

Implémentation des modèles matériaux

IV.1 Introduction

Après l'adoption de deux approches pour la description du comportement des matériaux durant la mise en forme (cf. Chapitre2), des essais expérimentaux ont été réalisés pour l'identification des paramètres des différents modèles matériaux (cf. Chapitre3).

Ce chapitre présente d'une part, l'implémentation de chaque modèle matériau dans ABAQUS afin de simuler la mise en forme des deux alliages avec les deux procédés détaillés précédemment (cf. Chapitre1) et d'autre part, la méthode d'identification des paramètres des modèles matériaux et leur validation par simulation numérique des essais constitutifs (traction, traction-compression, relaxation et fluage).

IV.2 Modèle élasto-plastique

IV.2.1 Description du modèle

Ce modèle matériau a été développé dans le cadre de la première approche détaillée précédemment (cf. Chapitre2). Il repose sur la description d'un comportement élasto-plastique, indépendant de la vitesse de déformation. Le critère de plasticité anisotrope de Hu2005 est adopté afin de prendre en compte le fait que les tôles sont laminées. La fonction de charge de ce critère est donnée par l'équation (IV.1).

$$\begin{aligned} f = & X_1 (\sigma_{11} - \sigma_{33})^4 + X_2 (\sigma_{11} - \sigma_{33})^3 (\sigma_{22} - \sigma_{33}) + X_3 (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 \\ & + X_4 (\sigma_{11} - \sigma_{33}) (\sigma_{22} - \sigma_{33})^3 + X_5 (\sigma_{22} - \sigma_{33})^4 + X_6 (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) \\ & \times \left[(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 - (\sigma_{11} - \sigma_{33})(\sigma_{22} - \sigma_{33}) \right] + X_7 (\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)^2 - I = 0 \end{aligned} \quad (IV.1)$$

où X_i , $i=1 \dots 7$, sont les paramètres à identifier.

L'évolution mécanique du matériau durant l'écoulement plastique est décrite dans ce modèle par une loi polynomiale d'ordre 5 (équation (IV.2)) afin de représenter soit l'écrouissage isotrope soit l'adoucissement.

$$R = a_1 \varepsilon_p + a_2 \varepsilon_p^2 + a_3 \varepsilon_p^3 + a_4 \varepsilon_p^4 + a_5 \varepsilon_p^5 \quad (IV.2)$$

Avec ε_p la déformation plastique équivalente.

La bibliothèque constitutive d'ABAQUS est vaste, mais, elle ne contient pas le critère de plasticité anisotrope de Hu2005. Pour cela, un programme (subroutine UMAT) a été développé afin d'implémenter ce modèle matériau élasto-plastique dans ABAQUS.

IV.2.1.1 Implémentation du modèle dans ABAQUS

À chaque pas de temps ABAQUS fournit un incrément de déformation calculé à partir des états de contrainte et déformation obtenus au pas précédent. Après résolution du système d'équations

d'équilibre non-linéaire, l'incrément de contrainte est alors calculé en utilisant la subroutine UMAT (Figure IV-1).

Les figures ci-après représentent schématiquement l'algorithme contrôlant l'écoulement plastique. Celui-ci repose sur le principe du retour radial et a été implémenté, dans ABAQUS, via une subroutine UMAT 3D. Après une prédiction élastique basée sur l'incrément de déformation donné par ABAQUS, le retour sur la surface de charge s'effectue de manière itérative selon la normale à cette surface. L'algorithme utilise un formalisme implicite dont le critère de convergence est basé sur une valeur minimale d'un correcteur plastique. Le détail des équations et paramètres associés à la description du modèle élasto-plastique reposant sur le critère de Hu2005 est fourni en Annexe B, en particulier pour le calcul de la normale à la surface de charge et du correcteur plastique.

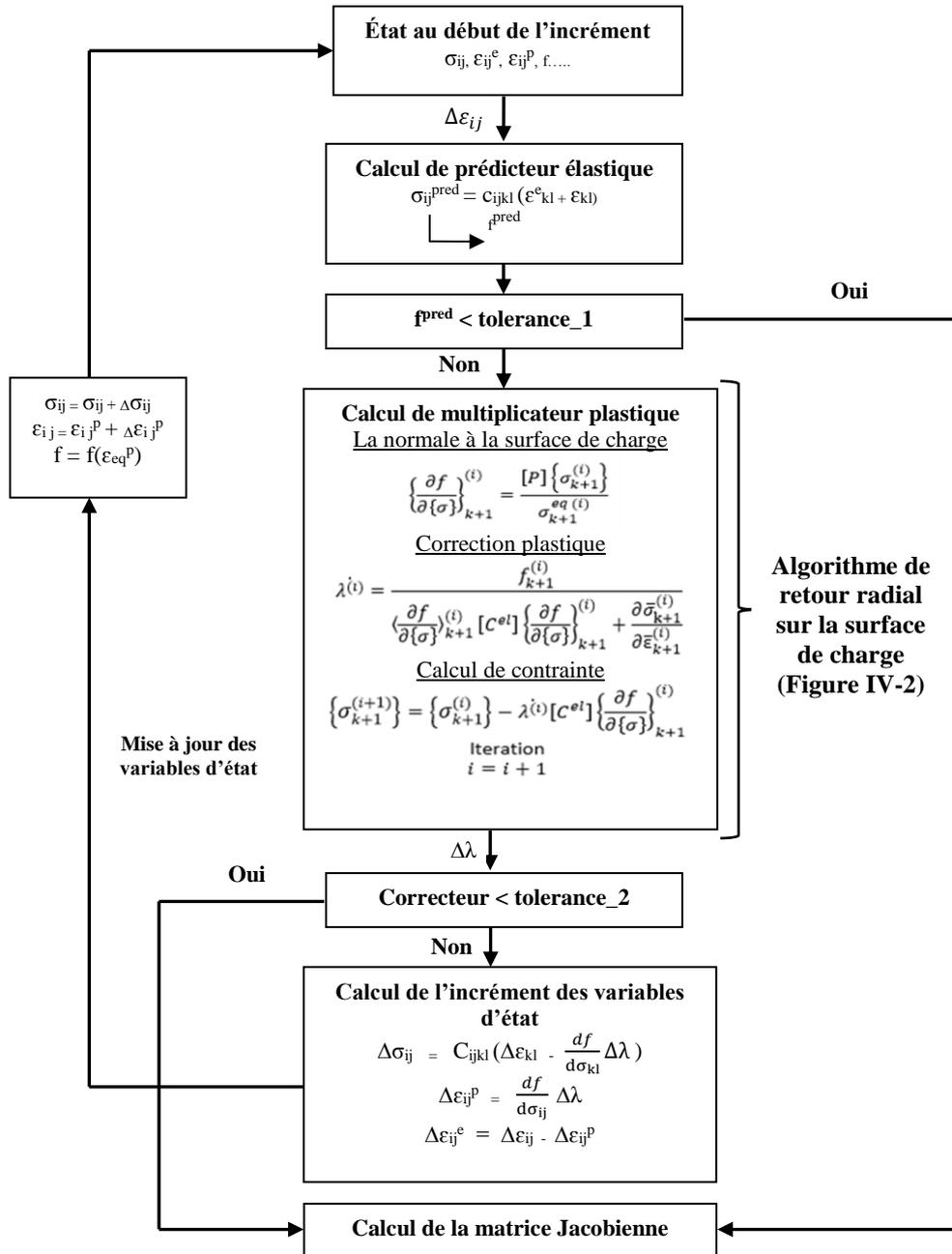


Figure IV-1 : Algorithme UMAT

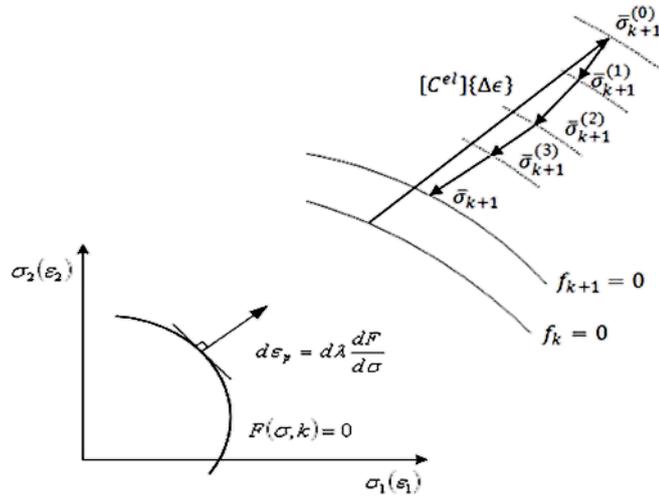


Figure IV-2 : Algorithme de retour radial

IV.2.1.2 Paramètres du modèle élasto-plastique

Ce modèle matériau contient 12 paramètres à identifier à partir des données issues d'essais de traction.

X_i	Équations	X_i	Équations
X_1	$\frac{1}{\sigma_0^4}$	X_5	$\frac{1}{\sigma_{90}^4}$
X_2	$-\frac{4R_0}{(1+R_0)\sigma_0^4}$	X_6	$\frac{16}{(1+R_{45})\sigma_{45}^4} - \frac{2}{\sigma_b^4}$
X_4	$-\frac{4R_{90}}{(1+R_{90})\sigma_{90}^4}$	X_7	$\frac{1}{\sigma_0^4} + \frac{16R_{45}}{(1+R_{45})\sigma_{45}^4}$
X_3	$\frac{1}{\sigma_b^4} - \frac{1}{\sigma_0^4} - \frac{1}{\sigma_{90}^4} + \frac{4R_0}{(1+R_0)\sigma_0^4} + \frac{4R_{90}}{(1+R_{90})\sigma_{90}^4}$		

Tableau IV-1 : Équations des paramètres matériau de Hu2005

Les sept paramètres du critère de plasticité anisotrope Hu2005 « X_i , $i=1..7$ » sont identifiés, pour chaque alliage, à partir des résultats des essais de traction suivant différentes directions de prélèvement (0° , 45° et 90°) et avec une vitesse de déformation de 10^{-2} s^{-1} . Comme indiqué dans le Tableau IV-1, les paramètres du critère sont déterminés à partir d'équations faisant intervenir les coefficients d'anisotropie et les limites d'élasticité. Toutefois, pour deux paramètres (X_3 et X_6), une contrainte équi-biaxiale est nécessaire. Elle est calculée à partir de l'équation (IV.3) donnée par Hu en 2005 (Hu, 2005).

$$\frac{R_0 - R_{90}}{(R_0 + R_{90})\sigma_b^4} = \frac{1 - R_{90}}{(1 + R_{90})\sigma_{90}^4} - \frac{1 - R_0}{(1 + R_0)\sigma_0^4} \quad (\text{IV.3})$$

Les cinq paramètres de la loi polynomiale « a_i , $i=1..5$ » sont identifiés, pour chaque matériau, à partir des résultats d'essais de traction réalisés selon la direction du laminage et avec une vitesse de déformation de $5 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$.

IV.2.2 Calibration du modèle matériau élasto-plastique

IV.2.2.1 Simulation des essais constitutifs

Dans le but de valider les paramètres identifiés, des essais constitutifs ont été simulés sous ABAQUS : il s'agit des essais de traction sur éprouvette plate (2050 et AW551) et des essais de traction-compression sur éprouvette cylindrique (2050).

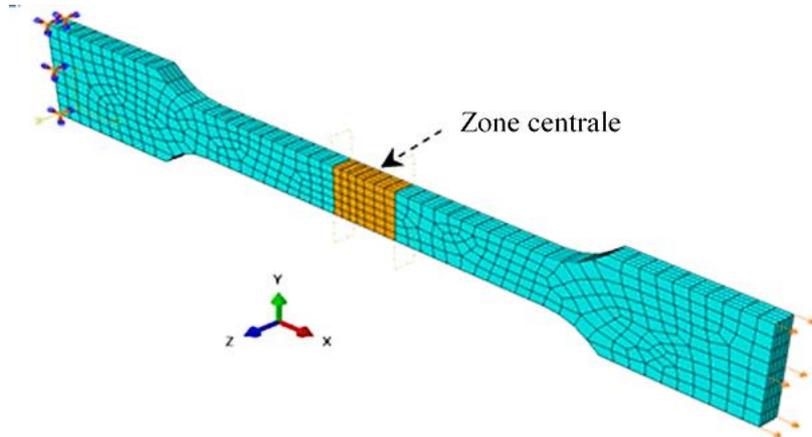


Figure IV-3 : Modèle numérique de l'éprouvette Gleeble pour l'alliage 2050

Des éléments C3D8 avec une intégration totale ont été utilisés. La taille de chaque élément dans les éprouvettes plates, est de 3x3x1mm et 3x3x0.5 pour, respectivement, l'alliage 2050 et l'alliage AW551. Ces dimensions mènent à 4 éléments dans l'épaisseur, comme illustré en Figure IV-3. Pour les éprouvettes cylindriques (non montrées ici), la taille de chaque élément est de l'ordre de 2 mm³.

La déformation de l'éprouvette est réalisée en imposant, sur un côté de l'éprouvette, un déplacement selon l'axe X tandis que l'autre côté demeure fixe. Le déplacement est réalisé de telle manière à assurer la bonne vitesse de déformation au sein du matériau.

Afin de reproduire au mieux la configuration expérimentale, dans laquelle seule la partie centrale de l'éprouvette est chauffée, deux comportements différents ont été employés dans l'éprouvette : le modèle élasto-plastique dans la zone centrale (en orange sur la figure) et un comportement élastique pour le reste de l'éprouvette.

La validation des paramètres identifiés s'effectue par comparaison des courbes expérimentales aux courbes issues de la simulation numérique. Se rajoute à cela une comparaison de ces résultats à ceux obtenus en utilisant un modèle standard d'ABAQUS, c.-à-d. un comportement élasto-plastique anisotrope décrit par une loi tabulée et le critère de Hill48. Pour ce dernier cas, deux jeux de paramètres ont été utilisés pour le critère de plasticité (Hill481 : paramètres identifiés avec la première méthode et Hill482 : paramètres identifiés avec la deuxième méthode (Tableau IV-2)).

Méthode d'identification	Équations utilisées pour l'identification des paramètres
1 ^{ère} méthode	$G + H = \left(\frac{R_0}{\sigma_0}\right)^2 = 1$; $G = \frac{1}{r_0+1}$; $F = \frac{H}{r_{90}}$; $N = \frac{(F+G)(2r_{45}+1)}{2}$
2 ^{ème} méthode	$G + H = \left(\frac{R_0}{\sigma_0}\right)^2 = 1$; $H = -\frac{1}{2} \left[\left(\left(\frac{R_0}{\sigma_{45}}\right)^2 \times \frac{2}{r_{45}+1} \right) - \left(\frac{R_0}{\sigma_{90}}\right)^2 - 1 \right]$; $F + H = \left(\frac{R_0}{\sigma_{90}}\right)^2$; $N = \frac{(F+G)(2r_{45}+1)}{2}$

Tableau IV-2 : Équations des paramètres matériau de Hill48

IV.2.2.2 Comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques pour l'alliage 2050

La comparaison des résultats expérimentaux et numériques pour des essais de traction (à 150°C) à différentes vitesses de déformation (5.10^{-3} , 10^{-2} et 10^{-1} s⁻¹) selon la direction de laminage (0°) est illustrée sur la Figure IV-4. Les contraintes sont normalisées en utilisant la limite d'élasticité expérimentale obtenue selon la direction de laminage (notée σ_0).

Quel que soit le modèle considéré (élasto-plastique (Hu2005), Hill481 et Hill482), une bonne prédiction du comportement de l'alliage est obtenue pour chaque vitesse de déformation. Cela s'explique par le fait que cet alliage n'est que faiblement viscoplastique à la température considérée et que, par conséquent, l'utilisation des données expérimentales à une vitesse de 5.10^{-3} s⁻¹ n'a que peu d'effet sur la qualité de la prédiction.

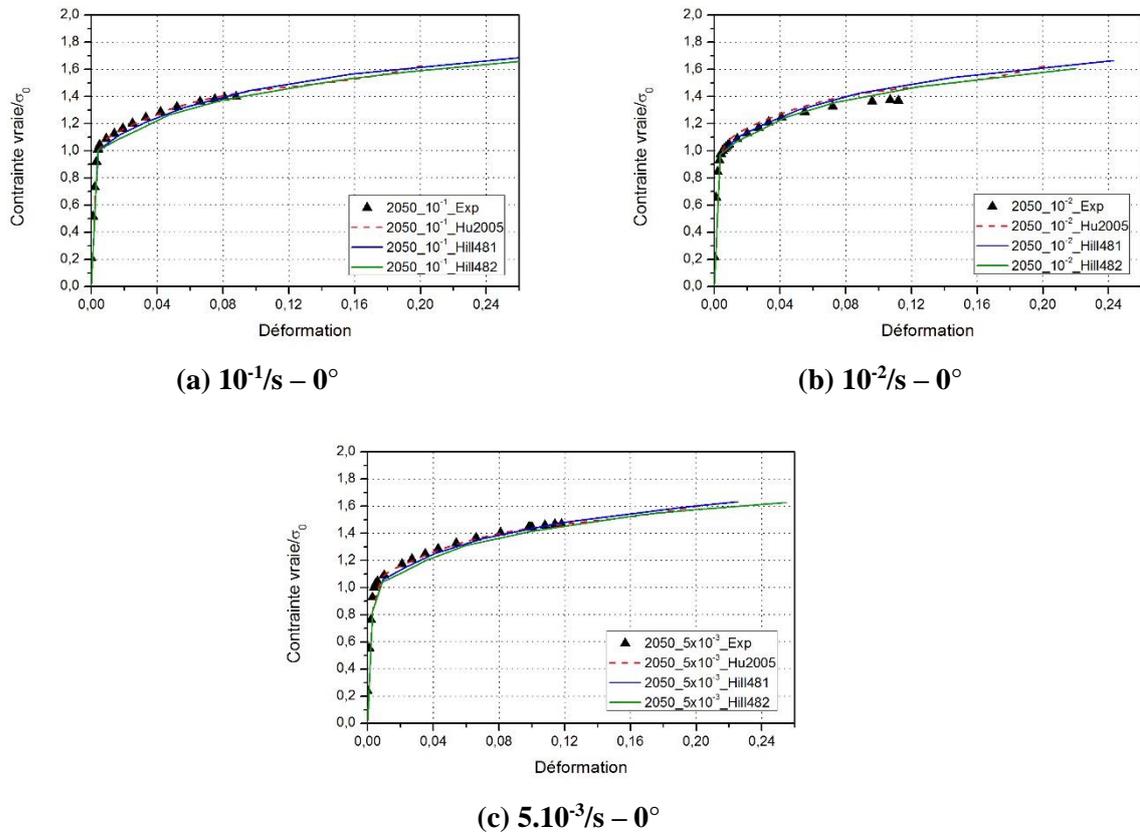


Figure IV-4 : Comparaison des données numériques obtenues avec le modèle élasto-plastique aux données expérimentales obtenues lors d'essais de traction à différentes vitesses de déformation sur l'alliage 2050

Afin d'étudier la capacité de chaque critère de plasticité à prédire le comportement anisotrope du matériau, une comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques d'essais de traction réalisés suivant différentes directions de prélèvement par rapport à la direction de laminage (0°, 45° et 90°) est présentée en Figure IV-5. Tous ces essais ont été effectués à une vitesse de déformation de 10^{-2} s⁻¹. La normalisation des contraintes est réalisée en utilisant la limite d'élasticité expérimentale obtenue selon la direction de laminage (σ_0).

Quelle que soit la direction de prélèvement de l'éprouvette, une bonne prédiction du comportement de l'alliage 2050 est obtenue avec le modèle matériau employant Hu2005 comme critère de plasticité anisotrope (élasto-plastique).

Le critère de Hill48 est, quant à lui, incapable de prédire le bon comportement du matériau étudié. L'erreur de prédiction varie entre 4% et 17% selon la direction de prélèvement et la méthode d'identification considérées.

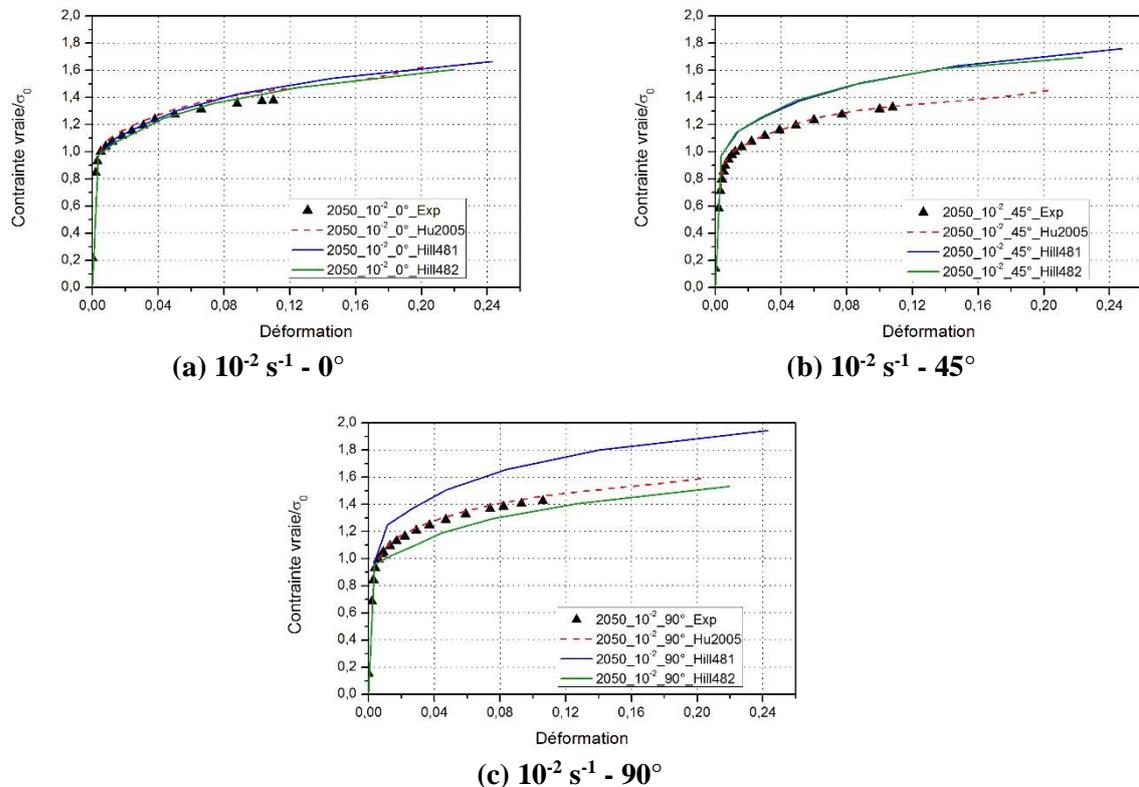


Figure IV-5 : Comparaison entre les résultats expérimentaux obtenus lors d'essais de traction sur l'alliage 2050 dans différentes directions et les résultats numériques obtenus avec le modèle élasto-plastique

Une comparaison des coefficients d'anisotropie et des limites d'élasticité dans différentes directions de prélèvement (0° , 45° et 90°) a été effectuée. Les données ont été normalisées soit par le coefficient d'anisotropie expérimental soit par la limite d'élasticité expérimentale obtenus selon la direction du laminage. La Figure IV-6 montre que le critère de plasticité Hu2005 (modèle élasto-plastique) semble mieux prédire l'anisotropie que Hill48. Toutefois, l'optimisation des paramètres du critère est à finaliser.

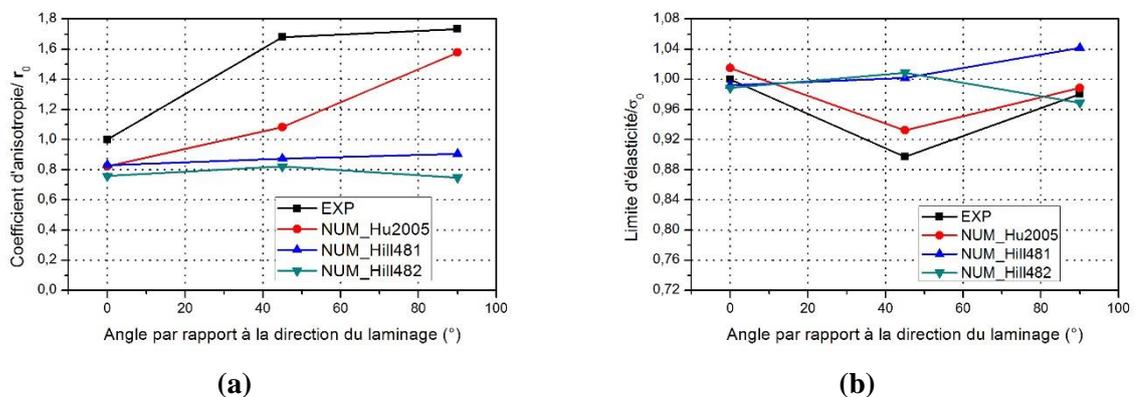
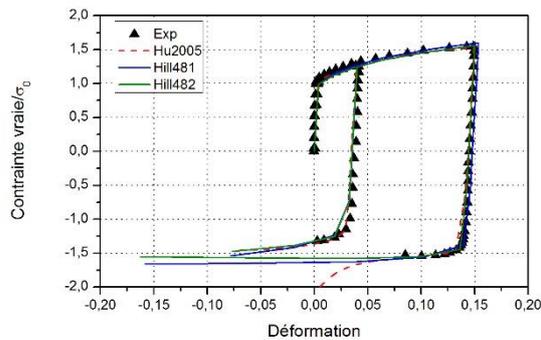


Figure IV-6 : Comparaison entre les coefficients d'anisotropie et les limites d'élasticité expérimentaux et numériques de l'alliage 2050 obtenus selon les différentes directions de prélèvement (0° , 45° et 90°)

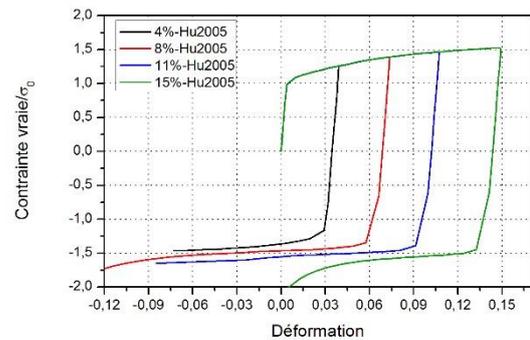
La comparaison des résultats expérimentaux et numériques des essais de traction-compression réalisés sur l'alliage 2050 (à 150°C) jusqu'à différents niveaux de déformation (4, 15 et 18%) est montrée en Figure IV-7. Tous ces essais ont été réalisés selon la direction de laminage (0°) et avec une vitesse de déformation de 10^{-2} s^{-1} . La normalisation de la contrainte est réalisée avec la limite d'élasticité expérimentale obtenue selon la direction de laminage (σ_0).

En ne se référant qu'à la Figure IV-7.a, une prédiction relativement bonne du comportement global de l'alliage 2050 est obtenue pour une déformation de 4% en utilisant les trois modèles matériau étudiés (élasto-plastique (Hu2005), Hill481 et Hill482). Pour les niveaux de déformation supérieurs et avec le modèle élasto-plastique, les contraintes divergent lors de l'inversement de la charge. La Figure IV-7.b montre que la divergence n'apparaît que lorsqu'une précharge supérieure à 11% est appliquée sur le matériau. Ceci s'explique par un niveau de déformation plastique équivalente cumulée qui dépasse les limites de validité de la loi d'érouissage isotrope. Ce point n'a pas été amélioré car les taux maximums de déformation mis en jeu pendant la mise en forme ne dépasseront pas 15%.

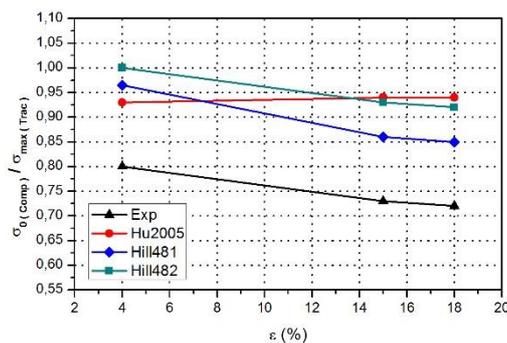
En traçant les courbes présentant le rapport entre la limite élastique en compression et la contrainte maximale en traction en fonction du niveau de déformation (Figure IV-7.c), il est possible de remarquer que les modèles matériau ne permettent pas de reproduire l'effet Bauschinger mis en évidence expérimentalement. L'erreur maximale est, en effet, de 23%, 17% et 21% en utilisant, respectivement, le modèle élasto-plastique (Hu2005), Hill481 et Hill482.



(a) $10^{-2}/\text{s} - 0^\circ - \epsilon_{\text{max}} = 4\% \text{ et } 15\%$



(b) $10^{-2}/\text{s} - 0^\circ - \epsilon_{\text{max}} = 4, 8, 11 \text{ et } 15\%$



(c) Effet Bauschinger

Figure IV-7 : Comparaison entre les résultats expérimentaux obtenus avec des essais de traction-compression sur l'alliage 2050 à différents niveaux de déformation et les résultats numériques obtenus avec le modèle élasto-plastique

IV.2.2.3 Comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques pour l'alliage AW551

La Figure IV-8 présente la comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques des essais de traction réalisés sur l'alliage AW551 (à 350°C) à différentes vitesses de déformation (5.10^{-3} , 10^{-2} et 10^{-1} s $^{-1}$) et suivant la direction de laminage (0°). La normalisation de la contrainte est réalisée en utilisant la limite d'élasticité expérimentale obtenue selon la direction de laminage (σ_0).

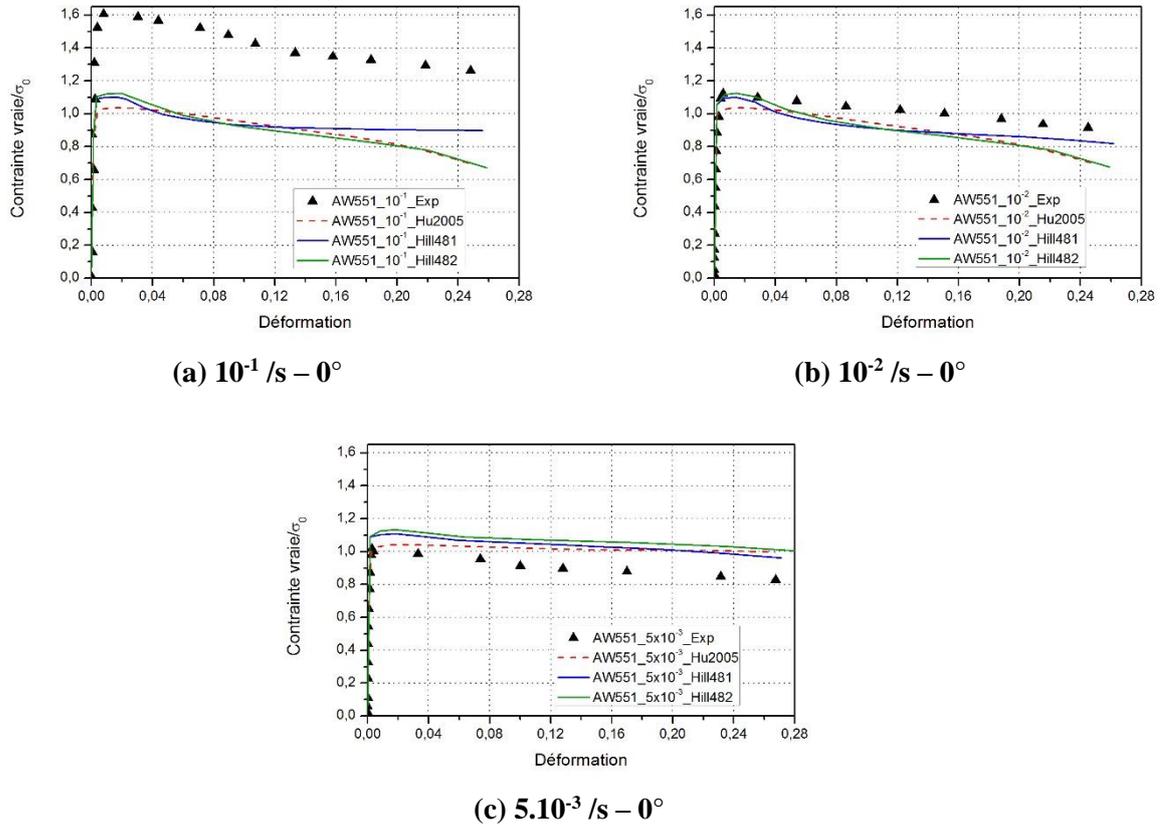
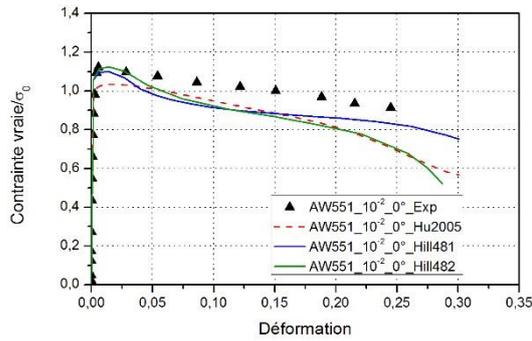


Figure IV-8 : Comparaison entre les résultats expérimentaux obtenus par des essais de traction sur l'alliage AW551 à différentes vitesses de déformation et les résultats numériques obtenus avec le modèle élasto-plastique

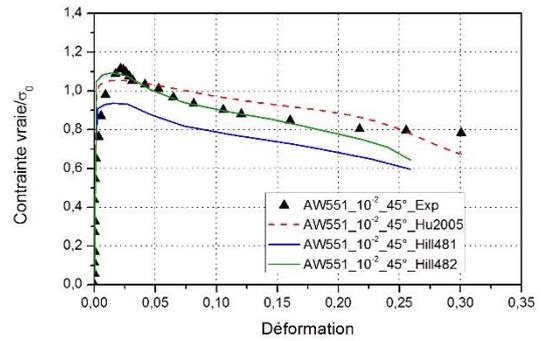
Une relativement bonne prédiction est obtenue pour les deux plus faibles vitesses de déformation avec les trois modèles matériau utilisés (élasto-plastique (Hu2005), Hill481 et Hill482) : l'erreur maximale ne dépasse pas 20%. Pour la grande vitesse de déformation, la prédiction est médiocre avec une erreur d'environ 40%. Ceci s'explique par la non-prise en compte de la dépendance du comportement du matériau à la vitesse de déformation avec le modèle élasto-plastique.

Une comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques des essais de traction dans différentes directions de prélèvement par rapport à la direction de laminage (0° , 45° et 90°) est montrée sur la Figure IV-9. Tous ces essais ont été effectués à une vitesse de déformation de 10^{-2} s $^{-1}$. La normalisation des contraintes est obtenue en utilisant la limite d'élasticité expérimentale selon la direction de laminage (σ_0). Cette comparaison permet de juger l'aptitude de chaque critère de plasticité à prédire le comportement anisotrope de l'alliage AW551.

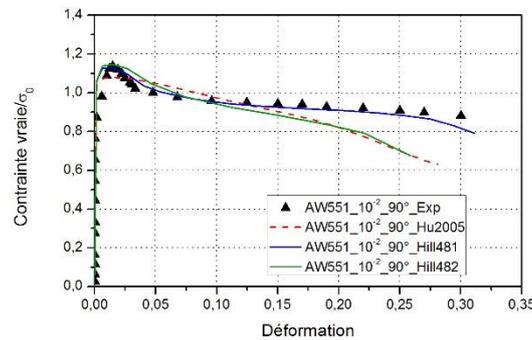
Quelle que soit la direction de prélèvement de l'éprouvette, une bonne prédiction du comportement de l'alliage AW551 est obtenue avec les trois modèles matériau. En effet, pour une déformation de 20%, l'erreur maximale trouvée est de 14.7%, 17% et 14.7% pour, respectivement, le critère de plasticité Hu2005, Hill481 et Hill482.



(a) $10^{-2} /s - 0^\circ$



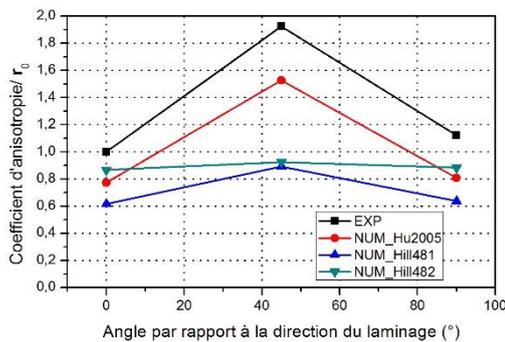
(b) $10^{-2} /s - 45^\circ$



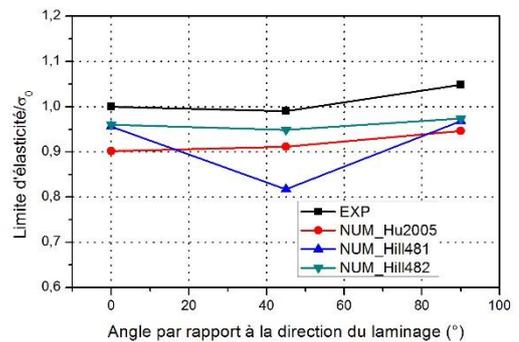
(c) $10^{-2} /s - 90^\circ$

Figure IV-9 : Comparaison entre les résultats expérimentaux obtenus lors d'essais de traction sur l'alliage AW551 suivant différentes directions et les résultats numériques obtenus avec le modèle élasto-plastique

Une comparaison des coefficients d'anisotropie et des limites d'élasticité dans différentes directions de prélèvement (0° , 45° et 90°) a été effectuée. Les coefficients d'anisotropie et les limites d'élasticité ont été normalisés respectivement par le coefficient d'anisotropie et la limite d'élasticité expérimentales obtenus selon la direction du laminage. La Figure IV-10 montre que le modèle élasto-plastique avec Hu2005 conduit à la meilleure prédiction du comportement anisotrope du matériau.



(a)



(b)

Figure IV-10 : Comparaison entre les coefficients d'anisotropie et les limites d'élasticité expérimentaux et numériques de l'alliage AW551 obtenus selon les différentes directions de prélèvement (0° , 45° et 90°)

IV.2.3 Bilan : Modèle élasto-plastique

Il est possible de constater que le modèle élasto-plastique conduit à : (i) une bonne prédiction du comportement anisotrope des deux alliages en utilisant Hu2005 comme critère de plasticité anisotrope, (ii) une bonne description du comportement de l'alliage 2050 pour chaque vitesse de déformation étudiée puisque celui-ci n'est que faiblement visqueux, (iii) une mauvaise prédiction de l'écroutissage cinématique de l'alliage 2050 et (iv) une mauvaise prédiction du comportement de l'alliage AW551 qui est sensible à la vitesse de déformation. Ces deux derniers points doivent être améliorés à travers l'introduction dans la UMAT d'un modèle d'écroutissage cinématique pour la prise en compte de l'effet Bauschinger et d'une loi viscoplastique permettant de représenter l'effet de la vitesse de déformation sur le comportement du matériau.

IV.3 Modèle élasto-viscoplastique

IV.3.1 Description du modèle

Ce modèle matériau repose sur la description d'un comportement élasto-viscoplastique avec un écroutissage mixte (isotrope de Balieu et cinématique de Prager) et un critère de plasticité (Hu2005).

IV.3.1.1 Modélisation et considérations théoriques

Dans ses publications (Perzyna, 1963) (Perzyna, 1971), P. Perzyna a établi les équations permettant de décrire le comportement viscoplastique des matériaux auxquels se réfèrent la majorité des travaux traitant du sujet. Parmi tous les modèles de comportement élasto-viscoplastique des matériaux disponibles dans la littérature, le formalisme développé par Chaboche (Chaboche, 2003), basé sur la fonction de charge de von Mises, est le plus largement utilisé dans les développements théoriques et numériques actuels. Dans son analyse, J. L. Chaboche (Chaboche, 2008) (Chaboche, 2009) a étendu le modèle de Perzyna en incluant un nombre plus important de paramètres pouvant décrire les phénomènes d'écroutissage isotrope et cinématique non linéaire et leurs évolutions au cours des déformations inélastiques des matériaux. Dans ces études, c'est le critère de von Mises qui sert de base aux développements de la théorie initiale de Perzyna.

Le caractère viscoplastique de la déformation d'un matériau est défini par opposition aux phénomènes plastiques indépendants du temps. À cet effet de nombreux auteurs ont développé leurs études à partir de la définition d'une *sur-contrainte* (overstress) dont l'évolution au cours du temps dépend de la vitesse de déformation. Les lois proposées sont généralement des lois puissances ou des lois exponentielles ou hyperboliques. En procédant ainsi, différents procédés de mise en forme peuvent être correctement analysés et les évolutions des matériaux mis en jeu correctement prédites par des analyse numériques EF. Cette méthode est d'ailleurs bien adaptée au procédé de mise en forme à chaud par fluage ou avec relaxation des contraintes. Adam et Ponthot (Adam & Ponthot, 2003) l'ont par exemple utilisée pour étudier la mise en forme de tôles par superplasticité.

Dans ce travail, le formalisme de J.L. Chaboche a été adapté au critère de plasticité proposé par W. HU (Hu, 2005) afin d'étudier le comportement viscoplastique des alliages d'aluminium faisant l'objet de notre étude.

IV.3.1.2 Surface de charge et contrainte équivalente

Dans l'hypothèse de petites déformations isothermes, le tenseur de la déformation totale $\boldsymbol{\varepsilon}$ peut être partitionné en déformations élastique $\boldsymbol{\varepsilon}^{el}$ et plastique $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$ (ou viscoplastique $\boldsymbol{\varepsilon}^{vpl}$). On écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \quad (IV.4)$$

Pour les deux alliages étudiés, la loi de comportement contrainte vs déformation est donnée par :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{el} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) \quad (IV.5)$$

\mathbf{C} est un tenseur d'élasticité isotrope ou anisotrope.

On se situe dans le cadre des études de tôles laminées constituées de matériaux anisotropes écrouissables pour lesquels W. HU (Hu, 2005) définit la fonction de charge f_{HU} suivante :

$$\begin{aligned} f = & X_1(\sigma_{11} - \sigma_{33})^4 + X_2(\sigma_{11} - \sigma_{33})^3(\sigma_{22} - \sigma_{33}) + X_3(\sigma_{11} - \\ & \sigma_{33})^2(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + X_4(\sigma_{11} - \sigma_{33})(\sigma_{22} - \sigma_{33})^3 + X_5(\sigma_{22} - \sigma_{33})^4 + \\ & X_6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) \times [(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 - (\sigma_{11} - \\ & \sigma_{33})(\sigma_{22} - \sigma_{33})] + X_7(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)^2 - 1 = 0 \end{aligned} \quad (IV.6)$$

Les coefficients X_i ($\sim \text{MPa}^4$) (Tableau IV-1) dépendent des paramètres d'anisotropie R_{0° , R_{90° et R_{45° et des limites d'élasticité dans le sens du laminage (σ_0), le sens travers (σ_{90}), le sens diagonal (σ_{45}), et dans le cas d'un essai d'expansion equi-biaxiale (σ_b). La fonction précédente définissant un convexe dans l'espace des contraintes, on pourra la choisir comme potentiel plastique et l'adapter ensuite au cas d'études élasto-plastiques ou viscoplastiques. Elle servira aussi pour les modélisations EF.

Afin de se ramener à une expression analogue au critère de von Mises, on définit la fonction de charge à partir d'une pseudo-contrainte équivalente σ_{eqHU} écrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_{eqHU} = & [\chi_1(\sigma_{11} - \sigma_{33})^4 + \chi_2(\sigma_{11} - \sigma_{33})^3(\sigma_{22} - \sigma_{33}) + \\ & \chi_3(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + \chi_4(\sigma_{11} - \sigma_{33})(\sigma_{22} - \sigma_{33})^3 + \\ & \chi_5(\sigma_{22} - \sigma_{33})^4 + \chi_6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) \times [(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \\ & \sigma_{33})^2 - (\sigma_{11} - \sigma_{33})(\sigma_{22} - \sigma_{33})] + \chi_7(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)^2]^{\frac{1}{4}} \end{aligned} \quad (IV.7)$$

Dans cette expression, les χ_i sont des coefficients sans dimension calculés par la formule suivante :

$$\chi_i = \sigma_0^4 X_i \quad (IV.8)$$

σ_0 est la limite d'élasticité en traction dans le sens de laminage et X_i les coefficients de la fonction de charge de Hu (équation (IV.6)). Avec ce choix, la fonction seuil avec écrouissage isotrope est donnée par :

$$f(\sigma_{ij}) = \sigma_{eqHU}(\sigma_{ij}) - \sigma_y - R(\bar{\varepsilon}^{pl}) \quad (IV.9)$$

σ_y est le seuil élastique initial dans le sens de laminage ($\sigma_y \equiv \sigma_0$) et $R(\bar{\varepsilon}^{pl})$ est la fonction d'écrouissage isotrope qui dépend de la déformation plastique équivalente $\bar{\varepsilon}^{pl}$. Lors de chargements cycliques, un phénomène d'écrouissage cinématique peut apparaître et on définit la pseudo-contrainte équivalente σ_{eqHU} par :

$$\begin{aligned} \sigma_{eqHU} = & \left[\chi_1(\xi_{11} - \xi_{33})^4 + \chi_2(\xi_{11} - \xi_{33})^3(\xi_{22} - \xi_{33}) + \right. \\ & \chi_3(\xi_{11} - \xi_{33})^2(\xi_{22} - \xi_{33})^2 + \chi_4(\xi_{11} - \xi_{33})(\xi_{22} - \xi_{33})^3 + \\ & \chi_5(\xi_{22} - \xi_{33})^4 + \chi_6(\xi_{12}^2 + \xi_{23}^2 + \xi_{31}^2) \times [(\xi_{11} - \xi_{33})^2 + (\xi_{22} - \\ & \left. \xi_{33})^2 - (\xi_{11} - \xi_{33})(\xi_{22} - \xi_{33})] + \chi_7(\xi_{12}^2 + \xi_{23}^2 + \xi_{31}^2)^2 \right]^{\frac{1}{4}} \end{aligned} \quad (IV.10)$$

Le tenseur des contraintes ξ est définie par :

$$\xi = \mathbf{S} - \mathbf{X} \quad (\text{IV.11})$$

\mathbf{S} est le déviateur du tenseur des contraintes et \mathbf{X} le tenseur de la contrainte cinématique. Dans ce cas, la fonction de charge est donnée par :

$$f(\xi_{ij}) = \sigma_{eqHU}(\xi_{ij}) - \sigma_y - R(r) \quad (\text{IV.12})$$

r est la variable thermodynamique associée à l'écrouissage isotrope.

IV.3.1.3 Plasticité indépendante du temps

La théorie de la plasticité suppose qu'il existe une surface de charge définie dans l'espace des contraintes, que nous noterons $f = f(\boldsymbol{\sigma}; V_k) \leq 0$.

Les V_k représentent les variables internes (écrouissages isotrope et cinématique) donnant la position et la forme de la surface $f = 0$. Lorsque $f < 0$, les contraintes ne provoquent que des déformations élastiques réversibles. Dans le cas de la plasticité indépendante du temps, on ne peut avoir $f > 0$ et l'écoulement plastique ne peut se produire que lorsqu'on a simultanément $f(\boldsymbol{\sigma}; V_k) = 0$ associée à la condition de consistance $df(\boldsymbol{\sigma}; V_k) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial V_k} dV_k = 0$.

La règle de normalité généralisée qui s'applique ici permet de donner le sens et l'intensité de l'incrément de déformation plastique $\delta\varepsilon^p$ sous la forme :

$$\delta\varepsilon^p = \delta\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \delta\lambda \frac{\partial f}{\partial \xi} \quad (\text{IV.13})$$

$\delta\lambda$ est un multiplicateur plastique qui sera défini plus loin, $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ est la normale à la surface de charge. Dans la suite on définit un pseudo-potentiel de dissipation Φ_p par l'expression suivante :

$$\Phi_p = \sigma_{eqHU}(\xi_{ij}) - R - \sigma_y \quad (\text{IV.14})$$

A partir de l'équation (IV.14), la normale à la fonction de charge est donnée par :

$$\mathbf{n}_{HU} = \frac{\partial \Phi_p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \sigma_{HU}(\sigma_{ij})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{IV.15})$$

La normale unitaire \mathbf{n}_σ est définie par :

$$\mathbf{n}_\sigma = \frac{\mathbf{n}_{HU}}{\|\mathbf{n}_{HU}\|} \text{ avec } \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{n}_{HU} : \mathbf{n}_{HU}} = \|\mathbf{n}_{HU}\| \quad (\text{IV.16})$$

Il s'ensuit que :

$$\mathbf{n}_\sigma : \mathbf{n}_\sigma = \frac{\mathbf{n}_{HU} : \mathbf{n}_{HU}}{\frac{2}{3} \mathbf{n}_{HU} : \mathbf{n}_{HU}} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{n}_\sigma : \mathbf{n}_\sigma} = 1 \quad (\text{IV.17})$$

IV.3.1.4 Plasticité dépendante du temps : viscoplasticité

Dans le cas de la plasticité dépendante du temps, c'est-à-dire en viscoplasticité, il est possible que les valeurs des contraintes conduisent à avoir $f > 0$ entraînant un écoulement plastique. Le multiplicateur plastique ne peut plus être déterminé par la condition de consistance précédente et il est nécessaire de définir une loi d'évolution pour l'incrément de la vitesse de déformation plastique $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vpl}$.

Dans le cas viscoplastique, la règle de normalité permet d'écrire l'incrément de vitesse de déformation viscoplastique comme suit :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vpl} = \dot{\lambda}^{vpl} \mathbf{n}_{HU} = \dot{\lambda}^{vpl} \|\mathbf{n}_{HU}\| \mathbf{n}_{\sigma} \quad (\text{IV.18})$$

$\dot{\lambda}^{vpl}$ est l'incrément de vitesse du multiplicateur plastique associé à \mathbf{n}_{HU} et on note $\dot{\lambda}^{vpl}$ l'incrément correspondant à \mathbf{n}_{σ} :

$$\dot{\lambda}^{vpl} = \dot{\lambda}^{vpl} \|\mathbf{n}_{HU}\| \quad (\text{IV.19})$$

Les taux d'évolution par rapport au temps, de la déformation viscoplastique, de la variable d'écoulement cinématique $\boldsymbol{\alpha}$ et de la variable d'écoulement isotrope r sont donnés par :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vpl} = \dot{\lambda}^{vpl} \mathbf{n}_{\sigma} \quad (\text{IV.20})$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = -\delta \dot{\lambda}^{vpl} \frac{\partial \Phi_p}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \dot{\lambda}^{vpl} \|\mathbf{n}_{HU}\| \mathbf{n}_{\sigma} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vpl} \quad (\text{IV.21})$$

$$\dot{r} = -\dot{\lambda}^{vpl} \frac{\partial \Phi_p}{\partial R} = \frac{\dot{\lambda}^{vpl}}{\|\mathbf{n}_{HU}\|} \quad (\text{IV.22})$$

La déformation viscoplastique équivalente $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vpl}$ est notée p avec :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vpl} = p = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vpl} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vpl}} dt \quad (\text{IV.23})$$

$$\dot{p} = \frac{\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vpl}}{\delta t} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vpl} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vpl}} = \dot{\lambda}^{vpl} \|\mathbf{n}_{HU}\| \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{n}_{\sigma} : \mathbf{n}_{\sigma}} = \dot{\lambda}^{vpl} = \frac{\delta \dot{\lambda}^{vpl}}{\delta t} \quad (\text{IV.24})$$

IV.3.1.4.1 Potentiel thermodynamique et variables internes d'état

Puisque la formulation thermodynamique nécessite la définition des potentiels élastiques et plastique, l'approche utilisée par Badreddine (Badreddine, 2006) a été appliquée.

Le potentiel thermodynamique total $\rho \Psi_t$ (équation (IV.25)) est la somme de l'énergie élastique réversible $\rho \Psi_e$ (équation (IV.26)) et de l'énergie de déformation plastique $\rho \Psi_p$ (équation (IV.27)) incluant l'écoulement isotrope et cinématique.

$$\rho\Psi_t = \rho\Psi_e + \rho\Psi_p \quad (\text{IV.25})$$

$$\rho\Psi_e = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^{el} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{el} \quad (\text{IV.26})$$

$$\rho\Psi_p = \frac{1}{3} C_\alpha \boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\alpha} - Q_1(1 + b_1 r) \frac{\exp(-b_1 r)}{b_1^2} + Q_2 \left(r + \frac{\exp(-b_2 r)}{b_2} \right) + b_3 \frac{r^4}{4} + b_4 \frac{r^3}{3} + b_5 \frac{r^2}{2} \quad (\text{IV.27})$$

Avec : C_α le paramètre d'écrouissage cinématique, Q_i et b_i des constantes caractérisant l'écrouissage isotrope.

Il s'ensuit qu'on aura les expressions suivantes des variables d'état internes :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial(\rho\Psi_t)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{el}} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{el} \quad (\text{IV.28})$$

$$\mathbf{X} = \frac{\partial(\rho\Psi_t)}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \frac{2}{3} C_\alpha \boldsymbol{\alpha} \quad (\text{IV.29})$$

$$R = \frac{\partial(\rho\Psi_t)}{\partial r} = Q_1 r \exp(-b_1 r) + Q_2(1 - \exp(-b_2 r)) + b_3 r^3 + b_4 r^2 + b_5 r \quad (\text{IV.30})$$

Il est possible de constater que les expressions de Prager (Prager, 1958) et Balieu (Balieu, et al., 2014) sont utilisées pour décrire, respectivement, l'écrouissage cinématique et isotrope. En effet, l'écrouissage cinématique de Prager est relativement facile à identifier et à implémenter dans les modèles matériau et l'écrouissage isotrope de Balieu permet de décrire le phénomène d'écrouissage tout comme le phénomène d'adoucissement.

IV.3.1.4.2 Lois d'évolution du multiplicateur plastique

Puisque l'incrément du correcteur viscoplastique $\dot{\lambda}^{vpl}$ ne peut plus être déterminé par la condition de consistance, il faut définir une loi d'évolution pour l'incrément de la vitesse de déformation viscoplastique équivalente \dot{p} . Dans son étude, J.L. Chaboche (Chaboche, 2008) propose une loi d'évolution de \dot{p}^{vpl} en fonction puissance comme ci-dessous (\dot{p}^{vpl} en s^{-1}) :

$$\dot{p}^{vpl} = A \left\langle \frac{\sigma_{eq} - R(p^{vpl}) - \sigma_y}{D(p)} \right\rangle^n \quad (\text{IV.31})$$

Le crochet de Macaulay est défini par $\langle x \rangle = \frac{1}{2}(x + |x|)$. $D(p)$ est une contrainte *Drag stress* et A une constante. Ce choix est à rapprocher de celui proposé par G. Z. Voyiadjis et al. (Voyiadjis, et al., 2004), A. Krairi et I. Doghri (Krairi & Doghri, 2014) qui proposent des expressions similaires. L'inconvénient de cette formulation rapportée dans la littérature est qu'elle ne rend pas bien compte du comportement du matériau sur toute l'étendue de variation des contraintes. C'est pour cette raison que d'autres auteurs préfèrent le modèle d'évolution de l'incrément \dot{p} en sinus hyperbolique.

W. Chen (Chen & Feng, 2015), J.M. Pipard (Pipard, 2012) et d'autres choisissent une évolution en sinus hyperbolique qui permet de prendre en compte une grande plage de variation de la vitesse de déformation. Il est alors possible d'écrire :

$$\dot{p}^{vpl} = B \sinh \left\langle \frac{\sigma_{eq} - R(p^{vpl}) - \sigma_y}{A} \right\rangle \quad (\text{IV.32})$$

B et A sont des constantes à identifier pour chaque matériau. Ashtiani et al. (Ashtiani, et al., 2012) ont aussi utilisé ce modèle tout en ajoutant l'effet de la température comme montré dans l'équation (IV.33).

$$\dot{\varepsilon}^{vpl} = A \sinh(\alpha \sigma) \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) \quad (IV.33)$$

Expression dans laquelle σ est la contrainte effective d'écoulement, α est un coefficient (MPa), A une constante ($\sim s^{-1}$), R est la constante de Boltzmann et Q l'énergie d'activation de la déformation. Les auteurs proposent une méthode d'identification de ces coefficients basée sur des essais expérimentaux.

D'autres types de loi ont été proposées comme, par exemple, celle proposée par Bodner et Partom (Bodner & Partom, 1975) qui s'exprime sous la forme ci-dessous :

$$\dot{p}^{vpl} = \frac{2}{\sqrt{3}} D_0 \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{R + X: \frac{\sigma'}{J_2(\sigma')}}{J_2(\sigma')}\right) \frac{n+1}{n}\right)^{2n} \quad (IV.34)$$

σ' est le déviateur des contraintes et $J_2(\sigma') = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma':\sigma'}$. D_0 est la valeur limite de la vitesse de déformation plastique équivalente. D'autres lois ont été proposées comme celle de Balieu et al. (Balieu, et al., 2014) qui rend compte de l'influence de l'endommagement et du comportement non symétrique du matériau en traction ou en compression.

Toutes les études citées sont basées sur la définition d'une contrainte équivalente basée sur le modèle de von Mises. Or W. Hu a montré que pour certains alliages d'acier à haute résistance ou pour des alliages d'aluminium (Hu, 2005), il était nécessaire de définir une fonction de charge mieux appropriée aux comportements anisotropes induits par la mise en forme, spécialement pour des tôles.

Dans la suite on se propose de développer une théorie de la viscoplasticité incrémentale basée sur le critère de W. HU.

IV.3.1.5 Viscoplasticité incrémentale

Les écoulements visqueux de matériaux viscoplastiques ne donnent pas lieu à des lois d'évolution globale et ils doivent être traités de façon incrémentale.

La méthode adoptée est analogue à celle développée dans le cadre de la plasticité. On effectue une prédiction élastique en imposant un incrément de déformation totale $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^{essai}$, on a :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = (\boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{essai}) - \mathbf{C} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{vpl} = \boldsymbol{\sigma}^{essai} - \delta \lambda^{vpl} \mathbf{C} \mathbf{n}_\sigma \quad (IV.35)$$

En prenant les parties déviatoriques de chaque membre de l'équation (IV.35) l'expression du déviateur \mathbf{S} à l'incrément " $n+1$ " est :

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}^{essai} - \delta \lambda^{vpl} \mathbf{C} \mathbf{n}_\sigma \quad (IV.36)$$

L'incrément de la contrainte cinématique $\delta \mathbf{X} = \frac{2}{3} \mathbf{C}_\alpha \delta \boldsymbol{\alpha}$ avec l'équation (IV.21) conduit à l'étape " $n+1$ " à :

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n + \delta \mathbf{X} = \mathbf{X}_n + \delta \lambda^{vpl} \frac{2}{3} \mathbf{C}_\alpha \mathbf{n}_\sigma \quad (IV.37)$$

Alors :

$$(\mathbf{S}_{n+1} - \mathbf{X}_{n+1}) = (\mathbf{S}^{essai} - \mathbf{X}_n) - \delta\lambda^{vpl} \left(\mathbf{C}\mathbf{n}_\sigma + \frac{2}{3} C_\alpha \mathbf{n}_\sigma \right) \quad (\text{IV.38})$$

Pour un matériau à comportement élastique linéaire $\mathbf{C}\mathbf{n}_\sigma = 2G\mathbf{n}_\sigma$, ce qui entraîne l'équation suivante en posant $\xi^{essai} = (\mathbf{S}^{essai} - \mathbf{X}_n)$ avec (IV.16) :

$$\xi_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1} - \mathbf{X}_{n+1} = \xi^{essai} - \delta\lambda^{vpl} \left(2G + \frac{2}{3} C_\alpha \right) \mathbf{n}_\sigma \quad (\text{IV.39})$$

Dans la suite de l'étude, on fait la même hypothèse sur la normale à la surface de charge que celle découlant du modèle de von Mises :

$$\mathbf{n}_{n+1}^{HU} = \mathbf{n}_{n+1}^{essai} \quad (\text{IV.40})$$

IV.3.1.6 Contrainte équivalente de W. Hu linéarisée σ_{eqHU}^{n+1}

Pour calculer la contrainte équivalente σ_{eqHU}^{n+1} à l'étape « n+1 », il faut calculer une à une les contraintes ξ_{ij} comme suit :

$$\xi_{ij}^{n+1} = \xi_{ij}^{essai} - \delta\lambda^{vpl} \left(2G + \frac{2}{3} C_\alpha \right) n_{ij} \quad (\text{IV.41})$$

À titre d'exemple, on aura :

$$(\xi_{11} - \xi_{33})_{n+1} = (\xi_{11}^{essai} - \xi_{33}^{essai}) - \delta\lambda^{vpl} \left[2G + \frac{2}{3} C_\alpha \right] (n_{11} - n_{33}) \quad (\text{IV.42})$$

Le calcul de σ_{eqHU}^{n+1} s'effectue en reportant dans la définition (IV.10) les expressions analogues à (IV.42). On constate que de nombreux termes font apparaître $\{\delta\lambda^{vpl}\}^k$ avec $k > 1$. Sachant que les études de plasticité ou de viscoplasticité montrent que les valeurs du multiplicateur plastique sont très faibles, on est amené à formuler l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1 : Les termes faisant apparaître des puissances de $\delta\lambda^{vpl}$ comme $\{\delta\lambda^{vpl}\}^k$ avec $k > 1$ sont négligés.

Il s'ensuit que, dans la nouvelle écriture de σ_{eqHU}^{n+1} , on a, par exemple, comme coefficient de χ_1 :

$$(\xi_1^{essai} - \xi_3^{essai})^4 - \delta\lambda^{vpl} \psi'_1 \quad (\text{IV.43})$$

Avec :

$$\psi'_1 = 4(\xi_1^{essai} - \xi_3^{essai})^3 (\tilde{n}_1 - \tilde{n}_3) \quad \tilde{n}_i = \left[2G + \frac{2}{3} C_\alpha \right] n_i^{essai} \quad (\text{IV.44})$$

Lorsqu'on fait la somme de tous les termes ψ'_i en les multipliant par leurs coefficients respectifs χ_i , on trouve l'expression linéarisée suivante :

$$(\sigma_{eqHU}^{n+1})^4 = (\sigma_{eqHU}^{essai})^4 - \delta\lambda^{vpl} \times \Psi(\xi, \alpha) \quad (IV.45)$$

$$\sigma_{eqHU}^{n+1} = \sigma_{eqHU}^{essai} \times \sqrt[4]{1 - \delta\lambda^{vpl} \times \frac{\Psi(\xi, \alpha)}{(\sigma_{eqHU}^{essai})^4}} \quad (IV.46)$$

Dans ces expressions, $\Psi(\xi, \alpha)$ est donnée par l'équation (IV.47) dont les expressions de ψ'_1 sont données en Annexe C.

$$\Psi(\xi, \alpha) = \chi_1\psi'_1 + \chi_2\psi'_2 + \chi_3\psi'_3 + \chi_4\psi'_4 + \chi_5\psi'_5 + \chi_6\psi'_6 + \chi_7\psi'_7 \quad (IV.47)$$

IV.3.1.7 Fonction de charge dynamique

La fonction de charge viscoplastique est définie par une loi en sinus hyperbolique conduisant à l'écriture :

$$\varphi_{HUdyn}(\sigma, \mathbf{X}, R) = \frac{\delta\lambda^{vpl}}{\delta t} - \beta \times \left[\sinh \left(\left\langle \frac{\sigma_{HU}(\xi_{ij})}{\sigma_y + R} - 1 \right\rangle \right) \right]^\gamma \quad (IV.48)$$

Les constantes β et γ doivent être déterminées par des essais pour chaque matériau. L'incrément par rapport au temps du multiplicateur plastique $\frac{\delta\lambda^{vpl}}{\delta t}$ doit satisfaire l'équation suivante :

$$\varphi_{HUdyn}(\sigma, \mathbf{X}, R) = 0 \quad (IV.49)$$

On satisfait l'équation précédente en mettant en œuvre un algorithme implicite de retour radial de type Newton Raphson. La condition de consistance $d\varphi_{n+1} = 0$ est aussi satisfaite. On se ramène ainsi à une étude classique de plasticité.

La détermination du multiplicateur plastique $\delta\lambda^{vpl}$ à partir de la condition de consistance est détaillée ci-après. Afin d'alléger les écritures, on pose arbitrairement :

$$U(\delta\lambda^{vpl}) = \sinh \left(\left\langle \frac{\sigma_{HU}^{n+1}(\xi_{ij})}{\sigma_y + R} - 1 \right\rangle \right) \quad (IV.50)$$

Avec cette notation, la fonction de charge à l'incrément "n+1" peut s'écrire comme suit :

$$\varphi(p_{n+1}) = \frac{\delta\lambda^{vpl}}{\delta t} - \beta \times (U(\delta\lambda^{vpl}))^\gamma \quad (IV.51)$$

La condition de consistance s'écrit alors :

$$\delta\varphi_{n+1} = \delta \left(\frac{\delta\lambda^{vpl}}{\delta t} \right) - \beta \times \gamma \times [U(\delta\lambda^{vpl})]^{\gamma-1} \delta U(\xi, R) = 0 \quad (IV.52)$$

Écrivons δU comme suit :

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial R} \delta R + \frac{\partial U}{\partial \xi_{ij}} \delta \xi_{ij} \quad (\text{IV.53})$$

En occultant le détail des calculs (Annexe C), on trouve :

$$\begin{aligned} \delta U_{n+1} = & -\cosh(\langle g_{n+1} \rangle) \times H_R \times \frac{\sigma_{eqHU}^{essai} \left(1 - \delta \lambda^{vpl} \times \frac{\Psi(\xi, \alpha)}{(\sigma_{eqHU}^{essai})^4} \right)^{\frac{1}{4}}}{(\sigma_{y+R^{n+1}})^2} \delta \lambda^{vpl} + \\ & \cosh(\langle g_{n+1} \rangle) \times \left\{ \|\mathbf{n}_{HU}\| \left(1 + \frac{3}{4} \delta \lambda^{vpl} \times \frac{\Psi(\xi, \alpha)}{(\sigma_{eqHU}^{essai})^4} \right) \mathbf{n}_\sigma^T - \right. \\ & \delta \lambda^{vpl} \frac{1}{4} \frac{1}{(\sigma_{eqHU}^{essai})^3} \left(\frac{\partial \Psi(\xi, \alpha)}{\partial \xi} \right)^T \left. \right\} \mathbf{C} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{essai} - \delta \lambda^{vpl} \left(\|\mathbf{n}_{HU}\| \left[\mathbf{n}_\sigma^T \mathbf{C} \mathbf{n}_\sigma + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{2}{3} C_\alpha \mathbf{n}_\sigma^T \mathbf{n}_\sigma \right] - \frac{\Delta \varepsilon_m^{essai}}{4} \frac{3K}{(\sigma_{eqHU}^{essai})^3} \left(\frac{\partial \Psi(\xi, \alpha)}{\partial \xi} \right)^T \mathbf{1} \right) \times \frac{1}{(\sigma_{y+R^{n+1}})} \end{aligned} \quad (\text{IV.54})$$

Avec K le module de compressibilité et $\varepsilon_m^{essai} = \frac{1}{3} (\varepsilon_1^{essai} + \varepsilon_2^{essai} + \varepsilon_3^{essai})$.

Cette expression peut encore s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \delta U_{n+1} = & \cosh(g_{n+1}) \left(\frac{\left\{ \|\mathbf{n}_{HU}\| \left(1 + \frac{3}{4} \delta \lambda^{vpl} \times \frac{\Psi(\xi, \alpha)}{(\sigma_{eqHU}^{essai})^4} \right) \mathbf{n}_\sigma^T - \delta \lambda^{vpl} \frac{1}{4} \frac{1}{(\sigma_{eqHU}^{essai})^3} \left(\frac{\partial \Psi(\xi, \alpha)}{\partial \xi} \right)^T \right\}}{(\sigma_{y+R^{n+1}})} \mathbf{C} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{essai} - \right. \\ & \left. K^{vpl} \delta \lambda^{vpl} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.55})$$

$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{essai}$ correspond à l'essai élastique. Nous avons noté K^{vpl} le coefficient de $\delta \lambda^{vpl}$ défini par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} K^{vpl} = & \left[\left(\|\mathbf{n}_{HU}\| \left[\mathbf{n}_\sigma^T \mathbf{C} \mathbf{n}_\sigma + \frac{2}{3} C_\alpha \mathbf{n}_\sigma^T \mathbf{n}_\sigma \right] - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\Delta \varepsilon_m^{essai}}{4} \frac{3K}{(\sigma_{eqHU}^{essai})^3} \left(\frac{\partial \Psi(\xi, \alpha)}{\partial \xi} \right)^T \mathbf{1} \right) \frac{1}{(\sigma_{y+R^{n+1}})} + H_R \frac{\sigma_{eqHU}^{essai} \left(1 - \delta \lambda^{vpl} \times \frac{\Psi(\xi, \alpha)}{(\sigma_{eqHU}^{essai})^4} \right)^{\frac{1}{4}}}{(\sigma_{y+R^{n+1}})^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.56})$$

La condition de linéarité en $\delta \lambda^{vpl}$ que nous avons choisie (cf. hypothèse 1 précédemment formulée) conduit à l'écriture modifiée suivante, dans laquelle l'incrément du multiplicateur plastique disparaît :

$$\begin{aligned} \tilde{K}^{vpl} = & \left(\| \mathbf{n}_{HU} \| \left[\mathbf{n}_\sigma^T \mathbf{C} \mathbf{n}_\sigma + \frac{2}{3} C_\alpha \mathbf{n}_\sigma^T \mathbf{n}_\sigma \right] - \right. \\ & \left. \frac{\Delta \varepsilon_m^{essai}}{4} \frac{3K}{(\sigma_{eqHU}^{essai})^3} \left(\frac{\partial \Psi(\xi, \alpha)}{\partial \xi} \right)^T \mathbf{1} \right) \frac{1}{(\sigma_{y+R^{n+1}})} + \sigma_{eqHU}^{essai} \frac{H_R}{(\sigma_{y+R^{n+1}})^2} \end{aligned} \quad (IV.57)$$

En vérifiant que $\frac{\partial \Psi(\xi, \alpha)}{\partial \xi}$ est un déviateur ($Tr \left(\frac{\partial \Psi(\xi, \alpha)}{\partial \xi} \right) = 0$), on a l'égalité suivante :

$$\frac{\Delta \varepsilon_m^{essai}}{4} \frac{3K}{(\sigma_{eqHU}^{essai})^3} \left(\frac{\partial \Psi(\xi, \alpha)}{\partial \xi} \right)^T \mathbf{1} = 0 \quad (IV.58)$$

Et le coefficient \tilde{K}^{vpl} se réduit à :

$$\tilde{K}^{vpl} = \left(\| \mathbf{n}_{HU} \| \left[\mathbf{n}_\sigma^T \mathbf{C} \mathbf{n}_\sigma + \frac{2}{3} C_\alpha \mathbf{n}_\sigma^T \mathbf{n}_\sigma - \right] \right) \frac{1}{(\sigma_{y+R^{n+1}})} + \sigma_{eqHU}^{essai} \frac{H_R}{(\sigma_{y+R^{n+1}})^2} \quad (IV.59)$$

L'hypothèse de linéarité permet d'écrire la condition de consistance :

$$\delta \varphi_{n+1} = \delta \lambda^{vpl} \frac{1}{\delta t} - \beta \times \gamma \times \left[\sinh \left(\left\langle \frac{\sigma_{HU}^{essai}(\xi_{ij})}{\sigma_{y+R^{n+1}}} - 1 \right\rangle \right) \right]^{\gamma-1} \times \delta U_{n+1} = 0 \quad (IV.60)$$

De ce qui précède, on tire l'expression du multiplicateur plastique sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \delta \lambda^{vpl} = & \frac{\beta \times \gamma \times [\sinh(\tilde{g}_n)]^{\gamma-1} \cosh(\tilde{g}_n)}{\frac{1}{\delta t} + \tilde{K}^{vpl} \beta \times \gamma \times [\sinh(\tilde{g}_n)]^{\gamma-1} \cosh(\tilde{g}_n)} \times \\ & \left\{ \frac{\| \mathbf{n}_{HU} \| \left(1 + \frac{3}{4} \delta \lambda^{vpl} \times \frac{\Psi(\xi, \alpha)}{(\sigma_{eqHU}^{essai})^4} \right) \mathbf{n}_\sigma^T - \delta \lambda^{vpl} \frac{1}{4} \frac{1}{(\sigma_{eqHU}^{essai})^3} \left(\frac{\partial \Psi(\xi, \alpha)}{\partial \xi} \right)^T}{(\sigma_{y+R^{n+1}})} \right\} \mathbf{C} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{essai} \end{aligned} \quad (IV.61)$$

Avec $\tilde{g}_n = \left\langle \frac{\sigma_{HU}^{essai}(\xi_{ij})}{\sigma_{y+R^{n+1}}} - 1 \right\rangle$

On peut constater que dans le cas de traction unidimensionnelle et de cisaillement simple, le numérateur de l'expression précédente se réduit à :

$$\delta \lambda^{vpl} = \frac{\beta \times \gamma \times [\sinh(\tilde{g}_n)]^{\gamma-1} \cosh(\tilde{g}_n)}{\frac{1}{\delta t} + \tilde{K}^{vpl} \beta \times \gamma \times [\sinh(\tilde{g}_n)]^{\gamma-1} \cosh(\tilde{g}_n)} \times \frac{\{ \| \mathbf{n}_{HU} \| \mathbf{n}_\sigma^T \}}{(\sigma_{y+R^{n+1}})} \mathbf{C} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{essai} \quad (IV.62)$$

À partir de ces observations, il est possible de formuler une nouvelle hypothèse :

Hypothèse 2 : Quel que soit l'état de contrainte, le multiplicateur plastique conservera la valeur précédente donnée par l'équation (IV.62).

IV.3.1.8 Détermination de l'opérateur tangent consistant

La matrice tangente consistante \mathbf{K}_{tg} , réactualisée à chaque itération, assure la meilleure vitesse de convergence de l'algorithme. Elle est définie avec l'algorithme du retour radial par :

$$\delta\sigma = \mathbf{K}_{tg}\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{totale} \quad (IV.63)$$

Avec $\delta\sigma$ l'incrément de contrainte et $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ l'incrément de déformation totale.

Dans le cas d'un matériau de Hooke isotrope sans endommagement, on a :

$$\delta\sigma = \mathbf{C}\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{el} = \mathbf{C}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{essai} - \mathbf{C}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{vpl} = \mathbf{C}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{essai} - \delta\lambda^{vpl}\mathbf{C}\mathbf{n}_\sigma \quad (IV.64)$$

En remplaçant $\delta\lambda^{vpl}$ par son expression (IV.62), l'incrément de contrainte $\delta\sigma$ s'exprime en fonction de l'incrément de déformation totale $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{essai}$ comme suit :

$$\delta\sigma = \mathbf{C}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{essai} - \Omega\|\mathbf{n}_{HU}\|(\mathbf{C}\mathbf{n}_\sigma)(\mathbf{C}\mathbf{n}_\sigma)^T\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{essai} \quad (IV.65)$$

Avec :

$$\Omega = \frac{\beta \times \gamma \times [\sinh(\tilde{g}_n)]^{\gamma-1} \cosh(\tilde{g}_n)}{\frac{1}{\delta t} + \tilde{K}^{vpl} \beta \times \gamma \times [\sinh(\tilde{g}_n)]^{\gamma-1} \cosh(\tilde{g}_n)} \times \frac{1}{\sigma_y + R^{n+1}} \quad (IV.66)$$

Ce qui permet de définir la matrice tangente suivante :

$$\mathbf{K}_{tg} = \mathbf{C} - \Omega\|\mathbf{n}_{HU}\|(\mathbf{C}\mathbf{n}_\sigma)(\mathbf{C}\mathbf{n}_\sigma)^T \quad (IV.67)$$

IV.3.1.9 Paramètres du modèle élasto-viscoplastique

Ce modèle matériau contient 17 paramètres à identifier : sept paramètres pour le critère de plasticité anisotrope de Hu2005, sept paramètres pour l'érouissage isotrope de Balieu, un seul paramètre pour le modèle d'érouissage cinématique de Prager et deux paramètres pour la loi visqueuse adoptée.

Les sept paramètres du critère de plasticité anisotrope Hu2005 identifiés précédemment, pour le modèle élasto-plastique, ont été utilisés.

Pour l'identification des autres paramètres du modèle, une configuration de référence a été arbitrairement définie. Il s'agit, quel que soit le matériau, d'un essai réalisé, aux températures appropriées, dans la direction de laminage, avec une vitesse de déformation de 5.10^{-3} s^{-1} . Cette configuration est assimilée à un cas quasi-statique, c.-à-d. un cas pour lequel l'effet de la vitesse de déformation est supposé quasi-inexistant. La dépendance à la vitesse est alors prise en compte en considérant la sur-contrainte ou contrainte visqueuse générée par rapport à cette référence. Une illustration graphique est fournie en Figure IV-11.

Ainsi, les paramètres de l'érouissage isotrope de Balieu (soit : Q_1 , Q_2 , b_1 , b_2 , b_3 , b_4 et b_5) ont été identifiés sur la configuration de référence pour chaque matériau puis optimisés par la méthode des moindres carrés à l'aide du logiciel *Mathematica* afin de minimiser l'erreur entre la courbe expérimentale et celle donnée par le modèle.

Le paramètre de l'érouissage cinématique de Prager (soit : C_α) a été identifié à partir des essais de traction-compression réalisés à différents taux de déformation suivant la configuration de référence. Une macro Excel (incluant la méthode des moindres carrés) a été utilisée pour l'optimisation de ce paramètre afin de minimiser l'erreur de prédiction par rapport aux résultats expérimentaux. Pour rappel, seul l'alliage 2050 (de par son épaisseur) a pu subir les essais de traction-compression.

Finalement, pour l'identification des deux paramètres de la loi visqueuse (soit : β et γ), les résultats des essais de traction à différentes vitesses de déformation (10^{-1} et 10^{-2} s^{-1}) ont été utilisés : le niveau de

sur-contrainte générée par rapport à la courbe de référence en fonction de la vitesse de déformation a ainsi été considéré. La méthode des moindres carrés, sous le logiciel *Mathematica*, a permis d'optimiser ces paramètres.

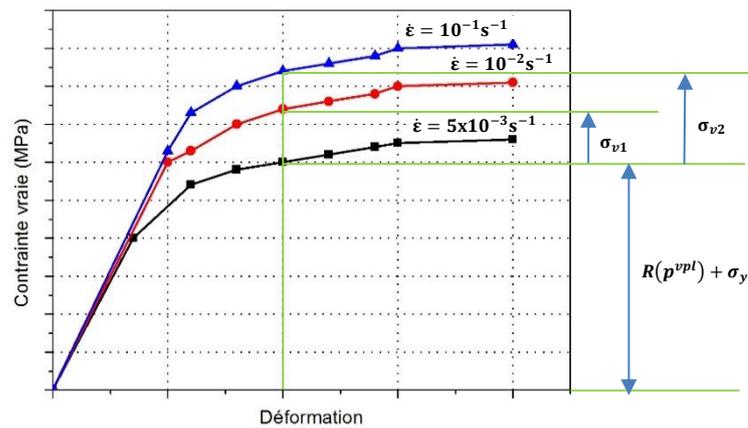


Figure IV-11 : Principe adopté pour l'identification

IV.3.2 Calibration du modèle matériau élasto-viscoplastique

IV.3.2.1 Comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques pour l'alliage 2050

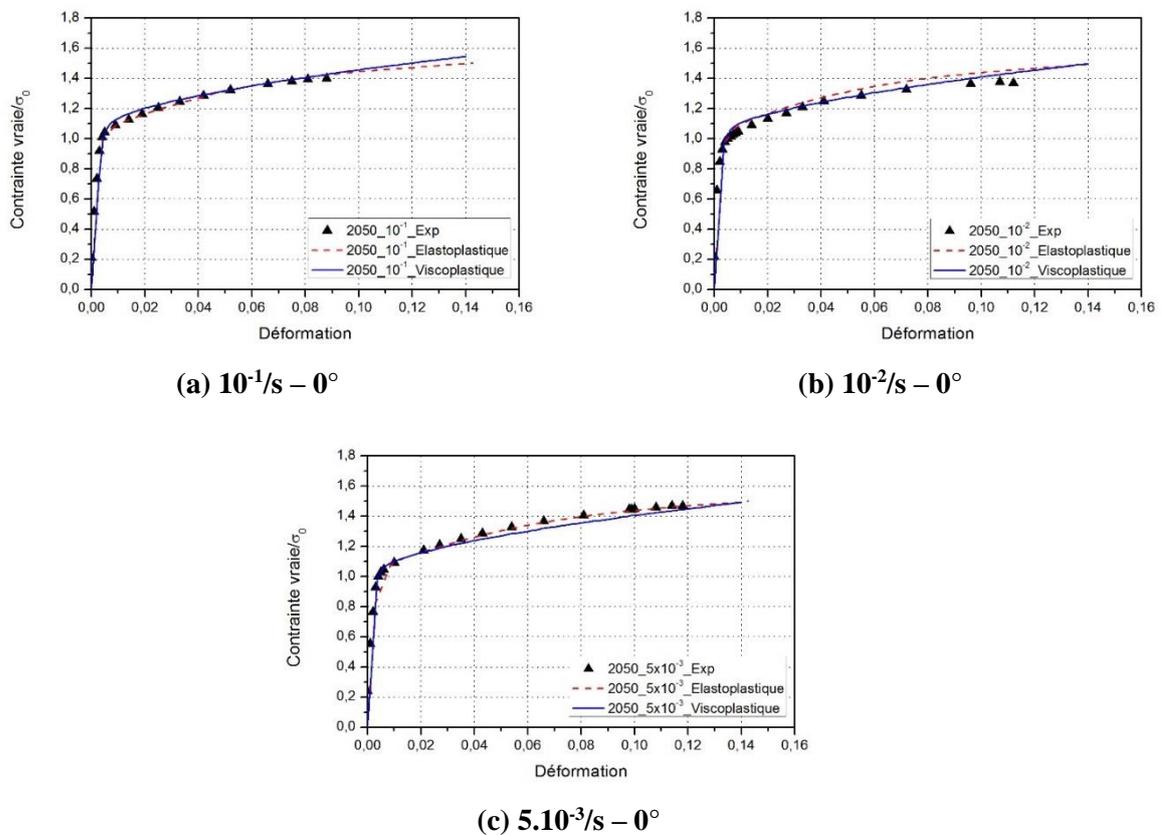


Figure IV-12 : Comparaison entre les résultats expérimentaux obtenus lors d'essais de traction sur l'alliage 2050 dans différentes directions et les résultats numériques obtenus avec le modèle élasto-viscoplastique

Le même modèle numérique que celui présenté précédemment (cf. §IV.2.2.1) a été utilisé pour la simulation des essais de traction selon les différentes directions de prélèvement (0° , 45° et 90°) et avec différentes vitesses de déformation ($5 \cdot 10^{-3}$, 10^{-2} et 10^{-1} s^{-1}).

Une étude comparative a été conduite entre les résultats expérimentaux et numériques dans le but de valider les paramètres identifiés pour l'alliage 2050. Les résultats numériques utilisés dans cette étude comparative sont ceux issus de la simulation numérique précédente (élasto-plastique) et ceux trouvés avec le modèle élasto-viscoplastique (utilisation d'une subroutine UMAT 3D développée avec le critère de plasticité de Hu2005, l'érouissage mixte (Balieu et Prager) et avec la loi visqueuse).

La comparaison des résultats expérimentaux et numériques des essais de traction (à 150°C) à différentes vitesses de déformation ($5 \cdot 10^{-3}$, 10^{-2} et 10^{-1} s^{-1}) est illustrée sur la Figure IV-12. Tous ces essais ont été réalisés selon la direction de laminage (0°). La normalisation de la contrainte a été effectuée avec la limite d'élasticité expérimentale obtenue dans la direction de laminage (σ_0). Quelle que soit la vitesse de déformation considérée, une bonne prédiction du comportement de l'alliage 2050 est assurée par les deux modèles matériau étudiés (élasto-plastique et viscoplastique), ce qui est principalement dû à la faible viscosité de l'alliage à la température considérée.

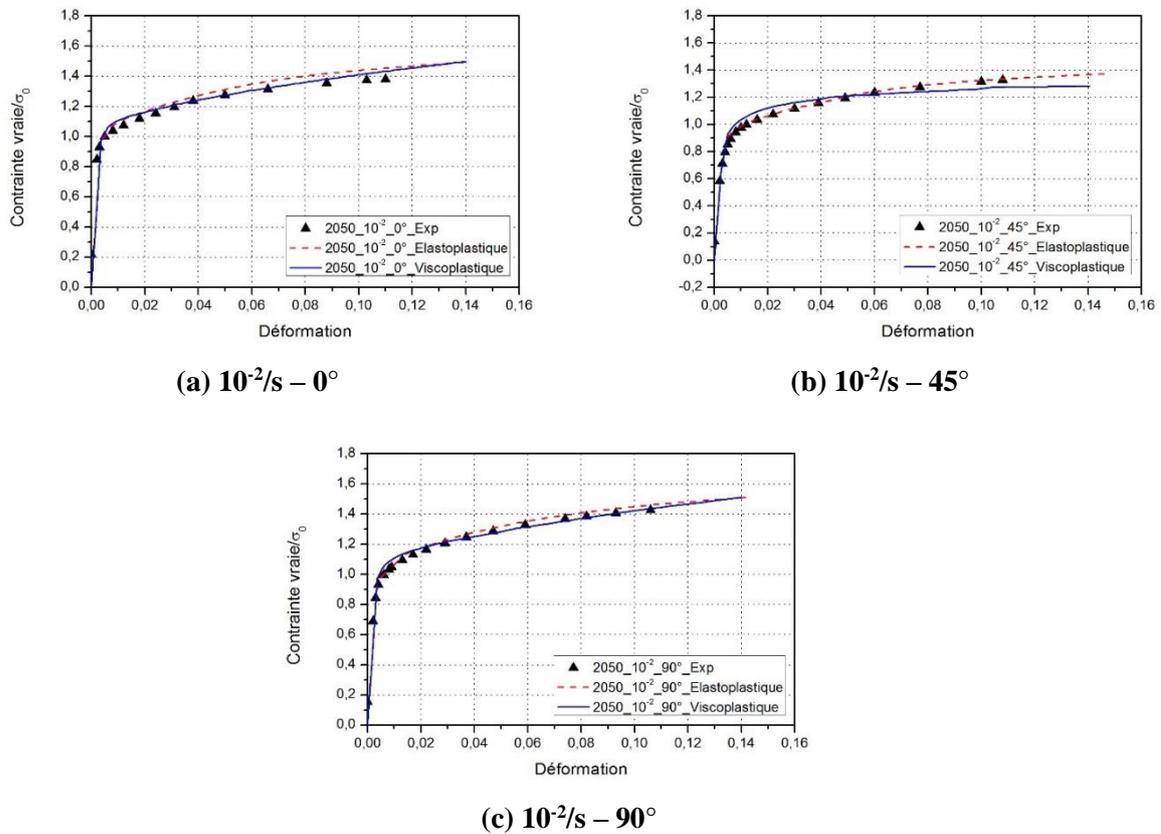
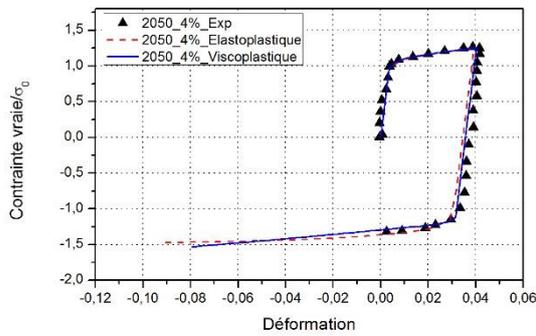


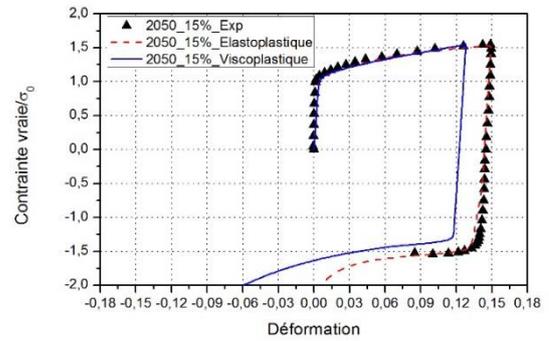
Figure IV-13 : Comparaison entre les résultats expérimentaux issus d'essais de traction sur l'alliage 2050 dans différentes directions et les résultats numériques obtenus avec le modèle élasto-viscoplastique

Dans le but d'étudier la capacité des deux modèles matériaux, développés sous forme de sous-routines UMAT 3D, à prédire le comportement anisotrope du matériau, une comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques des essais de traction dans différentes directions de prélèvement par rapport à la direction de laminage (0° , 45° et 90°) a été réalisée et est présentée sur la Figure IV-13. Tous ces essais ont été effectués à une vitesse de déformation de 10^{-2} s^{-1} . La normalisation des contraintes a été réalisée en utilisant la limite d'élasticité expérimentale obtenue dans la direction de laminage (σ_0).

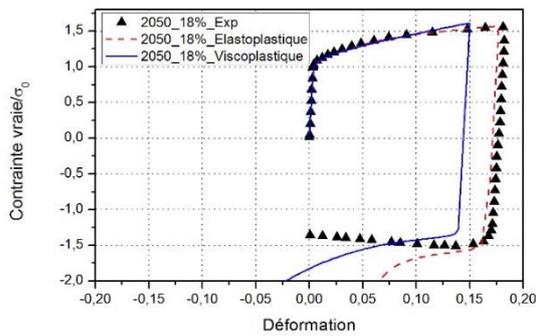
Quelle que soit la direction de prélèvement de l'éprouvette, une bonne prédiction du comportement de l'alliage 2050 a été obtenue avec les deux modèles matériau employant Hu2005 comme critère de plasticité anisotrope. L'erreur maximale ne dépasse pas 4.6% et 4.8% respectivement avec le modèle élastoplastique et élasto-viscoplastique. Les mêmes tendances que celles observées avec le modèle élasto-plastique ont été constatées avec le modèle élasto-viscoplastique en termes de prédiction des coefficients d'anisotropie et des limites d'élasticité.



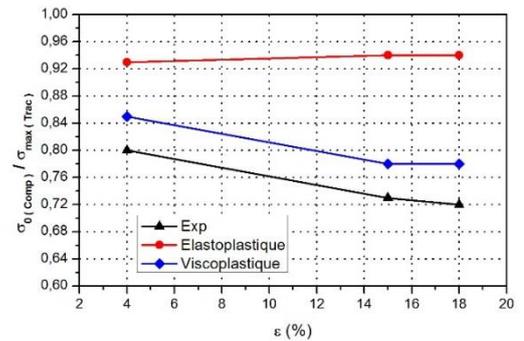
(a) $10^{-2}/s - 0^\circ - \epsilon_{\max} = 4\%$



(b) $10^{-2}/s - 0^\circ - \epsilon_{\max} = 15\%$



(c) $10^{-2}/s - 0^\circ - \epsilon_{\max} = 18\%$



(d) Effet Bauschinger

Figure IV-14 : Comparaison entre les résultats expérimentaux issus d'essais de traction-compression à différents niveaux de déformation sur l'alliage 2050 et les résultats numériques obtenus avec le modèle élasto-viscoplastique

La Figure IV-14 présente une comparaison des résultats expérimentaux et numériques des essais de traction-compression réalisés sur l'alliage 2050 (à 150°C) à différents niveaux de déformation (4, 15 et 18%). La direction de laminage (0°) est considérée pour tous ces essais avec une vitesse de déformation de 10^{-2} s^{-1} . La normalisation de la contrainte a été réalisée en utilisant la limite d'élasticité expérimentale obtenue dans la direction de laminage (σ_0).

Il est possible de constater que l'introduction de la loi d'écroutissage de Prager permet d'améliorer la prédiction de l'effet Bauschinger mis en évidence sur l'alliage 2050. En effet, l'erreur maximale (sur le ratio $\sigma_{0_Comp}/\sigma_{Max_Trac}$) passe de 23% (modèle élasto-plastique) à 6% (modèle élasto-viscoplastique). Cependant, une différence a été observée au niveau de la déformation obtenu lors de la précharge avec le modèle élasto-viscoplastique. Cette différence est liée à l'utilisation du modèle de Prager qui n'est valable que pour les faibles niveaux de déformation. À noter que le même effet de divergence sur la contrainte que celui mis en évidence avec le modèle élasto-plastique est détecté. La même explication que celle fournie dans le cas du modèle élasto-plastique peut être donnée. L'utilisation de l'équation de Balieu pour décrire l'écroutissage isotrope permet toutefois de restreindre cette divergence en limitant la chute de contrainte.

IV.3.2.2 Comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques de l'alliage AW551

La même procédure de comparaison utilisée pour l'alliage 2050 a été appliquée sur l'alliage AW551.

La comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques des essais de traction de l'alliage AW551 (à 350°C) à différentes vitesses de déformation ($5 \cdot 10^{-3}$, 10^{-2} et 10^{-1} s⁻¹) est donnée en Figure IV-15. Tous les essais ont été effectués dans la direction de laminage (0°). La normalisation de la contrainte a été réalisée en utilisant la limite d'élasticité expérimentale obtenue selon la direction de laminage (σ_0). Il est possible de constater que le caractère visqueux de l'alliage à la température considérée est relativement bien reproduit avec une erreur maximale de 15% (contre 40% avec le modèle élasto-plastique).

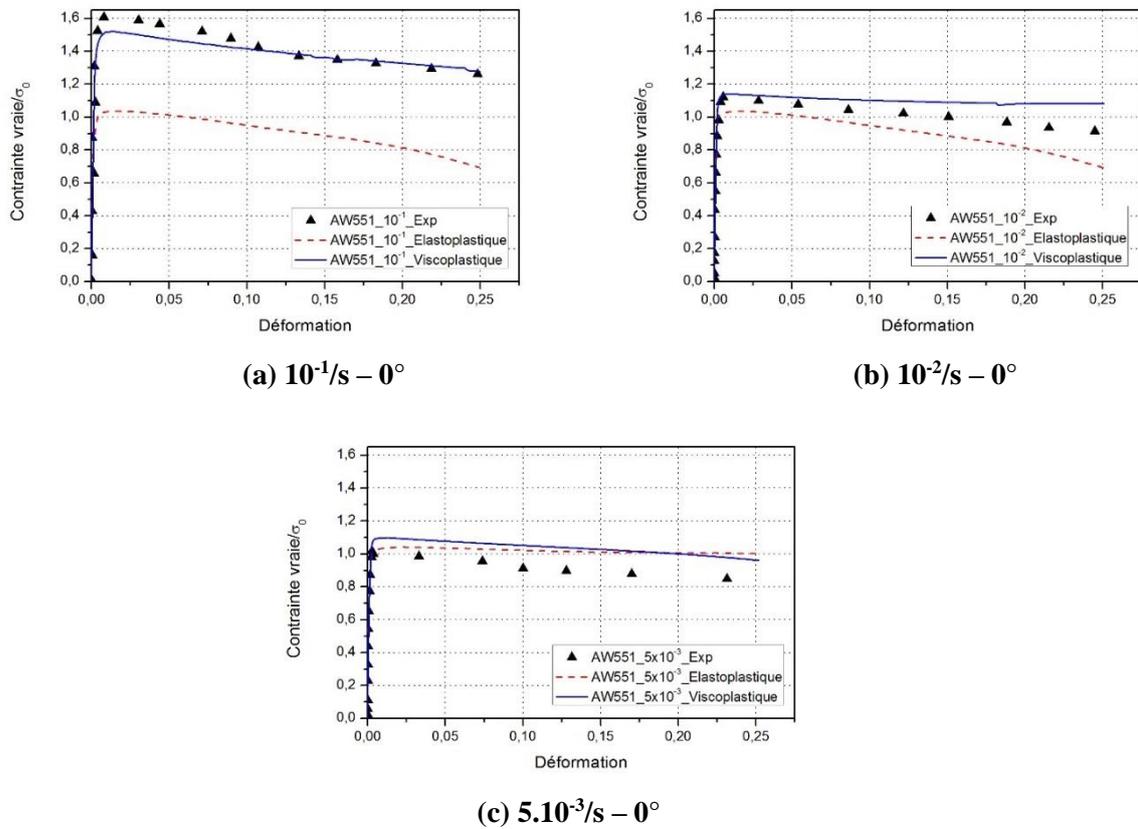
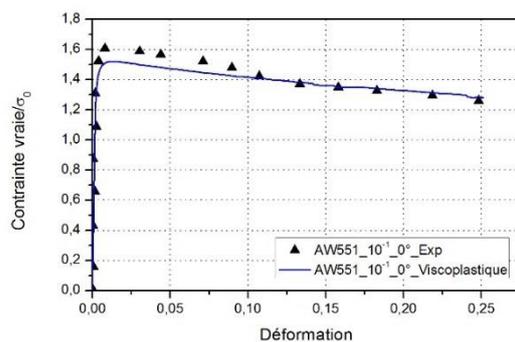
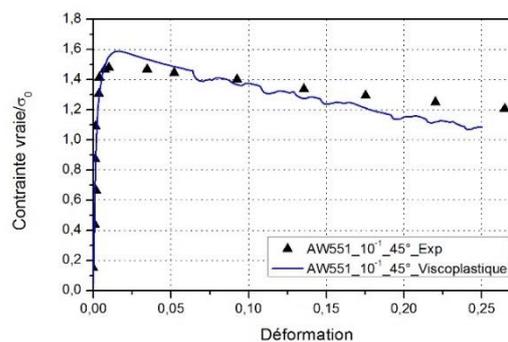


Figure IV-15 : Comparaison entre les résultats expérimentaux issus d'essais de traction sur l'alliage AW551 avec différentes vitesses de déformation et les résultats numériques obtenus avec le modèle élasto-viscoplastique

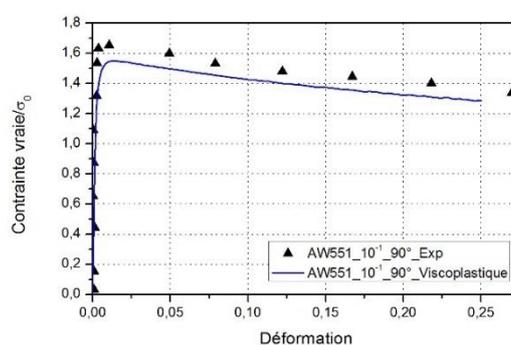
Afin d'étudier la capacité du critère de plasticité à prédire le comportement anisotrope de l'alliage AW551, une comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques des essais de traction dans différentes directions de prélèvement par rapport à la direction de laminage (0°, 45° et 90°) a été réalisée et est présentée en Figure IV-16. Tous ces essais ont été effectués à une vitesse de déformation de 10^{-1} s⁻¹. La normalisation des contraintes a été réalisée avec la limite d'élasticité expérimentale obtenue dans la direction de laminage (σ_0) avec une vitesse de déformation de $5 \cdot 10^{-3}$ s⁻¹. Quelle que soit la direction de prélèvement de l'éprouvette, une bonne prédiction du comportement de l'alliage AW551 a été obtenue avec le modèle élasto-viscoplastique : l'erreur maximale trouvée est aux alentours de 8%. En ce qui concerne la prédiction des coefficients d'anisotropie et des limites d'élasticité, les mêmes tendances qu'avec le modèle élasto-plastique sont observées.



(a) $10^{-1}/s - 0^\circ$



(b) $10^{-1}/s - 45^\circ$



(c) $10^{-1}/s - 90^\circ$

Figure IV-16 : Comparaison entre les résultats expérimentaux issus d'essais de traction sur l'alliage AW551 suivant différentes directions de prélèvements et les résultats numériques obtenus avec le modèle élasto-viscoplastique

IV.3.3 Bilan : Modèle élasto-viscoplastique

Le modèle élasto-viscoplastique développé et basé sur une loi unifiée est capable de prédire quasiment tous les comportements étudiés, soit : (i) le comportement anisotrope des deux alliages (2050 et AW551) à une température donnée (respectivement 150°C et 350°C), (ii) l'effet de la vitesse de déformation sur le comportement de deux alliages et (iii) l'écrouissage de l'alliage 2050. Toutefois, un écart dans les déformations apparaît lors des essais de traction/compression et des phénomènes de fluage/relaxation à l'intérieur du domaine délimité par la surface de charge ne peuvent pas être reproduits. Ces deux derniers points pourraient être corrigés en remplaçant le modèle d'écrouissage cinématique par un modèle non linéaire (de type Chaboche) et en modifiant le comportement du matériau en introduisant un modèle viscoélastique.

IV.4 Modèle de relaxation

IV.4.1 Description du modèle matériau

Afin de rester cohérent avec la loi de viscosité utilisée dans le modèle élasto-viscoplastique, une loi en sinus hyperbolique (équation (IV.68)) a été utilisée pour décrire le comportement visqueux de l'alliage 2050 au cours de sa relaxation, soit :

$$\dot{\epsilon} = Af(\sigma) = A. [\sinh(\alpha\sigma)]^{n_1} \quad (\text{IV.68})$$

Où α , A et n_1 sont les paramètres du matériau à déterminer. Ces paramètres sont identifiés à partir des données issues des essais de relaxation réalisés sur l'alliage 2050. Seules les 2000 premières secondes de relaxation sont considérées pour l'identification des paramètres, cette durée correspondant à celle prévue lors de la mise en forme industrielle. Une optimisation des paramètres trouvés analytiquement est réalisée en utilisant la méthode des moindres carrés sous *Mathematica*.

Comme expliqué précédemment (cf. Chapitre 2), ce modèle est identifié en complément du modèle élasto-viscoplastique pour deux raisons :

1. Pour respecter les jalons du projet : dans un premier temps, une approche simplifiée de la problématique a été réalisée. La mise en charge est décrite par un comportement élasto-plastique (comprenant une loi tabulée couplée au critère anisotrope de Hill48) et la relaxation est décrite en utilisant un comportement visqueux (équation (IV.68)) implémenté dans une sous-routine CREEP. Ceci constitue l'approche 1 décrite dans le Chapitre 2.
2. Pour pallier au principal défaut du modèle élasto-viscoplastique décrit précédemment. En effet, ce modèle ne prend en compte le comportement visqueux que dans le domaine plastique et ne peut pas décrire l'évolution des caractéristiques en fluage/relaxation lorsque la contrainte est inférieure à la valeur limite sur la surface de charge. La sous-routine UMAT a alors été modifiée en introduisant un modèle viscoélastique (basé sur l'équation (IV.68)) afin d'être capable de décrire un comportement visqueux dans le domaine délimité par la surface de charge. Ceci constitue l'approche 2 décrite dans le Chapitre 2.

IV.4.2 Calibration du modèle de relaxation

IV.4.2.1 Simulation des essais constitutifs : description du modèle numérique

Un modèle numérique représentant les essais de relaxation réalisés sur la Gleeble a été développé sous ABAQUS/standard. Les mêmes formes d'éprouvettes cylindriques que celles utilisées expérimentalement ont été reproduites, comme illustré en Figure IV-17. L'éprouvette est toutefois divisée en deux zones : la zone centrale (c.-à-d. la zone utile) est définie avec le matériau de l'étude tandis qu'un comportement élastique est considéré pour le reste de l'éprouvette. Cela permet de reproduire les mêmes conditions que celles rencontrées expérimentalement où seule la zone centrale est chauffée (et se déforme).

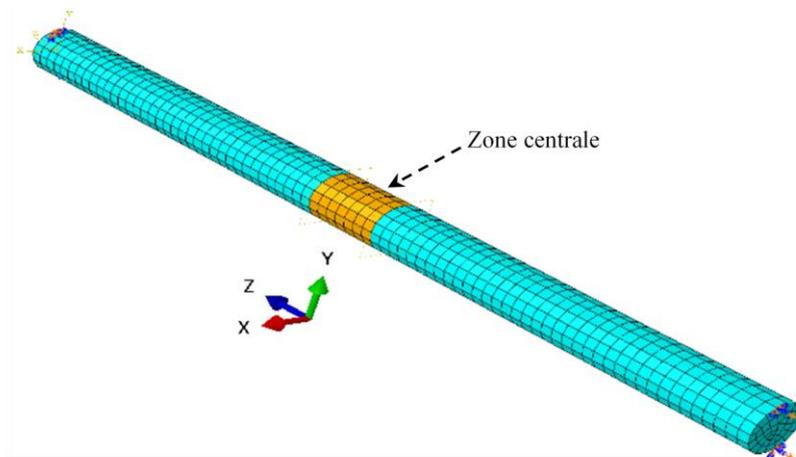


Figure IV-17 : Modèle numérique pour la relaxation de l'alliage 2050

Des éléments C3D8 avec une intégration totale ont été choisis pour ce modèle. La taille des éléments, dans ces éprouvettes cylindriques de 10mm de diamètre, est de l'ordre de 2 mm³.

La mise en charge de l'éprouvette est assurée en imposant, sur un côté de l'éprouvette, un déplacement selon l'axe Z tandis que l'autre côté est maintenu fixe. Ce déplacement permet de contrôler la vitesse et le niveau de déformation atteint. La relaxation est ensuite réalisée en bloquant le déplacement à la valeur préalablement atteinte. La vitesse de déformation de ces essais est de 10⁻² s⁻¹ avec différents niveaux de déformation en mise en charge (4%, 8%, 12% et 16%).

IV.4.2.2 Validation du modèle de relaxation pour l'alliage 2050

Une comparaison des résultats expérimentaux et numériques suite à des essais de relaxation a été réalisée (Figure IV-18). Tous les essais ont été effectués dans la direction de laminage (0°) et à une température de 150°C. La normalisation de la contrainte a été réalisée en utilisant la limite d'élasticité expérimentale obtenue selon la direction de laminage (σ_0). Seuls les résultats obtenus à 12% et 16% sont présentés.

Les 2 approches précédemment exposées (cf. §IV.4.1) ont été mises en oeuvre lors de la simulation numérique des essais, autrement dit, celle consistant à utiliser un modèle élasto-plastique couplé à un modèle visqueux (Approche 1) et celle consistant à utiliser le modèle élasto-viscoplastique modifié (Approche 2).

Il est possible de constater que, pour une déformation de 16%, la prédiction du modèle élasto-viscoplastique modifié est en bonne adéquation avec le résultat expérimental si la chute brutale de contrainte au début de l'essai expérimental est négligée (effet machine). La qualité de prédiction diminue avec la diminution du niveau de déformation. Une erreur de 21% a été trouvée pour les plus faibles niveaux de déformation.

Quel que soit le niveau de déformation un petit écart est toujours présent entre les deux modèles matériaux. Cette différence peut s'expliquer par l'écart de contrainte au début de la relaxation, ce qui est principalement dû à l'utilisation d'un modèle non visqueux lors de la mise en charge dans l'approche 1.

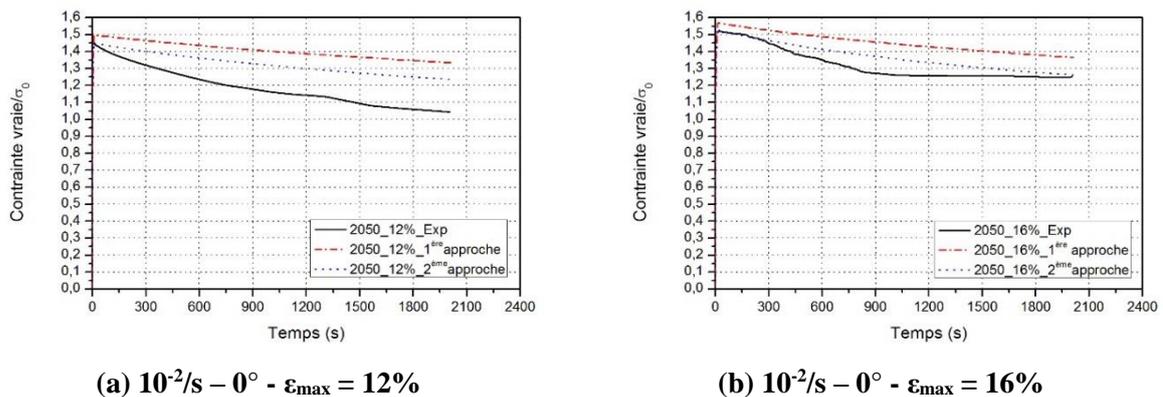


Figure IV-18 : Comparaison entre les résultats expérimentaux issus d'essais de relaxation sur l'alliage 2050 à différents niveaux de déformation et les résultats numériques obtenus avec un modèle standard (modèle élasto-plastique couplé à un comportement visqueux) et le modèle élasto-viscoplastique modifié

IV.4.3 Bilan : Modèle de relaxation

Le modèle de relaxation décrit par le modèle élasto-viscoplastique modifié (2^{ème} approche) assure une bonne prédiction du phénomène de relaxation de l'alliage 2050 pour les niveaux de déformations

élevés. Il est incapable de prédire ce phénomène pour les plus faibles niveaux de déformation. Ceci peut être dû au choix de la loi en sinus hyperbolique qui ne permet pas de bien représenter la relaxation de l'alliage. Une amélioration possible consisterait à tester un autre modèle comme par exemple une loi puissance.

IV.5 Modèle de fluage

IV.5.1 Description du modèle

Pour les mêmes raisons que celles formulées pour le modèle de relaxation (cf. §IV.4.1), un modèle de fluage en supplément du modèle élasto-viscoplastique précédemment décrit a été utilisé. Deux approches ont été adoptées pour décrire le comportement en fluage à des niveaux de contrainte inférieurs à la limite d'élasticité du matériau :

- Approche 1 : utilisation d'un modèle visqueux du type Bailey-Norton sans prise en compte de l'anisotropie. Ce modèle est déjà implémenté dans ABAQUS sous le nom « Time hardening ». Il est décrit par l'équation (IV.69) :

$$\dot{\varepsilon}_{th} = A\bar{\sigma}^n t^m \quad (IV.69)$$

Où A, n et m sont les paramètres du matériau à identifier. Pour des raisons physiques, les paramètres A et n doivent être positifs et $-1 < m \leq 0$. Cette équation peut également être écrite (en intégrant l'équation (IV.69) en fonction du temps) sous la forme suivante :

$$\varepsilon_{th} = \frac{1}{m+1} A\bar{\sigma}^n t^{m+1} \quad (IV.70)$$

Sachant que pour un essai de traction uni-axial : $\bar{\sigma} = \sigma$.

- Approche 2 : utilisation d'un modèle visqueux en sinus hyperbolique (équation (IV.68)) implémenté sous ABAQUS dans une subroutine CREEP.

Les paramètres de chaque modèle (Bailey-Norton et Sinus hyperbolique) ont été identifiés à partir des résultats des essais de fluage réalisés sur l'alliage AW551 à la température de 350°C, suivant la direction de laminage et avec des niveaux de contrainte inférieurs à la limite d'élasticité du matériau. Une optimisation des paramètres a été réalisée sous *Mathematica* par la méthode des moindres carrés.

IV.5.2 Calibration du modèle de fluage

IV.5.2.1 Simulation des essais constitutifs : description du modèle numérique

Un modèle numérique représentant les essais de fluage réalisés sur la Gleeble a été développé sous ABAQUS/standard. Les mêmes formes d'éprouvettes plates que celles utilisées expérimentalement ont été reproduites, comme illustré en Figure IV-19. L'éprouvette se compose toujours de deux zones : la zone centrale (c.-à-d. la zone utile) est définie avec le matériau de l'étude tandis que le reste de l'éprouvette est considérée avec un comportement élastique.

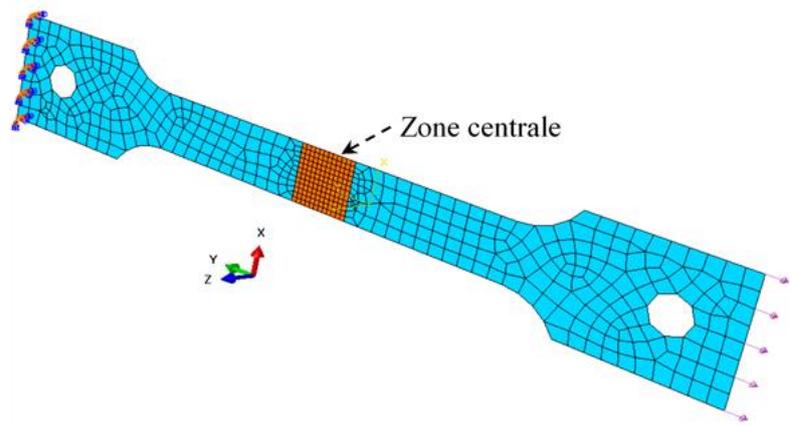


Figure IV-19 : Modèle numérique pour le fluage de l'alliage AW551

Des éléments S4R avec une intégration réduite ont été choisis pour ce modèle. La taille des éléments, dans ces éprouvettes plates de 2mm d'épaisseur, est de l'ordre de 6mm^2 dans la zone rigide et de 1mm^2 dans la zone centrale.

La mise en charge de l'éprouvette jusqu'au niveau de contrainte désiré est assuré en imposant, sur un côté de l'éprouvette, un effort selon l'axe Y tandis que l'autre côté est maintenu fixe. Cet effort est ensuite contrôlé au cours du temps pour garantir l'application d'une contrainte constante au cours du fluage de l'éprouvette. Les niveaux de contrainte testés sont : $0.97x\sigma_e$, $0.48x\sigma_e$, $0.39x\sigma_e$ et $0.25x\sigma_e$.

IV.5.2.2 Validation du modèle de fluage pour l'AW551

La Figure IV-20 montre une comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques suite à des essais de fluage sur l'alliage AW551. Tous les essais ont été effectués dans la direction de laminage (0°) et à une température de 350°C . La normalisation de la déformation et du temps de fluage a été réalisée en utilisant, respectivement, la déformation expérimentale maximale à la rupture ($\epsilon_{R\text{Max}}$) et le temps maximal à la rupture ($t_{R\text{Max}}$).

Les deux modèles prédisent relativement bien le fluage secondaire, toutefois, le modèle visqueux en sinus hyperbolique offre la meilleure prédiction quelle que soit la configuration expérimentale considérée. Comme expliqué précédemment, le fluage tertiaire (augmentation brutale de la déformation) n'est pas reproduit par les deux modèles. Mais les niveaux de déformation mis en jeu lors de la mise en forme de la pièce industrielle restent relativement éloignés des valeurs critiques.

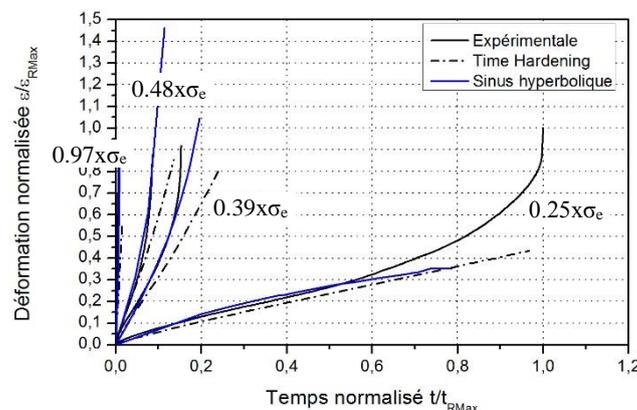


Figure IV-20 : Comparaison entre les résultats expérimentaux issus d'essais de fluage sur l'alliage AW551 à différents niveaux de contraintes et les résultats numériques obtenus en appliquant les deux modèles de fluage (type Bailey-Norton et type sinus hyperbolique)

IV.5.3 Bilan : Modèle de fluage

Il est possible de remarquer que, d'une part, ces lois sont assez représentatives du comportement en fluage secondaire tout en restant simples à identifier, et que, d'autre part, elles ne permettent pas de prendre en considération l'augmentation rapide de la déformation en se dirigeant vers l'endommagement en fluage tertiaire. Il existe, dans la littérature, d'autres modèles permettant de décrire tous les modes de fluage comme le modèle « θ -projection » (Cf. Chapitre 2). Celui-ci permet de prendre en considération le durcissement et la nucléation, l'accumulation et la croissance des cavités (fluage tertiaire). Une étude a été réalisée avec ce modèle pour prédire le comportement au fluage de l'alliage AW551. Les résultats sont montrés en Annexe D.

IV.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré : (i) à la description des différents modèles matériaux implémentés sous ABAQUS dans des sous-routines utilisateurs et (ii) au recalage des paramètres des différents modèles par comparaison des résultats expérimentaux aux résultats numériques issus des simulations des essais constitutifs.

Le premier modèle développé est un modèle élasto-plastique comprenant le critère anisotrope de Hu2005 et un écrouissage isotrope décrit par une loi polynomiale. Il a été implémenté sous ABAQUS dans une sous-routine UMAT 3D. Il a montré une bonne prédiction du comportement de l'alliage 2050 qui est faiblement visqueux mise à part la prédiction de l'effet Bauschinger. Le comportement de l'alliage AW551 est, en revanche, difficilement reproductible avec ce modèle de par sa forte viscosité à la température considérée. Il a aussi pu être montré que le critère de Hu2005 semble mieux prédire l'anisotropie des deux alliages, comparé à un critère classique du type Hill48.

Le second modèle développé est un modèle élasto-viscoplastique comprenant le critère anisotrope de Hu2005, un écrouissage isotrope de Balieu, un écrouissage cinématique de Prager et une loi visqueuse en sinus hyperbolique. Il a été implémenté sous ABAQUS dans une sous-routine UMAT 3D. Il a ainsi pu être montré que la prédiction des résultats expérimentaux est améliorée avec ce modèle comparé au modèle précédent (élasto-plastique) pour les deux alliages : une amélioration de la prédiction de l'effet Bauschinger obtenu avec l'alliage 2050 et de l'effet de la vitesse de déformation sur l'alliage AW551. Toutefois, ce modèle présente l'inconvénient de ne pas pouvoir prédire le comportement des matériaux en fluage/relaxation lorsque les niveaux de contraintes sont compris dans le domaine délimité par la surface de charge.

Le modèle élasto-viscoplastique a été modifié afin de pallier l'inconvénient cité précédemment. Un modèle viscoélastique comprenant uniquement une loi visqueuse en sinus hyperbolique a été introduit dans la sous-routine UMAT. Ce modèle permet ainsi de décrire le comportement visqueux à l'intérieur du domaine délimité par la surface de charge, autrement dit, de décrire une phase de relaxation des contraintes après une mise en charge. Le modèle élasto-viscoplastique « modifié » a été employé pour prédire le comportement de l'alliage 2050 lors d'essais de traction/relaxation, mais, n'assure pas une bonne prédiction du phénomène de relaxation pour des faibles niveaux de déformation.

Le modèle élasto-viscoplastique modifié est implémenté sous ABAQUS dans une sous-routine 3D et n'est donc pas adapté à une utilisation sur des tôles minces. En effet, pour rappel, un des procédés de mise en forme considéré dans cette étude est un formage en fluage sur tôles minces. Pour contrecarrer cet inconvénient, il a été décidé d'implémenter le modèle viscoélastique précédent (loi visqueuse en sinus hyperbolique) dans une sous-routine CREEP 2D afin de décrire le fluage de tôles minces soumises à des niveaux de contrainte inférieurs à la limite d'élasticité du matériau. Ce modèle a montré une bonne prédiction du comportement de l'alliage AW551 : il est en effet possible de reproduire le fluage secondaire du matériau pour tous les niveaux de contrainte compris dans le domaine élastique de celui-ci.

Ainsi, différents modèles matériaux ont été mis en place et permettent de reproduire le comportement des deux matériaux (2050 et AW551) dans toutes les configurations thermomécaniques susceptibles d'être mises en jeu lors de leur mise en forme par les divers procédés envisagés (emboutissage de tôles de 40mm d'épaisseur et formage au fluage de tôles de 2mm d'épaisseur). Les chapitres suivants décrivent d'ailleurs la mise en forme des pièces prototypes et présentent une comparaison des pièces formées aux résultats numériques issus de la simulation des différents procédés de mise en forme.