

# Extraction des capacités par méthodes intégrales

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>45</b>
1.1	Hypothèses du problème électrostatique	47
1.2	Équation en potentiel à l'interface conducteur-diélectrique	47
1.3	Équation en champ normal à l'interface diélectrique-diélectrique	47
<b>2</b>	<b>Intégration : Construction de la matrice d'interaction</b>	<b>48</b>
2.1	Méthode de collocation à l'ordre 0	48
2.2	Méthode de Galerkin à l'ordre 0	50
2.3	Correction analytique de la diagonale de la matrice d'interaction	51
2.4	Montée en ordre : formulations à l'ordre 1	51
2.5	Conclusion de l'intégration de la matrice d'interaction	51
<b>3</b>	<b>Résolution : Calcul des capacités</b>	<b>51</b>
3.1	Des charges aux capacités de Maxwell	52
3.2	Des capacités de Maxwell aux capacités de Kirchhoff	53
<b>4</b>	<b>Mise en œuvre, validations et performances</b>	<b>54</b>
4.1	Mise en œuvre	54
4.2	Validations des méthodes intégrales développées	57
4.3	Discussion sur les capacités	60
4.4	Discussion sur le maillage	64
<b>5</b>	<b>Cas du capteur à courant de Foucault</b>	<b>68</b>
<b>6</b>	<b>Conclusion du chapitre</b>	<b>69</b>

---

### Résumé

*Dans ce deuxième chapitre, on présentera les formulations intégrales appliquées à notre problème d'électrostatique. Ces méthodes intégrales permettent de calculer des coefficients d'interaction entre chaque élément de maillage des régions conductrices ou diélectriques (maillées en surface). Pour les calculs des coefficients d'interaction, différentes techniques de résolution de l'équation intégrale sont développées : une méthode de collocation ou une approche variationnelle avec la méthode de Galerkin.*

*Ces méthodes intégrales peuvent s'écrire sous forme matricielle avec une matrice d'interaction carrée et pleine. La résolution directe de ce système matriciel permet d'obtenir en fonction des potentiels des conducteurs, la répartition des charges supposées être localisées au niveau des interfaces des conducteurs et des diélectriques. Enfin, une matrice de capacités peut être calculée à partir de ces charges présentes sur les conducteurs en tenant compte de la permittivité diélectrique du milieu environnant.*

# 1 Introduction

Ce problème électrostatique peut être entièrement décrit par deux équations intégrales : celles du potentiel  $V$  et du champ électrique  $\mathbf{E}$  dus aux charges présentes sur les conducteurs et les diélectriques. Le potentiel peut se calculer en tout point  $\mathbf{r}$  de l'espace avec l'équation intégrale suivante :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sigma(\mathbf{r}') dS' \quad (\text{II.1})$$

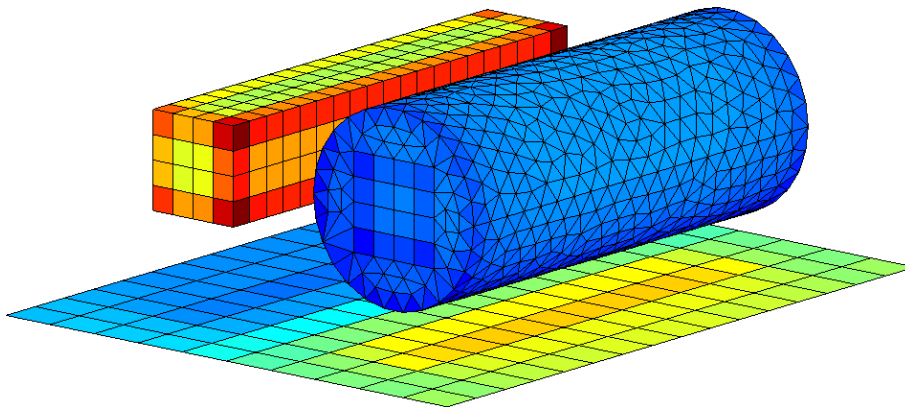
où  $\sigma(\mathbf{r}')$  est la densité de charge présente sur la surface  $S'$  au point  $\mathbf{r}'$ , et  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 1/\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$ , la fonction de Green en régime statique.

En supposant que le champ électrique dérive du potentiel  $V$ , on peut écrire :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad}V(\mathbf{r}) \quad (\text{II.2})$$

Avec les mêmes notations, son écriture intégrale est alors :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \sigma(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} dS' \quad (\text{II.3})$$



**Figure II.1** – Maillage surfacique de deux conducteurs identiques de section rectangulaire, dont l'un entouré d'un matériau diélectrique, situés au-dessus d'un plan de masse - les nuances de couleurs sont dues à la valeur des charges surfaciques pour une répartition de potentiels donnée (conducteurs volumiques de gauche et droite fixés respectivement à 1 V et -1 V, et 0 V pour le plan de masse)

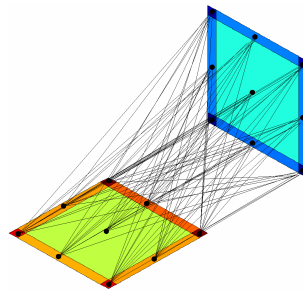
La méthode intégrale permet de projeter les équations du problème électrostatique sur le maillage des interfaces de tous les matériaux actifs. Cette mise en équations peut se mettre sous forme matricielle et conduit à la formation d'une matrice d'interaction pleine car un coefficient d'interaction non nul est calculé entre chaque élément de maillage.

Dans notre problème électrostatique, ces interactions sont calculées entre chaque surface chargée définissant l'interface d'un matériau conducteur ou d'un diélectrique. La figure II.1 montre,

par exemple, le maillage en surface d'une géométrie composée de deux conducteurs identiques de section rectangulaire, dont l'un est entouré d'un matériau diélectrique, situés au-dessus d'un plan de masse.

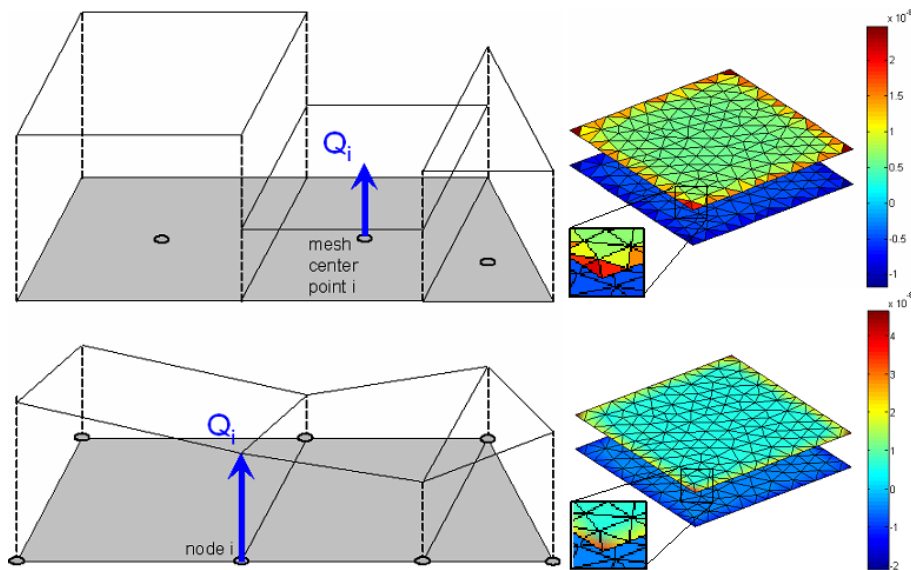
Pour garantir un potentiel uniforme à la surface des conducteurs les charges électriques se localisent dans les coins et sur les arêtes et les bords des conducteurs. Par exemple, on peut observer ces effets de bords sur la figure II.1 ainsi que des effets d'ombrage sur le plan de masse.

On parle d'interaction totale car chaque élément surfacique va interagir avec tous les autres comme le présente la figure II.2. Dans cette figure, les interactions représentées sont entre ba-



**Figure II.2** – 2 plaques maillées en interaction totale (interactions entre barycentres)

rycentres mais pourraient être entre nœuds ou entre chaque surface des éléments, etc. Toutes ces variantes sont liées aux hypothèses de localisation des charges sur les éléments (illustrées à la figure II.3) et des techniques d'intégration comme les méthodes de collocation (ex : méthode des moments) ou de Galerkin. Par exemple, à l'ordre 0, les éléments sont supposés uniformément



**Figure II.3** – Formulation à l'ordre 0 ou 1

chargés : une charge surfacique est située au barycentre de l'élément. Et à l'ordre 1 les charges surfaciques varient linéairement entre les nœuds des éléments.

## 1.1 Hypothèses du problème électrostatique

Dans cette partie, on s'intéresse à une configuration de  $N$  conducteurs et diélectriques. Les matériaux sont supposés isotropes et parfaits. On suppose enfin que chacun des conducteurs est soumis à un potentiel  $V$  uniforme avec pour référence de potentiel un potentiel nul à l'infini. Dans ces conditions, on va s'intéresser aux équations écrites aux interfaces des conducteurs et des diélectriques.

## 1.2 Équation en potentiel à l'interface conducteur-diélectrique

À l'interface conducteur-diélectrique, le potentiel est continu. Celui-ci peut se calculer en tout point  $\mathbf{r}$  de l'interface (ou de l'espace) créé par les  $N$  conducteurs et diélectriques chargés de la façon suivante :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \iint_{S_i} \frac{\sigma(\mathbf{r}_i)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|} dS_i \quad (\text{II.4})$$

Dans cette formule,  $\mathbf{r}_i$  représente le vecteur de coordonnées d'un point de la surface  $S_i$  de charge surfacique  $\sigma_i$ ;  $\epsilon_0$  est la permittivité du vide. Ainsi chaque matériau chargé surfaciquement contribue au calcul du potentiel de façon inversement proportionnelle à la distance qui la sépare du point de calcul.

## 1.3 Équation en champ normal à l'interface diélectrique-diélectrique

À l'interface diélectrique-diélectrique, la composante tangentielle du champ électrique est continue et la composante normale, discontinue. L'écriture du champ normal sous forme intégrale est :

$$En(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \sigma(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} dS' \quad (\text{II.5})$$

Dans la figure II.4,  $\mathbf{n}$  représente le vecteur normal à la surface à  $S$ . Il est orienté vers le milieu

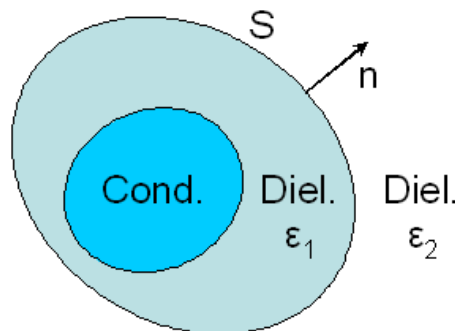


Figure II.4 – Interfaces conducteur-diélectrique et diélectrique-diélectrique

diélectrique de permittivité inférieure. Dans le cas d'une surface  $S$ , de charge  $\sigma$ , qui sépare deux milieux diélectriques de permittivités relatives  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  (Fig. II.4), le saut de la composante normale impose les relations suivantes [29] :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 E n_1 = \varepsilon_2 E n_2 \\ E n_1 - E n_2 = -\sigma/\varepsilon_0 \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

En supposant que le champ électrique source extérieur est nul, on peut écrire au point  $\mathbf{r}$  situé à l'interface diélectrique-diélectrique :

$$0 = -\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}\sigma(\mathbf{r}) + E n(\mathbf{r}) \quad (\text{II.7})$$

Le saut de la composante normale du champ notée  $E n_\sigma$  vaut à un point  $\mathbf{r}$  de l'interface :

$$E n_\sigma(\mathbf{r}) = -\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}\sigma(\mathbf{r}) \quad (\text{II.8})$$

De la même façon que pour le potentiel, en tout point  $\mathbf{r}$  situé à l'interface diélectrique-diélectrique on peut écrire :

$$0 = -\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}\sigma(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^N \iint_{S_i} \sigma(\mathbf{r}_i) \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|^3} dS_i \quad (\text{II.9})$$

Dans la section suivante, on va s'intéresser à la mise en équations du problème électrostatique : l'intégration de la matrice d'interaction qui relie les charges de surfaces aux potentiels des conducteurs. Cette mise en équations dépend du maillage des conducteurs et des diélectriques et du choix de formulations utilisé : choix de la méthode de projection de l'équation intégrale.

## 2 Intégration : Construction de la matrice d'interaction

### 2.1 Méthode de collocation à l'ordre 0

Le principe de méthode de collocation est illustré avec la figure II.2. Pour obtenir une solution approximée du problème électrostatique l'objectif est de choisir certains points de la géométrie maillée où l'équation sera satisfaite. Comme pour la méthode des moments, ces points choisis sont les barycentres des éléments de maillage (surfacique ou volumique) et les fonctions de base sont alors les fonctions de Dirac. Ainsi, le système linéaire formé possède autant de lignes et d'inconnues (ou de fonctions à évaluer) que d'éléments de maillage. Les inconnues recherchées sont alors uniformes sur chaque élément car elles sont évaluées seulement à leur barycentre. C'est l'hypothèse choisie d'ordre 0.

## II.2 Intégration : Construction de la matrice d'interaction

---

Considérons  $n$  conducteurs et  $m$  diélectriques maillés respectivement en  $N_c$  et  $N_d$  éléments surfaciques de surface  $S$  et de charge surfaciques  $\sigma = q/S$ . La géométrie est ainsi maillée en  $N_{cd} = N_c + N_d$  éléments surfaciques. Avec ces hypothèses, on peut réécrire les équations II.4 en potentiel et II.9 en champ normal aux interfaces conducteur-diélectrique et diélectrique-diélectrique :

$$\begin{cases} V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N_{cd}} \frac{q_i}{S_i} \iint_{S_i} \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|} dS_i \\ 0 = -\frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2\epsilon_0(\epsilon_1 - \epsilon_2)} \frac{q}{S} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N_{cd}} \frac{q_i}{S_i} \iint_{S_i} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|^3} dS_i \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

A partir de ces deux dernières équations, on peut former la matrice d'interaction, notée  $[P/En]$ , permettant de relier les charges électriques  $q_c$  et  $q_d$  présentes à l'interface des matériaux conducteurs et diélectriques aux potentiels  $V$  des conducteurs supposés constants par conducteur [11, 30–33].

On peut écrire ce système sous une forme développée de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} P_{1,1} & \cdots & P_{1,n_c+n_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n_c,1} & \cdots & P_{n_c,n_c+n_d} \\ En_{n_c+1,1} & \cdots & En_{n_c+1,n_c+n_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ En_{n_c+n_d,1} & \cdots & En_{n_c+n_d,n_c+n_d} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_{c1} \\ \vdots \\ q_{c n_c} \\ q_{d_{n_c+1}} \\ \vdots \\ q_{d_{n_c+n_d}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_{n_c} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.11})$$

Cette matrice est carrée et pleine de taille  $(N_c + N_d)^2$ . Sous forme condensée on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} P \\ En \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_c \\ q_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.12})$$

La partie supérieure (notée  $P$ ) rassemble les coefficients en potentiel par unité de charges (exprimés en  $V.C^{-1}$ ) correspondant aux interactions calculées à l'interface conducteur-diélectrique (première ligne de l'équation II.10). La partie inférieure (notée  $En$ ) rassemble les coefficients en champ normal par unité de charges (exprimés en  $V.m.C^{-1}$ ) correspondant aux interactions calculées à l'interface diélectrique-diélectrique (deuxième ligne de l'équation II.10).

Les coefficients d'interaction peuvent être calculés de façon analytique [34–36] ou numérique avec par exemple les techniques d'intégration avec points de Gauss. Toutes ces techniques de calcul sont développées en annexe (p. 165).

## 2.2 Méthode de Galerkin à l'ordre 0

On peut utiliser une approche variationnelle appelée méthode de Galerkin pour mettre en équations le système [37, 38]. Cette technique utilise des fonctions de forme sur chaque élément de maillage. Au lieu de calculer directement le potentiel ou le champ normal au barycentre ou aux nœuds des éléments, on intègre ceux-ci sur la surface de l'élément en les multipliant par une fonction de forme  $F$ . Ainsi les équations intégrales du potentiel II.1 et du champ normal II.5 deviennent :

$$\begin{cases} \iint_S F * V(\mathbf{r}) dS = \iint_S F * \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\sigma(r')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dS' \right] dS \\ \iint_S F * En(\mathbf{r}) dS = \iint_S F * \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \sigma(r') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} dS' \right] dS \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

On peut choisir par exemple une fonction de forme constante sur la surface  $S$  de l'élément valant 1. Dans ce cas, il s'agit d'une simple double intégration : une sur l'élément où l'on souhaite calculer le potentiel ou le champ normal et une autre sur celui contenant la source de charge  $\sigma$ . Ainsi notre problème discrétisé en  $N_c + N_d$  éléments de maillage conducteurs et diélectriques chargés uniformément (ordre 0), le système matriciel II.12 devient :

$$\iint_S \begin{bmatrix} P \\ En \end{bmatrix} dS \cdot \begin{pmatrix} q_c \\ q_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V * S \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.14})$$

Avec notre hypothèse d'ordre 0, on peut détailler l'écriture des nouveaux coefficients notés  $\tilde{P}_{i,j}$  et  $\tilde{En}_{i,j}$  de la nouvelle matrice d'interaction :

$$\begin{cases} \tilde{P}_{i,j} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{S_j} \iint_{S_i} \left[ \iint_{S_j} \frac{dS_j}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|} \right] dS_i \\ \tilde{En}_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{S_j} \iint_{S_i} \left[ \iint_{S_j} \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{n}_i}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|^3} dS_j \right] dS_i & \text{si } i \neq j \\ -\frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2\epsilon_0(\epsilon_1 - \epsilon_2)} \frac{S_i}{S_j} & \text{si } i = j \end{cases} \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

Avec cette méthode, les coefficients de potentiels  $\tilde{P}_{i,j}$  s'expriment en  $\text{V.m}^2.\text{C}^{-1}$  et les ceux en champ normal s'expriment en  $\text{V.m}^3.\text{C}^{-1}$ . La méthode développée pour ces calculs est la technique d'intégration avec points de Gauss. Au lieu de remplacer l'intégrale double en une somme dans le cas de la méthode collocation (section 1, p. 165), on remplace la double intégration par une double somme. Ces calculs sont présentés en annexe (section 3, p. 170). On remarque que cette approche « moyenne » la méthode de collocation.



## 2.3 Correction analytique de la diagonale de la matrice d'interaction

Pour gagner en précision avec l'utilisation des techniques d'intégration numérique (avec points de Gauss) ou analytique, la diagonale de la matrice d'interaction est corrigée analytiquement. On dispose de formules analytiques simples pour ces cas particuliers [39, 40] présentées en annexe (section 4, p. 171).

## 2.4 Montée en ordre : formulations à l'ordre 1

La montée en ordre dans la formulation du problème a été testée. Une formulation à l'ordre 1 a été développée pour intégrer la matrice d'interaction avec les mêmes techniques de collocation ou de Galerkin. On rappelle que dans ce cas, les densités de charges sont portées par les nœuds des éléments, et donc la charge surfacique varie linéairement sur les arêtes des éléments (figure II.3). La démarche est très semblable de celle à l'ordre 0 détaillée précédemment.

Les méthodes de collocation et de Galerkin avec intégration par points de Gauss ont été développées et seulement pour des géométries de conducteurs maillées en triangles. Les coefficients de potentiel sont alors calculés au niveau des nœuds.

Sachant que le potentiel est singulier dans les coins et donc aux nœuds des triangles, nous savions que la méthode de collocation ne serait pas adaptée. C'est ce que nous verrons un peu plus loin dans la partie de mise en œuvre (section 4.1.2, p. 56).

## 2.5 Conclusion de l'intégration de la matrice d'interaction

Nous disposons de différentes formulations et techniques d'intégration pour construire la matrice d'interaction du problème. Dans la suite de ce manuscrit, nous noterons abusivement la matrice d'interaction  $[P/En]$  quelle que soit la nature des coefficients due au choix de la méthode de collocation ou de Galerkin. Avant de les comparer sur des exemples concrets, intéressons nous à la résolution du problème et aux calculs des capacités parasites à partir des charges des conducteurs.

# 3 Résolution : Calcul des capacités

On a vu, dans la partie précédente comment construire la matrice  $[P/En]$  par méthode intégrale. La démarche de calcul de la matrice des capacités  $C$  à partir des charges  $q_c$  des conducteurs décrite dans le paragraphe suivant, est indépendante du type de matrice d'interaction ou du type de résolution (utilisation d'un solveur direct ou itératif). On présentera plusieurs définitions de matrice de capacités qui dépendent de la tension définie aux bornes des capacités. Pour distinguer deux de ces définitions, on utilisera l'appellation capacités de Maxwell ou capacités de Kirchhoff [30].

### 3.1 Des charges aux capacités de Maxwell

On peut retrouver la répartition des charges à la surface des conducteurs et des diélectriques en fonction d'une répartition de potentiels des conducteurs donnée en résolvant le système II.12. On peut utiliser un solveur direct du type décomposition LU pour résoudre ce système. Pour calculer la matrice des capacités entre  $n$  régions de conducteurs, on peut soit résoudre  $n$  fois le système d'équations soit résoudre une seule fois le système à  $n$  seconds membres pour gagner en temps de calcul :

$$\begin{bmatrix} P \\ En \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_c^{(1)} & \cdots & q_c^{(n)} \\ q_d^{(1)} & \cdots & q_d^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^{(1)} & \cdots & V^{(n)} \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.16})$$

Dans ce système, chaque élément  $V^{(i)}(j)$  vaut 1 V, si l'élément  $j$  est situé sur le conducteur  $i$ , ou 0 V sinon.

La relation  $Q = C \cdot \Delta V$  permet de calculer la capacité entre deux régions avec  $\Delta V$  la différence de potentiel des deux régions et  $Q$ , la charge totale d'une région. Dans notre cas multiconducteur cette relation devient :

$$C_{ij} = \frac{Q_j^{(i)}}{V_i - V_{ref}} \quad (\text{II.17})$$

La charge  $Q_j^{(i)}$  représente la charge totale du conducteur  $j$  calculée pour la  $i$ ème résolution de II.12 (ou obtenue dans le  $i$ ème vecteur de II.16), où le conducteur  $i$  est soumis à 1 V et tous les autres à 0 V ;  $V_{ref}$ , est la tension de référence située à l'infini supposée nulle. Ainsi, cette équation peut se simplifier en  $C_{ij} = Q_j^{(i)}$ .

On peut détailler le calcul de cette matrice des capacités  $C$  - de taille  $n^2$  - entre les  $n$  régions conductrices de la manière suivante [41] :

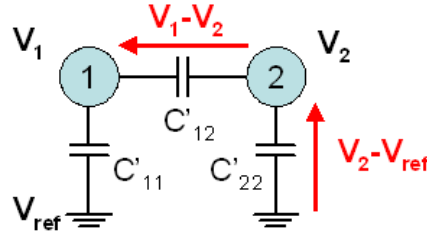
$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n(j)} \alpha_{\varepsilon_{rj}}^{(j)} \cdot q_k^{(j)} \quad (\text{II.18})$$

où le terme  $\alpha_{\varepsilon_{ri}}^{(j)}$  tient compte de la nature de l'interface de l'élément  $k$  du conducteur  $j$  maillé en  $n(j)$  éléments. Si cet élément est « collé » à un diélectrique, alors ce coefficient vaut  $\varepsilon_r$ , si l'élément est entouré d'air alors le coefficient vaut 1 [42].

Les capacités obtenues par cette équation sont appelées capacités de Maxwell ou coefficients de capacité. Les capacités propres  $C_{ii}$  et mutuelles  $C_{ij}$  sont respectivement positives et négatives. En théorie, cette matrice  $C$  est symétrique, définie positive et diagonalement dominante : la capacité propre  $C_{ii}$  est supérieure à la valeur absolue de la somme de toutes les capacités mutuelles de la ligne ou de la colonne  $i$  [30].

### 3.2 Des capacités de Maxwell aux capacités de Kirchhoff

Les capacités de Maxwell  $C_{ij}$  ne peuvent pas être directement utilisées dans un circuit électrique. En pratique, on utilise des capacités notées  $C'_{ij}$  définies au sens de Kirchhoff [30, 43, 44] avec la différence de potentiels à leurs bornes définie comme dans la figure suivante :



**Figure II.5** – Définition des capacités parasites  $C'_{ij}$  en sens de Kirchhoff

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 = C'_{11} \cdot (V_1 - V_{ref}) + \dots + C'_{1j} \cdot (V_1 - V_j) + \dots + C'_{1N} \cdot (V_1 - V_N) \\ \vdots \\ Q_i = C'_{i1} \cdot (V_i - V_1) + \dots + C'_{ij} \cdot (V_i - V_j) + \dots + C'_{iN} \cdot (V_i - V_N) \\ \vdots \\ Q_N = C'_{N1} \cdot (V_N - V_1) + \dots + C'_{Nj} \cdot (V_2 - V_j) + \dots + C'_{NN} \cdot (V_N - V_{ref}) \end{array} \right. \quad (\text{II.19})$$

avec  $Q_i$  la charge totale du conducteur  $i$  de potentiel  $V_i$  défini par rapport au potentiel de référence  $V_{ref} = 0V$ . En développant ce système II.19 et en rassemblant les capacités par potentiel, on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 = (C'_{11} + \dots + C'_{1N}) \cdot V_1 - \dots - C'_{1j} \cdot V_j - \dots - C'_{1N} \cdot V_N \\ \vdots \\ Q_i = -C'_{i1} \cdot V_1 - \dots - C'_{ij} \cdot V_j - \dots - C'_{iN} \cdot V_N \\ \vdots \\ Q_N = -C'_{N1} \cdot V_1 - \dots - C'_{Nj} \cdot V_j - \dots + (C'_{1N} + \dots + C'_{NN}) \cdot V_N \end{array} \right. \quad (\text{II.20})$$

Sous cette forme, on peut facilement faire le lien entre les capacités calculées de Maxwell  $C_{ij}$  (II.18) et les capacités de Kirchhoff  $C'_{ij}$  par la relation :

$$\left\{ \begin{array}{l} C'_{ii} = \sum_{j=1}^N C_{ij}, \quad \text{pour tout } i \\ C'_{ij} = -C_{ij}, \quad \text{si } i \neq j \end{array} \right. \quad (\text{II.21})$$

La capacité propre  $C'_{ii}$  est positive et représente (avec cette modélisation) la capacité entre le conducteur  $i$  de potentiel  $V_i$  et une masse de référence supposée être à l'infini avec un potentiel imposé à 0 V.

La capacité mutuelle  $C'_{ij}$  est positive ( $C_{ij} < 0$ ) et représente la capacité entre les conducteurs  $i$  et  $j$  de potentiels respectifs  $V_i$  et  $V_j$ . La symétrie de la matrice  $C'$  est conservée par contre, elle n'est plus diagonalement dominante. Les capacités propres sont très petites devant les capacités mutuelles.

Les géométries et les maillages utilisés pour extraire les capacités sont rarement symétriques (ex : différents conducteurs au dessus d'un plan de masse). L'utilisation de méthodes numériques peut conduire à une légère non-symétrie de la matrice  $C$  (et donc  $C'$ ), c'est ce qu'on verra dans la partie suivante qui traite de la mise en œuvre, des validations et des performances de toutes ces différentes méthodes et techniques d'intégration présentées dans ce chapitre.

## 4 Mise en œuvre, validations et performances

### 4.1 Mise en œuvre

#### 4.1.1 Vectorisation des routines d'intégration

Ces différentes méthodes intégrales en interaction totale ont été développées dans les langages de programmation Matlab et java. Le remplissage de la matrice d'interaction  $[P/En]$  est illustré dans la figure II.6. Chaque région conductrice et diélectrique est maillée en triangles et/ou rec-

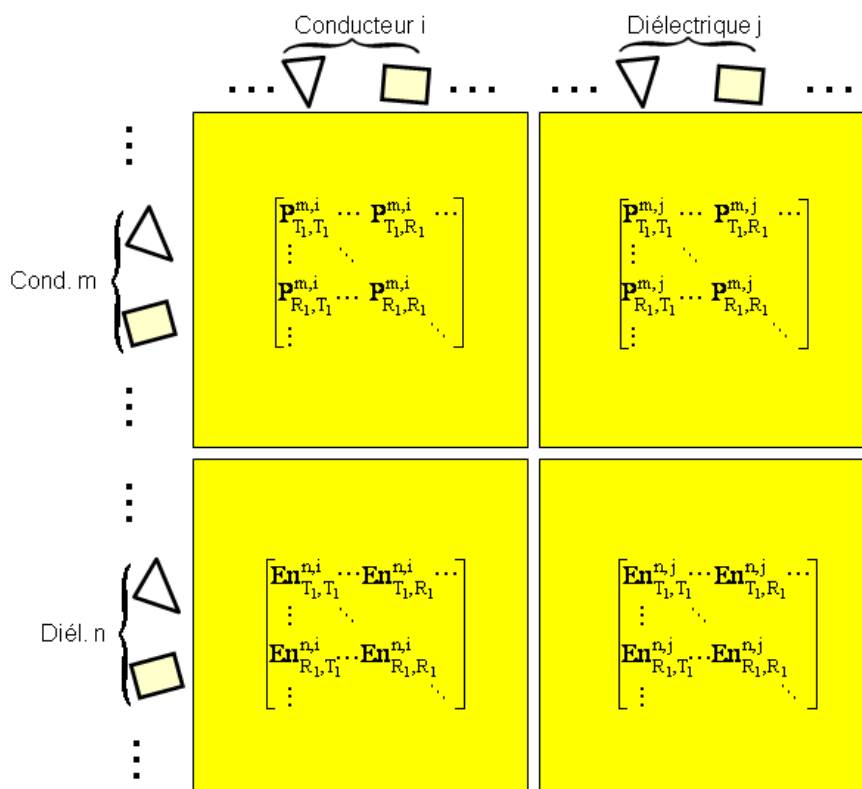
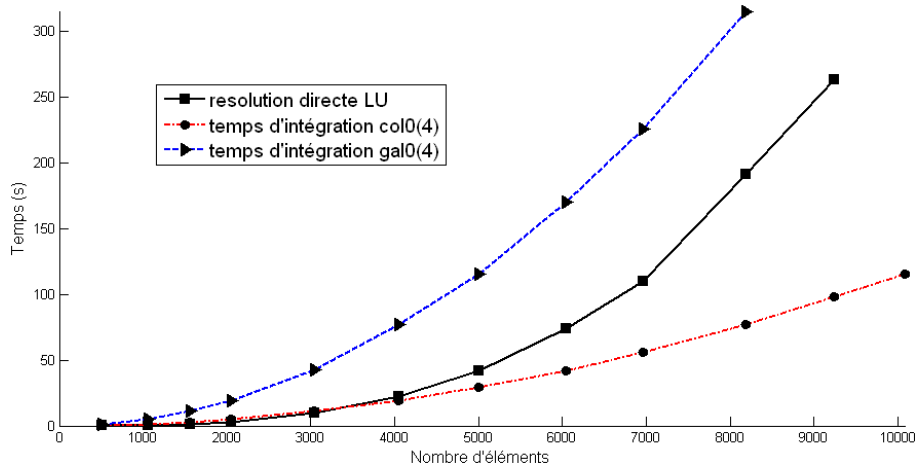


Figure II.6 – Composition de la matrice d'interaction

tangles. Ces méthodes sont vectorisées par rapport aux éléments : on intègre ligne par ligne et région par région la matrice d'interaction et ceci, quelle que soit la technique d'intégration. Par exemple, pour intégrer la première ligne de la matrice  $[P/En]$  avec une méthode de collocation à l'ordre 0, le point de calcul des coefficients de potentiels de toute la ligne est le même, c'est le barycentre du premier élément de la région 1 :  $X_{T_1}^1$  (si c'est un triangle). On intègre alors en même temps tous les coefficients de potentiels de tous les triangles de la région 1 notés  $P_{T_1, T_i}^{1,1}$  pour  $i$  variant de 1 au nombre de triangles de la région 1. Puis, on fait de même pour les rectangles de la région 1, puis pour les triangles et rectangles des autres régions conductrices puis diélectriques. Enfin, on passe à la deuxième ligne. Et on procède de la même façon pour intégrer les coefficients en champs normaux sur les éléments diélectriques.

Les éléments sont regroupés en fonction de leur nature (triangle ou rectangle) car les routines d'intégrations analytiques et numériques ne sont pas les mêmes. Par exemple on utilise généralement 3 points de Gauss pour les triangles et 4 points de Gauss pour les rectangles. Et ces routines de calculs bouclent sur les points de Gauss (présentées en annexe aux sections 1, p. 165 et 3, p. 170). Cette technique permet de gagner un coefficient d'environ 10 sur le temps d'intégration.

Pour évaluer les performances en temps de notre méthode, on a comparé pour deux plaques conductrices parallèles ( $10 \times 10 \text{ mm}^2$  espacées de 2 mm, figure II.3) maillées de 512 à environ 10 000 éléments, les temps d'intégration de la matrice  $[P/En]$  et d'une résolution des charges (décomposition LU - solveur de Matlab). Les formulations utilisées pour l'intégration sont la méthode de collocation et de Galerkin à l'ordre 0 avec 4 points de Gauss par rectangle avec correction analytique de la diagonale. Ces résultats sont présentés dans la figure II.7. On observe

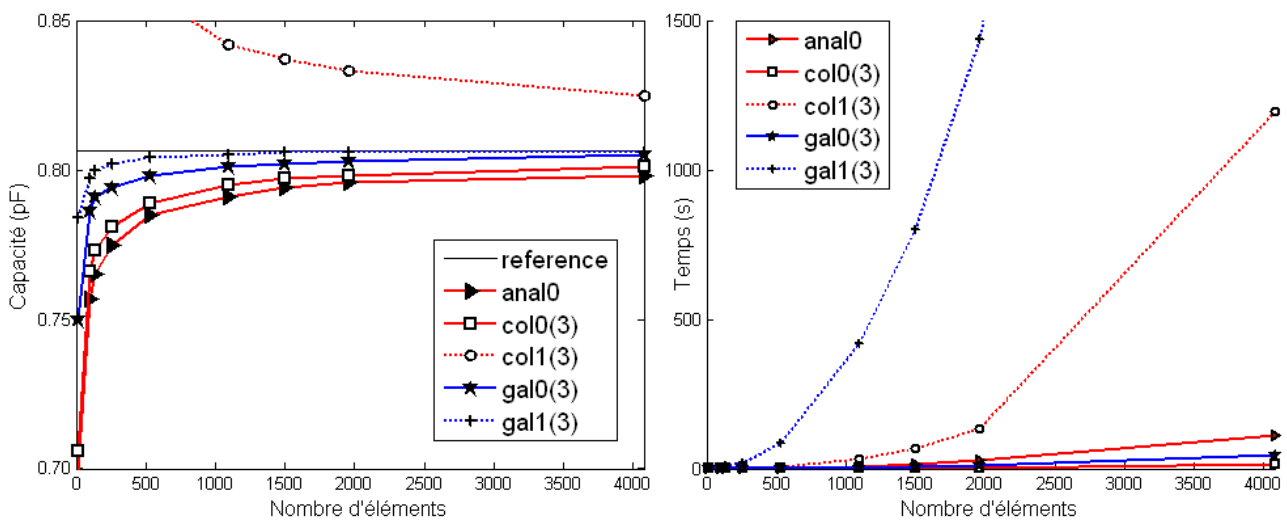


**Figure II.7** – Comparaison des temps d'intégration et de résolution des charges pour deux plaques parallèles maillées de 512 à 10 082 éléments avec la méthode intégrale en interaction totale (« col0(4) » et « gal0(4) » : collocation et Galerkin à l'ordre 0 avec 4 points de Gauss)

avec cette figure, que les temps d'intégration et de résolution progressent respectivement avec une loi en  $\mathcal{O}(N^2)$  et  $\mathcal{O}(N^3)$  avec  $N$  le nombre d'éléments surfaciques. Pour ce qui concerne la configuration maillée en 10 082 éléments, on a réussi à construire la matrice d'interaction mais pas

à résoudre avec une résolution LU à cause d'une saturation en mémoire (PC de 3 Go de mémoire vive). La matrice  $[P/En]$  demande environ 1 Go de place mémoire, et la résolution, le double (décomposition de la matrice  $[P/En]$  en deux matrices triangulaires).

### 4.1.2 Comparaison des formulations et des techniques d'intégration



**Figure II.8** – Comparaison entre cinq techniques d'intégration de la valeur de la capacité  $C_{11}$  et du temps d'intégration pour les deux plaques parallèles en vis-à-vis maillées uniformément en triangles - « col » désigne collocation, « gal » Galerkin, « 0 » et « 1 » pour l'ordre

La figure II.8 montre la comparaison des différentes formulations et techniques d'intégration présentées précédemment sur l'exemple des deux plaques parallèles maillées en triangles. La courbe notée « anal0 », est la méthode de collocation à l'ordre 0 avec intégration analytique. Les autres courbes utilisent la technique numérique des points de Gauss (ici 3 points de Gauss par triangle). On peut remarquer que les différentes les méthodes convergent vers une même valeur sauf la méthode de collocation à l'ordre 1. On a vu précédemment que cette dernière méthode cherche à évaluer le potentiel à chaque nœud des triangles, ie. à l'endroit où le potentiel est singulier. Cela entraîne des erreurs numériques qui contribuent au calcul d'une mauvaise valeur des charges et donc, des capacités. On peut remarquer aussi que les méthodes de Galerkin convergent plus rapidement (avec peu d'éléments de maillage) que la méthode de collocation à l'ordre 0.

Les routines de calcul à l'ordre 0 sont plus facilement vectorisées que celles de l'ordre 1 que l'on aurait pu certainement améliorer. L'écart des temps d'intégration entre l'ordre 0 et l'ordre 1 est également accentué par le fait qu'on utilise pas le même langage de programmation. L'ordre 0 est codé en java et l'ordre 1 en Matlab.

### 4.1.3 Choix d'une technique d'intégration

Vu ces dernières comparaisons, on a choisi d'utiliser dans tous nos travaux présentés dans ce manuscrit, une intégration à l'ordre 0 avec la méthode de collocation ou de Galerkin. Le meilleur compromis au niveau temps de calcul et précision semble être la méthode de Galerkin. Cependant, cette méthode a été développée après la méthode de collocation. C'est pourquoi certains résultats présentés auront été obtenus par la méthode de collocation.

Malgré la très bonne précision des résultats obtenus par la méthode de Galerkin à l'ordre 1, nous avons choisi de ne pas développer cette méthode pour différentes raisons liées au planning des travaux de recherche. Les temps d'intégration, sont vraiment plus longs en matrice pleine. L'effort de développement est plus long que pour les méthodes à l'ordre 0. Enfin, la non conformité du maillage peut s'avérer très pratique dans le traitement des bords et des coins avec l'utilisation de mailleur automatique ou adaptatif (développés plus loin, section 4.4.2).

Cependant, il serait intéressant de tester les performances de cette méthode avec l'expérience et le recul que l'on a obtenues avec l'utilisation de la Fast Multipole Method (présentée dans le chapitre suivant). Car grâce à celle-ci, la taille des matrices d'interaction pleine est vraiment très petite et donc l'écart en temps d'intégration avec l'ordre 0 serait certainement réduit.

## 4.2 Validations des méthodes intégrales développées

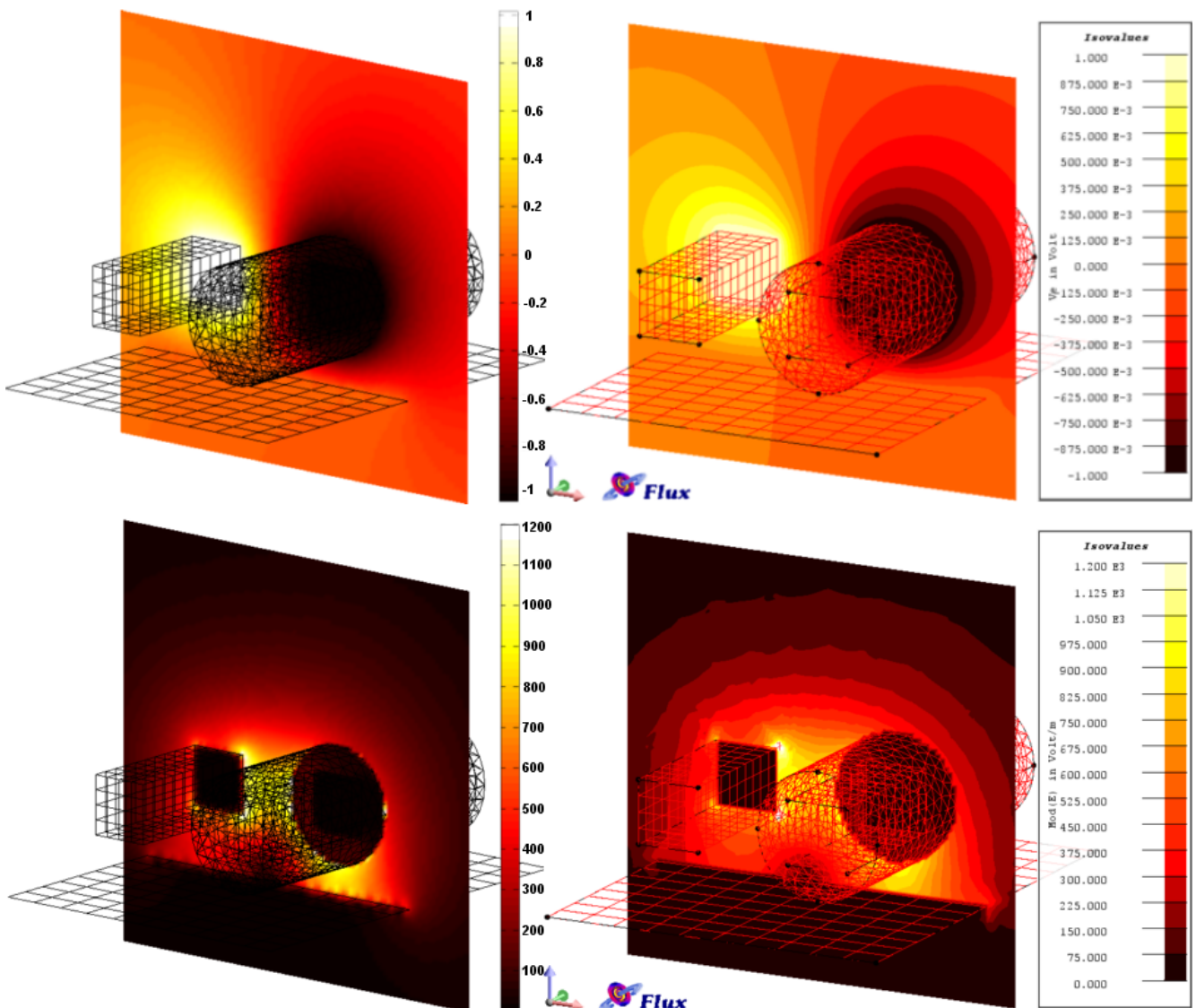
### 4.2.1 Comparaison avec la méthode des éléments finis - Flux

Pour valider les calculs des charges (et donc des capacités), on a comparé nos résultats à ceux obtenus avec un logiciel éléments finis, Flux, co-développé par le G2Elab et CEDRAT (Flux [4]). De nombreuses géométries ont été réalisées pour valider notre méthode. On présentera seulement trois configurations.

#### **a) Étude de deux conducteurs et un diélectrique au-dessus d'un plan de masse**

La première configuration a été présentée dans la figure II.1. Deux études en post-processing sur le calcul du potentiel  $V$  et du module du champ  $E$  sur une grille 2D ont été comparées entre la méthode intégrale et la méthode des éléments finis via le logiciel Flux. Dans la méthode intégrale, les charges électriques sont calculées avec la répartition de potentiel suivant : le potentiel du conducteur volumique de gauche est fixé à 1 V, celui de droite à -1 V et le plan de masse à 0 V. La permittivité  $\varepsilon$  du diélectrique est fixé à 10. A partir de ces charges, on calcule le potentiel et le champ électrique sur la grille 2D. Dans la modélisation éléments finis, le potentiel et le champ électrique sont calculés dans tout l'espace (air compris).

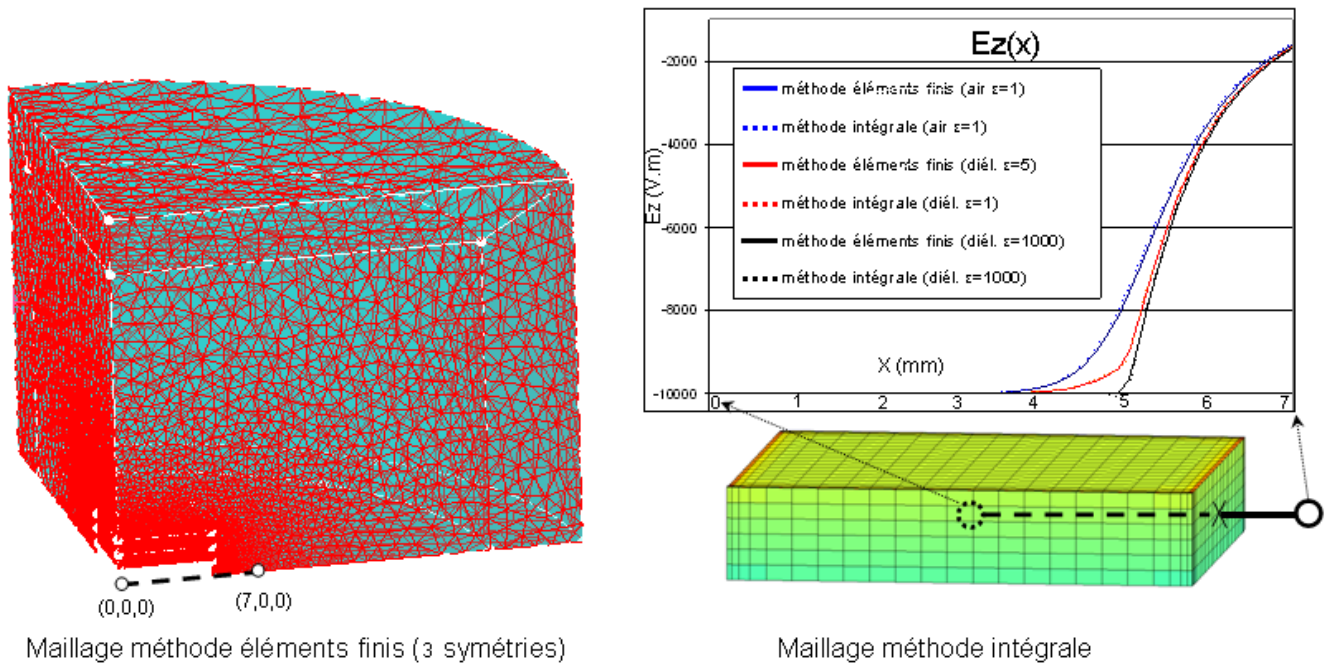
La figure II.9 montre les isovaleurs en potentiel et en champ sur la grille. On observe une très bonne corrélation entre les deux simulations, les niveaux hauts et bas sont identiques ce qui prouve que les charges obtenues avec la méthode intégrale sont bien calculées. Les maillages des interfaces et de la grille 2D utilisés dans les deux méthodes sont identiques (2300 éléments).



**Figure II.9** – Comparaison en post-processing du calcul du potentiel, en haut, et du module du champ, en bas, sur une grille 2D; à gauche, les résultats pour la méthode intégrale, à droite, pour le logiciel éléments finis Flux

**b) Étude d'un condensateur plan** La deuxième configuration est un condensateur plan : deux plaques parallèles de 10 mm de côté, séparées par un matériau diélectrique de permittivité  $\epsilon_r$  variable d'épaisseur 2 mm. Le calcul des charges électriques sur les surfaces des conducteurs donne les mêmes valeurs de charges pour les deux méthodes pour différentes valeurs de permittivité pour les maillages présentés à la figure II.10. Ce calcul de charges est obtenu en post-processing dans le logiciel Flux après avoir calculé, lors de la résolution, le champ électrique  $\mathbf{E}$  et le potentiel  $V$  partout [4, 45]. Le nombre de mailles utilisé dans flux est de 211 000 pour un quart de la géométrie (utilisation de trois symétries) contre 1 610 avec la méthode intégrale. Après une résolution des charges pour la plaque supérieure soumise à un potentiel de 1 V et 0 V pour l'autre, on a également calculé le champ électrique  $\mathbf{E}$  créé par ces charges en 51 points d'une ligne partant du barycentre





**Figure II.10** – Influence de la permittivité  $\varepsilon_r$  du diélectrique et comparaison du calcul du champ électrique  $E_x$  avec une méthode éléments finis - maillages des méthodes éléments finis et méthode intégrale

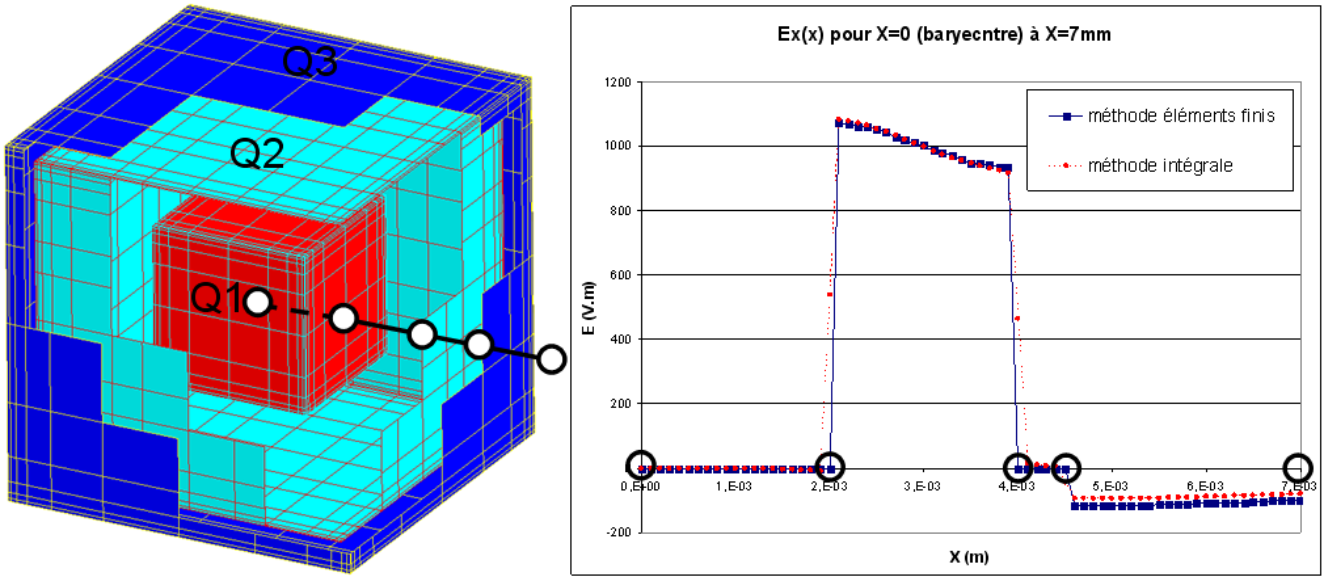
du diélectrique et passant par le barycentre d'un côté du diélectrique. La figure II.10 présente une bonne corrélation entre les résultats obtenus par le logiciel flux et notre méthode intégrale. L'erreur moyenne (pourcentage entre parenthèses dans la figure II.10) reste inférieure à 0,8%. On obtient les mêmes résultats pour les autres composantes du champ électrique ainsi que sur d'autres lignes de champ. Cette fois-ci, c'est le champ électrique qui est calculé en post-processing dans la méthode intégrale, après la résolution des charges, par la relation suivante :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{S_i} \iint_{S_i} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|^3} dS_i \quad (\text{II.22})$$

Tous les calculs ont été obtenus par méthode de collocation à l'ordre 0 avec points de Gauss. On peut remarquer qu'avec un maillage relativement lâche, on obtient de très bons résultats de charges ou de champs électriques.

### c) Étude d'un condensateur en influence totale

Cette dernière configuration est un « condensateur en influence totale » (Fig. II.11). On considère deux conducteurs volumiques, l'un complètement entouré par l'autre. Tous les deux sont séparés par un diélectrique de permittivité  $\varepsilon_r$ . Comme pour l'exemple du condensateur, des calculs de charges et de champs électriques ont été comparés à l'aide du logiciel flux. Le maillage élément finis, non représenté ici, contient plus de 300 000 éléments volumiques pour un huitième de la géométrie (trois symétries). D'après les résultats de comparaison présentés dans cette dernière figure, on peut vérifier les propriétés physiques de cette configuration, à savoir que le champ



**Figure II.11** – Condensateur en influence totale maillé en 2 640 éléments (méthode intégrale) et comparaison du calcul du champ électrique  $E_x$  entre méthode éléments finis et méthode intégrale

électrique est nul à l'intérieur d'un conducteur et la somme de toutes les charges est nulle (comme dans le cas d'un câble coaxial). Effectivement, le théorème de Gauss permet d'écrire :

$$\iint_{S_1 \cup S_{23}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_1 + Q_{23}}{\epsilon_0} \quad (\text{II.23})$$

avec,  $Q_1$  la charge totale présente sur la surface  $S_1$  du conducteur intérieur et  $Q_{23} = Q_2 + Q_3$  la somme des charges présentes sur la surface  $S_{23} = S_2 \cup S_3$  du conducteur extérieur.

De ces trois exemples traités qui sont relativement simples, on peut déjà remarquer qu'avec un maillage lâche utilisé dans la méthode intégrale, on peut obtenir de très bons résultats de charges et aussi en terme de post-processing en potentiel ou champ électrique. Le maillage de l'air avec un raffinement dans les bords des conducteurs dans la méthode des éléments finis alourdi la modélisation.

### 4.3 Discussion sur les capacités

L'objectif de cette partie est de se familiariser un peu plus avec les valeurs des capacités parasites. On analysera les influences des différents paramètres géométriques et physiques.

#### 4.3.1 Symétrie de la matrice des capacités

Par exemple, reprenons deux plaques parallèles. Si la plaque inférieure, notée 1, est mieux maillée que celle supérieure, notée 2, la capacité mutuelle la plus précise entre ces deux conducteurs est alors  $C_{21}$  (configuration « A2 » de la figure II.12). Effectivement, cette capacité est la somme

des charges sur le conducteur 1 (supposée bien calculée) pour le conducteur 2 soumis à 1 V (la répartition des charges est moins bien calculée).

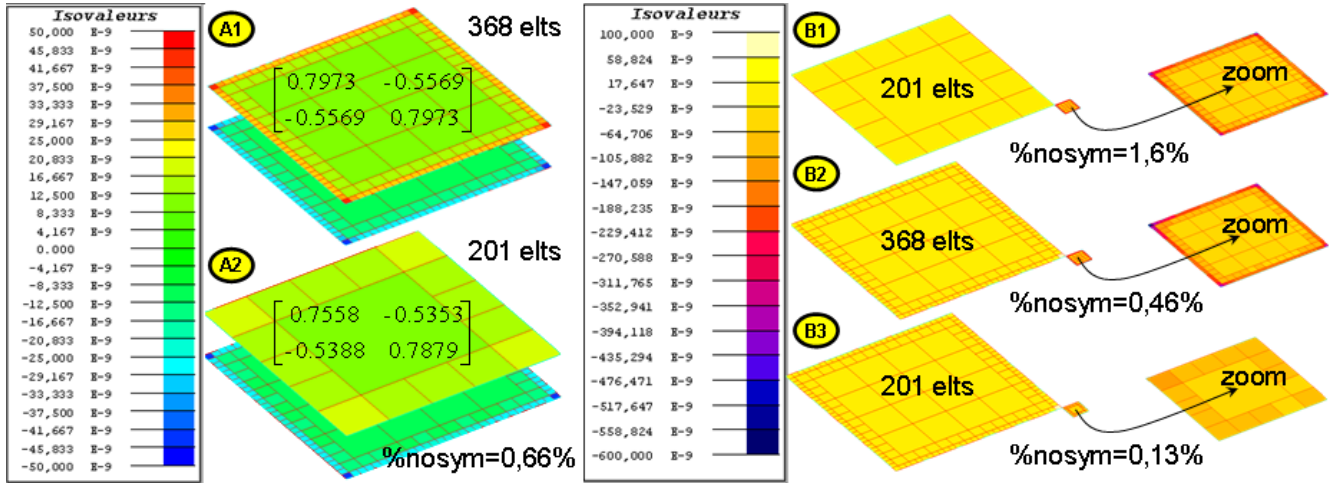


Figure II.12 – Influence du maillage sur la non-symétrie de la matrice des capacités

Autre exemple, si les dimensions du conducteur 2 sont très petites devant celle du conducteur 1 et que 1 est mieux maillé que 2, la capacité mutuelle la plus précise est alors  $C_{12}$  (configuration « B1 » de la figure II.12). Ainsi, la symétrie de la matrice des capacités n'est pas garantie et dépend fortement de la qualité du maillage. La figure II.12 montre ces deux configurations pour différents maillages. On voit bien que les charges se répartissent dans les coins et sur les bords des plaques. La méthode utilisée pour le calcul des capacités est la méthode de collocation à l'ordre 0 avec 4 points de Gauss (l'influence des points de Gauss sera traitée ensuite : section 4.4.1). Les pourcentages de non-symétrie des matrices des capacités, notés « nosym » dans la figure, montrent l'influence du maillage pour les différentes configurations. Ce pourcentage est nul si la matrice est symétrique. Dans la configuration notée « B3 », le pourcentage de non-symétrie est minimal, certainement car l'écart-type entre la taille des éléments est minimal par rapport aux autres configurations. D'ailleurs, avec la méthode de Galerkin à l'ordre 0 et pour 4 points de Gauss, ce pourcentage de non-symétrie de la configuration est inférieur à  $10^{-10}\%$  car cette technique d'intégration est symétrique.

#### 4.3.2 Effets d'ombrage, de proximité et de pointe

Lorsque deux conducteurs sont proches et que leurs potentiels sont différents, on peut observer des effets d'ombrage, de proximité et de pointes : zones dans lesquelles les charges sont très importantes et où demeurent de forts gradients de champ électrique. Pour visualiser l'effet d'ombrage, on aurait pu choisir la configuration classique d'un conducteur au-dessus d'un plan de masse. Cependant on a préféré utiliser la figure II.13 qui illustre une configuration qui ne représente rien de concret mais qui a pour intérêt de rassembler tous les effets que l'on veut observer.

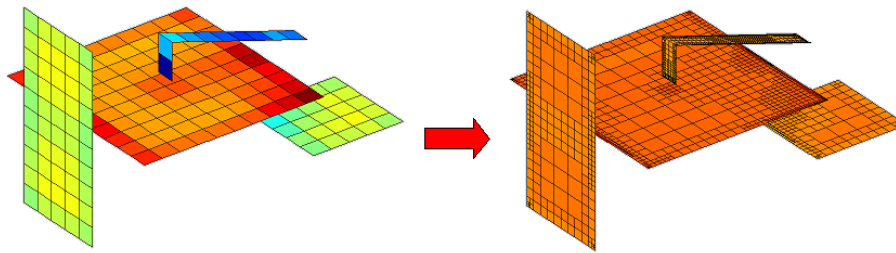


Figure II.13 – Prise en compte des effets d’ombrage et de proximité

La figure II.13 montre bien les zones les plus chargées pour une répartition de charges sur quatre conducteurs. A gauche le maillage est uniforme et à droite, on a utilisé un des maillages adaptatifs présentés plus loin (4.4.3, 4.4.3 et 4.4.3) qui prennent mieux en compte ces effets d’ombrage, de proximité et de pointe. Pour obtenir des calculs de capacités relativement précis, il faut raffiner le maillage dans ces zones.

### 4.3.3 Influence des diélectriques

Pour plus se familiariser avec les matériaux diélectriques et leur influence, la figure II.14 présente la répartition des charges sur les surfaces des conducteurs et des diélectriques. On vérifie

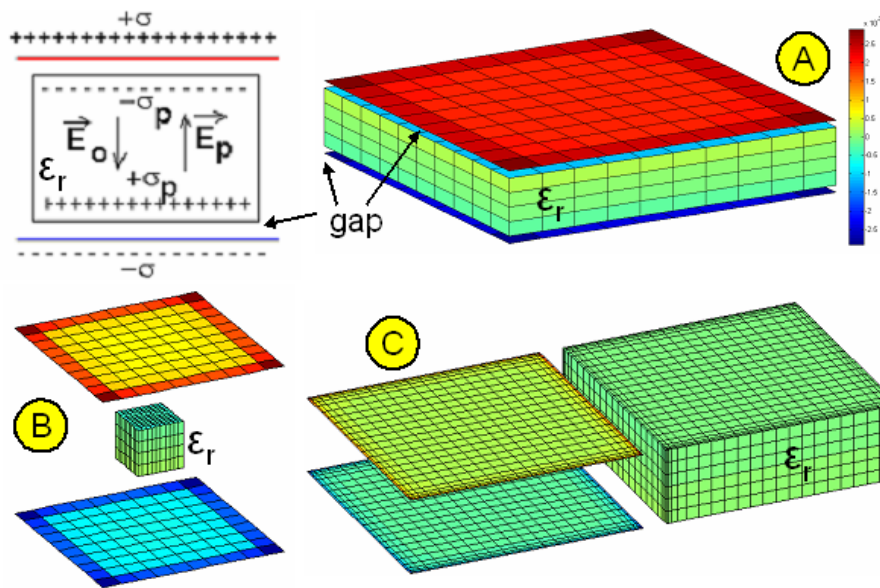


Figure II.14 – Influence du diélectrique pour 3 configurations

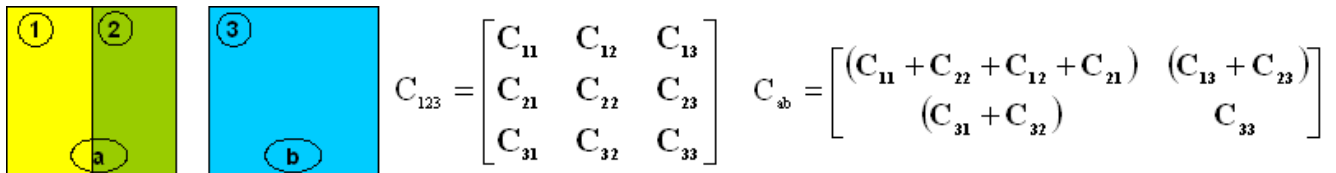
bien sur cette dernière figure que les charges de signe opposé des conducteurs et des diélectriques en vis-à-vis s’attirent. En règle générale, la valeur des charges à la surface des diélectriques est vraiment très petite par rapport à celles des conducteurs, leur somme est nulle, et elles influencent peu la répartition et la valeur des charges des conducteurs. En fait, c’est le coefficient lié à la permittivité  $\epsilon_r$  du diélectrique utilisé dans le calcul des capacités (II.18) qui va modifier sensiblement la valeur des capacités.

#### 4.3.4 Du conducteur fin au conducteur surfacique

Dans l'optique de réduction du nombre d'éléments de maillage, on s'est intéressé à la prise en compte ou non de l'épaisseur des conducteurs quand ceux-ci sont très fins. On est souvent confronté en pratique à des pistes de cuivre d'épaisseur 35 ou 70  $\mu\text{m}$  et de surface plusieurs centimètres carrés. De nombreux tests ont été menés pour observer l'influence de la prise en compte de cette épaisseur sur la valeur des capacités. La conclusion de ces travaux est qu'une épaisseur faible (à partir d'environ 100 fois plus petite que la largeur d'un conducteur) a très peu d'influence sur la valeur des capacités avec ou sans diélectrique. Pour les capacités propres, ces valeurs peuvent varier de quelques pour-cents et pour les capacités mutuelles, cette variation est négligeable.

#### 4.3.5 Compactage des matrices de capacités de Maxwell

Lorsqu'on découpe un conducteur en plusieurs tronçons, on obtient des capacités propres (et mutuelles) pour (et entre) chaque tronçon. Il est possible, comme le montre la figure II.15 de « compacter » éventuellement la matrice des capacités de Maxwell pour obtenir la capacité propre équivalente de l'ensemble des tronçons du conducteur et les capacités mutuelles avec les autres conducteurs. Sur la figure II.15, on présente un conducteur  $a$  divisé en deux régions (1 et 2) et le



**Figure II.15** – Principe du compactage de la matrice des capacités de trois régions 1, 2 et 3 en deux régions  $a = \{1, 2\}$  et  $b = 3$

compactage de la matrice des capacités initiales de taille  $3 \times 3$  en une matrice de taille  $2 \times 2$ .

Les formules pour ce compactage sont simples, il suffit de faire des sommes de capacités [14]. Pour la capacité propre équivalente, c'est la somme de toutes les capacités propres de chaque tronçon et la somme de toutes les capacités mutuelles entre chaque tronçon. De la même manière, les capacités mutuelles équivalentes sont les sommes des capacités mutuelles entre chaque tronçon et les autres conducteurs. Voici le calcul de ces deux capacités équivalentes pour un conducteur  $i$  découpé en  $N_i$  tronçons :

$$\begin{cases} Ceq_{ii} = \sum_{n=1}^{N_i} \sum_{m=1}^{N_i} C_{nm} \\ Ceq_{ij} = \sum_{n=1}^{N_i} C_{nj} \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

L'utilisation de ce compactage peut être pratique pour faire des études d'implantation de capacités

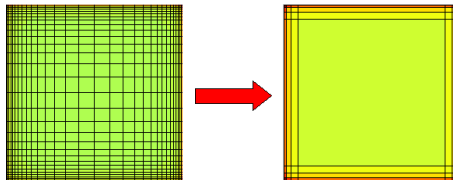
avec différentes discrétisations de régions capacitives.

## 4.4 Discussion sur le maillage

### 4.4.1 Influence du maillage et du nombre de points de Gauss

L'influence du maillage et celle du nombre de points de Gauss sont assez similaires. Plus le maillage est fin plus ou plus le nombre de points de Gauss est élevé plus les calculs de capacités sont précis.

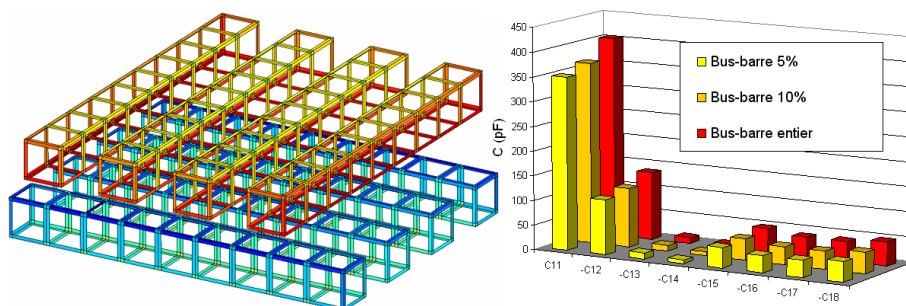
Le but de cette partie est de rechercher un optimum entre ces deux phénomènes. Une série de configurations a été réalisée pour trouver un maillage idéal : permettant d'obtenir des résultats de capacités précis avec un nombre minimum d'éléments. La figure II.16 montre cet optimum pour la configuration des deux plaques parallèles :



**Figure II.16** – Vers un maillage optimum prenant en compte la répartition des charges

Les calculs de capacités (à nombre de points de Gauss identique) entre ces deux maillages donnent les mêmes résultats à moins d'un pourcent. On se rend compte, que l'on peut vraiment relâcher le maillage au centre des plaques, là où il y a très peu de charges (ou des charges de valeurs très faibles).

Pour aller plus loin, on a testé pour la même configuration des huit bus-barres présentée précédemment (Fig. III.25), une modélisation des arêtes seules : il y a des trous dans les conducteurs (Fig. II.17). Sur la figure II.17, on a présenté les résultats pour toutes les capacités du conducteur



**Figure II.17** – Vers une modélisation d'arêtes - calcul des capacités  $C_{1i}$  de différents bus-barres : bus-barre entier, bus-barre 5% et 10% (pourcentage de l'épaisseur du bus-barre qui définit la largeur des arêtes)

1 ( $C_{1i}$ ) pour différentes épaisseurs d'arêtes. On observe que les valeurs des capacités sont relativement proches d'une modélisation à l'autre : pour les configurations avec des arrêtes larges de

5% et 10% du côté des barres, on obtient respectivement des erreurs relatives de 12% et 8% par rapport à la configuration sans trous.

La conclusion de cette étude est que dans une première approche, avec peu d'éléments de maillage répartis sur les bords des conducteurs, on peut obtenir un bon ordre de grandeur des capacités parasites. Pour pousser encore plus loin cette étude, on pourrait même tenter de ne modéliser que les arêtes de largeur nulle et adapter nos calculs d'intégrales en fonction : passer d'intégrales surfaciques à des intégrales linéiques. Par contre, il faudrait s'assurer de bien modéliser les effets éventuels d'ombrage, de proximité et de pointes, décrits dans la section suivante.

### 4.4.2 Maillage automatique

Ce maillage est composé de 6 étapes présentées sur la figure II.18 (deux profils de conducteurs) et maille les conducteurs et les diélectriques face par face. Il aboutit à un maillage non conforme avec une majorité de rectangles et quelques triangles.

Ce maillage est largement inspiré de celui développé à CEDRAT par David Pedreira pour la prise en compte automatique de l'effet de peau pour la modélisation inductive des conducteurs dans le logiciel InCa3D [24, 25].

1) On délimite une zone de raffinement à l'intérieur du profil de chaque face suivant un pourcentage fixé du plus petit côté de sa boîte englobante rectangulaire. On se place en deux dimensions avec un repère local lié à la boîte englobante (de centre  $[0; 0; 0]$  et de côté 2). Dans la première étape de maillage de la figure II.18, sur le profil de gauche, on peut voir que la zone de raffinement s'adapte à la complexité de la géométrie.

2) On effectue un raffinement géométrique qui s'attaque aux diagonales du profil de la face (dans ce repère local en 2D) par dichotomie en formant des petits rectangles ou carrés le long de ces diagonales. Dans la figure II.18, on a utilisé une précision de raffinement géométrique de 5% (pourcentage lié à l'aire manquante qui sera bouchée par des triangles).

3) On discrétise les éléments présents dans la zone de raffinement avec différents paramètres : un nombre d'éléments à insérer avec une raison géométrique (pouvant être égale à 1). Dans la figure II.18, on a choisi d'insérer 3 éléments dans la zone de raffinement avec une raison géométrique de  $r = 1,5$ .

4) Afin d'obtenir un maillage non-conforme mais relativement uniforme hors des zones de raffinement, on effectue alors une fusion des éléments. Cela forme des gros éléments au centre des faces.

5) On rend carré tous les éléments rectangulaires dans et hors de la zone de raffinement. Un nouveau paramètre de rapport de longueur entre l'épaisseur de la zone de raffinement et le côté d'un élément interne (hors de la zone de raffinement) est utilisé pour choisir le niveau de non-conformité du maillage (ie : maillage plus ou moins lâche au centre d'une plaque par exemple). Ce rapport est fixé à 1,2 dans la figure II.18.

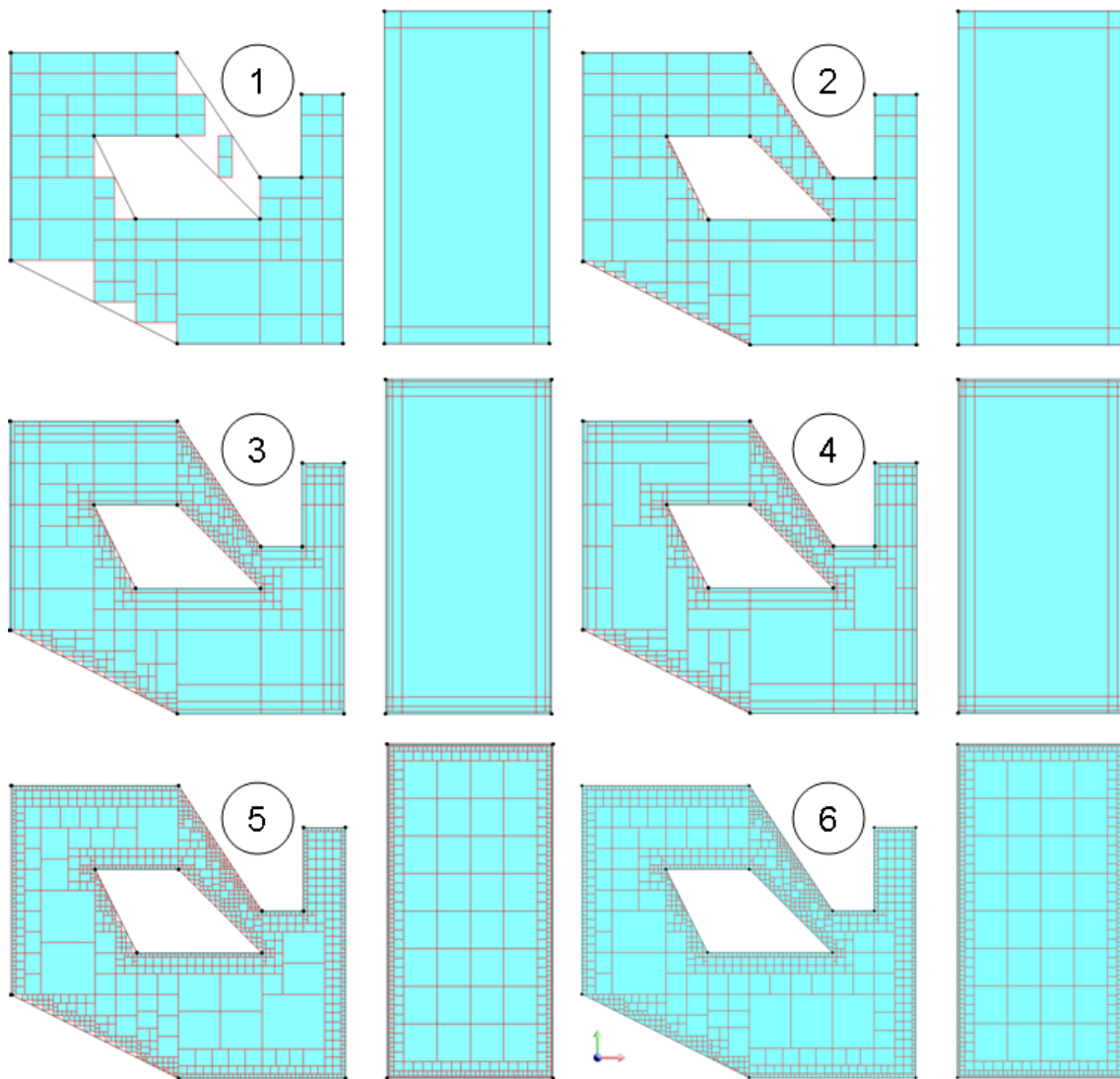


Figure II.18 – Six étapes du maillage automatique de InCa3D

**6)** On enregistre tous les éléments carrés (ou presque) et on crée les triangles plus ou moins discrétisés (de façon uniforme ou géométrique, suivant leur « platitude » et suivant l'épaisseur de la zone de raffinement) le long des diagonales du profil. Dans la figure II.18, on remarque que les triangles ne sont pas discrétisés car ils sont suffisamment petits par rapport à l'épaisseur de la zone de raffinement.

L'avantage de ce maillage est que l'on obtient directement et très rapidement un bon maillage des conducteurs et des diélectriques en prenant en compte les effets de bords (voire annexe 7, p. 176). Par contre, l'inconvénient majeur est que ce maillage ne prend pas en compte la notion de voisinage ou les effets d'ombrage et de proximité d'autres régions conductrices. Cela peut se faire en utilisant les algorithmes de maillage adaptatif.



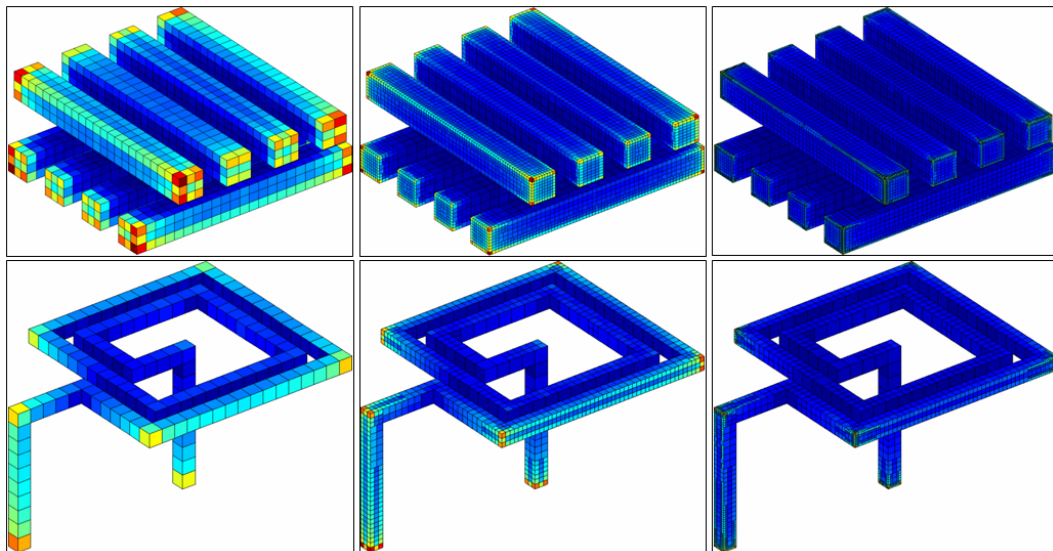
### 4.4.3 Maillage adaptatif

Différents algorithmes de maillage ou remaillage adaptatif ont été développés. L'idée principale est de découper en 4 ou 9 éléments les éléments de maillage triangulaires et rectangulaires selon un critère.

Une première version consiste à remailler les éléments les plus chargés tant que l'écart entre deux matrices de capacités n'est pas inférieur à un seuil fixé à l'avance. Un second algorithme avec un critère d'arrêt énergétique a également été testé. Pour une charge électrique, cette énergie électrostatique est égale au produit de la somme de la charge par le potentiel au niveau de cette charge :

$$\mathcal{E}_S = \frac{1}{2}qV \quad (\text{II.25})$$

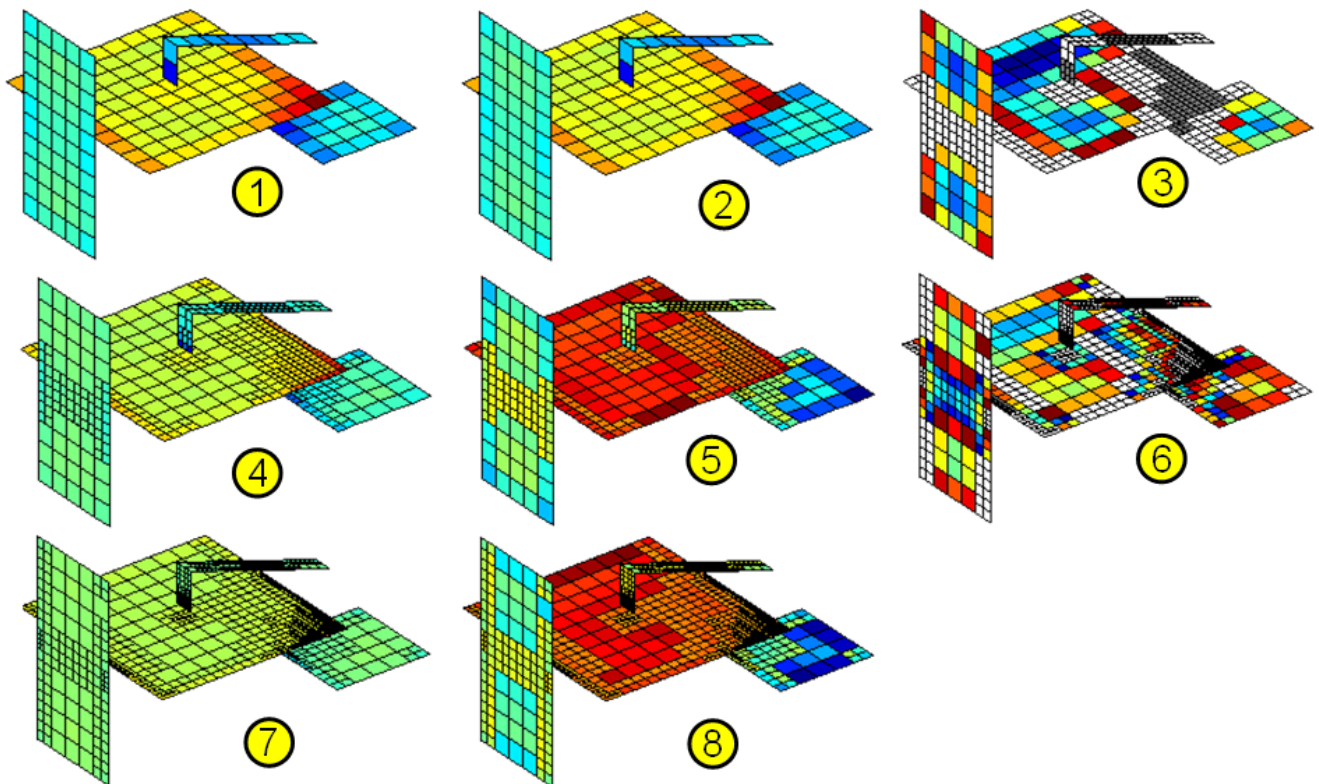
Cette méthode est illustrée dans la figure II.19 pour un jeu de 8 barres [32] et une bobine [46]. Ces



**Figure II.19** – Maillage adaptatif en 2 itérations avec remaillage des éléments les plus chargés en valeur absolue : découpage des 20% premiers éléments en 9 éléments et les 40% des suivants en 4

algorithmes donnent de bons maillages et raffinent les zones de fort gradient et donc détectent les effets d'ombrage et de bords.

Un troisième algorithme de remaillage plus rigoureux avec critère numérique a été développé. La démarche est la suivante : on résout le problème électrostatique avec la méthode de collocation à l'ordre 0. On intègre une seconde matrice d'interaction avec cette fois-ci la méthode de Galerkin puis on calcule le potentiel  $V'$  et le champ normal  $En'$  (censé être nul) en faisant un simple produit matrice-vecteur  $([P/En].q)$ . Ensuite on calcule les erreurs relatives sur chacun des éléments en fonction du potentiel du référence pour les conducteurs et de 0 pour les diélectriques. Puis on choisit de remailler les éléments comportant le plus d'erreur relative. Cette approche est illustrée dans la figure II.20. Cet algorithme détecte bien les zones de forts gradients en fonction des erreurs numériques entre les méthodes de collocation et de Galerkin à l'ordre 0. Effectivement la méthode



**Figure II.20** – Maillage adaptatif en fonction des erreurs numériques entre la méthode de collocation et la méthode de Galerkin - à gauche (Fig. 1, 4 et 7) : valeur des charges surfaciques ; au centre (Fig. 2, 5 et 8) : valeur des erreurs numériques ; à droite (Fig. 3 et 6) : découpage des éléments, 10% en 9 éléments (gris) et 30% en 4 (blanc)

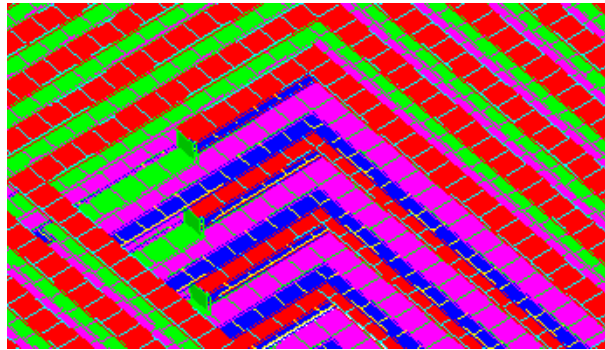
de collocation garantit une certaine précision sur le barycentre des éléments. Le potentiel calculé ensuite sur la surface de l'élément avec plusieurs points de Gauss situés autour du barycentre (voire en annexe 1, p. 165) avec la méthode de Galerkin, est forcément moins précis par rapport à la référence. Mais, l'inconvénient de cet algorithme est qu'il nécessite l'intégration d'une seconde matrice d'interaction.

## 5 Cas du capteur à courant de Foucault

Le capteur de position à courant de Foucault a été maillé avec le mailleur automatique qu'on a développé dans InCA3D (Fig. II.21).

Cependant on a du adapter les paramètres de maillage dans le logiciel pour obtenir un nombre d'éléments inférieur à 10 000 à cause de la limitation en mémoire de l'ordinateur. Le maillage obtenu est uniforme (pas de zone de raffinement sur les bords) et il est surfacique : le volume des spires est négligé (la prise en compte du volume double au moins le nombre d'éléments).

Dans ce conditions, la modélisation de ce dispositif réel est délicate car on arrive en limite



**Figure II.21** – Maillage capacitif du capteur en 9 961 éléments surfaciques

de performances de cette méthode intégrale en interaction totale. Grâce à l'utilisation de la Fast Multipole Method développée dans le prochain chapitre, le maillage et le calcul des capacités de ce capteur seront repris en fin de chapitre, à la section 7, p. 121.

## 6 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, on a développé des méthodes intégrales en interaction totale basées sur différentes formulations numériques et/ou analytiques, méthodes de collocation ou de Galerkin à l'ordre 0 ou 1. Ces méthodes sont générales et robustes, elles s'appliquent à tout type de géométrie et quelle que soit l'échelle du dispositif étudié.

Les temps d'intégration sont relativement rapides grâce à l'écriture matricielle vectorisée des routines d'intégrations<sup>1</sup>.

La résolution donne des résultats précis même avec un maillage relativement lâche (par rapport à celui des éléments finis) car malgré l'utilisation d'une formulation à l'ordre 0 ou 1 (charge surfacique constante par élément ou à chaque nœuds), il y a peu d'hypothèses simplificatrices.

Le principal inconvénient de cette méthode est le stockage en mémoire de la matrice d'interaction qui est pleine. Pour un problème de  $n$  éléments, la matrice  $[P/En]$  est de taille  $n^2$ . On peut rapidement saturer la mémoire si l'on veut traiter des gros problèmes (supérieurs à 10 000 éléments).

Pour contrer cet inconvénient majeur, on s'est intéressé dans le chapitre suivant à une méthode basée sur des développements multipolaires permettant d'accélérer le calcul du potentiel et du champ normal pour des interactions à distance avec très peu de mémoire.

1. toutes ces routines ont été parallélisées, voire l'annexe C, p. 179

