrow p_2(A_2\mathbf{v}) \leq p_0(A_2\mathbf{v}) \\ p_2(\mathbf{v}) > p_0(\mathbf{v}) & \Longrightarrow p_2(A_0\mathbf{v}) > p_0(A_0\mathbf{v}) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} p_2(\mathbf{v}) \leq p_1(\mathbf{v}) & \Longrightarrow p_2(A_2\mathbf{v}) \leq p_1(A_2\mathbf{v}) \\ p_2(\mathbf{v}) > p_1(\mathbf{v}) & \Longrightarrow p_2(A_1\mathbf{v}) > p_1(A_1\mathbf{v}) \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} p_0(\mathbf{v}) \leq p_1(\mathbf{v}) & \implies p_0(A_0\mathbf{v}) \leq p_1(A_0\mathbf{v}) \\ p_0(\mathbf{v}) > p_1(\mathbf{v}) & \implies p_0(A_1\mathbf{v}) > p_1(A_1\mathbf{v}) \end{cases}$$

Considérons les seminormes  $p_0(\mathbf{v}) = |\mathbf{a}_0^T \mathbf{v}|$ ,  $p_1(\mathbf{v}) = |\mathbf{a}_1^T \mathbf{v}|$  et  $p_2(\mathbf{v}) = |\mathbf{a}_2^T \mathbf{v}|$ . Supposons de plus que  $\mathbf{a}_0$ ,  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$  sont linéairement indépendants et vérifient  $\mathbf{u}^T \mathbf{a}_0 = \mathbf{u}^T \mathbf{a}_1 = \mathbf{u}^T \mathbf{a}_2 = \xi \neq 0$ . La reconstruction parfaite est alors assurée par les conditions suffisantes suivantes :

$$\mathbf{b}_i = \frac{\beta_i \mathbf{a}_i}{\xi}, \quad \text{où } 0 \leq \beta_i < 1, \quad i = 0, 1, 2$$

Par exemple, si  $\mathbf{a}_0 = (1, 0, 1, 0)^T$ ,  $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 0, 1)^T$  et  $\mathbf{a}_2 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^T$  alors :

$$\mathbf{b}_0 = \frac{\beta_0}{2}(1, 0, 1, 0)^T, \quad \mathbf{b}_1 = \frac{\beta_1}{2}(0, 1, 0, 1)^T, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{\beta_2}{4}(1, 1, 1, 1)^T$$

où  $0 \leq \beta_i < 1$ ,  $i = 0, 1, 2$ .

Dans le cas de signaux monodimensionnels (voir l'indexation dans la Fig. 6.3), cela correspond à comparer l'information de gradient du côté gauche de l'échantillon  $x(n)$  à mettre à jour, avec l'information de gradient située du côté droit et avec l'information calculée des deux côtés.

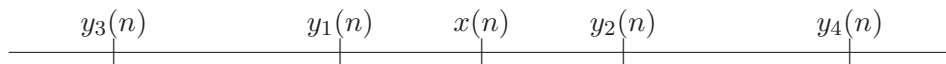


FIG. 6.3 – Exemple d'indexation des échantillons d'un signal monodimensionnel.

Dans le cas d'images (voir la Fig. 6.2), ce critère revient à comparer les gradients dans les directions horizontales et verticales avec un gradient isotrope, calculé à partir des quatre échantillons voisins.

## 6.4 Combinaison de deux seminormes et du critère TC

Nous pouvons aussi combiner la comparaison de deux seminormes avec le critère de seuil TC pour chacune d'entre elle. Cela revient à considérer les 4 régions de décision suivantes :

$$p_0(\mathbf{v}) \leq p_1(\mathbf{v}) \text{ et } p_0(\mathbf{v}) \leq T_0 \quad \Leftrightarrow \quad d = 0 \quad (6.18)$$

$$p_0(\mathbf{v}) \leq p_1(\mathbf{v}) \text{ et } p_0(\mathbf{v}) > T_0 \quad \Leftrightarrow \quad d = 1 \quad (6.19)$$

$$p_0(\mathbf{v}) > p_1(\mathbf{v}) \text{ et } p_1(\mathbf{v}) \leq T_1 \quad \Leftrightarrow \quad d = 2 \quad (6.20)$$

$$p_0(\mathbf{v}) > p_1(\mathbf{v}) \text{ et } p_1(\mathbf{v}) > T_1 \quad \Leftrightarrow \quad d = 3 \quad (6.21)$$

où  $T_0$  et  $T_1$  sont deux valeurs de seuil positives. Une règle similaire avec les seuils  $T'_0$  et  $T'_1$  est valable durant la synthèse.

Nous pouvons déduire de la Proposition 8, les conditions nécessaires et suffisantes suivantes, permettant d'assurer la reconstruction parfaite :

$$\begin{cases} p_0(\mathbf{v}) \leq p_1(\mathbf{v}) \\ p_0(\mathbf{v}) \leq T_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p_0(A_0\mathbf{v}) \leq p_1(A_0\mathbf{v}) \\ p_0(A_0\mathbf{v}) \leq T'_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_0(\mathbf{v}) \leq p_1(\mathbf{v}) \\ p_0(\mathbf{v}) > T_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0(A_1\mathbf{v}) \leq p_1(A_1\mathbf{v}) \\ p_0(A_1\mathbf{v}) > T'_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_0(\mathbf{v}) > p_1(\mathbf{v}) \\ p_1(\mathbf{v}) \leq T_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0(A_2\mathbf{v}) > p_1(A_2\mathbf{v}) \\ p_1(A_2\mathbf{v}) \leq T'_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_0(\mathbf{v}) > p_1(\mathbf{v}) \\ p_1(\mathbf{v}) > T_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0(A_3\mathbf{v}) > p_1(A_3\mathbf{v}) \\ p_0(A_3\mathbf{v}) > T'_1 \end{cases}$$

Encore une fois, une condition suffisante permettant de satisfaire les relations précédentes peut être déduite de ces dernières. Elle nécessite que toutes les implications suivantes soient vérifiées individuellement, c'est à dire :

$$\begin{cases} p_0(\mathbf{v}) \leq T_0 & \Rightarrow & p_0(A_0\mathbf{v}) \leq T'_0 \\ p_0(\mathbf{v}) > T_0 & \Rightarrow & p_0(A_1\mathbf{v}) > T'_0 \end{cases} \quad (6.22)$$

$$\begin{cases} p_0(\mathbf{v}) \leq T_1 & \Rightarrow & p_0(A_2\mathbf{v}) \leq T'_1 \\ p_0(\mathbf{v}) > T_1 & \Rightarrow & p_0(A_3\mathbf{v}) > T'_1 \end{cases} \quad (6.23)$$

$$\begin{cases} p_0(\mathbf{v}) \leq p_1(\mathbf{v}) & \Rightarrow & p_0(A_0\mathbf{v}) \leq p_1(A_0\mathbf{v}) \\ p_0(\mathbf{v}) > p_1(\mathbf{v}) & \Rightarrow & p_0(A_2\mathbf{v}) > p_1(A_2\mathbf{v}) \end{cases} \quad (6.24)$$

$$\begin{cases} p_0(\mathbf{v}) \leq p_1(\mathbf{v}) & \Rightarrow & p_0(A_1\mathbf{v}) \leq p_1(A_1\mathbf{v}) \\ p_0(\mathbf{v}) > p_1(\mathbf{v}) & \Rightarrow & p_0(A_3\mathbf{v}) > p_1(A_3\mathbf{v}) \end{cases} \quad (6.25)$$

On remarque ainsi que le critère de seuil TC peut être combiné de manière simple avec plusieurs seminormes. Lors de nos expérimentations en section 6.5, nous donnons trois exemples d'utilisation de ce critère de décision combiné.

**Proposition 9** Considérons la règle de décision donnée par (6.18)-(6.21), avec  $p_0(\mathbf{v}) = |\mathbf{a}_0^T \mathbf{v}|$  et  $p_1(\mathbf{v}) = |\mathbf{a}_1^T \mathbf{v}|$ , où  $\mathbf{a}_0$  et  $\mathbf{a}_1$  ne sont pas colinéaires. Une condition suffisante permettant d'assurer la reconstruction parfaite est donnée par les relations :

$$\mathbf{u}^T \mathbf{a}_0 \neq 0, \mathbf{u}^T \mathbf{a}_1 \neq 0, T'_0 = |\alpha_0| T_0, T'_1 = |\alpha_2| T_1 \quad (6.26)$$

$$\mathbf{b}_0 = \frac{\beta_0}{\mathbf{u}^T \mathbf{a}_1} \mathbf{a}_0, \quad \mathbf{b}_1 = \frac{\beta_1}{\mathbf{u}^T \mathbf{a}_1} \mathbf{a}_0 \quad (6.27)$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{\beta_2}{\mathbf{u}^T \mathbf{a}_0} \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\beta_3}{\mathbf{u}^T \mathbf{a}_0} \mathbf{a}_1 \quad (6.28)$$

où  $\forall i \in \{0, 1, 2, 3\}, 0 < |\alpha_i| \leq 1 - |\beta_i|$  et  $|\alpha_0| \leq |\alpha_1|, |\alpha_2| \leq |\alpha_3|$ .

*Preuve.* Afin de satisfaire le critère de seuil TC (6.22)-(6.23), il est nécessaire et suffisant [59] d'avoir :

$$\mathbf{b}_0 = \gamma_0 \mathbf{a}_0 \text{ et } \mathbf{b}_1 = \gamma_1 \mathbf{a}_0, \quad \text{avec } \gamma_0, \gamma_1 \text{ tel que } |\alpha_0| \leq |\alpha_1|$$

$$\mathbf{b}_2 = \gamma_2 \mathbf{a}_1 \text{ et } \mathbf{b}_3 = \gamma_3 \mathbf{a}_1, \quad \text{avec } \gamma_2, \gamma_3 \text{ tel que } |\alpha_2| \leq |\alpha_3|$$

et de choisir  $T'_0 \in [|\alpha_0| T_0, |\alpha_1| T_0]$  et  $T'_1 \in [|\alpha_2| T_1, |\alpha_3| T_1]$ . Les relations précédentes de colinéarité sont consistantes avec les équations (6.27)-(6.28). De plus, les relations (6.27)-(6.28) et la Proposition 5 garantissent alors que les équations (6.24)-(6.25) sont satisfaites. ■



**Exemple 4** Considérons le cas où  $\mathbf{a}_0 = (1, 0, 1, 0)^T$ ,  $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 0, 1)^T$  et  $T_0 = T_1 = T$ . Conformément à la proposition précédente, la propriété de reconstruction parfaite est garantie si nous choisissons :

$$\mathbf{b}_0 = \frac{\beta_0}{2}(1, 0, 1, 0)^T, \quad \mathbf{b}_1 = \frac{\beta_1}{2}(1, 0, 1, 0)^T$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{\beta_2}{2}(0, 1, 0, 1)^T, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{\beta_3}{2}(0, 1, 0, 1)^T$$

avec  $0 \leq \beta_1 \leq \beta_0 < 1$ ,  $0 \leq \beta_3 \leq \beta_2 < 1$  et en choisissant les seuils durant la synthèse  $T'_0 = (1 - \beta_0)T$  et  $T'_1 = (1 - \beta_2)T$ .

En particulier, nous pouvons prendre  $\beta_1 = \beta_3 = 0$ , ce qui correspond au filtre de mise à jour identité (pas de filtrage) quand une discontinuité est détectée, lorsque par exemple  $\min\{p_0(v), p_1(v)\} > T$ . Dans le cas contraire, le filtrage de mise à jour est effectué en utilisant  $\mathbf{b}_0$  ou  $\mathbf{b}_2$ , en fonction du plus faible gradient.

## 6.5 Résultats expérimentaux

Afin d'évaluer l'efficacité de décorrélation des transformées adaptative présentées dans les sections précédentes, nous avons procédé à plusieurs simulations de compression d'image sans perte, en utilisant différents critères de décision.

### 6.5.1 Protocole expérimental

Nos expérimentations ont été conduites sur des images, en considérant une structure d'analyse polyphase utilisant une étape de mise à jour adaptative et suivie de trois étapes de prédiction, comme illustré par la Fig. 6.4. Avant d'être décomposée, l'image d'entrée  $x_0$  est préalablement scindée en composantes polyphases  $x$ ,  $y_h$ ,  $y_v$  et  $y_d$  selon :

$$\begin{cases} x(m, n) &= x_0(2m, 2n) \\ y_h(m, n) &= x_0(2m, 2n + 1) \\ y_v(m, n) &= x_0(2m + 1, 2n) \\ y_d(m, n) &= x_0(2m + 1, 2n + 1) \end{cases}$$

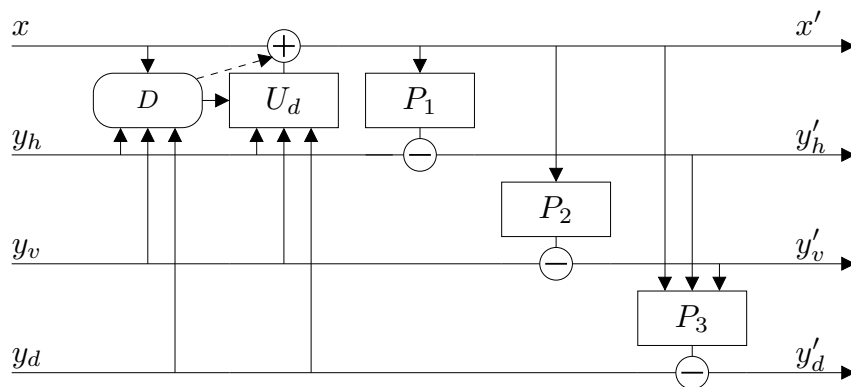


FIG. 6.4 – Structure lifting d'une décomposition 2D réalisant une étape de mise à jour adaptative  $U_d$  suivie de trois étapes de prédiction  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ .

Dans cette décomposition, le signal  $x'$  est nommé sous-bande *d'approximation* et les signaux  $y'_h$ ,  $y'_v$  et  $y'_d$  sont les sous-bande de détail, respectivement *horizontale*, *verticale* et *diagonale*. Les échantillons sont pris sur les bandes  $y_h$ ,  $y_b$  et  $y_d$  en considérant l'indexation illustrée en Fig. 6.5.

$y_6(\mathbf{n})$	$y_2(\mathbf{n})$	$y_5(\mathbf{n})$
$y_3(\mathbf{n})$	$x(\mathbf{n})$	$y_1(\mathbf{n})$
$y_7(\mathbf{n})$	$y_4(\mathbf{n})$	$y_8(\mathbf{n})$

FIG. 6.5 – Indexation des échantillons dans une fenêtre  $3 \times 3$  centrée sur  $x(\mathbf{n})$ .

Les étapes de prédictions sont fixes et sont régies par les équations :

$$\begin{aligned} y'_h &= y_h - x' \\ y'_v &= y_v - x' \\ y'_d &= y_d - x' - y'_h - y'_v \end{aligned}$$

De plus, afin de maximiser l'efficacité de codage, il est important de normaliser les coefficients d'approximation et de détail à chaque niveau de décomposition. Les coefficients d'approximation sont multipliés par une constante  $\zeta$  tandis que ceux de détail sont multipliés par  $1/\zeta$ . Si on impose au signal d'approximation  $x'$  de préserver l'énergie du signal original  $x$  alors les coefficients du filtre de mise à jour doivent être normalisés de façon à ce que leur norme  $\ell_2$  soit égale à 1. Ceci implique que :

$$\zeta^2(\alpha^2 + \sum_{j=1}^J \mu_j^2) = 1$$

conduisant à  $\zeta = 1/\sqrt{(\alpha^2 + \sum_{j=1}^J \mu_j^2)}$ . Enfin, les valeurs des seuils  $T$  utilisées dans certaines expérimentations ont été choisies de façon heuristique et dépendent de l'expérimentation, des images et des seminormes choisies.

Afin d'illustrer les résultats théoriques obtenus dans les sections précédentes, nous avons procédé à plusieurs expérimentations en utilisant plusieurs seminormes et différents critères de comparaison entre elles, en combinant ou non un critère de seuil. Les expérimentations sont détaillées dans la sous-section suivante.

## 6.5.2 Détail des expérimentations

### Isotrope non-adaptatif - Fig. 6.6

Cette expérimentation consiste à utiliser le même filtre de mise à jour isotrope  $\mathbf{b} = (1, 1, 1, 1)^T/8$  en chaque point. Ce n'est donc pas une transformation adaptative, ser-

vant cependant de référence aux autres expérimentations. La partie gauche de la Fig. 6.6 illustre la décomposition par cette transformée d'une image sur deux niveaux. On observe le gommage important des contours de l'image dans les sous-bandes de détail.

### Laplacien adaptatif

La transformée Laplacienne adaptative est une décomposition mettant en œuvre le critère de seuil TC, rappelé en section 6.1. On utilise la règle de décision  $d = [p(\mathbf{v}) > T]$  avec  $p(\mathbf{v}) = |\mathbf{a}^T \mathbf{v}|$  et  $\mathbf{a} = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)^T$ . Les filtres de mise à jour correspondant pour  $d = \{0, 1\}$  sont donnés par  $\mathbf{b}_d = \gamma_d \mathbf{a}$  avec  $\gamma_0 = 1/8$  et  $\gamma_1 = 0$ . Cette décomposition adaptative revient donc à filtrer uniformément un pixel durant la mise à jour si la moyenne isotrope de ses voisins est inférieure au seuil  $T$ . Sinon, le pixel n'est pas filtré.

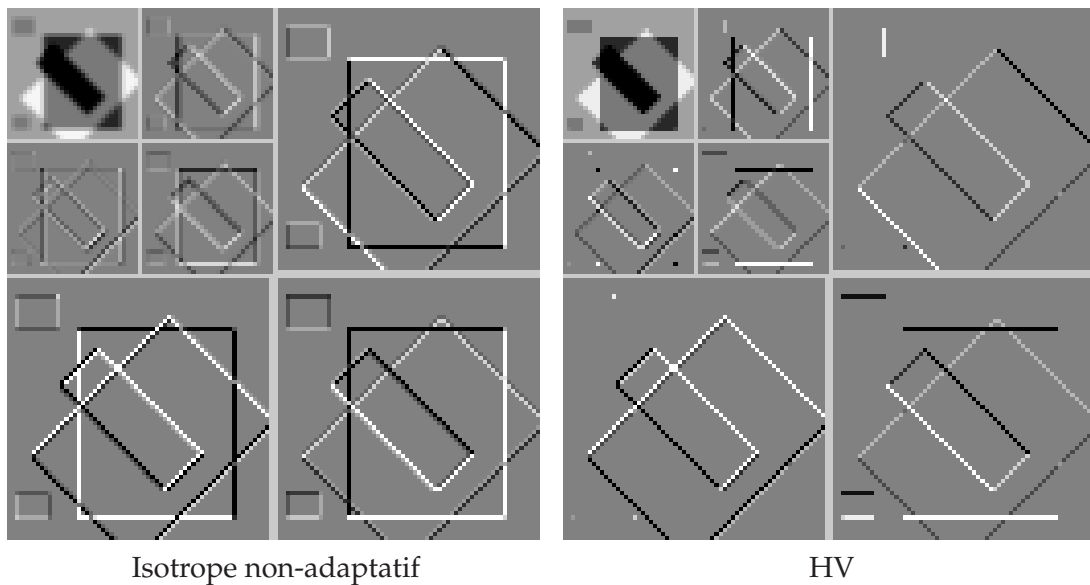


FIG. 6.6 – Décomposition multirésolution par filtrage isotrope non-adaptatif (gauche) et par sélection adaptative HV entre un filtre horizontal et vertical (droite).

### HV - Sélection entre un filtre horizontal et vertical - Fig. 6.6

Cette expérimentation adaptative met en pratique le critère de décision basé sur la comparaison de deux seminormes, en utilisant le contre-exemple de la Proposition 6 de la section 6.2. Les coefficients des filtres de mise à jour sont choisis comme décrit par l'équation (6.13), c'est à dire  $\mathbf{b}_d = (\mu_d, \eta_d, \mu_d, \eta_d)^T$  pour  $d = \{0, 1\}$  avec  $\mu_0 = \eta_1 = 0$  et  $\mu_1 = \eta_0 = 1/4$ . Les conditions de la Proposition 6 sont ainsi satisfaites. Cette expérimentation est nommée HV et revient à effectuer durant la mise à jour et pour chaque pixel, une sélection entre un filtre horizontal et un filtre vertical.

La partie droite de la Fig. 6.6 illustre le schéma adaptatif HV appliqué à la décomposition d'une image synthétique. On remarque que l'approximation possède des contours plus nets que dans le cas isotrope. De plus, les sous-bandes de détail paraissent plus "creuses" et seront plus simple à coder pour un codeur emboîté.

Nous avons détaillé les sous-bandes issues de la décomposition HV d'une image synthétique en Fig. 6.7, située en haut à gauche. La carte de décision correspondante est

présentée à sa droite, où les pixels blancs décrivent les régions dont le gradient horizontal est supérieur au gradient vertical. Le filtre de mise à jour vertical sera donc utilisé sur ces régions. Les images d'approximation et de détail horizontal sont présentées sur la deuxième ligne. Enfin, l'image de détail diagonale HV est illustrée en dernière ligne.

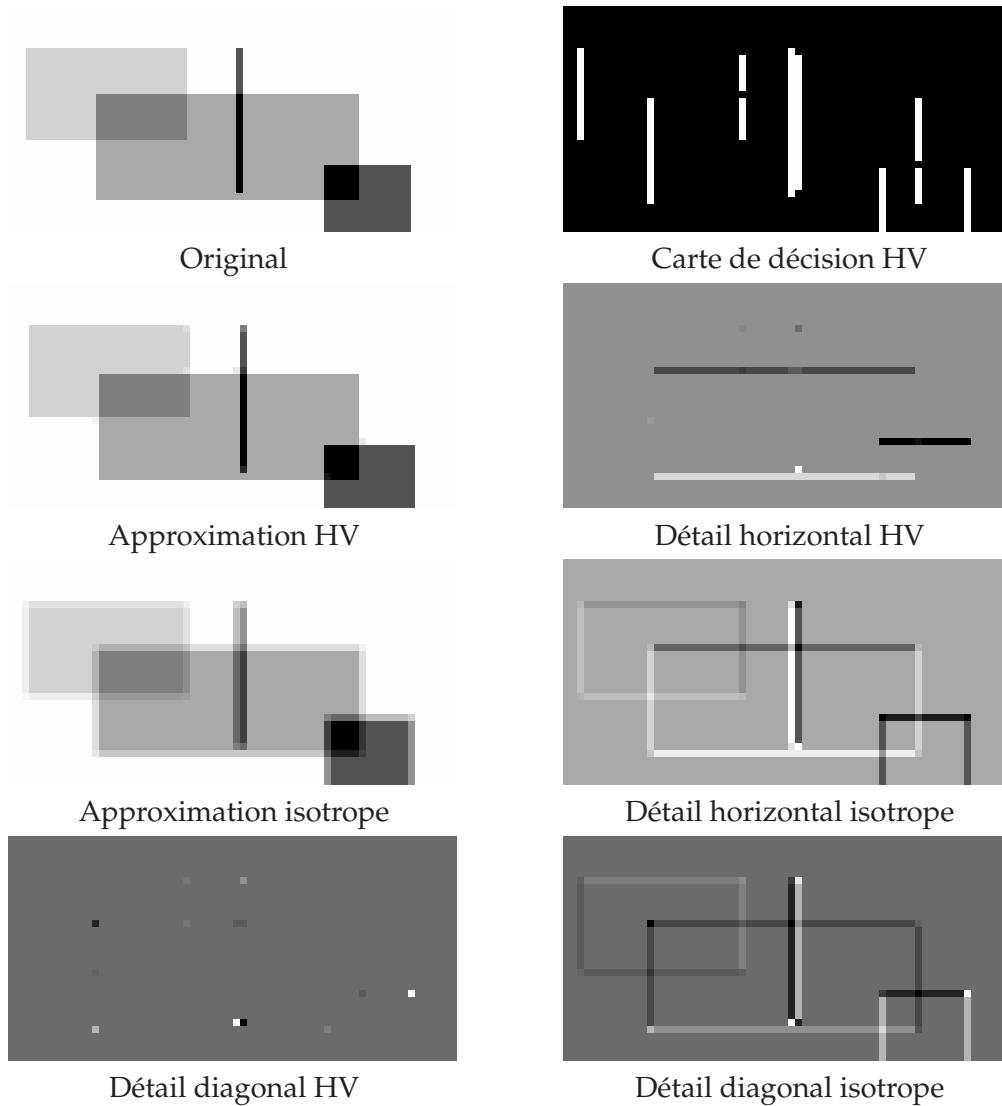


FIG. 6.7 – Sous-bandes mises en jeu dans une décomposition multirésolution par filtrage adaptatif HV et comparées à celles issues d'une décomposition isotrope non-adaptative.

Nous comparons ce schéma de décomposition à la transformée isotrope non-adaptative, où un filtrage isotropique est effectuée dans les directions verticales et horizontales (ceci revient à prendre  $\mu = \eta = 1/8$ ). Les images d'approximation et de détail horizontal sont présentées dans la troisième ligne de la Fig. 6.7, tandis que l'image de détail diagonal occupe la position droite de la dernière ligne. Nous observons clairement que les images d'approximation obtenues dans le cas adaptatif HV préservent les contours présents dans l'image originale, contrairement au cas isotrope non-adaptatif. Par conséquent, les images de détail obtenues dans le cas adaptatif 'capturent' de façon plus compacte les contours que dans le cas non-adaptatif.

### HVDD - Sélection entre un filtre horizontal, vertical et 2 diagonaux - Fig. 6.8

Dans cette expérimentation nommée HVDD, le critère de décision est basé sur la comparaison de 4 seminormes, afin d'illustrer les résultats théoriques de la section 6.3. Nous considérons les seminormes  $p_i(\mathbf{v}) = |\mathbf{a}_i^T \mathbf{v}|$  définies pour  $i = 0, \dots, 3$  par :

$$\mathbf{a}_0 = (1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$$

$$\mathbf{a}_1 = (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$$

$$\mathbf{a}_2 = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0)^T$$

$$\mathbf{a}_3 = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1)^T$$

correspondant respectivement aux directions horizontales, verticales et aux directions diagonales. Pour assurer la reconstruction parfaite, nous utilisons les filtres de mise à jour  $\mathbf{b}_i = \frac{1}{4}\mathbf{a}_i$  (et donc  $\beta_i = 1/2$ ) pour  $i = 0, \dots, 3$ .

Conformément à la section 6.3, ce critère de décision revient à filtrer l'image selon sa direction de plus faible gradient. La partie gauche de la Fig.6.8 montre une image originale et les partitions de la carte de décisions obtenues lors de cette expérimentation sur un niveau de décomposition. Les pixels blancs dénotent les régions où  $d = 1$  (détails verticaux, en haut à droite),  $d = 2$  (détails diagonaux, en bas à gauche) et  $d = 3$  (détails diagonaux, en bas à droite). La carte de décision associée à  $d = 0$  (détails horizontaux, non représentée) se déduit par complémentarité de l'union des autres cartes.

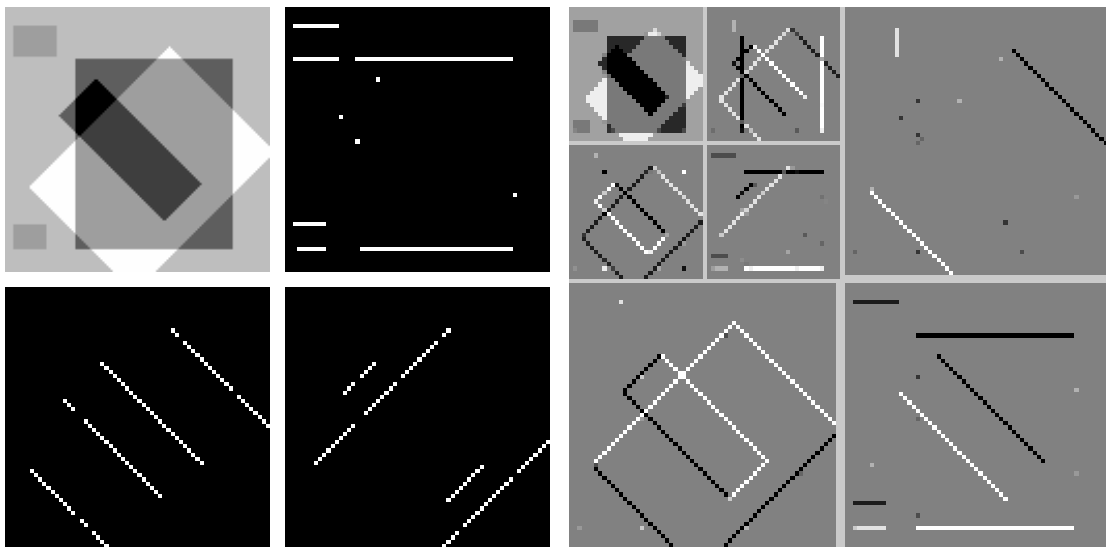


FIG. 6.8 – Image originale et cartes de décision associée à l'expérimentation HVDD (gauche). Décomposition HVDD sur un niveau spatial (droite).

La partie droite de la Fig. 6.8 illustre la décomposition adaptative HVDD d'une l'image sur deux niveaux. Comme dans le cas d'une décomposition dyadique classique, on observe les sous-bandes d'approximation et les sous-bandes de détail horizontal, vertical et diagonal des deux niveaux de décomposition.

En comparant cette décomposition avec celle obtenue dans le cas non-adaptatif isotrope de la Fig. 6.6, on observe que les contours sont mieux préservés dans l'image d'approximation. La carte de décision associée à ce schéma est ainsi capable de distinguer

parmi les quatre directions, laquelle est la plus adaptée pour appliquer le filtrage passe-bas de mise à jour. Ceci permet d'éviter un gommage des contours dans les images d'approximation et conduit à des images de détail contenant moins de coefficients, laissant ainsi entrevoir une efficacité de codage accrue.

### HVI - Sélection entre un filtre horizontal, vertical et isotrope - Fig. 6.10

Dans cette expérimentation nommée HVI, nous nous proposons d'utiliser des filtres de mise à jour orientés dans les directions horizontale, verticale et isotrope. Ceci revient ainsi à comparer les 3 seminormes  $p_i(\mathbf{v}) = |\mathbf{a}_i^T \mathbf{v}|$ , définies pour  $i = 0, \dots, 2$  par :

$$\mathbf{a}_0 = (1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$$

$$\mathbf{a}_1 = (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)^T$$

$$\mathbf{a}_2 = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)^T$$

correspondant respectivement aux directions horizontale, verticale et isotrope, c'est à dire dans le sens horizontal *et* vertical. Comme dans le cas précédent, cette expérimentation revient à filtrer l'image dans la direction possédant le plus faible gradient.

Afin d'assurer la reconstruction parfaite, nous utilisons encore les coefficients  $\beta_i = 1/2$  pour  $i = 0, \dots, 2$ , conduisant ainsi à utiliser les filtres  $\mathbf{b}_i = \frac{1}{4}\mathbf{a}_i$  pour  $i = 0, 1$  et  $\mathbf{b}_2 = \frac{1}{8}\mathbf{a}_2$ .

Nous illustrons en Fig. 6.9 les partitions de la carte de décision pour  $d = 0$  (à gauche) et  $d = 1$  (à droite). La décision  $d = 3$  (non-représentée) se déduit par complémentarité et désigne les régions qui subiront un filtrage isotrope. La partie droite de la Fig. 6.10 montre la décomposition multirésolution sur deux niveaux obtenue avec ce critère de décision. Comparée avec l'expérimentation précédente, on observe une approximation plus floutée et des images de détail contenant plus de coefficients, particulièrement dans les directions diagonales.

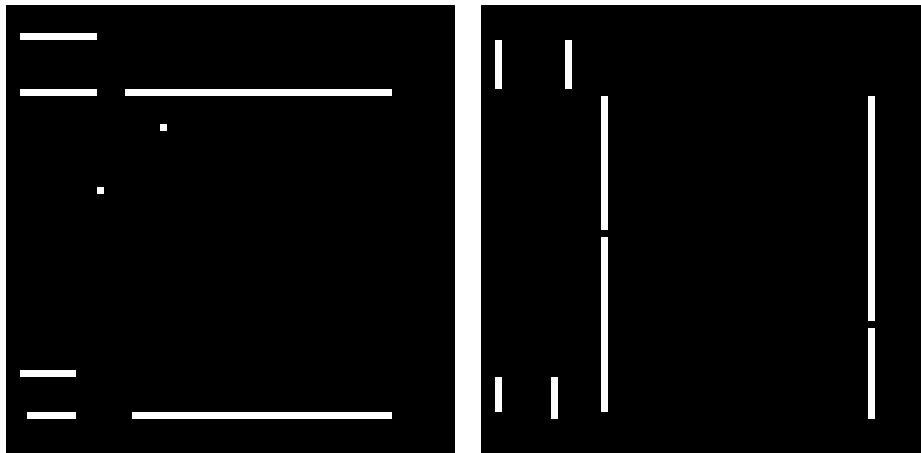


FIG. 6.9 – Partitions de la carte de décision associées à l'expérimentation HVI.

### HV+TC - Sélection entre un filtre horizontal et vertical + TC - Fig. 6.10

Cette expérimentation correspond à l'Exemple 4, où nous utilisons un critère de décision combinant la comparaison de deux seminormes avec le critère de seuil TC. Afin

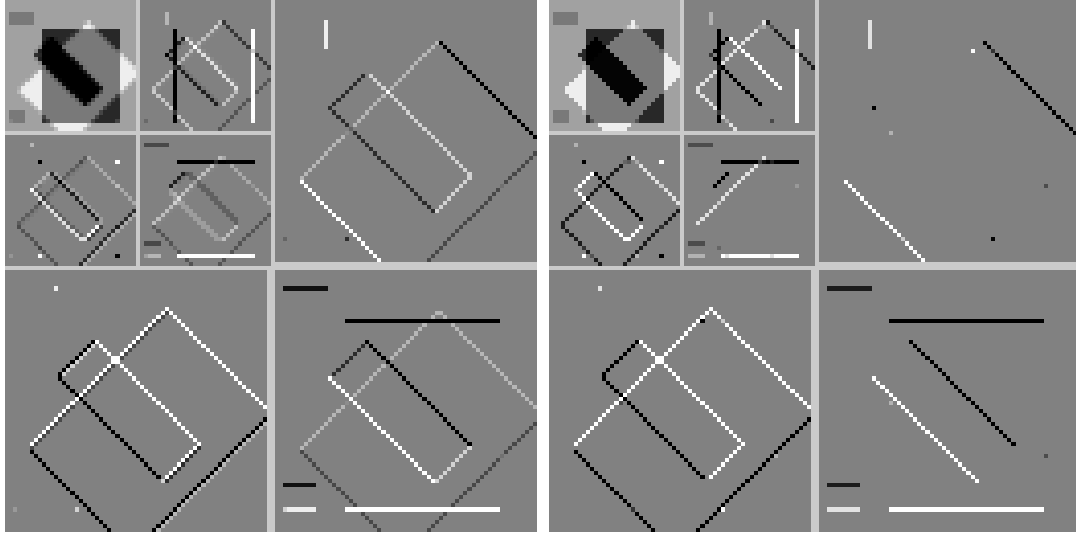


FIG. 6.10 – Décomposition par sélection adaptative entre un filtre horizontal, vertical et isotrope HVI (gauche) et par sélection adaptative HV + TC entre un filtre horizontal et vertical, combiné à un critère de seuil (droite).

d'assurer la reconstruction parfaite, nous utilisons les filtres de mise à jour  $\beta_0 = \beta_2 = 1/2$  et  $\beta_1 = \beta_3 = 0$ . En prenant l'image originale utilisée dans les expérimentations précédentes, nous illustrons la décomposition obtenue dans la partie droite de la Fig. 6.10. On remarque que les images de détail contiennent légèrement moins de coefficients que lors des expérimentations précédentes HVDD (Fig 6.8, droite) et HVI (Fig 6.10, gauche).

### HVHV+TC - Sélection entre quatre filtres + TC - Fig. 6.11

Nous souhaitons désormais utiliser un critère combinant la comparaison de deux seminormes avec le critère de seuil TC appliqué à deux autres seminormes, afin d'illustrer les résultats théoriques de la section 6.4. Le critère de décision s'écrit alors :

$$\begin{aligned} p_0(\mathbf{v}) \leq p_1(\mathbf{v}) \text{ et } p_2(\mathbf{v}) \leq T_0 &\Leftrightarrow d = 0 \\ p_0(\mathbf{v}) \leq p_1(\mathbf{v}) \text{ et } p_2(\mathbf{v}) > T_0 &\Leftrightarrow d = 1 \\ p_0(\mathbf{v}) > p_1(\mathbf{v}) \text{ et } p_3(\mathbf{v}) \leq T_1 &\Leftrightarrow d = 2 \\ p_0(\mathbf{v}) > p_1(\mathbf{v}) \text{ et } p_3(\mathbf{v}) > T_1 &\Leftrightarrow d = 3 \end{aligned}$$

où chaque seminorme  $p_i(\mathbf{v}) = |\mathbf{a}_i^T \mathbf{v}|$  est définie par son vecteur  $\mathbf{a}_i$  associé :  $\mathbf{a}_0 = (1, 0, 1, 0)^T$ ,  $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 0, 1)^T$ ,  $\mathbf{a}_2 = (1, 1/2, 1, 1/2)^T$  et  $\mathbf{a}_3 = (1/2, 1, 1/2, 1)^T$ . Nous choisissons des seuils identiques  $T_0 = T_1$  et les filtres de mise à jour suivants :

$$\mathbf{b}_0 = \frac{1}{4}\mathbf{a}_2, \quad \mathbf{b}_2 = \frac{1}{4}\mathbf{a}_3$$

correspondant resp. à un filtrage à prédominance horizontale et verticale, et les filtres  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_3 = \mathbf{0}$ , impliquant qu'aucun filtrage ne sera effectué.

La décomposition sur deux niveaux obtenue par ce schéma est illustrée sur la partie gauche de la Fig. 6.11. Il apparaît qu'elle est visuellement indistinguable de celle obtenue dans le cas Laplacien adaptatif mais présente un peu moins de coefficients de détail que lors des expérimentations précédentes.

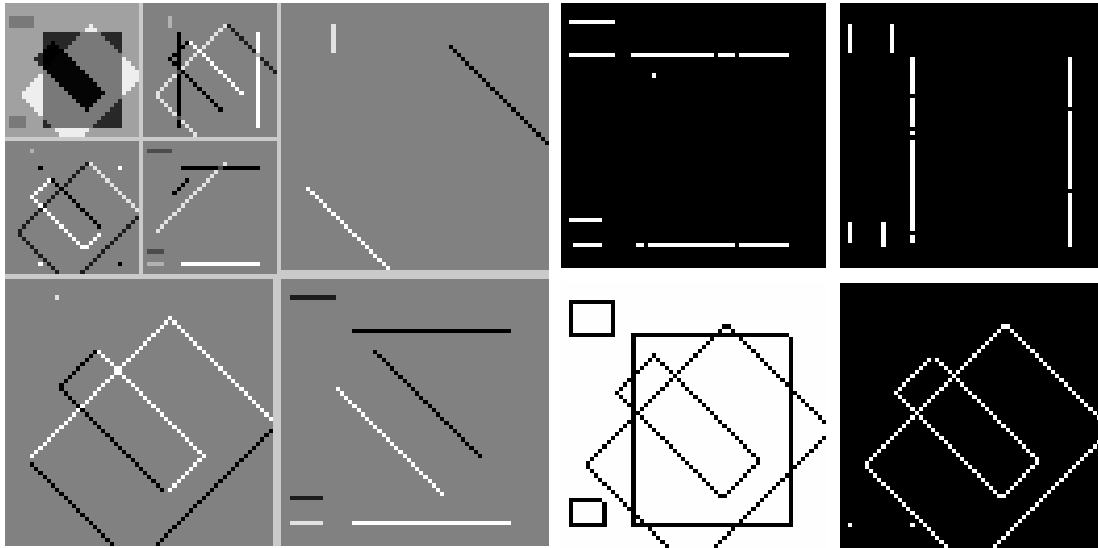


FIG. 6.11 – Décomposition par sélection adaptative HVHV + TC entre quatre filtres, combinée à un critère de seuil (droite). Cartes de décisions issues de la décomposition adaptative HVI + TC par sélection entre le filtre horizontal, vertical et isotrope, combinée à un critère de seuil (gauche).

#### HVI+TC - Sélection entre trois filtres + TC - Fig. 6.11

On combine ici le critère de sélection utilisé dans l'expérimentation HVI avec le critère de seuil TC, de telle manière qu'aucun filtrage ne soit appliqué si une des seminormes  $p_i$  est supérieure à un seuil donné.

La partie droite Fig. 6.11 montre les cartes de partition obtenues pour la décision  $d = 0$  (en haut à droite),  $d = 2$  (en haut à gauche),  $d = 4$  (en bas à gauche) et l'union des partitions associées aux décisions  $d = i$  pour  $i = 1, 3, 5$  (en bas à droite). Cette dernière correspond aux régions où aucun filtrage ne sera effectué.

#### 6.5.3 Efficacité de codage sans perte

Afin d'évaluer l'efficacité de codage réelle apportée par nos transformées adaptatives, nous considérons dans un premier temps un ensemble d'images synthétiques sur lesquelles nous réalisons les expérimentations décrites précédemment. Nous présentons alors des résultats concernant l'entropie des décompositions et procédons à des simulations réelles de codage sans perte. Dans un deuxième temps, nous appliquons le même protocole expérimental sur un autre ensemble test, constitué cette fois d'images naturelles.

Dans ces simulations, nous utilisons un schéma de prédiction fixe symétrique, comparable à celui utilisé dans le filtre biorthogonal 5/3 :

$$\begin{aligned} y'_h(\mathbf{n}) &= y_h(\mathbf{n}) - (x'(n+1, m) + x(\mathbf{n}))/2 \\ y'_v(\mathbf{n}) &= y_v(\mathbf{n}) - (x'(n, m+1) + x(\mathbf{n}))/2 \\ y'_d(\mathbf{n}) &= y_d(\mathbf{n}) - (x'(n, m+1) + x(\mathbf{n}))/2 - y'_h(\mathbf{n}) - y'_v(\mathbf{n}) \end{aligned}$$

où  $\mathbf{n}$  désigne le pixel d'indice spatial  $(n, m)$ .



L'entropie du premier ordre des décompositions est calculée par la relation :

$$h = 2^{-2K} H(x^K) + \sum_{k=1}^K 2^{-2k} \sum_{j=1}^3 H(y_{b_j}^k)$$

où  $K$  est le nombre de niveaux de décomposition et  $H(x)$  dénote l'entropie du premier ordre de l'image  $x$ .

### Images synthétiques

Nous considérons l'ensemble test d'images synthétiques illustré en Fig. 6.12.

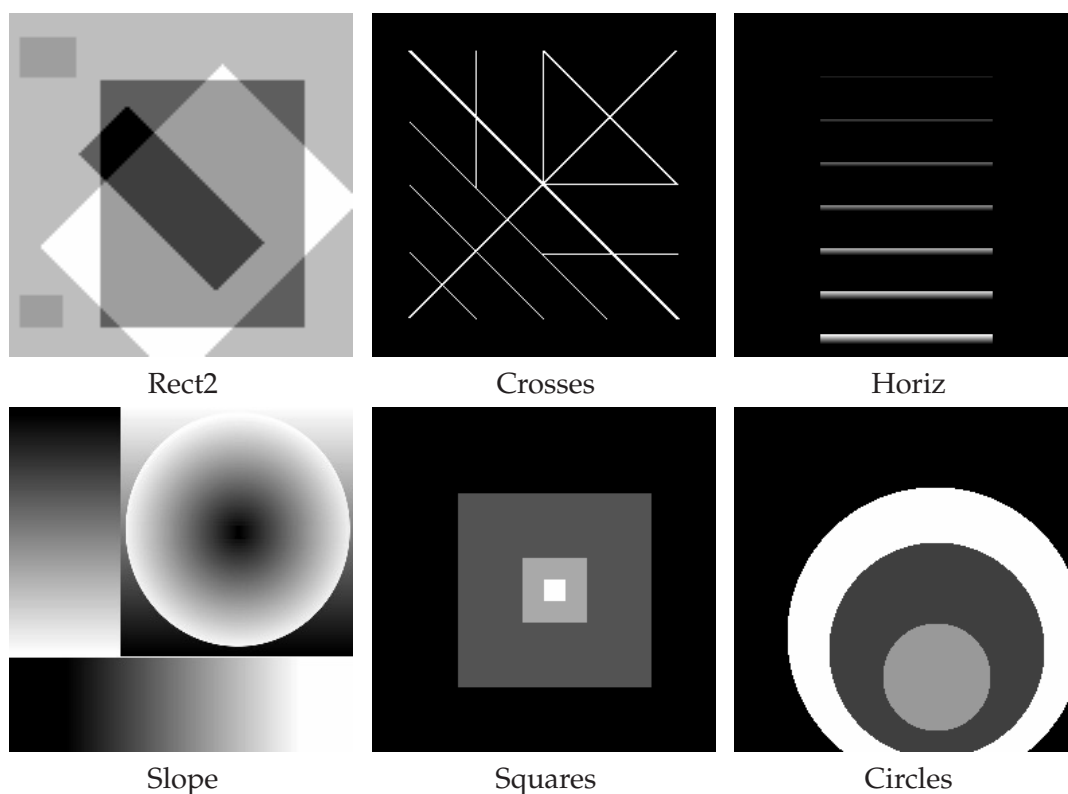


FIG. 6.12 – Ensemble test d'images synthétiques.

Le Tab.6.1 présente les valeurs d'entropie obtenues lors de la décomposition des images test sur deux niveaux de résolution, par les expérimentations décrites précédemment. La mention "Original" indique l'entropie originale des images non transformées. L'expérimentation "5/3" correspond à la transformée 5/3 non-adaptative, entière et séparable du codec JPEG-2000 en mode sans perte. Nous évaluons de plus dans le Tab. 6.2 le débit nécessaire à encoder ces images sans perte au moyen du codec d'image EZBC [60], décrit en section 1.2.4.

Une première observation pourrait être la constatation que les entropies minimales sont atteintes avec le filtre Laplacien adaptatif et les décompositions combinant un filtrage directionnel et ayant la possibilité de ne pas filtrer. Dans le cas de l'image 'Horiz', le filtre Laplacien n'est pas une bonne alternative et les expérimentations possédant un opérateur de filtrage horizontal donnent des entropies plus faibles. Concernant l'image

'Slope' où les bords ne sont pas bien définis, la décomposition HVHV+TC donne les meilleurs résultats, suivie par le filtre Laplacien adaptatif.

Les débits présentés dans le Tab. 6.2 sont assez consistants avec les entropie précédemment obtenues. Une remarque intéressante concerne les expérimentations HVHV+TC et HVI+TC qui conduisent à des débits plus faibles que le filtre Laplacien, bien que ces trois transformées mènent à des entropies très proches. La coïncidence des débits pour le filtre Laplacien et l'expérimentation HVI+TC est due au fait que cette dernière est une combinaison d'un filtre Laplacien et d'une sélection de filtres horizontal et vertical.

	Rect2	Crosses	Horiz	Slope	Squares	Circles
Original	2.016	0.188	0.449	7.517	1.077	1.781
Isotrope	1.257	0.933	0.877	2.210	0.441	0.859
Laplacien	<b>0.428</b>	<b>0.375</b>	0.566	2.035	<b>0.187</b>	<b>0.366</b>
HV	0.783	0.689	0.356	2.132	0.192	0.597
HVDD	0.498	0.399	0.356	2.184	0.193	0.514
HVI	0.785	0.689	0.357	2.111	0.193	0.596
HV+TC	<b>0.428</b>	<b>0.375</b>	0.351	2.113	<b>0.187</b>	<b>0.366</b>
HVHV+TC	<b>0.428</b>	<b>0.375</b>	0.560	<b>1.970</b>	<b>0.187</b>	<b>0.366</b>
HVI+TC	<b>0.428</b>	<b>0.375</b>	0.351	2.048	<b>0.187</b>	<b>0.366</b>
5/3	1.757	1.056	<b>0.318</b>	2.133	0.257	0.964

TAB. 6.1 – Mesures d'entropies (en bpp) en utilisant 2 niveaux de décomposition.

	Rect2	Crosses	Horiz	Slope	Squares	Circles
Isotrope	1.423	0.927	0.417	1.195	0.270	0.822
Laplacien	0.719	<b>0.369</b>	0.289	1.064	0.136	<b>0.483</b>
HV	1.084	0.692	0.238	1.095	0.109	0.644
HVDD	0.800	0.409	0.238	1.109	0.109	0.588
HVI	1.077	0.748	0.208	1.102	0.138	0.651
HV+TC	0.756	0.385	0.234	1.084	0.103	0.489
HVHV+TC	0.823	0.403	0.276	<b>1.011</b>	<b>0.101</b>	0.527
HVI+TC	<b>0.718</b>	<b>0.369</b>	<b>0.204</b>	1.086	0.136	<b>0.483</b>
5/3	1.714	1.077	0.216	1.350	0.135	0.874

TAB. 6.2 – Débits de codage sans perte (en bpp) en utilisant 2 niveaux de décomposition.

### Images naturelles

Nous considérons désormais l'ensemble test d'images naturelles illustré en Fig.6.13.

Les Tabs. 6.3 et 6.4 présentent les entropies obtenues lors des expérimentations précédentes pour  $K = 2$  et  $K = 4$  niveaux de décompositions sur l'ensemble d'images naturelles. Nous remarquons que l'expérimentation HVHV + TC semble afficher les meilleurs résultats. De plus, nous observons que les expérimentations effectuées avec 4 niveaux de décomposition fournissent une représentation plus compacte que les décompositions n'utilisant que 2 niveaux.

Les débits nécessaires à l'encodage sans perte de notre ensemble test d'images naturelles sont présentés dans les Tab. 6.5 et 6.6. Encore une fois, les résultats sont cohérents

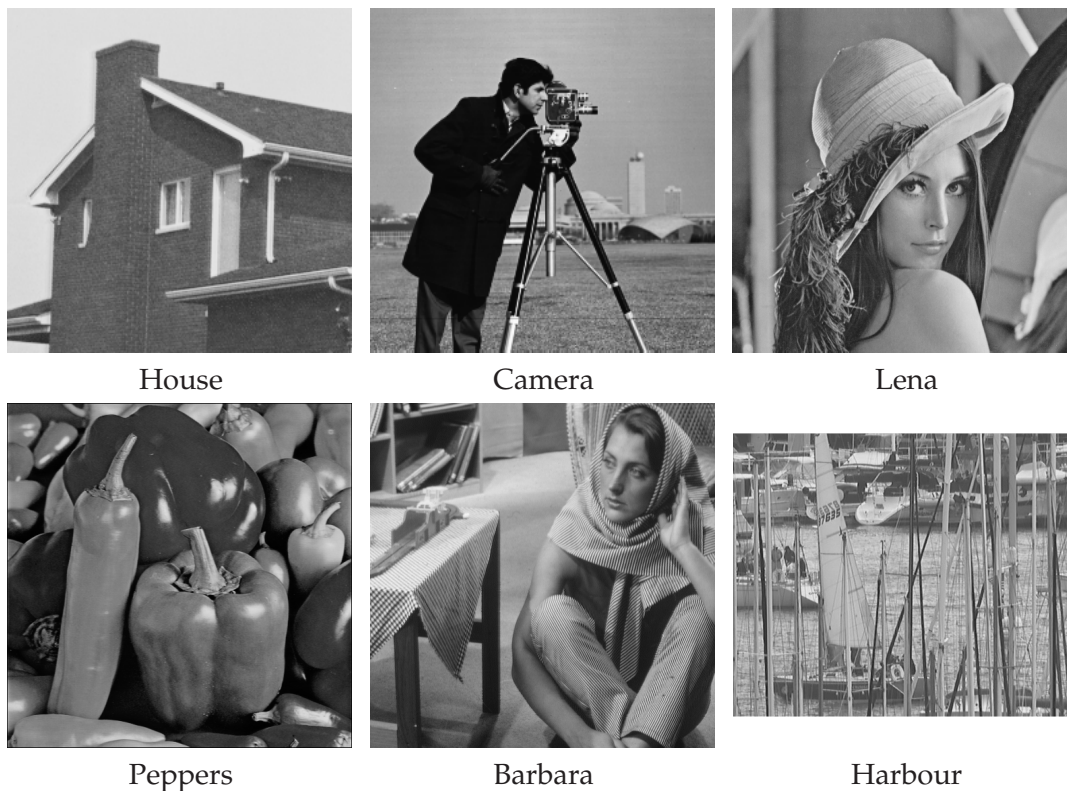


FIG. 6.13 – Ensemble test d'images naturelles.

avec les entropies observées et l'expérimentation HVHV + TC donne les meilleurs résultats de codage.

Le filtre adaptatif Laplacien donne des résultats moins bons que le schéma isotrope non-adaptatif sur les images *Lena* et *Barbara*. Dans les régions texturées, il est probable que la carte de décision associée à ce filtre oscille entre 0 et 1, laissant l'avantage au filtre uniforme.

	House	Camera	Lena	Peppers	Barbara	Harbour
Original	6.232	7.009	7.445	7.402	7.632	7.305
Isotrope	4.258	4.479	4.099	3.892	5.021	4.613
Laplacien	4.220	4.450	4.098	3.834	5.026	4.592
HV	4.363	4.545	4.211	3.931	5.097	4.593
HVDD	4.396	4.582	4.247	3.949	5.156	4.592
HVI	4.267	4.462	4.121	3.850	5.019	4.515
HV+TC	4.363	4.550	4.211	3.934	5.101	4.593
<b>HVHV+TC</b>	<b>4.052</b>	<b>4.300</b>	<b>3.917</b>	<b>3.673</b>	<b>4.857</b>	<b>4.436</b>
HVI+TC	4.267	4.469	4.121	3.851	5.019	4.515
5/3	4.633	4.869	4.655	4.071	5.252	4.476

TAB. 6.3 – Mesures d'entropies (en bpp) en utilisant 2 niveaux de décomposition.

Comme les exemples et les simulations le laisse présager, nos schémas de décomposition adaptatifs laissent une grande liberté dans le choix des règles de décision. De plus,

	House	Camera	Lena	Peppers	Barbara	Harbour
Isotrope	4.139	4.319	3.926	3.730	4.864	4.511
Laplacien	4.099	4.291	3.927	3.670	4.873	4.496
HV	4.257	4.403	4.051	3.779	4.958	4.500
HVDD	4.299	4.446	4.095	3.801	5.035	4.501
HVI	4.154	4.311	3.954	3.690	4.783	4.415
HV+TC	4.257	4.409	4.051	3.782	4.965	4.500
HVHV+TC	<b>3.913</b>	<b>4.123</b>	<b>3.727</b>	<b>3.493</b>	<b>4.692</b>	<b>4.328</b>
HVI+TC	4.154	4.318	3.954	3.691	4.874	4.415
5/3	4.562	4.772	4.346	3.954	5.146	4.418

TAB. 6.4 – Mesures d’entropies (en bpp) en utilisant 4 niveaux de décomposition.

	House	Camera	Lena	Peppers	Barbara	Harbour
Isotrope	3.377	3.565	3.346	3.096	4.065	3.859
Laplacien	3.375	3.565	3.346	3.055	4.076	3.843
HV	3.489	3.684	3.505	3.169	4.180	3.771
HVDD	3.546	3.738	3.581	3.204	4.268	3.774
HVI	3.410	3.597	3.408	3.079	4.088	3.693
HV+TC	3.489	3.688	3.505	3.169	4.182	3.771
HVHV+TC	<b>3.134</b>	<b>3.349</b>	<b>3.079</b>	<b>2.822</b>	<b>3.858</b>	<b>3.662</b>
HVI+TC	3.410	3.603	3.408	3.079	4.090	3.693
5/3	4.229	4.445	4.157	3.785	4.639	4.002

TAB. 6.5 – Débits de codage sans perte (en bpp) en utilisant 2 niveaux de décomposition.

	House	Camera	Lena	Peppers	Barbara	Harbour
Isotrope	3.252	3.463	3.262	3.016	3.999	3.810
Laplacien	3.244	3.461	3.262	2.974	4.011	3.802
HV	3.387	3.597	3.430	3.095	4.115	3.727
HVDD	3.455	3.658	3.515	3.135	4.210	3.731
HVI	3.300	3.503	3.331	3.001	4.023	3.644
HV+TC	3.387	3.603	3.430	3.095	4.118	3.727
HVHV+TC	<b>3.015</b>	<b>3.221</b>	<b>2.985</b>	<b>2.731</b>	<b>3.776</b>	<b>3.613</b>
HVI+TC	3.299	3.508	3.331	3.001	4.026	3.644
5/3	4.190	4.400	4.122	3.751	4.607	3.987

TAB. 6.6 – Débits de codage sans perte (en bpp) en utilisant 4 niveaux de décomposition.

la variation des pondérations et des seuils mis en jeu dans les expérimentations permet d’imposer un filtre avec une direction privilégiée, par exemple. Enfin, bien que la modification des seuils et des pondérations influence l’entropie et les débits calculés lors de ces simulations, nous avons choisis nos paramètres de manière empirique et ne les avons pas optimisés. Il serait cependant intéressant de construire un algorithme d’estimation optimale des seuils utilisés dans ces expérimentations, par minimisation des débits de codage.

## 6.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons construit des décompositions adaptatives utilisant des cartes de décision multivaluées, capables de “discriminer” les événements géométriques présents dans une image. Ces décompositions sont basées sur des structures lifting où l’opérateur de mise à jour est modifié à chaque pixel, selon une décision prise en fonction d’un gradient local calculé sur l’image d’entrée. Les décisions ne sont pas transmises dans le flux compressé et nous avons déterminé les conditions nécessaires et suffisantes dans plusieurs cas pour que ces décisions soient retrouvées lors de la synthèse, permettant ainsi la reconstruction parfaite de l’image originale.

Plusieurs exemples et simulations ont été mis en œuvre pour illustrer les résultats théoriques obtenus et montrer l’intérêt pratique de ces structures adaptatives non-redondantes dans des applications de compression sans perte. Nos expérimentations ont été conduites avec le codec d’image fixe EZBC et nous avons comparé nos résultats avec la transformée fixe 5/3 entière utilisée dans JPEG-2000. Nous avons alors montré le gain en efficacité de codage important offert par nos structures de décomposition adaptatives.

---

