

Impact avec rupture perforation de tôles minces

Sommaire

5.1	État de l'art sur la perforation	101
5.1.1	Approche expérimentale de la perforation	102
5.1.2	Les modèles analytiques de la perforation	105
5.1.3	Les modèles numériques de perforation	109
5.1.4	Conclusions sur l'état de l'art de la perforation	114
5.2	Perforation d'alliage d'aluminium de désignation 2024 T3 à basse vitesse	115
5.2.1	Présentation des expériences de perforation	115
5.2.2	Résultats expérimentaux	116
5.2.3	Applications de modèles analytiques de perforation	123
5.2.4	Modèle éléments finis pour la perforation	127
5.2.5	Résultats et discussions	133
5.2.6	Implémentation de la loi de comportement identifiée par les essais Charpy dans le modèle de perforation	142
5.3	Extension du modèle numérique à l'étude de la perforation à grande vitesse de l'alliage d'aluminium 2024 T3	144
5.3.1	Vitesses de transition du mode de perforation	144
5.3.2	Comparaison avec les modèles de perforation analytique	147
5.4	Conclusion	150

Lorsque deux structures s'impactent, les échanges énergétiques mis en jeu peuvent mener à la rupture d'une des deux structures comme le montre la figure 1.8. L'une peut alors venir perforer l'autre.

Il est proposé dans ce chapitre, une étude sur la perforation d'une plaque en alliage d'aluminium 2024 T3, représentative d'un fuselage d'avion, par un poinçon conique, représentatif du perforateur du système BELOCOPA.

Après une bibliographie sur les expérimentations et la modélisation de la perforation (section 5.1), une étude est proposée sur des tôles d'épaisseur 2 et 4 mm. Des essais sont effectués sur un puits de chute instrumentée à faibles vitesses d'impact (jusqu'à 6,5 m/s). Un modèle analytique et un modèle numérique, en éléments finis de type coque, sont proposés dans les sections 5.2.3.2 et 5.2.4. Pour de grandes vitesses de perforation, le modèle numérique permet d'identifier les transitions entre différents modes de perforation (section 5.3).

5.1 État de l'art sur la perforation

L'impact d'un solide quasi-indéformable sur une cible peut produire la rupture de celle-ci. Le passage complet du solide à travers la cible est appelé perforation. Un phénomène de rupture à grande vitesse de déformation du matériau (rupture dynamique) est observé. Une revue bibliographique présente les essais de caractérisation et les grandes notions liés à la perforation.

5.1.1 Approche expérimentale de la perforation

Souvent, les essais de perforation sont classés en deux catégories : les essais à faible vitesse (inférieure à 50 m/s) et les essais à grande vitesse (supérieure à 50 m/s) [Grytten 2009]. Les résultats de perforation sont dépendants de la géométrie et des matériaux de l'impacteur et du domaine impacté [Iqbal 2010]. Les propriétés des matériaux sont relatives à leur comportement dynamique (élasto-visco-plastique et à la rupture). Ces effets sont mis en évidence par Grytten lors d'essais de perforation de plaques en alliage d'aluminium de désignation 5083 [Grytten 2009]. Une étude sur la variation de la vitesse de l'impacteur pendant la perforation permet une bonne description du phénomène [Borvik 2004]. La vitesse résiduelle, après impact, notée V_r , est souvent tracée en fonction de la vitesse initiale. Une vitesse balistique limite V_{bl} est alors définie comme la vitesse initiale minimale pour qu'il y ait perforation totale ou encore comme la vitesse pour laquelle l'impacteur a 50 % de chance de perforer la cible ([Borvik 2004], [Iqbal 2010], [Kpenyigba 2013]). Rodriguez-Martinez [Rodriguez-Martinez 2011] introduit la relation de Recht et Ipson, entre cette vitesse, la vitesse initiale V_0 et la vitesse résiduelle V_r de l'impacteur à l'aide d'une constante k :

$$V_r = (V_0^k - V_{bl}^k)^{1/k}, V_0 > V_{bl} \quad (5.1)$$

La perforation est un problème d'échange énergétique. L'énergie absorbée par la plaque, notée E_a , est définie comme la différence des énergies cinétiques de l'impacteur avant et après impact [Rodriguez-Martinez 2011] :

$$E_a = \frac{1}{2} m_{imp} (V_0^2 - V_r^2) \quad (5.2)$$

où m_{imp} est la masse de l'impacteur.

Cette énergie absorbée lors de l'impact peut varier en fonction de la forme de l'impacteur. Pour Jones [Jones 2008], un impacteur en forme ogive donne une énergie de perforation moins importante qu'un impacteur conique ou qu'un impacteur de forme hémisphérique (plus grande énergie). L'impacteur de forme conique donne une ouverture en pétale pour de faibles épaisseurs de plaque (4 mm). Il y a arrachement de matière pour les plaques de grandes épaisseurs (8 mm). Dans une étude sur la perforation de plaque en alliages d'aluminium, Jones [Jones 2011] montre qu'un projectile à nez plat est plus favorable à la perforation qu'un impacteur à nez hémisphérique. Jones [Jones 2008] propose une équation empirique d'un facteur énergétique f_E de perforation d'un acier bas carbone, valable pour toutes formes d'impacteur, en fonction du diamètre d de l'impacteur, de l'épaisseur e et du diamètre D de la plaque :

$$f_E = \frac{\pi d}{2 e} + 2 \left(\frac{d}{e} \right)^{1,53} \left(\frac{D}{d} \right)^{0,21} \quad (5.3)$$

L'état de triaxialité dans la cible dépend de la forme de l'impacteur. Pour un impacteur plan, le taux de triaxialité est nul, pour un impacteur conique le taux de triaxialité est égale à 0.3 et pour un impacteur hémisphérique le taux de triaxialité est égale à 0.66 [Kpenyigba 2013].

Les puits de chute instrumentés ou les canons pneumatiques permettent l'étude des phénomènes de perforation. La force d'impact, le déplacement de l'impacteur, la déformation de la plaque peuvent être relevés à l'aide de capteurs de force, de déplacements ou par des accéléromètres [Grytten 2009]. Borvik [Borvik 2004] utilise en plus une caméra rapide pour l'observation de la pénétration du projectile dans la cible. La technique de stéréo-corrélation d'image permet d'obtenir la déformation de la plaque pendant la perforation [Grytten 2007]. Afin d'obtenir une mesure de la force, certains auteurs utilisent des barres d'Hopkinson qui viennent perforer une cible [Grytten 2009], [Ramezani 2010]. Le but est la plupart du temps d'étudier la rupture à grande vitesse d'impact (>20 m/s). Rusinek [Rusinek 2009] étudie la perforation normale de

plaques en acier par un poinçon hémisphérique indéformable. La plaque est fixée sur un tube d'Hopkinson jouant le rôle de barre de transmission : la force de perforation peut être relevée en calculant la valeur de la déformation dans la barre de transmission $T(t)$ (Figure 5.1). Il compare les résultats expérimentaux avec des simulations numériques en mode de résolution explicite. Les essais sont effectués pour des vitesses jusqu'à 300 m/s. En fonction de cette vitesse et de la lubrification du contact, le mode de fissuration peut varier d'une simple ouverture de pétale à un arrachement de matière. Par exemple, pour un essai à une vitesse d'impact de 50 m/s, l'absence de lubrification provoque une perforation par arrachement d'un morceau de la cible et l'apparition de nombreuses fissures. À contrario, pour une même vitesse, lorsqu'il y a lubrification de la cible, le mode de perforation est par pétalisation. Le phénomène d'arrachement est expliqué par la concentration des déformations plastiques et l'apparition de striction dans la cible. Il met aussi en évidence l'importance du gradient de température pour la rupture (la température peut s'élever de plus de 150 K).

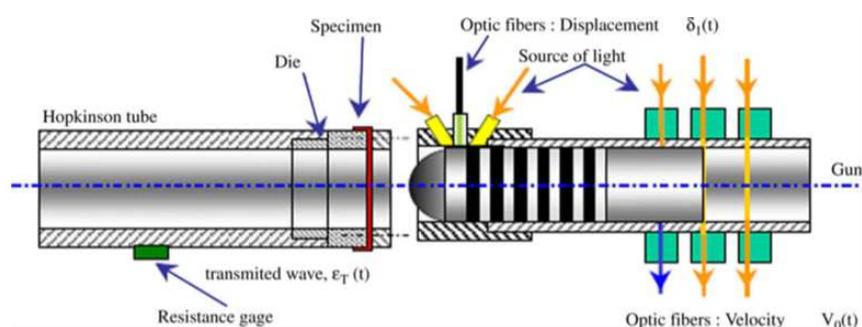


FIGURE 5.1 – Perforation d'une plaque d'acier à l'aide d'une barre d'Hopkinson de transmission [Rusineck 2009].

D'autres auteurs utilisent les barres d'Hopkinson pour réaliser des essais de perforation [Ramezani 2010] [Hockauf 2007] [Elnasri 2006]. Ces essais peuvent reproduire un procédé de mise en forme (essais de type bulge de Ramezani [Ramezani 2010]), ou être une étude sur la résistance de matériaux composites, de structures sandwichs, de polymères et alliages métalliques [Hockauf 2007] [Elnasri 2006]. L'utilisation de barres d'Hopkinson est justifiée par la facilité à obtenir l'effort pendant la perforation [Elnasri 2006].

Un exemple de montage de barre d'Hopkinson pour la perforation est visible sur la figure 5.2 [Elnasri 2006]. La perforation s'effectue de façon inversée (la structure sandwich impacte le perforateur d'Hopkinson). La vitesse maximale de l'essai est de 45 m/s. Avec ce montage, Elnasri réussit à obtenir la force de perforation en fonction du déplacement dans le matériau sandwich (Figure 5.3).

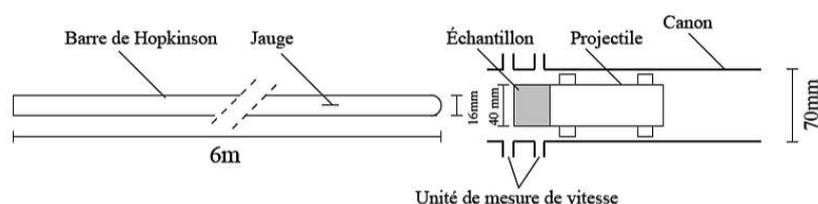


FIGURE 5.2 – Montage inversé d'Elnasri [Elnasri 2006].

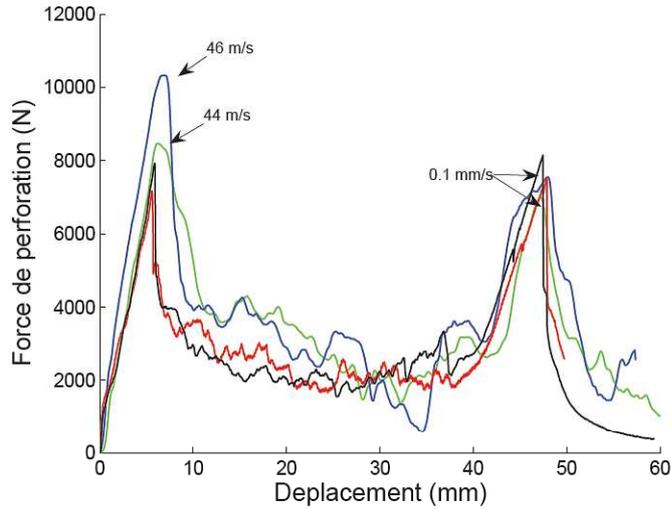


FIGURE 5.3 – Courbe de la force d’impact en fonction du déplacement pour une structure sandwich [Elnasri 2006].

A faible vitesse ($\ll 50$ m/s), des pétales apparaissent pendant la perforation de plaques minces. Rodriguez-Martinez [Rodriguez-Martinez 2011] réalise des essais de perforation sur un alliage d’aluminium de désignation 2024 T3, pour différentes températures. Le nombre de pétales observé varie entre 4 et 6. Dans le cadre d’une étude sur la perforation de plaques en aluminium de désignation 1100 et à de grandes vitesses d’impact ($\gg 50$ m/s), Gupta et Iqbal [Iqbal 2010] montrent l’influence de l’angle d’impact sur le nombre de pétales. Plus l’angle d’impact est grand par rapport à la normale, plus le nombre de pétales est petit. Cependant prédire le nombre de pétales lors de la perforation par un impacteur axi-symétrique reste difficile.

Dans le cas d’un poinçon conique, Atkins [Atkins 1998] détermine le nombre de pétales par une approche analytique et énergétique. Le travail total de perforation est continue lorsqu’il y a apparition de la rupture. Cette continuité permet le calcul du nombre de pétales. Il considère que le rayon perforé r_p est connu avant le début de la propagation des fissures. Le nombre d’Atkins n établissant le nombre de pétales est alors déterminé par l’expression suivante :

$$n = \frac{2\pi\sigma_0 r_p \varepsilon_f}{G} \quad (5.4)$$

où σ_0 est la limite d’élasticité, ε_f la déformation à la rupture, et G la ténacité. Le nombre n n’est pas un entier dans la formule de Atkins. Le nombre de pétale est donc la partie entière de ce nombre n . Atkins propose une évolution de cette équation lorsque le rayon perforé est difficile à déterminer. Il considère que le rayon peut être approximé par $r_p = 1/2 e_0 \tan(\phi)$ (e_0 est l’épaisseur de la plaque et ϕ le demi-angle du poinçon). Ainsi, l’expression devient :

$$n = \frac{\pi\sigma_0 e_0 \tan(\phi) \varepsilon_f}{G} \quad (5.5)$$

Dans une étude sur la perforation de plaques en acier, Dean [Dean 2009] montre qu’il existe une transition, en terme de vitesse initiale, entre une perforation par pétalisation, par arrachement et enfin par fragmentation de la cible.

La perforation peut être considérée comme un phénomène global (toute la plaque contribue à la perforation) ou local. Dans le cas d’une perforation de plaque en alliage d’aluminium, Jones [Jones 2011] évoque une formule empirique qui lie le temps de perforation t_{imp} et le temps t_{propa} que met l’onde plastique pour se propager du premier point d’impact vers la frontière de la plaque

en fonction du nombre d'endommagement de Johnson $\Phi = \rho V_0^2 / \sigma$, de la densité ρ , de la vitesse initiale V_0 , de la contrainte d'écoulement σ , du rayon de la plaque R et de son épaisseur e :

$$\frac{t_{propa}}{t_{imp}} = \frac{\Phi}{6} \left(\frac{R}{e}\right)^2 \quad (5.6)$$

La valeur critique est difficile à obtenir. Par exemple, pour une plaque d'aluminium ayant une masse volumique de 2720 kg/m^3 , un rapport R/e de 10, une contrainte d'écoulement de 272 MPa et pour une vitesse initiale de 10 m/s, le rapport $\frac{t_{propa}}{t_{imp}}$ est égal à 0,016. Cela signifie que la durée de perforation est bien supérieure à la durée de propagation des perturbations plastiques. Ainsi, la déformation de la plaque entière contribuera à la perforation : le phénomène est dit global et non local. Il est à remarquer que pour de grandes vitesses d'impact, la formule impose la localisation de la perforation.

5.1.2 Les modèles analytiques de la perforation

5.1.2.1 Perforation par un poinçon conique d'une plaque épaisse

Les modèles analytiques de perforation utilisent des lois de comportement simples. Forrestal [Forrestal 2009] utilise un modèle d'écrouissage empirique où la contrainte est exprimée en fonction de la limite d'élasticité σ_0 , de la masse volumique de la plaque ρ_m , d'un paramètre B_0 dépendant de la vitesse d'impact et du matériau (identifié par méthode inverse) et de la vitesse V du poinçon tel que :

$$\sigma = \sigma_0 + \rho_m B_0 V^2 \quad (5.7)$$

La perforation d'une plaque d'épaisseur e par un poinçon conique dont le diamètre est petit devant l'épaisseur est décrite ici. Du point de vue de la plaque, cela revient à étudier la réponse plastique de l'agrandissement, à une vitesse V , d'une cavité conique. Le poinçon est composé d'une partie cylindrique de rayon a et de longueur L ainsi que d'une partie conique de longueur l et d'angle par rapport à l'axe de symétrie ϕ (Figure 5.4). La vitesse radiale de la croissance de la cavité s'écrit $V = V_z \tan(\phi)$ où V_z est la vitesse de pénétration du poinçon. La force axiale de la pénétration s'écrit :

$$F_z = \pi a^2 (\sigma_0 + \rho_m B_0 (V_z \tan \phi)^2) \quad (5.8)$$

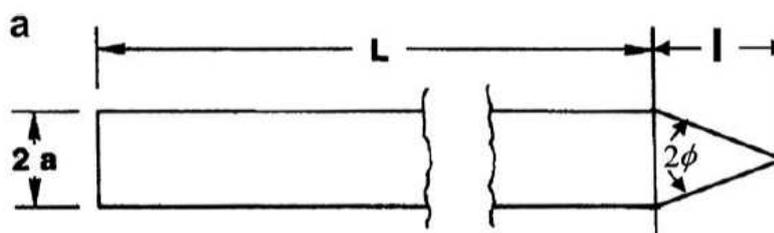


FIGURE 5.4 – Poinçon de forme conique [Forrestal 2009].

A partir du principe fondamental de la dynamique, il est possible d'écrire l'équation suivante en fonction de m la masse du poinçon :

$$m \frac{dV_z}{dt} = m \frac{dz}{dt} \frac{dV_z}{dz} \quad (5.9)$$

ou encore :

$$-F_z = mV_z \frac{dV_z}{dz} \quad (5.10)$$

où z est la direction principale de l'impact.

La masse du poinçon peut s'écrire à partir de sa masse volumique ρ_p et de ses paramètres géométriques :

$$m = \pi a^2 \rho_p \left(L + \frac{l}{3}\right) \quad (5.11)$$

À l'aide de l'expression de la force de l'équation 5.8 et de la masse de l'équation 5.11, l'équation différentielle 5.10 peut s'écrire :

$$\frac{\sigma_0 dz}{(L + l/3)\rho_p} = -\frac{1}{2M} \frac{d(1 + MV_z^2)}{1 + MV_z^2} \quad (5.12)$$

avec :

$$M = \frac{\rho_m B_0 \tan^2 \phi}{\sigma_0} \quad (5.13)$$

La vitesse balistique limite pour qu'il y ait perforation, V_{bl} , peut se déduire de l'équation différentielle 5.12 en imposant les conditions initiales et finales suivantes :

- Si $t = 0$, $V_z = V_{bl}$ et $z = 0$;
- Si $t = t_{final}$, $V_z = 0$ et $z = e$.

La vitesse s'exprime alors :

$$V_{bl} = \frac{\sigma_0}{\rho_m B_0 \tan^2 \phi}^{1/2} \left(\exp \left(\frac{2e}{L + l/3} \frac{\rho_m}{\rho_p} B_0 \tan^2 \phi \right) - 1 \right)^{1/2} \quad (5.14)$$

La vitesse résiduelle V_r peut être calculée sur le même modèle que la vitesse balistique limite, avec les conditions initiales et finales suivantes :

- Si $t = 0$ $V_z = V_0$ et $z = 0$;
- Si $t = t_{final}$ $V_z = V_r$ et $z = e$.

Forrestal [Forrestal 2009] montre que cette vitesse résiduelle peut alors s'écrire en fonction de la vitesse initiale V_0 :

$$V_r = \sqrt{V_0^2 - V_{bl}^2} \exp \left(-\frac{e}{L + l/3} \frac{\rho_m}{\rho_p} B_0 \tan^2 \phi \right) \quad (5.15)$$

On remarque que les vitesses résiduelles et balistiques limites de perforation sont indépendantes du rayon a de l'impacteur. La figure 5.5 est un exemple de comparaison entre le modèle analytique et les expériences de fissuration.

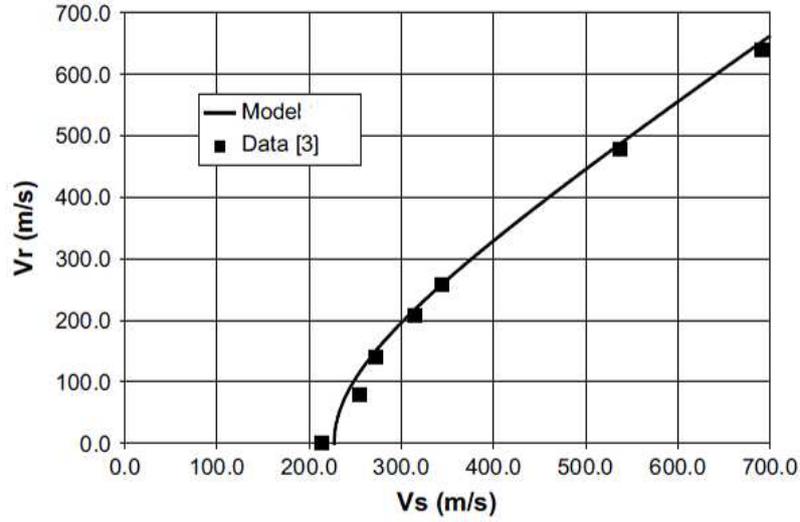


FIGURE 5.5 – Vitesse résiduelle en fonction de la vitesse initiale : Comparaison du modèle analytique et des expériences [Forrestal 2009].

5.1.2.2 Perforation par un poinçon en forme d'ogive d'une plaque épaisse

Le modèle analytique de la perforation d'une plaque par un impacteur en forme d'ogive [Forrestal 2009] est similaire au modèle de la partie précédente. Les variables seront appelées de la même façon que dans la partie précédente. La figure 5.6 donne la géométrie de l'impacteur. La masse de l'impacteur est définie à partir d'un facteur $k_1 = f(l, a)$ telle que :

$$m = \pi \rho_p a^2 (L + k_1 l) \quad (5.16)$$

avec :

$$k_1 = (4\psi^2 - 4\psi/3 + 1/3) - \frac{4\psi^2(2\psi - 1)}{\sqrt{4\psi - 1}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{4\psi - 1}}{2\psi}\right) \quad (5.17)$$

et

$$\psi = \frac{1}{4} \left(\left(\frac{l}{a} \right)^2 + 1 \right) \quad (5.18)$$

Le terme ψ est appelé le facteur rayon de la tête de l'impacteur. La force s'écrit :

$$F_z = \pi a^2 (\sigma_0 + \rho_m B_0 N(\psi) V_z^2) \quad (5.19)$$

$$N(\psi) = 8\psi^2 \ln\left(\frac{2\psi}{2\psi - 1}\right) - (1 + 4\psi) \quad (5.20)$$

En regardant les expressions précédentes, la vitesse minimale de perforation V_{bl} et la vitesse résiduelle V_r peuvent s'écrire facilement en reprenant les expressions de l'impacteur conique. Le terme $l/3$ est remplacé par $k_1 l$ et le terme $\tan^2(\phi)$ par $N(\psi)$:

$$V_{bl} = \frac{\sigma_0}{\rho_m B_0 N(\psi)}^{1/2} \left(\exp\left(\frac{2e}{L + k_1 l} \frac{\rho_m}{\rho_p} B_0 N(\psi)\right) - 1 \right)^{1/2} \quad (5.21)$$

$$V_r = \sqrt{V_0^2 - V_{bl}^2} \exp\left(-\frac{e}{L + k_1 l} \frac{\rho_m}{\rho_p} B_0 N(\psi)\right) \quad (5.22)$$

Ces expressions sont confrontées à l'expérience par Forrestal [Forrestal 2009] pour des impacts sur des plaques en alliage d'aluminium de désignation 6061-T651. La figure 5.7 montre la bonne adéquation du modèle avec les essais.

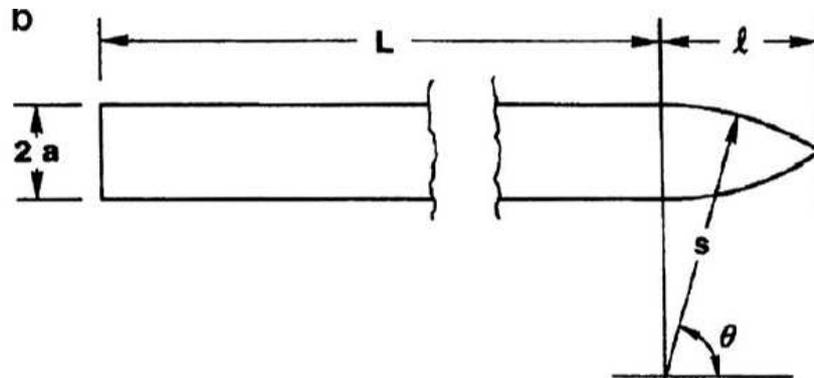


FIGURE 5.6 – Poinçon en forme d'ogive [Forrestal 2009].

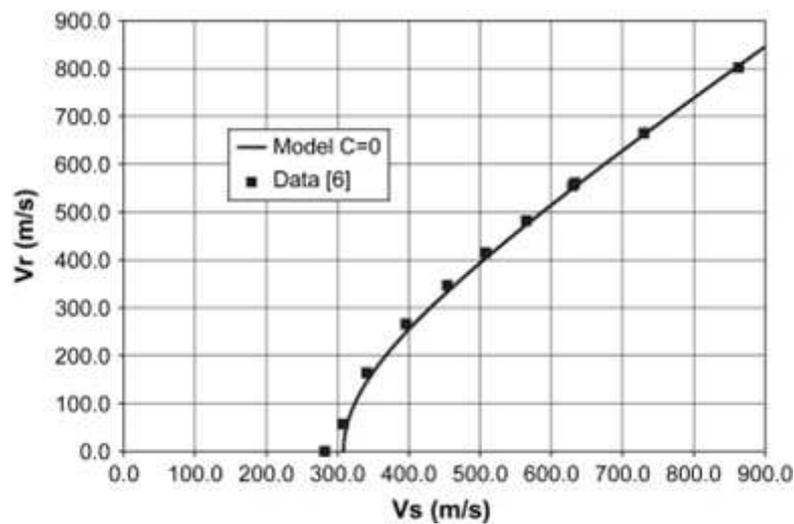


FIGURE 5.7 – Vitesse résiduelle en fonction de la vitesse initiale pour un impacteur en forme d'ogive : Comparaison du modèle analytique et des expériences [Forrestal 2009].

Le tableau 5.1 est un résumé des modèles analytiques de perforation.

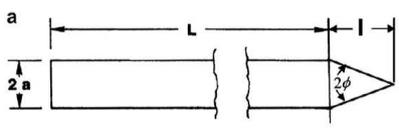
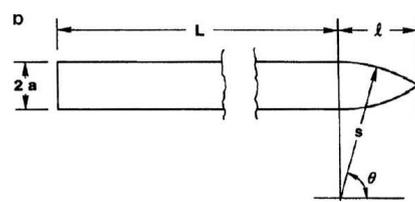
	Nez en forme de Cône	Nez en forme d'ogive
Modèle		
V_{bl}	$\frac{\sigma_0}{\rho_m B_0 \tan^2 \phi}^{1/2} (\exp(\frac{2e}{L+l/3} \frac{\rho_m}{\rho_p} B_0 \tan^2 \phi) - 1)^{1/2}$	$\frac{\sigma_0}{\rho_m B_0 N(\psi)}^{1/2} (\exp(\frac{2e}{L+k_1 l} \frac{\rho_m}{\rho_p} B_0 N(\psi)) - 1)^{1/2}$
V_r	$\sqrt{V_0^2 - V_{bl}^2} \exp(-\frac{e}{L+l/3} \frac{\rho_m}{\rho_p} B_0 \tan^2 \phi)$	$\sqrt{V_0^2 - V_{bl}^2} \exp(-\frac{e}{L+k_1 l} \frac{\rho_m}{\rho_p} B_0 N(\psi))$
$N(\psi)$	non défini	$8\psi^2 \ln(\frac{2\psi}{2\psi-1}) - (1 + 4\psi)$
k_1	non défini	$(4\psi^2 - 4\psi/3 + 1/3) - \frac{4\psi^2(2\psi-1)}{\sqrt{4\psi-1}} \sin^{-1}(\frac{\sqrt{4\psi-1}}{2\psi})$
ψ	non défini	$\frac{1}{4}((\frac{l}{a})^2 + 1)$

Tableau 5.1 – Modèle analytique de perforation de Forrestal pour une plaque épaisse [Forrestal 2009].

5.1.2.3 La perforation par un poinçon conique d'une plaque mince

Une plaque mince est une plaque pour laquelle l'épaisseur est petite devant la taille caractéristique de l'impacteur (rayon,...). Dans le but de déterminer le nombre de pétales durant la perforation d'une tôle mince, Nazeer [Nazeer 2000] décrit la perforation par une approche énergétique. Celle-ci est vue comme la combinaison de travaux de flexion élastique de la plaque W_e (Figure 5.8 (a.)), de flexion plastique W_{fp} , d'amincissement W_{ep} (Figure 5.8 (b.)), de flexion des pétales W_{fr} (Figure 5.8 (c.)) et de propagation des fissures W_r (Figure 5.8 (d.)). Il s'intéresse plus particulièrement à la transition entre des travaux essentiellement plastiques et l'instant où la rupture apparaît. Son approche est adaptée à la perforation sous impact dans le but de trouver la vitesse résiduelle du poinçon dans la section 5.2.3.2.

Une approche énergétique de la pétalisation est également utilisée par Wierzbicki [Wierzbicki 1999] pour décrire la perforation par un poinçon conique. Il approxime l'énergie totale de perforation par $E = 3,37\sigma_0 e^{1,6}(2r_0)^{1,4}$ dans le cas où le rayon de l'impacteur r_0 est plus de cinq fois supérieur à l'épaisseur de la plaque e . De bons résultats en terme de vitesse résiduelle et en terme de forme de la cible après impact sont trouvés. D'autres modèles analytiques de perforation d'une plaque mince existent dont le modèle de Woodward [Woodward 1987], le modèle de Landkof [Landkof 1985] et le modèle de Elek [Elek 2005].

5.1.3 Les modèles numériques de perforation

Différentes méthodes numériques existent pour la simulation de la perforation. La méthode la plus courante utilise des éléments finis 3D de type brique [Borvik 2011] (Figure 5.11). Plus rarement, les éléments finis sont de type 2D axi-symétrique [Gupta 2006] (Figure 5.10) ou de type 3D coque pour des tôles fines [Dean 2009] (Figure 5.9). L'utilisation des particules SPH (Smooth Particles Hydrodynamics) est moins courante mais donne de bons résultats à grande vitesse d'impact [Seo 2008] (Figure 5.12). Très récemment des couplages éléments finis-SPH [Attaway 1994] sont utilisés [Liu 2012] (Figure 5.13).

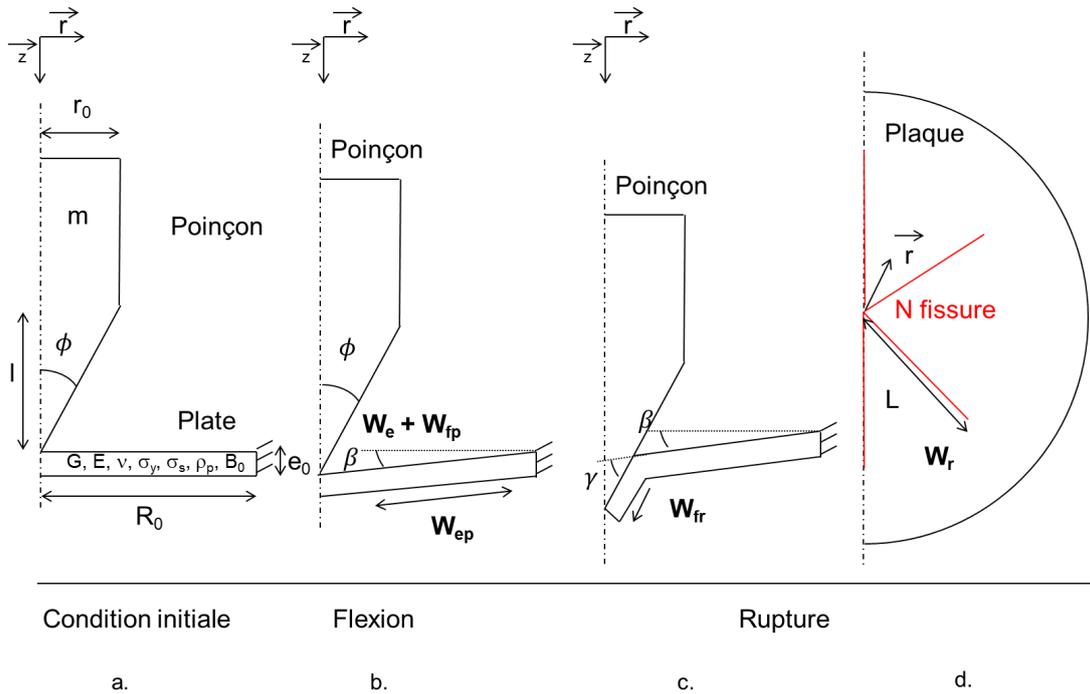


FIGURE 5.8 – Modèle analytique de perforation basé sur des considérations énergétiques.

Les lois de comportements restent similaires dans tous les cas. Ce sont souvent des lois de Johnson Cook [Dean 2009] [Gupta 2006] ou Johnson Cook modifiées [Borvik 2011] [Liu 2012]. Le critère de rupture est le choix le plus important dans le cas d'une étude sur la perforation et nécessite une étude fine sur le comportement dynamique du matériau [Jones 2011]. Les tableaux 5.2 et 5.3 résument les articles cités ici.

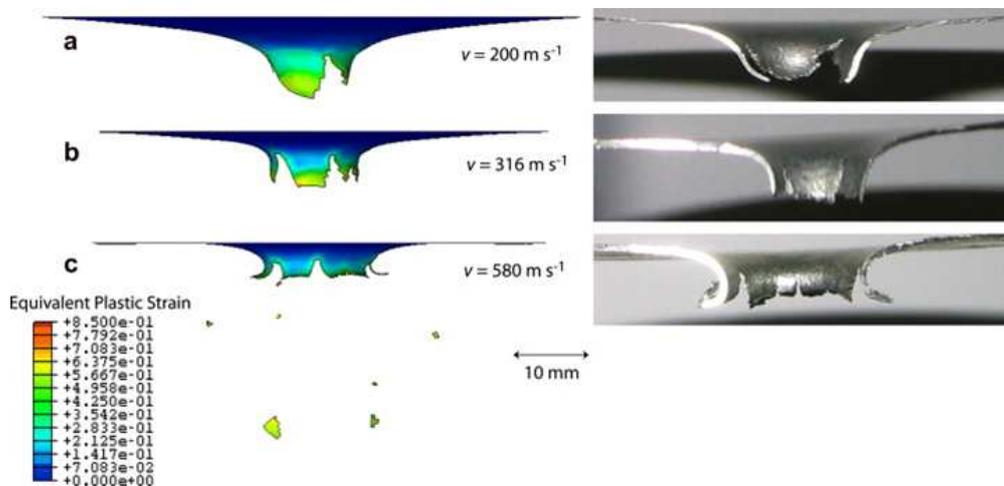


FIGURE 5.9 – Simulation de perforation en éléments fins de type coque [Dean 2009].

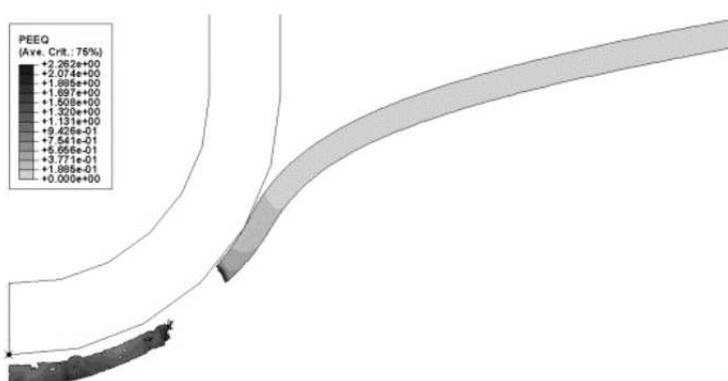


FIGURE 5.10 – Simulation de perforation en éléments finis axi-symétrique [Gupta 2006].

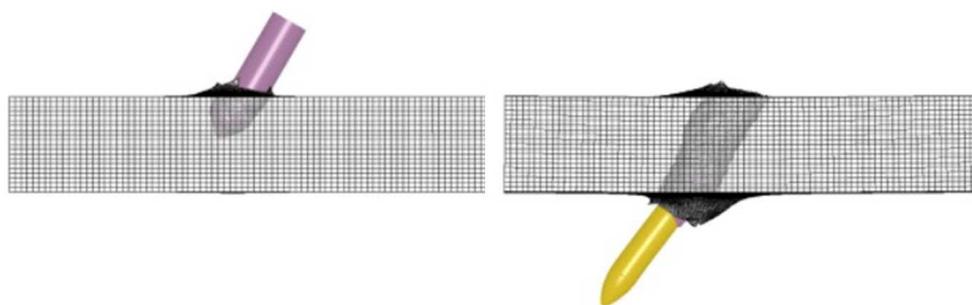


FIGURE 5.11 – Simulation de perforation en éléments finis [Borvik 2011].

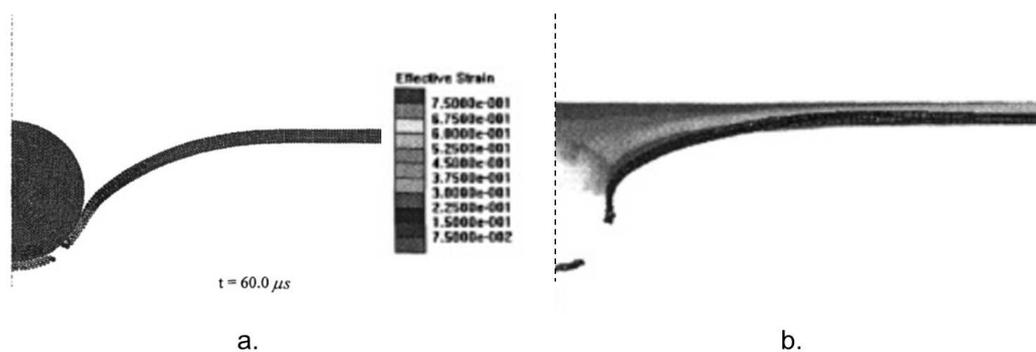


FIGURE 5.12 – Simulation de perforation en SPH (a.) et comparaison avec l'expérience (b.) [Seo 2008].

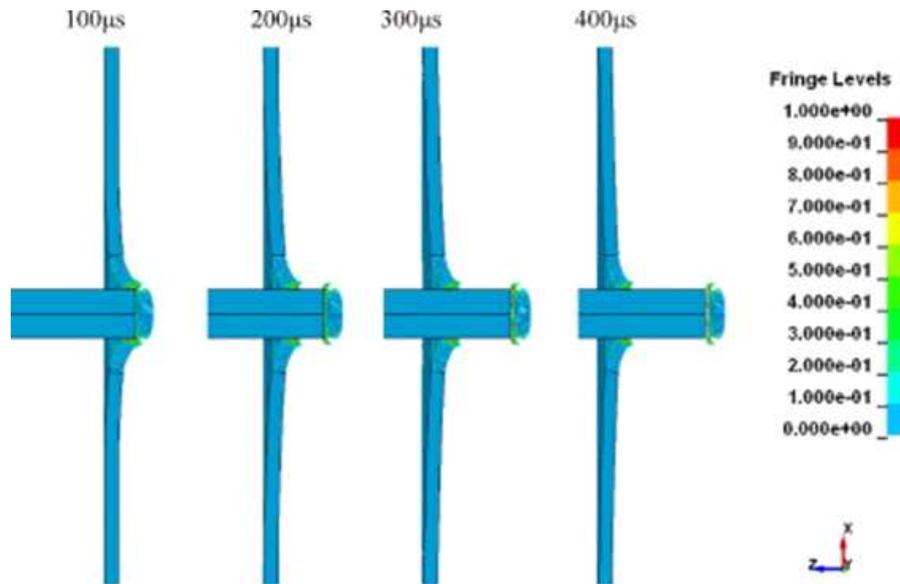


FIGURE 5.13 – Simulation de perforation en couplage SPH - éléments finis [Liu 2012].

Auteurs	Type de perforation	Vitesse d'impact	Remarques
Rusinek 2008	Perforation normale sur un acier	< 300 m/s	Existence de la fissuration par ouverture de pétales ou par arrachement.
Ramezani 2010	Essai de type « bulge test » sur aluminium	< 14 m/s	
Hockauf 2006	Essai de perforation inversée sur barre d'Hopkinson pour divers matériaux	< 400 m/s	L'énergie d'impact dépend essentiellement de la forme du poinçon.
Elnasri 2006	Essai de perforation inversée sur barre d'Hopkinson sur une structure sandwich	< 45 m/s	Les essais sur barres d'Hopkinson permettent de tracer la courbe force-déplacement.

Tableau 5.2 – Bibliographie sur les essais de perforation sur les barres d'Hopkinson.

Auteurs	Matériaux	Vitesse d'impact	Poinçon	Énergie d'impact
Rodriguez-Martinez 2011	Alliage d'aluminium de désignation 2024 T3	< 4,5 m/s	conique d = 20 mm m = 18,787 kg	2,35 J à 190 J
Borvik 2004	Alliage d'aluminium de désignation 5083	< 1000 m/s	conique d = 20 mm m = 0,197 kg	< 98500 J
Dean 2009	Acier inoxydable 304	< 200 m/s	sphérique d = 8 mm m = 0,002 kg	40 J à 360 J
Gupta 2006	Alliage d'aluminium de désignation 1100	< 115,6 m/s	Hémisphérique et plat d = 19 mm m = 0,0525 kg ou 0,047 kg	< 351 J
Grytten 2009	Alliage d'aluminium de désignation 5083	< 15,8 m/s	plat d = 20 mm ou 30 mm m = 18,7 kg ou 19 kg	< 2371 J
Borvik 2009	Alliage d'aluminium de désignation 5083	< 1000 m/s	conique d = 20 mm m = 0,197 kg	< 98500 J
Iqbal 2010	Alliage d'aluminium de désignation 1100	< 150 m/s	forme d'ogive d = 19 mm m = 0,0525 kg	< 1181,25 J
Awerbuch 1974	Acier, Alliages d'aluminium 1100 et 6061	< 850 m/s	plat et forme d'ogive d = 7,62 mm to 9 mm m < 0,00981 kg	< 3544 J
Jones 2011	Alliage d'aluminium	large gamme	plat et hémisphérique	Large gamme
Borvik 2011	Alliage d'aluminium de désignation 6082 - T4	< 830 m/s	forme d'ogive d = 7,62 mm m = 10 g	< 3444 J
Seo 2008	Acier	< 200 m/s	bille d = 10 mm m = 3,8 g	< 76 J
Liu 2012	Weldow 460 et AA5083 H116	< 200 m/s	plat d = 20 mm m = 197 g	< 14760 J

Tableau 5.3 – Perforation à grandes et faibles vitesses.

5.1.4 Conclusions sur l'état de l'art de la perforation

Une bibliographie sur la perforation a été proposée. Lors d'études expérimentales, la force d'impact est souvent relevée et tracée grâce à des capteurs de force ou des moyens de mesure basés sur la théorie des barres d'Hopkinson. Les vitesses résiduelles sont analysées en fonction des vitesses initiales afin d'en déduire une vitesse balistique limite. L'apparition d'un nombre déterminé de pétales a une justification énergétique. Le mode de fissuration (pétalisation, arrachement, fragmentation de pétales) dépend de la vitesse de perforation.

Des modèles analytiques existent pour la perforation. Le modèle le plus courant pour les tôles épaisses est le modèle de Forrestal [Forrestal 2009]. D'autres modèles de perforation de tôles fines sont basés sur une approche énergétique.

De nombreuses méthodes numériques sont utilisées pour simuler la perforation. Parmi elles, les éléments finis et les SPH sont couramment utilisés. Cependant, le choix d'un critère de rupture adapté à la perforation est souvent délicat. Un effort est donc nécessaire afin de trouver des paramètres adaptés [Jones 2011].

Dans la suite de ce chapitre, une étude est effectuée sur la perforation de plaques fines d'alliage d'aluminium de désignation 2024 T3. Les essais seront effectués sur un puits de chute instrumenté qui permet de relever la force et la vitesse pendant l'impact.

5.2 Perforation d'alliage d'aluminium de désignation 2024 T3 à basse vitesse

La perforation de l'alliage d'aluminium de désignation 2024 T3 par un poinçon conique est étudiée ici. Des plaques d'aluminium carrées d'épaisseur 2 mm ou 4 mm sont encastrées dans un système circulaire. L'équation de Jones [Jones 2011] permet de savoir si le phénomène de perforation est un phénomène local ou global. Pour une vitesse initiale de 10 m/s, une contrainte moyenne de 369 MPa, un rayon de plaque de 74 mm et une masse volumique de 2720 kg/m³, le rapport $\frac{t_{propa}}{t_{imp}}$ (cf équation 5.6) est égale à 0,50 (épaisseur de 2 mm) et 0,13 (épaisseur de 4 mm). Le phénomène est donc global et toute la plaque va participer à la perforation. Lorsque la vitesse est grande, égale à 1000 m/s par exemple, le rapport devient égal à 5046 (2 mm) et 1261 (4 mm). Le phénomène de perforation devient alors local et seule la zone en contact avec le poinçon participe à la perforation. Une étude plus fine de la transition du phénomène global vers un phénomène local est proposée à la fin de cette partie.

Des essais de perforation de tôles fines d'alliage d'aluminium de désignation 2024 T3 sur puits de chute (section 5.2.1) vont permettre de calibrer deux modèles. Le premier est un modèle analytique basé sur des considérations énergétiques (section 5.2.3.2). Le deuxième est un modèle de perforation numérique en éléments finis coques (section 5.2.4). Une extension du modèle numérique à grandes vitesses de perforation est proposée afin de connaître les vitesses de transition entre les différents modes de perforation.

5.2.1 Présentation des expériences de perforation

Un puits de chute instrumenté de 3 m de haut (Figure 5.14) est utilisé pour perforer des plaques avec un poinçon conique (voir Annexe A). Les essais sont réalisés en collaboration avec Arts et Métiers ParisTech, Campus de Bordeaux. Les plaques sont fixées dans un système de fixation appui-plan circulaire de diamètre 148 mm. Quatre systèmes d'assemblage de type vis-écrou maintiennent cet appui-plan serré avec un couple de 50 N.m, soit une force d'environ 10 kN par vis. Ainsi la plaque est considérée encastrée en son bord. En réalité, un léger glissement peut être observé sur ce type de montage. Cependant, une analyse numérique a montré que ce glissement ne chargeait pas la déformée du centre de la plaque. Le poinçon est fixé sur un chariot de masse variable (de 13 kg à 21 kg) qui glisse sur deux barres. Un capteur de force piezo-électrique Kistler 9061A permet la mesure de la force avec une erreur de 5% sur une gamme de 0 à 100 kN. Le déplacement est mesuré par un capteur laser Bullier (erreur de 0,5%) dont la gamme de mesure est de 50 mm. Ces deux capteurs sont complétés par deux caméras rapides. La caméra rapide Photron SA3 (10 000 images/s) est utilisée pour mesurer le déplacement du poinçon par le suivi d'un mouchetis effectué à l'aide d'une bombe de peinture noire. La deuxième caméra rapide (Photron APX RS, 9 000 images/s, 768x336 pixels) est utilisée pour observer la pétalisation et la déformation sous la plaque. Pour cela un couple de miroirs est placé sous la plaque de façon à pouvoir observer deux images sous un angle différent de la partie inférieure. Ainsi, de la stéréo-corrélation d'image en 3D peut être effectuée pour obtenir le champ de déplacement de la plaque.

Vingt-trois essais de perforation sont effectués (tableau 5.4), dix-sept sur des plaques d'épaisseur 2 mm et sept sur des plaques d'épaisseur 4 mm. Pour les plaques d'épaisseur 2 mm, treize essais sont effectués avec un poinçon de masse 13kg, deux avec une masse de 17 kg et deux avec une masse de 21 kg. Tous les essais sur les plaques de 4 mm sont effectués avec une masse de 13 kg.

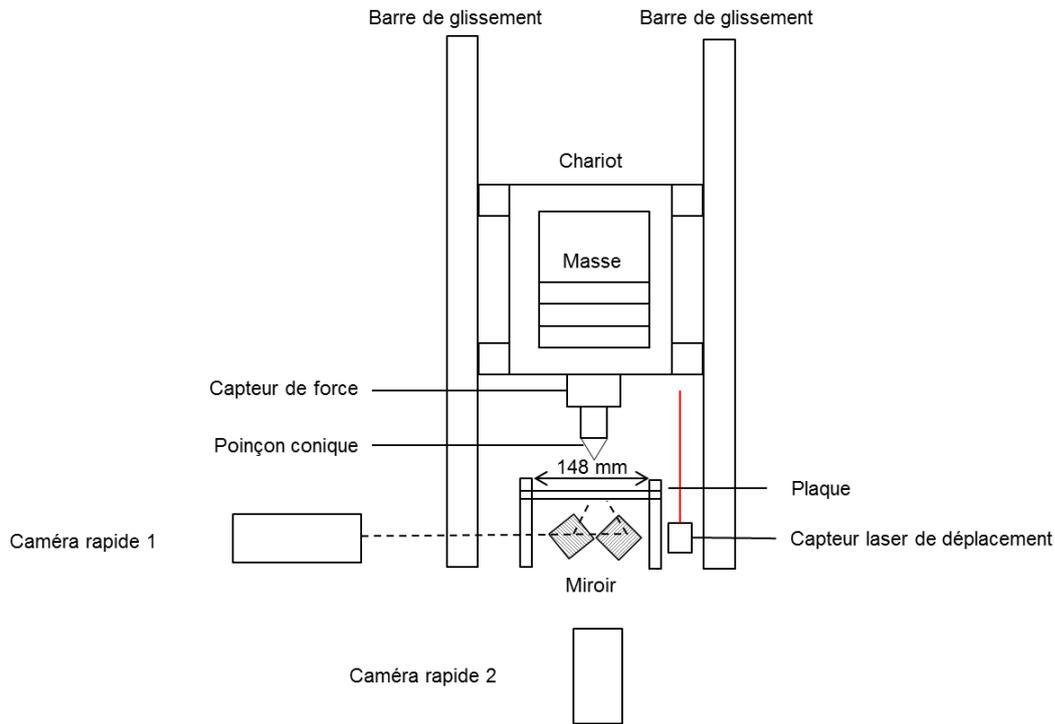


FIGURE 5.14 – Puits de chute instrumenté.

5.2.2 Résultats expérimentaux

5.2.2.1 Vitesse résiduelle

Les vitesses initiales varient entre 2,8 et 6,9 m/s (Tableau 5.4). La vitesse résiduelle est calculée à partir du capteur de déplacement laser. Pour des raisons de bruit sur le signal de déplacement, celui-ci est filtré afin d'obtenir une courbe lissée par une moyenne glissante sur 30 valeurs. Pour une moyenne glissante sur 10 ou 50 valeurs, la vitesse résiduelle change de $\pm 6\%$ pour 10 valeurs et ne change pas pour 50 valeurs. La vitesse résiduelle du poinçon, pour les essais sur les plaques d'épaisseur 2 mm, est tracée en fonction de la vitesse initiale. La figure 5.15 présente les résultats des 13 premiers essais avec des observations de la face distale après perforation. Si la plaque n'est pas totalement perforée, la vitesse résiduelle est considérée comme nulle. Pour les vitesses initiales supérieures à 5,5 m/s, une perforation complète de la plaque est observée. Le type de courbe obtenu est un résultat classique de perforation. Pour les plaques d'épaisseur 4 mm, aucune perforation complète n'est observée.

5.2.2.2 Résultats en terme de force

Pour les plaques d'épaisseurs 2 mm et 4 mm, la force est tracée en fonction du temps respectivement sur la figure 5.16 et la figure 5.18. Une bonne répétabilité des essais doublés est observée. Pour les essais sur les plaques de 2 mm, trois pics de force sont observés (Figure 5.17). Sur les plaques d'épaisseur 4 mm un seul pic de force apparaît pendant l'impact.

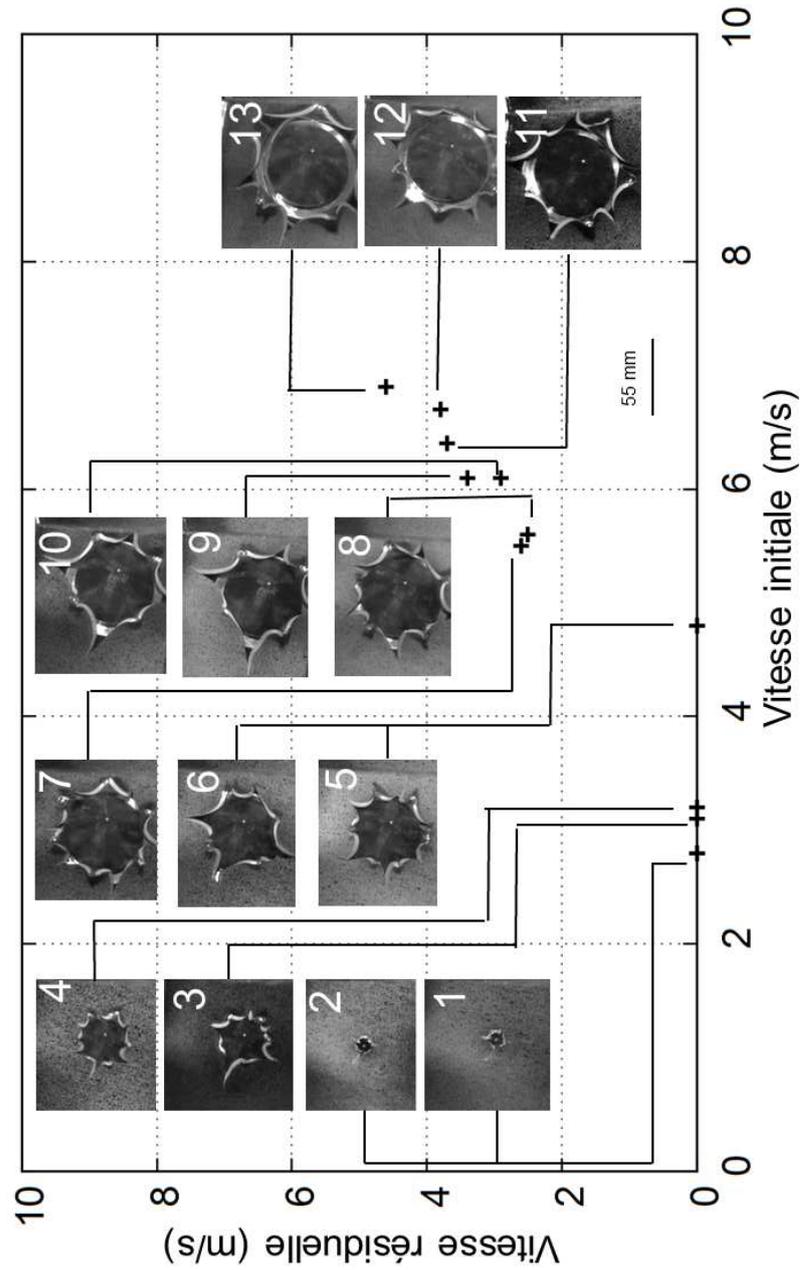


FIGURE 5.15 – Vitesse résiduelle en fonction de la vitesse initiale pour une masse de 13 kg et une plaque d'épaisseur 2 mm. Observation après rupture sur la face distale à l'impact.

Numéro d'essai	Masse totale (kg)	Hauteur (m)	Vitesse initiale mesurée (m/s)	Énergie cinétique initiale (J)	Énergie absorbée (J)	Nombre de pétales	Vitesse résiduelle (m/s)
1	13	0,4	2,8	51,0	40,0	4	0
2	13	0,4	2,8	51,0	40,0	4	0
3	13	1	4,1	62,5	47,8	5	0
4	13	1	4,2	66,6	51,9	5	0
5	13	1,5	4,8	149,8	138,8	6	0
6	13	1,5	4,8	149,8	140,4	4	0
7	13	1,8	5,9	196,6	152,7	6	2,6
8	13	1,8	5,9	203,8	163,2	5	2,5
9	13	2	6,1	241,9	166,7	4	3,4
10	13	2	6,1	241,9	187,2	4	2,9
11	13	2,1	6,4	267,5	178,6	5	3,7
12	13	2,3	6,7	293,0	199,2	5	3,8
13	13	2,5	6,9	309,5	171,9	6	4,6
14	17	1,3	5,0	212,5	178,5	5	2
15	17	1,3	5	212,5	185,0	5	1,8
16	21	1	4,4	203,3	190,6	5	1,1
17	21	1	4,4	203,3	192,8	5	1
18	13	0,4	2,8	51,0	22,3	-	0
19	13	0,4	2,8	51,0	13,5	-	0
20	13	0,8	4	104,0	66,6	-	0
21	13	1,2	4,8	149,8	102,4	-	0
22	13	1,6	5,6	203,8	152,9	-	0
23	13	2	6,3	258,0	210,6	-	0

Tableau 5.4 – Résultats expérimentaux de perforation (1-17 : épaisseur 2 mm, 18-23 : épaisseur 4 mm) - signifie pas de résultat.

Pour les essais sur les plaques d'épaisseur 2 mm (Figure 5.16), lorsque le poinçon touche la plaque, un premier pic de force compris entre 0,5 kN et 1,5 kN est observé. La force continue d'augmenter jusqu'à l'apparition des premières fissures. Une chute de la force apparait alors, ce qui correspond à la propagation des premières fissures (deuxième pic). Lorsque les fissures deviennent suffisamment longues, les pétales deviennent de plus en plus grands. L'énergie à fournir pour faire fléchir les pétales devient donc de plus en plus grande et ainsi la force recommence à augmenter de façon constante jusqu'à atteindre un troisième pic de force. Ce dernier pic de force correspond à une perforation totale de la plaque. La force est aussi tracée en fonction du déplacement sur la figure 5.17. Les niveaux de force sont similaires pour tous les essais. L'aire sous la courbe représente l'énergie absorbée par la plaque pendant l'impact (en ne considérant pas le frottement). Ainsi, il est possible de conclure qu'un niveau constant d'énergie est nécessaire pour perforer la plaque sur la gamme de vitesse considérée. L'énergie absorbée par le poinçon en acier est considérée comme négligeable devant l'énergie absorbée par la plaque (poinçon rigide). Cette hypothèse sera utilisée dans un modèle analytique présenté dans la partie 5.2.3.2. Des simulations numériques permettront aussi une meilleure analyse de ces pics de force.

Pour tous les essais sur les plaques de 4 mm, la force augmente en fonction du temps et du déplacement du poinçon jusqu'au rebond de celui-ci car les plaques n'ont pas été totalement

perforées (Figure 5.18). Les niveaux de force obtenus en fonction du déplacement restent similaires quelque soit la vitesse initiale.

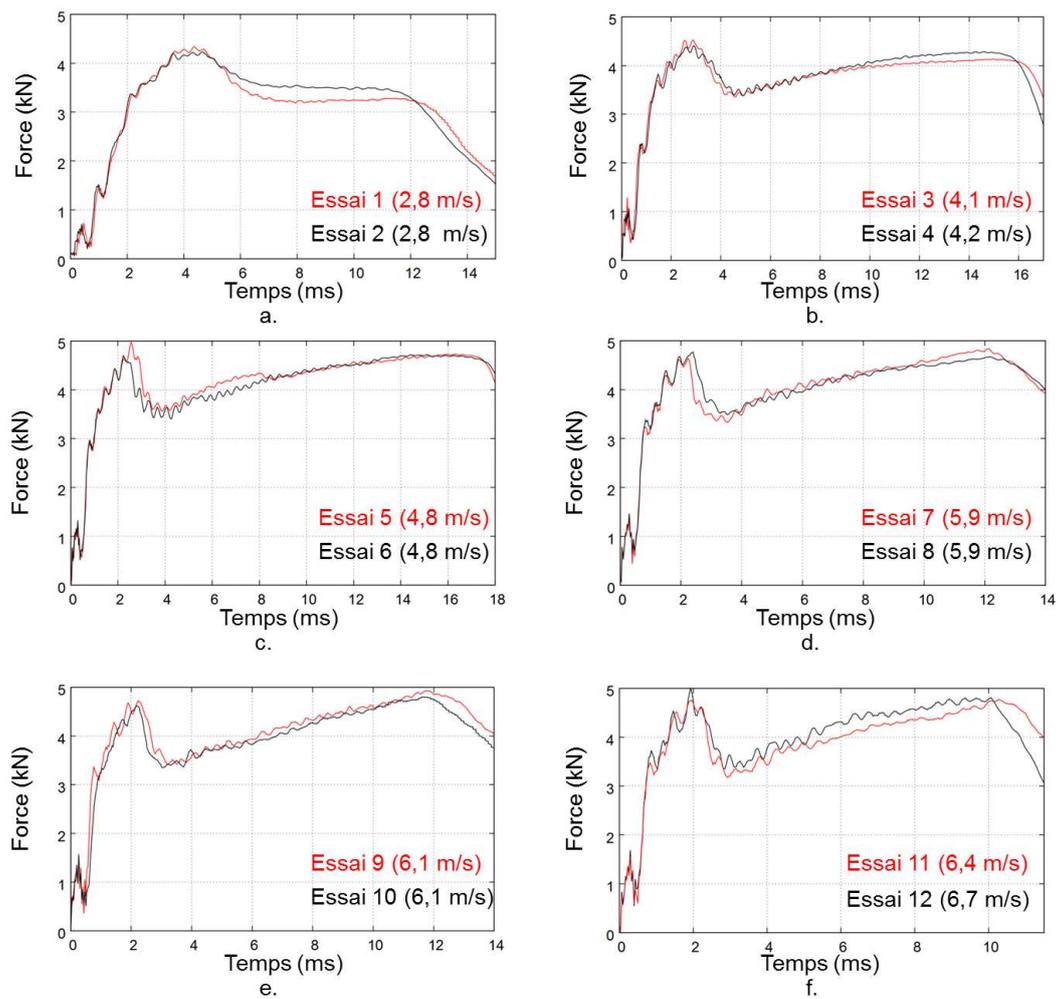


FIGURE 5.16 – Force en fonction du temps pour les plaques d'épaisseur 2 mm.

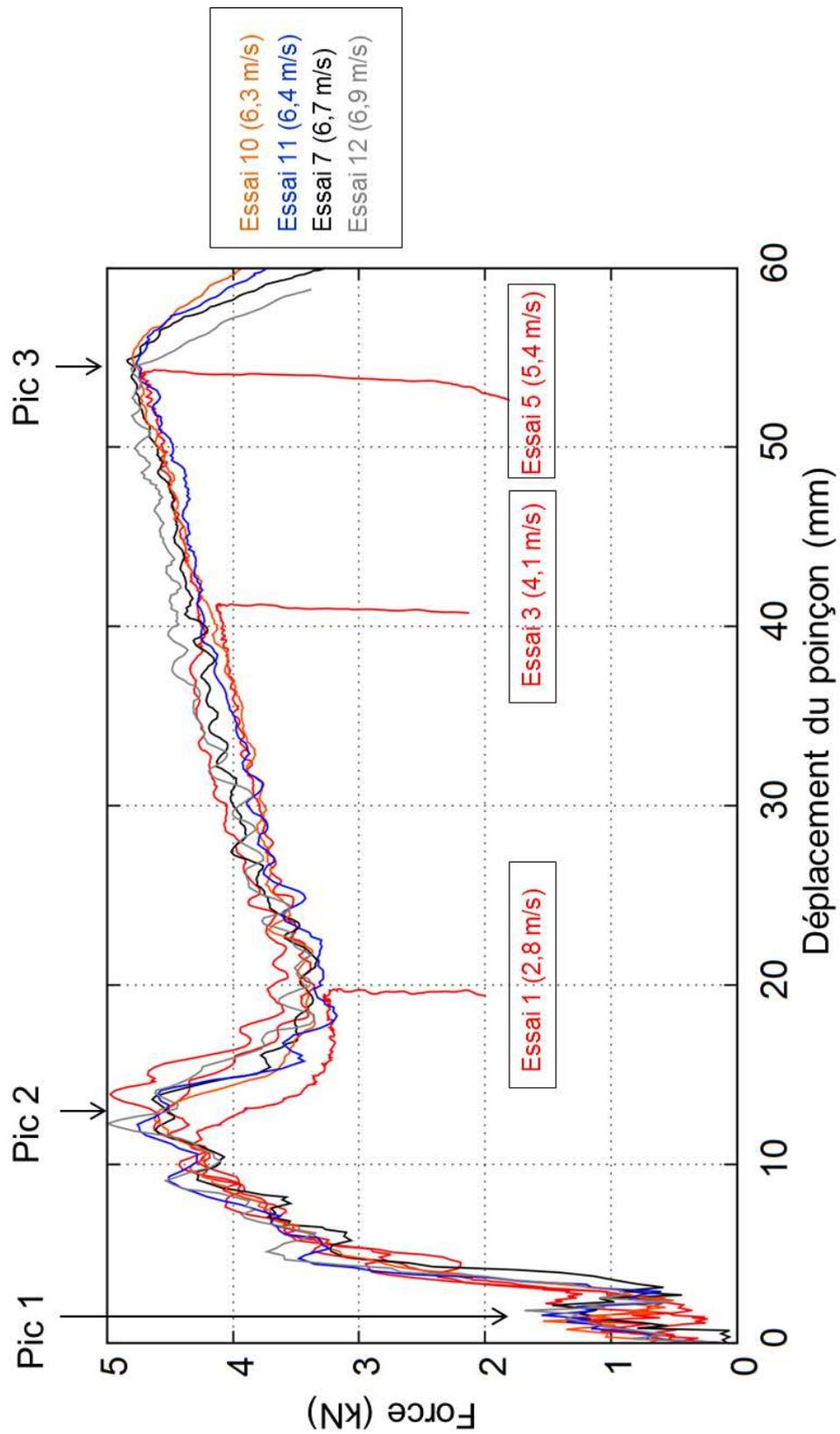


FIGURE 5.17 – Force en fonction du déplacement du poinçon pour les plaques d'épaisseur 2 mm.

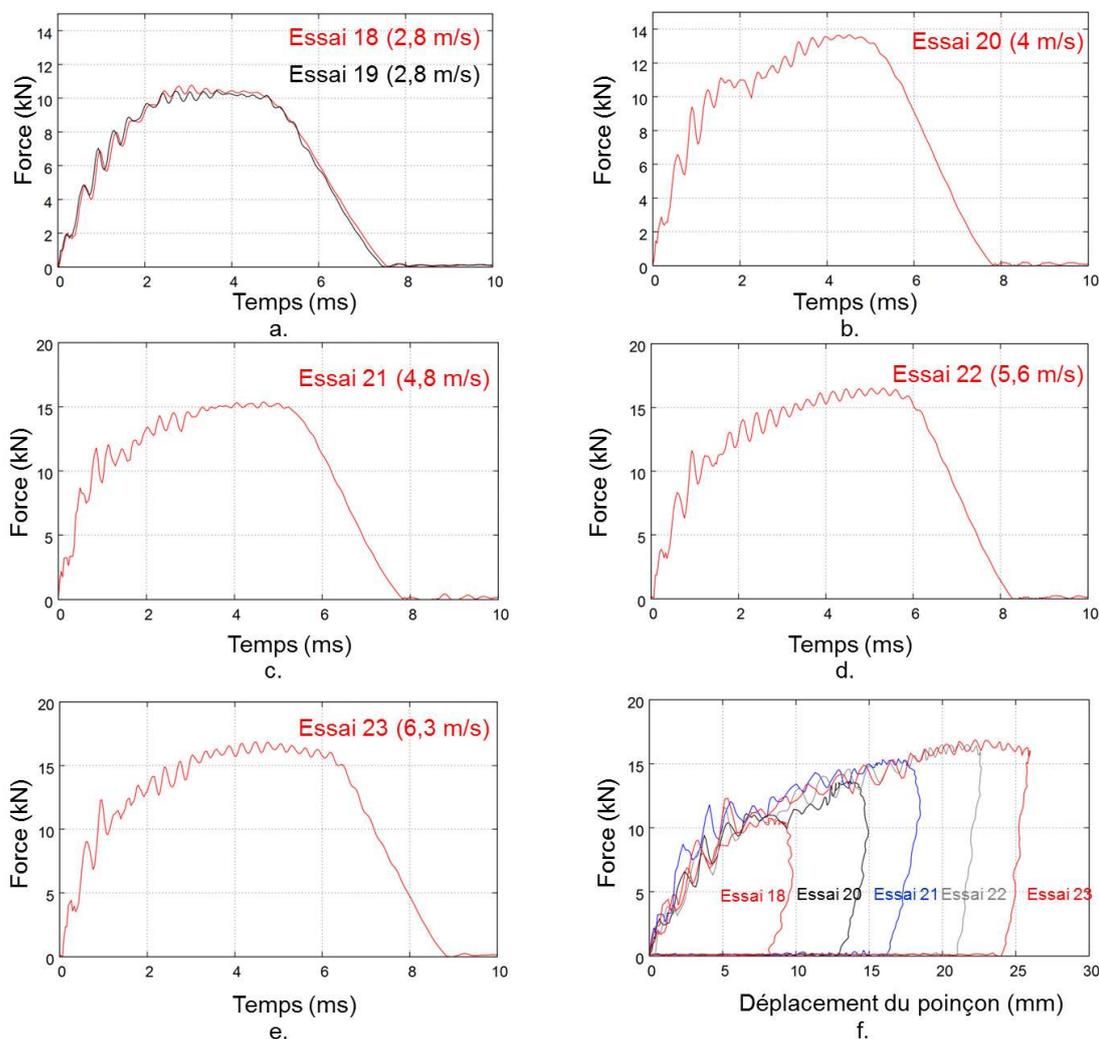


FIGURE 5.18 – Force en fonction du temps et du déplacement du poinçon pour les plaques d'épaisseur 4 mm.

5.2.2.3 Résultats sur les pétales et les fissures

La perforation de plaques minces par un poinçon conique de diamètre grand devant l'épaisseur impose l'apparition de fissures et donc de pétales. Le nombre de pétales est tout le temps supérieur à 4 pour les plaques d'épaisseur 2 mm. L'équation 5.5 du nombre d'Atkins permet d'approcher le nombre de pétales [Atkins 1998].

La déformation à la rupture statique est égale à 0,18 et dynamique à 0,3 (8000 s^{-1}) [Lesuer 2000]. Le nombre de pétales est alors de 2 (statique) ou de 3 (dynamique) ($\sigma_0 = 369 \text{ MPa}$, $e_0 = 0,002 \text{ mm}$, $G = 116\,600 \text{ J/m}^2$). Ces résultats ne correspondent pas aux résultats expérimentaux (entre 4 et 6 pétales). Le rayon initial est alors changé et est pris égal au rayon du trou lorsque le poinçon apparait de l'autre coté de la plaque soit $r_p = e_0 \tan(\phi)$. Ainsi le nombre de pétales est de 4 ($\varepsilon_f = 0,18$) et 6 ($\varepsilon_f = 0,3$). Ces résultats sont alors plus proches des résultats expérimentaux.

La durée de propagation de ces fissures a été mesurée en moyenne à 10 ms. La vitesse moyenne

des fissures peut être mesurée grâce aux images. Sur la figure 5.19, cette vitesse augmente linéairement avec la vitesse initiale. Elle semble être égale à la vitesse radiale du poinçon ($V_r = V \tan(\phi)$ où $\phi = 30^\circ$).

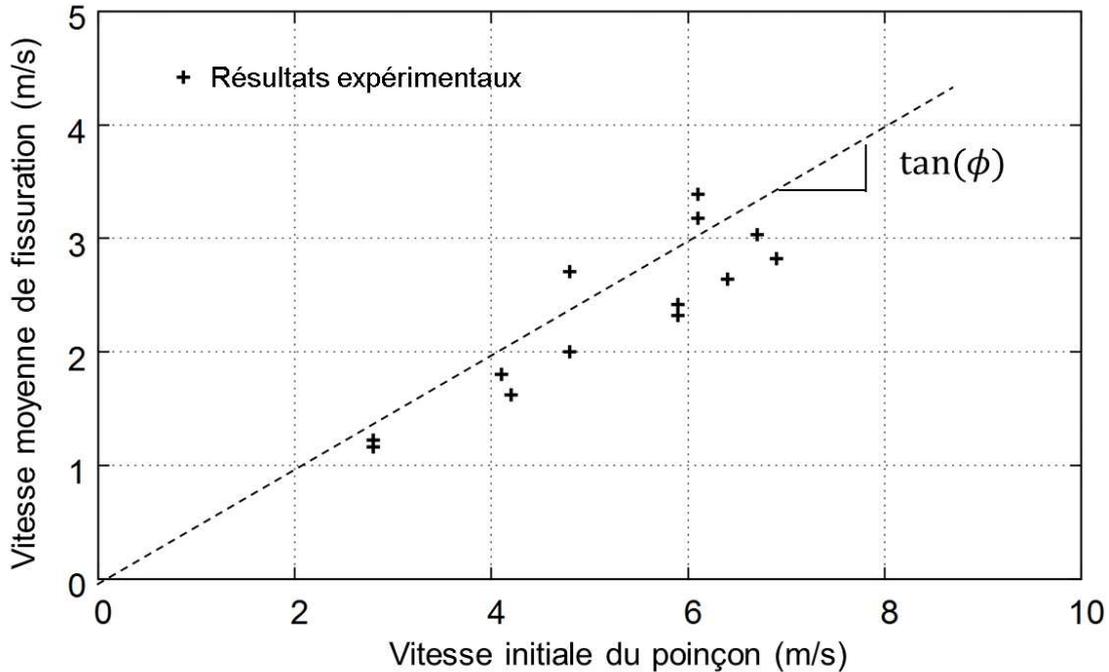


FIGURE 5.19 – Vitesse moyenne de fissuration pendant la perforation.

5.2.2.4 Résultats de stéréo-corrélation

Le logiciel de stéréo-corrélation d'image Vic 3D [Vic3D 2012] est utilisé pour l'analyse des déformées sur la face distale à l'impact (Figure 5.20). La calibration a été réalisée grâce à différentes images d'une cible de 10 x 10 points espacés de 5 mm chacun. Les points noirs aléatoirement déposés sur la plaque permettent la reconstruction du champ de déplacement jusqu'à l'apparition de la première fissure dans la plaque. Dans le tableau 5.5, le déplacement maximal de la plaque est donné pour chacun des essais où la stéréo-corrélation est exploitable.

Essais	1	4	5	7	9	11	13	22	23
Déplacement maximal (mm)	5,3	5,1	5,0	4,5	5,4	5,6	5,6	5,0	5,5

Tableau 5.5 – Résultat en terme de déplacement maximal pour la stéréo-corrélation.

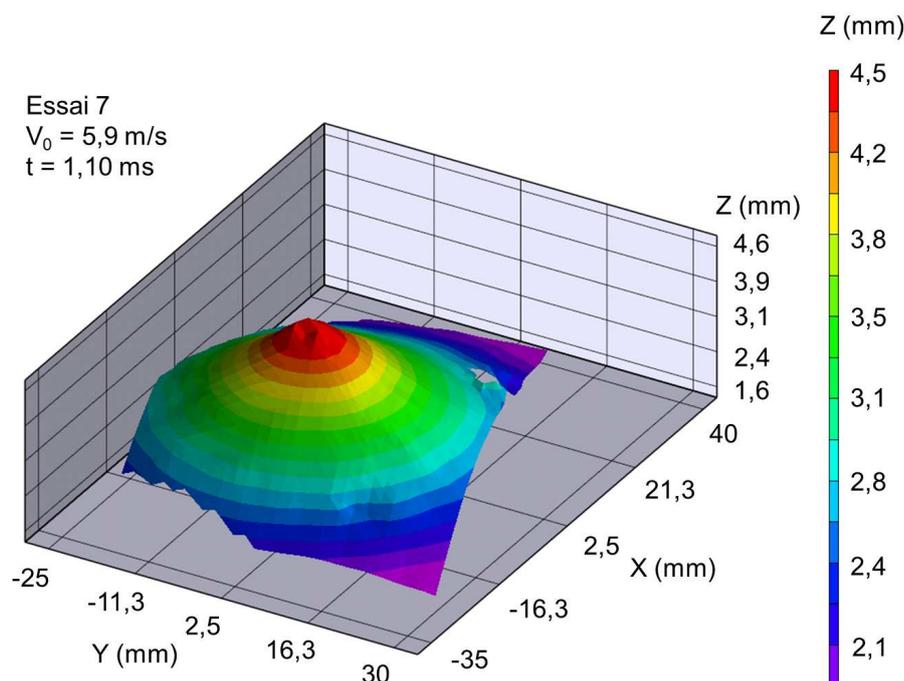


FIGURE 5.20 – Exemple de résultat en déplacement par stéréo-corrélation pour l'essai 7 ($V_0=5,9 \text{ m/s}$).

5.2.3 Applications de modèles analytiques de perforation

De nombreux modèles de perforation sont disponibles dans la littérature. L'un des modèles les plus utilisés est celui de Forrestal [Forrestal 2009] (cf section 5.1.2.1). L'approche de Nazeer [Nazeer 2000] est reprise et adaptée pour les problèmes de perforation de tôle de petite épaisseur devant le diamètre du poinçon perforateur ($2r_0 \gg e$).

5.2.3.1 Modification de l'approche de Forrestal pour la perforation

Les modèles analytiques de perforation utilisent des lois de comportement de matériaux simples. Pour rappel (Section 5.1.2.1) Forrestal [Forrestal 2009] utilise un modèle d'écroutissage empirique (Figure 5.21) où la contrainte radiale d'expansion du trou est exprimée en fonction d'une contrainte σ_0 , de la masse volumique de la plaque ρ_m , d'un paramètre B_0 (identifié par méthode inverse) et de la vitesse V du poinçon tel que :

$$\sigma = \sigma_0 + \rho_m B_0 V^2 \quad (5.23)$$

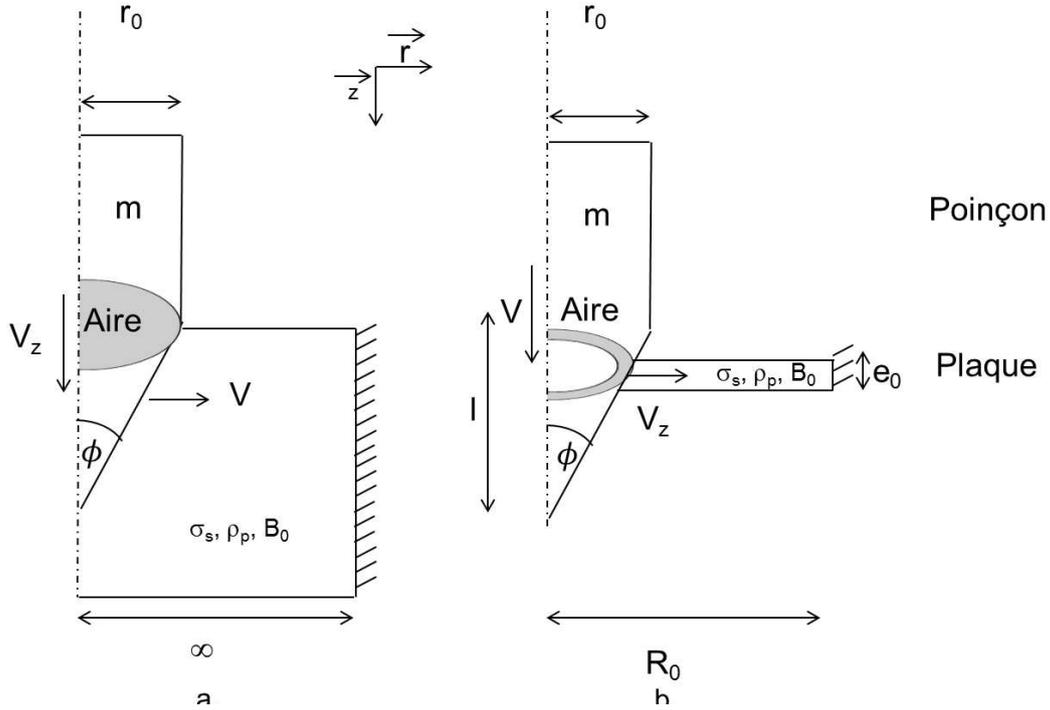


FIGURE 5.21 – Modèle de Forrester modifié.

La force axiale appliquée sur la plaque peut donc s'écrire $F_z = A\sigma = A(\sigma_0 + \rho_m B_0 (V_z \tan(\phi))^2)$ où A est l'aire de contact entre le poinçon et la plaque et $V = V_z \tan(\phi)$ la vitesse radiale (V_z est la vitesse axiale). En appliquant le principe fondamental de la dynamique au poinçon conique, et en négligeant le frottement, il est possible d'écrire :

$$m \frac{dV_z}{dt} = m V_z \frac{dV_z}{dz} = -F_z = -A(\sigma_0 + \rho_m B_0 (V_z^2 \tan^2(\phi))) \quad (5.24)$$

où m est la masse du poinçon.

et donc :

$$\frac{dV_z^2}{1 + aV_z^2} = bAdz \quad (5.25)$$

avec : $a = \frac{\rho_m B_0 \tan^2(\phi)}{\sigma_0}$ and $b = \frac{2\sigma_0}{m}$

Le début de la perforation, c'est à dire l'instant où le poinçon apparaît de l'autre côté de la plaque, et la fin de perforation sont négligés. Seul l'instant de la perforation où le nez conique est visible de l'autre côté de la plaque est considéré. Forrester considère que l'aire A est égale à l'aire de la base de la partie cylindrique du poinçon. Dans le cas de tôle mince, cette aire n'est plus un disque mais est réduite et forme un anneau (Figure 5.21). Elle s'exprime alors par l'équation suivante : $A = \pi(z^2 \tan^2(\phi) - (z - e_0)^2 \tan^2(\phi))$. Avec une intégration de l'équation différentielle entre $z = 0$ et $z = 1$ et entre $V_z = V_{bl}$ (la vitesse balistique limite) et $V_z = 0$, la vitesse balistique peut s'écrire :

$$V_{bl} = \sqrt{\frac{1}{a} (\exp(\pi (l^2 e_0 - l e_0^2) \tan^2(\phi) ba) - 1)} \quad (5.26)$$

Pour un alliage d'aluminium de désignation 2024 T3, σ_0 et B_0 sont identifiés sur des essais de traction quasi-statique. Les paramètres sont identifiés à l'aide de la loi d'érouissage d'Hollomon présenté dans le tableau 2.1 du Chapitre 2. Le paramètre n est identifié à l'aide des essais de traction et est égal à 0,104. Ainsi, σ_0 est pris égal à 1460 MPa et B_0 à 3,4 d'après la procédure décrite par Forrestal [Forrestal 1992]. Avec ces paramètres, la vitesse balistique limite est alors de 27 m/s. Elle est bien supérieure à la valeur trouvée expérimentalement (5,9 m/s). Bien inapplicable aux plaques épaisses, ce modèle ne semble donc pas adapté à la perforation de tôles fines en aluminium.

5.2.3.2 Un modèle énergétique de perforation

Nazeer [Nazeer 2000] propose une approche énergétique pour la perforation de plaques fines. Il utilise cette approche pour déterminer le nombre de pétales qui se forment pendant la perforation. Une approche similaire est présentée et est étendue à la détermination de la vitesse résiduelle d'un poinçon après impact. L'énergie nécessaire à la perforation est considérée comme la somme du travail de flexion élastique W_e (Figure 5.8 (a.)) de la plaque, du travail de flexion plastique W_{fp} (Figure 5.8 (b.)), du travail d'étirement plastique de la plaque W_{ep} , du travail de flexion des pétales W_{fr} (Figure 5.8 (c.)) et enfin du travail de propagation de fissure W_r (Figure 5.8 (d.)). Les effets de température et de frottement sont négligés. Chacun de ces travaux sont décrits dans les sous-parties suivantes. L'énergie absorbée par la plaque est considérée comme constante et égale à la différence d'énergie cinétique finale et initiale pour la gamme de vitesse considérée. Cela revient à considérer que le facteur k de l'équation de Recht et Ipson (Equation 5.1) est égale à 2. La vitesse résiduelle s'écrit alors en fonction de ces travaux, de la vitesse initiale V_0 et de la masse m du poinçon comme :

$$V_r = \sqrt{V_0^2 - \frac{2(W_e + W_{fp} + W_{ep} + W_{fr} + W_r)}{m}} \quad (5.27)$$

La vitesse balistique limite V_{bl} est un cas particulier où la vitesse résiduelle $V_r = 0$ m/s et s'exprime donc :

$$V_{bl} = \sqrt{\frac{2(W_e + W_{fp} + W_{ep} + W_{fr} + W_r)}{m}} \quad (5.28)$$

Travail de flexion élastique W_e

Lorsque le poinçon entre en contact avec la plaque, des déformations élastiques apparaissent jusqu'à ce que la contrainte atteigne la limite d'élasticité. Le travail élastique de flexion est approché par la théorie des plaques. Cette théorie impose une valeur infinie du moment central de flexion et donc une non-définition de la force. Une approximation empirique de la force (valable pour les aciers et acceptable pour les alliages d'aluminium et de cuivre) est donnée par Xiong [Xiong 2006] :

$$F = \frac{z E e_0^2}{0,217 R_0} \quad (5.29)$$

où z est le déplacement du poinçon, E le module de Young, e_0 l'épaisseur initiale et R_0 le rayon de la plaque.

Le travail élastique de flexion de cette plaque est l'intégration de cette force par son déplacement z et peut s'exprimer de la façon suivante :

$$W_e = \int_0^{z_b} F dz_e = \frac{z_b^2 E e_0^3}{0,434 R_0^2} \quad (5.30)$$

où z_b est le déplacement du poinçon avant rupture.

Travail de flexion plastique W_{fp}

Le matériau est considéré parfaitement plastique. À partir d'un seuil de flexion de la plaque, la déformation plastique apparaît uniformément. Un moment plastique de flexion peut alors s'écrire comme la somme d'un moment radial et d'un moment de circonférence :

$$M_p = \frac{e_0^2 \sigma_0}{4} R_0 + \frac{R_0 e_0^2 \sigma_0}{4} = \frac{R_0 e_0^2 \sigma_0}{2} \quad (5.31)$$

Il est alors possible d'écrire la force de flexion :

$$F = \frac{M_p 2\pi}{R_0} = e_0^2 \sigma_0 \pi \quad (5.32)$$

L'énergie de flexion est l'intégrale de cette force selon le déplacement du poinçon. Ce déplacement peut s'exprimer en fonction de l'angle β de flexion de la plaque, supposé petit ($z = R_0 \tan(\beta) = R_0 \beta$). Le travail de flexion plastique s'écrit alors :

$$W_{fp} = e_0^2 \sigma_0 \pi R_0 \beta \quad (5.33)$$

Le travail d'amincissement plastique de la plaque W_{ep}

Pendant la flexion, la plaque s'amincit par étirement. Le matériau étant parfaitement plastique, la force d'étirement moyenne peut s'exprimer comme le produit de la limite d'élasticité et de la surface de la plaque ($\sigma_0 \pi R_0^2$). L'étirement de la plaque est lié à une déformation d'étirement. Cette déformation peut être définie à l'aide du rapport de la surface initiale par la surface évoluant ($\varepsilon_a = \ln(\sqrt{R_0^2 + z^2}/R_0)$). Le travail d'étirement plastique de la plaque s'écrit alors :

$$W_{ep} = (\pi R_0)^2 \sigma_0 e_0 \varepsilon_a \quad (5.34)$$

Le travail de flexion des pétales W_{pr}

Après apparition de la première fissure, le travail de flexion plastique de la plaque change. Ce travail ne s'effectue plus jusqu'au bord de la plaque mais seulement jusqu'au rayon r_0 du poinçon. L'expression du moment de flexion est similaire au cas précédent. Celle du moment de la circonférence est modifiée par la variation de contraintes induites par les fissures. Ce dernier est alors divisé par le nombre de fissures n plus un (pour une raison de définition, lors d'absence de fissure) :

$$M_p = \frac{e^2 \sigma_0}{4} (r_0) + \frac{r_0 e^2 \sigma_0}{4(n+1)} = \frac{r_0 e^2 \sigma_0}{2} \frac{2+n}{1+n} \quad (5.35)$$

Il est alors possible de déduire le travail de flexion plastique après rupture :

$$W_{pr} = \pi r_0 e^2 \sigma_0 \frac{\gamma}{2} \frac{2+n}{1+n} \quad (5.36)$$