

Étude numérique des propriétés électro-acoustiques d'un matériau piézoélectrique non hystérétique sous précontrainte statique de type électrique ou mécanique

Dans ce chapitre, nous utilisons le formalisme défini dans le chapitre II pour évaluer certaines propriétés électro-acoustiques d'un matériau piézoélectrique au comportement non hystérétique soumis à une précontrainte statique de type électrique ou mécanique. Nous caractérisons l'évolution des trois modes de vitesses, soient les vitesses longitudinale et transversales, ainsi que le coefficient de couplage (en mode plaque) du niobate de lithium en fonction des deux types de contraintes. Chacune de ces propriétés est décrite dans différents plans de coupe et dans les systèmes de coordonnées naturel et prédéformé.

Sous précontrainte mécanique, nous caractérisons les propriétés du matériau en mode de compression et de traction en évaluant les différences entre les différents tenseurs associés à l'application de la contrainte mécanique, ainsi que les différences entre les calculs de vitesses et coefficient de couplage dans les deux systèmes de coordonnées (naturel et prédéformé).

Sous contrainte électrique, nous caractérisons les mêmes propriétés du matériau soumis à un champ électrique positif et négatif en évaluant les différences entre les calculs de vitesses et coefficient de couplage dans les deux systèmes de coordonnées (naturel et prédéformé).

I Définition de l'étude

I.1 Le niobate de lithium

Tous les résultats sont présentés pour le niobate de lithium qui présente le grand avantage d'avoir un comportement non hystérétique et des constantes piézoélectriques, élastiques et diélectriques du deuxième et troisième ordre connues. L'ensemble des constantes exposées ont été mesurées à température constante avec leurs incertitudes relatives. La structure cristalline de ce matériau est trigonale (classe 3m) et sa densité volumique à l'état libre est de $\rho^0 = 4700 \text{ kg/m}^3$.

I.1.1 Constantes du second ordre

Les valeurs de constantes retenues sont celles évaluées par Warner [Warner1967]. L'incertitude sur chacune de ces constantes est évaluée en mesurant l'écart entre ces constantes et celles déterminées par d'autres auteurs [Weis85].

Le tenseur des rigidités élastiques réduit, à champ électrique constant $C_{\alpha\beta}$ (10^{10} N/m^2) est égal à :

$$C_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 20.3 & 5.3 & 7.5 & 0.9 & 0 & 0 \\ 5.3 & 20.3 & 7.5 & -0.9 & 0 & 0 \\ 7.5 & 7.5 & 24.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & -0.9 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 7.5 \end{bmatrix}.$$

Les incertitudes associées aux composantes indépendantes sont égales à $\Delta C_{11} = \pm 0.015$, $\Delta C_{12} = \pm 0.015$, $\Delta C_{13} = \pm 0.015$, $\Delta C_{14} = \pm 0.015$, $\Delta C_{33} = \pm 0.02$, et $\Delta C_{44} = \pm 0.001$. Ainsi, ces constantes sont définies avec une incertitude moyenne de $\Delta C_{\alpha\beta} = \pm 0.1\%$.

Le tenseur piézoélectrique réduit $e_{m\alpha}$ (C/m^2) est égal à :

$$e_{m\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3.7 & -2.5 \\ -2.5 & 2.5 & 0 & 3.7 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 1.3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

avec les incertitudes des composantes indépendantes égales à $\Delta e_{15} = \pm 0.1$, $\Delta e_{22} = \pm 0.005$, $\Delta e_{31} = \pm 0.01$, et $\Delta e_{33} = \pm 0.46$. Ainsi, ces constantes sont définies avec une incertitude moyenne de $\Delta e_{m\alpha} = \pm 7.7\%$.

Le tenseur diélectrique à déformation constante ϵ_{mp}^S (10^{-11} F/m) est égal à :

$$\epsilon_{mp}^S = \begin{bmatrix} 38.9 & 0 & 0 \\ 0 & 38.9 & 0 \\ 0 & 0 & 25.7 \end{bmatrix},$$

avec les incertitudes des composantes indépendantes égales à $\Delta \epsilon_{11}^S = \pm 0.42$ et $\Delta \epsilon_{33}^S = \pm 1.2$. Ainsi, ces constantes sont définies avec une incertitude moyenne de $\Delta \epsilon_{mp}^S = \pm 2.5\%$.

I.1.2 Constantes du troisième ordre

Les mesures de constantes du troisième ordre du niobate de lithium ont été effectuées par Cho et Yamanouchi [Cho1987], et sont données en Annexe III. Ces derniers ont montré que le nombre de constantes indépendantes se réduit respectivement à :

- 14 constantes élastiques de rigidité, $C_{(ij)(kl)(mn)} = C_{\alpha\beta\gamma}$,
- 13 constantes piézoélectriques, $e_{m(ij)(kl)} = e_{m\alpha\beta}$,
- 3 constantes diélectriques, $\epsilon_{m(ij)} = \epsilon_{m\alpha}$,
- 8 constantes électrostrictives, $l_{(ij)(kl)} = l_{\alpha\beta}$,

où $i, j, k, l, m, n = 1, 2, 3$ et où les indices grecs sont les indices contractés de Voigt définis au chapitre II. Dans ce même article, Cho et Yamanouchi, indiquent les éléments de symétrie et évaluent les incertitudes de mesure. Calculant les incertitudes moyennes sur l'ensemble de ces constantes, il vient :

- $\Delta C_{\alpha\beta\gamma} = \pm 32.1\%$,
- $\Delta e_{m\alpha\beta} = \pm 42.2\%$,
- $\Delta \epsilon_{m\alpha} = \pm 2.5\%$,
- $\Delta l_{\alpha\beta} = \pm 22.5\%$.

Il est important de noter que l'incertitude sur l'ensemble de ces valeurs est non négligeable et constituera une source d'erreur par la suite.

I.2 Mode de précontrainte

Comme nous l'avons décrit précédemment, les équations dynamiques peuvent être développées dans les systèmes de coordonnées de l'état naturel ou dans celui de l'état statique (prédéformé), chacun caractérisé par des densités volumiques ρ^0 et ρ^s respectivement. Dans cette configuration, et comme décrit par l'équation (II.4), ces deux paramètres sont reliés par l'expression :

$$\rho^s = J^{-1} \rho^0 \equiv \left(1 - \frac{\partial u_\varphi^0}{\partial \xi_\varphi} \right) \rho^0. \quad (\text{III.1})$$

Le système de coordonnées global de l'étude est représenté sur la figure III.1.

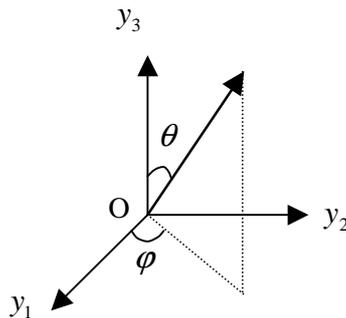


Figure III.1 : Définition des orientations de l'étude.

Dans le cas mécanique, les contraintes mécaniques, élastique et de rupture étaient inconnues jusqu'ici. Suite à la mise en place d'un banc expérimental développé à cet effet, nous montrons dans le chapitre VI que les deux valeurs de contraintes se confondent et sont très sensibles aux conditions de mesures. Ainsi, la limite à la rupture dans le plan de coupe le plus dur du niobate de lithium a été mesuré à environ -110 MPa. Alors que cette limite est théoriquement légèrement inférieure dans les autres plans de coupe et supérieure en traction, nous choisissons d'utiliser cette limite dans tous ces cas. Cette contrainte est appliquée le long de l'axe (Oy_3), uniformément sur la surface du matériau et comptée négativement en compression.

Sous contrainte électrique, Miller [Miller1998] a montré que le champ électrique coercitif du niobate de lithium était de l'ordre de 17.5 MV/m. Ainsi, nous considérerons l'application d'un champ électrique inférieur à cette valeur (en valeur absolue) pour ne pas changer la polarisation du

matériau. Cette contrainte est appliquée le long de l'axe (Oy_3) uniformément sur la surface du matériau.

Dans ce chapitre, nous évaluons l'évolution des trois modes de vitesses ainsi que du coefficient de couplage en mode plaque, pour les deux types de contraintes (électrique et mécanique), à différents niveaux de contrainte et dans différents plans de coupe du matériau. Nous prendrons deux valeurs d'angle azimutal φ , $\varphi = 0^\circ$ et $\varphi = 90^\circ$ et nous ferons varier l'angle d'élévation θ de 0 à 180° .

Les lois de transformations permettant de calculer les valeurs des constantes du matériau dans différents plans de coupe sont obtenues en appliquant différentes transformations matricielles, définies par Auld [Auld90] et décrites en Annexe II. Nous considérons que la contrainte initiale (mécanique ou électrique) est constante dans l'épaisseur du matériau, et nous négligeons tout effet de cisaillement. Ainsi, l'application de la contrainte se fait selon un axe (Oy_3) et les propriétés du matériaux sont calculés dans le cas d'un matériau ayant été usiné dans un plan de coupe différent.

II Étude sous précontrainte mécanique

Parce qu'elle est la plus facile à définir expérimentalement, la contrainte appliquée lors d'un essai de traction/compression est définie comme étant égale au premier tenseur de Piola-Kirchoff (force appliquée par unité de surface initiale) et notée P^0 . Mais comme nous l'avons montré dans le précédent chapitre, les tenseurs de précontrainte intervenant dans les équations dynamiques définies dans les systèmes de coordonnées naturel et statique sont respectivement le deuxième tenseur de Piola-Kirchoff (σ^0) et le tenseur de Cauchy (t^0).

II.1 Calcul des déformations initiales

II.1.1 Calcul des déformations non-linéaires initiales

Dans un premier temps, il est nécessaire de calculer le tenseur des déformations initiales dans le système de coordonnées de l'état naturel $u_{\alpha,\beta}^0$. Sous l'action de la contrainte mécanique, le matériau se déforme et un champ électrique apparaît entre les deux surfaces du matériau par effet piézoélectrique direct. Dans le système de coordonnées de l'état naturel, l'équation (II.68.a) linéarisée décrivant ce phénomène se réduit à :

$$\sigma_{\alpha\beta}^0 = C_{\alpha\beta\gamma\delta} S_{\gamma\delta}^0 - e_{\varphi\alpha\beta} E_{\varphi}^0, \quad (\text{III.2})$$

où le tenseur $\sigma_{\alpha\beta}^0$ est le deuxième tenseur de Piola-Kirchoff et $S_{\gamma\delta}^0$ est le tenseur des déformations (II.50.a), tous deux définis dans le système de coordonnées de l'état naturel.

Dans le cas du niobate de lithium, les constantes piézoélectriques $e_{\varphi\alpha\beta}$ sont de l'ordre de l'unité, alors que les constantes élastiques de rigidités $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ sont de l'ordre de 10^{10} N/m². Le champ électrique coercitif du niobate de lithium étant de l'ordre de 17.5 kV/mm, la composante électrique ($e_{\varphi\alpha\beta} E_{\varphi}^0$) seule ne peut générer plus de 10 MPa. Les niveaux de contraintes mécaniques appliquées étant de l'ordre de la centaine de MPa, l'effet du champ électrique engendrée par effet piézoélectrique est largement négligeable devant la contribution mécanique $C_{\alpha\beta\gamma\delta} S_{\gamma\delta}^0$ dans le calcul des prédéformations [Lematre2006-Lematre2011].

De manière à avoir une estimation plus précise des déformations engendrées par la contrainte mécanique appliquée, nous reprenons l'équation (II.68.a) non-linéarisée, en négligeant le champ électrique induit, soit :

$$\sigma_{\alpha\beta}^0 = C_{\alpha\beta\gamma\delta} S_{\gamma\delta}^0 + \frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\eta} S_{\gamma\delta}^0 S_{\epsilon\eta}^0. \quad (\text{III.3})$$

Expérimentalement, la contrainte appliquée étant homogène au tenseur de Piola-Kirchoff 1. L'équation (II.11) est utilisée pour relier ce tenseur au deuxième tenseur de Piola-Kirchoff précédent, soit :

$$P_{I\beta}^0 = \frac{\partial X_I}{\partial \xi_{\alpha}} \sigma_{\alpha\beta}^0, \quad (\text{III.4})$$

avec $\partial X_I / \partial \xi_{\alpha}$ le gradient de déplacement entre l'état naturel et l'état prédéformé (II.54.a). L'expression du premier tenseur de Piola-Kirchoff au second ordre est ensuite développé en insérant l'équation (III.3) et en développant le gradient du déplacement (II.50.a). Ainsi, nous obtenons :

$$P_{I\beta}^0 = C_{I\beta\kappa\delta} \frac{\partial u_{\kappa}^0}{\partial \xi_{\delta}} + \frac{1}{2} C_{I\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_{\gamma}^0}{\partial \xi_{\gamma}} \frac{\partial u_{\delta}^0}{\partial \xi_{\delta}} + C_{\alpha\beta\kappa\delta} \frac{\partial u_{\alpha}^0}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{\partial u_{\kappa}^0}{\partial \xi_{\delta}} + \frac{1}{2} C_{I\beta\kappa\delta\eta} \frac{\partial u_{\kappa}^0}{\partial \xi_{\delta}} \frac{\partial u_{\eta}^0}{\partial \xi_{\eta}}. \quad (\text{III.5})$$

Cette relation étant non-linéaire, elle se résout par un algorithme d'optimisation où les valeurs initiales de déformations sont les solutions de l'équation (III.5) linéarisée. Cependant, la résolution du système linéaire donne un système de 9 équations non indépendantes à 9 paramètres indépendants (les 9 composantes de déformations $u_{\alpha,\beta}^0$). En première approximation, il est possible

de considérer que la partie antisymétrique du gradient de déformation (tenseur des rotations) est nulle [Lematre2006], soit :

$$\frac{\partial u_{\alpha}^0}{\partial \xi_{\beta}} = \frac{\partial u_{\beta}^0}{\partial \xi_{\alpha}}, \quad (\text{III.6})$$

ce qui réduit la partie linéaire du système d'équation à 6 équations indépendantes et 6 inconnues.

Dans la suite du calcul, le premier tenseur de Piola-Kirchoff étant non symétrique (contrairement au tenseur de Piola-Kirchoff 2), le système d'équation comprend 9 composantes indépendantes pour 9 paramètres. La résolution du système non-linéaire ne nécessite donc pas l'approximation (III.6).

Une fois le tenseur des déformations connu dans le système de coordonnées de l'état naturel, nous calculons le tenseur de déformations de l'état prédéformé en utilisant l'équation (II.54.a) Ainsi, les déformations dans les deux systèmes de coordonnées sont reliées par l'équation :

$$\frac{\partial u_{\beta}^0}{\partial \xi_{\alpha}} = \delta_{i\alpha} \left(\delta_{j\beta} + \frac{\partial u_j^0}{\partial \xi_{\beta}} \right) \frac{\partial u_i^0}{\partial X_j}. \quad (\text{III.7})$$

Cependant, pour être consistant avec l'approximation à l'ordre 3 des termes dynamiques, cet écart entre les deux tenseurs est négligé. Notons que ce dernier est toujours inférieur à 2% et que cette méthode de calcul est une amélioration publiée dans un article récent [Lematre2011] par rapport aux précédents travaux dans le domaine [Su2005-Lematre2005-Lematre2006a].

II.1.2 Contribution de la non-linéarité de déformations

Les propriétés du matériau évoluant en fonction du plan de coupe et du niveau de contrainte, nous nous intéressons à la non-linéarité de déformation obtenue par optimisation de l'équation (III.5), avec et sans la partie non-linéaire, en fonction de ces deux paramètres. Pour la quantifier, nous traçons l'évolution de l'écart entre le calcul de déformation longitudinale S_{33}^0 linéaire et non-linéaire en fonction des niveaux de contraintes maximaux et de l'angle d'élévation θ , pour des plans de coupe $\varphi = 0^\circ$ et 90° (figure III.2).

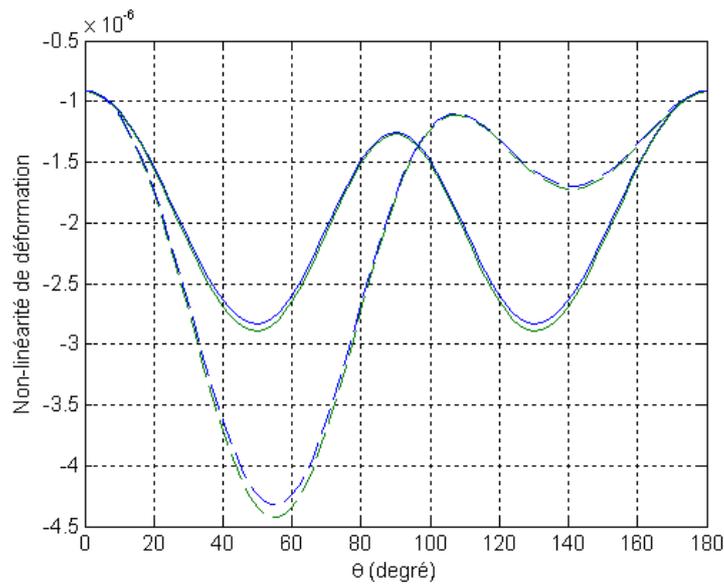


Figure III.2 : Évolution de la non-linéarité de déformation longitudinale en fonction de l'angle θ , pour deux niveaux de contraintes de -110 MPa (lignes bleues) et 110 MPa (lignes vertes), pour $\varphi = 0^\circ$ (lignes continues) et 90° (lignes discontinues).

Cette figure nous montre que la non-linéarité de déformation longitudinale est plus importante en mode de traction qu'en mode de compression. De plus, l'écart entre les deux calculs de déformations varie majoritairement dans le plan de coupe $\varphi = 90^\circ$ et $\theta = 55^\circ$ où il atteint $-4.45 \cdot 10^{-6}$. La figure III.3 illustre l'évolution de la déformation S_{33}^0 pour ce plan de coupe.

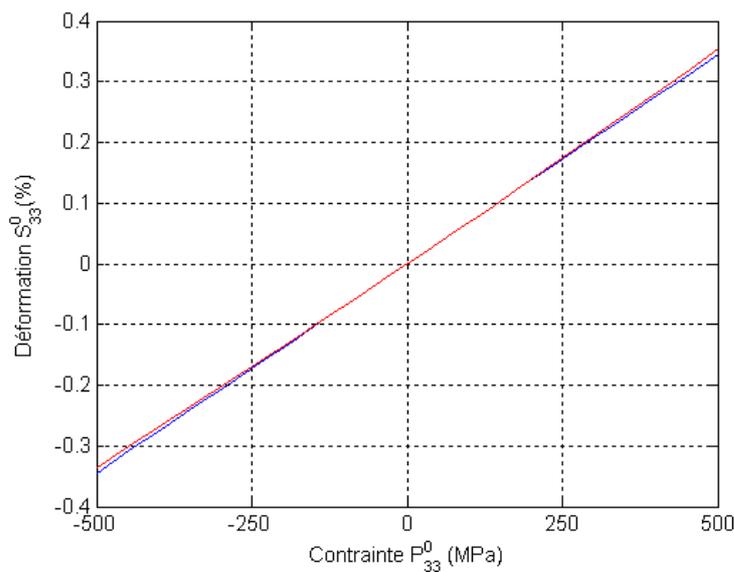


Figure III.3 : Évolution de la déformation longitudinale en fonction de la contrainte mécanique appliquée calculée par méthode de résolution linéaire (bleu) et non-linéaire (rouge) dans un plan de coupe $\varphi = 90^\circ$ et $\theta = 55^\circ$.

Sur cette figure, nous calculons la déformation longitudinale par méthode linéaire et non-linéaire dans une gamme de contrainte supérieure à la contrainte de rupture. Ainsi, nous observons qu'en dessous de 250 MPa, la non-linéarité de la déformation est faible, en compression comme en traction. L'écart relatif entre les deux solutions de déformation S_{33}^0 linéaire et non-linéaire est de l'ordre de 0.8% pour une valeur de contrainte $P_{33}^0 = 110$ MPa. De plus, les déformations sont faibles et ne dépassent pas 0.08% à 110 MPa de contrainte mécanique.

II.2 Calcul des tenseurs de contraintes initiaux

Comme décrit précédemment, le premier tenseur de Piola-Kirchoff relie la force appliquée à la section de la pièce définie dans le système de coordonnées naturel. Nous avons montré que les tenseurs de précontrainte qui interviennent dans les équations dynamiques de l'état naturel (II.62) et prédéformé (II.63) sont respectivement les tenseurs de Piola-Kirchoff 2 ($\sigma_{\alpha\beta}^0$) et de Cauchy (t_{IJ}^0). Les équations (III.4) et (II.53.a) relient les 3 tenseurs entre eux au travers du tenseur de déformations. Le tenseur des déformations ayant été calculé précédemment, le deuxième tenseur de Piola-Kirchoff et celui de Cauchy sont calculés en fonction des valeurs de contrainte appliquée (contrainte de Piola-Kirchoff 1).

Par la suite, nous nous plaçons dans la configuration d'étude, et nous étudions l'évolution des écarts entre P_{33}^0 , σ_{33}^0 et t_{33}^0 selon la contrainte P_{33}^0 appliquée dans différentes orientations cristallographiques (φ, θ).

II.2.1 Évolutions des différences entre les différents tenseurs de contraintes initiaux pour $\varphi = 0^\circ$

La figure III.4 montre l'évolution de l'écart entre le tenseur de Cauchy t_{33}^0 et le tenseur de Piola-Kirchoff 1 P_{33}^0 en fonction de l'angle θ , pour un angle azimutal $\varphi = 0^\circ$ et des valeurs de contraintes appliquées comprises entre -110 et 110 MPa.

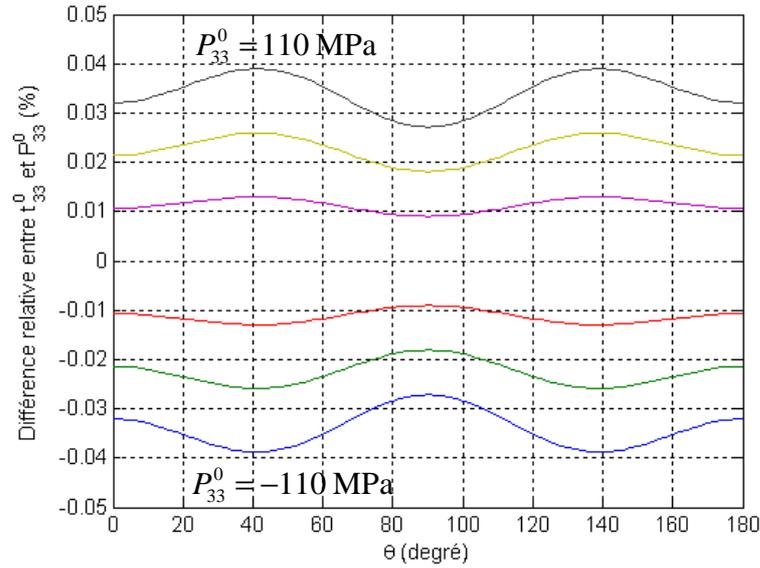


Figure III.4 : Évolutions des écarts entre le tenseur de Cauchy t_{33}^0 et le premier tenseur de Piola-Kirchoff P_{33}^0 en fonction de l'angle θ , pour différentes valeurs de contraintes appliquées (-110, -73, -36.5, 36.5, 73, 110 MPa) et $\varphi = 0^\circ$.

En comparant les différences relatives pour des valeurs de contraintes opposées, nous observons que l'effet de P_{33}^0 sur t_{33}^0 n'est pas symétrique pour des valeurs de P_{33}^0 égales en valeurs absolues. Ainsi, pour un angle $\theta = 0^\circ$, la contrainte appliquée $P_{33}^0 = 110$ MPa induit une contrainte $t_{33}^0 = 110.04$ MPa, alors qu'une contrainte $P_{33}^0 = -110$ MPa induit une contrainte $t_{33}^0 = -109.96$ MPa, ce qui est en bon accord avec les lois de l'élasticité. On vérifie que lorsque la contrainte de Piola-Kirchoff 1 est négative (positive), la contrainte de Cauchy est plus petite (grande), ce qui est lié à la surface de l'état prédéformé qui est plus grande (petite) que dans l'état naturel. Ainsi, l'écart maximum en mode de traction est observé pour des angles $\theta = 44^\circ$ et 134° égale à 0.039%.

La figure III.5 montre l'évolution de l'écart entre le tenseur de Cauchy t_{33}^0 et le tenseur de Piola-Kirchoff 2 σ_{33}^0 en fonction de l'angle θ , pour des valeurs de contraintes appliquées (Piola-Kirchoff 1) comprises entre -110 et 110 MPa, pour $\varphi = 0^\circ$.

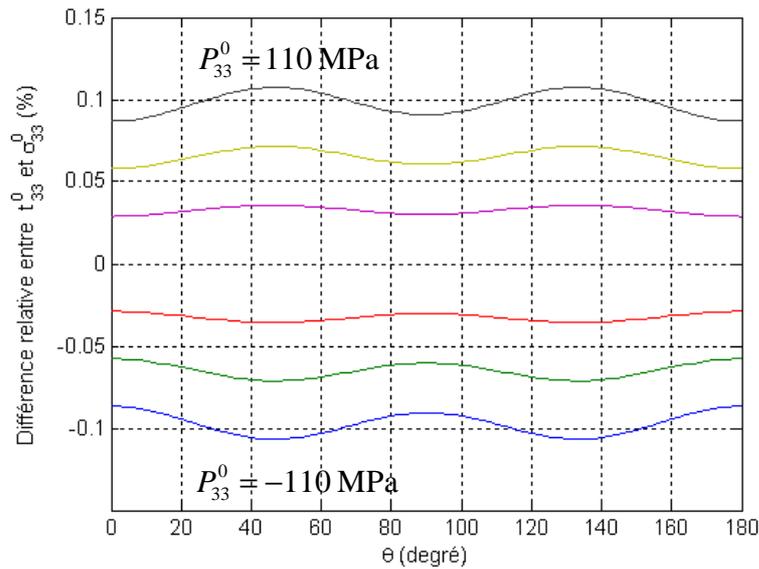


Figure III.5 : Évolutions des écarts entre le tenseur de Cauchy t_{33}^0 et le deuxième tenseur de Piola-Kirchoff σ_{33}^0 en fonction de l'angle θ , pour différentes valeurs de contraintes appliquées (-110, -73, -36.5, 36.5, 73, 110 MPa) et $\varphi = 0^\circ$.

Ici aussi, l'effet de la contrainte appliquée engendre une différence relative entre t_{33}^0 et σ_{33}^0 non symétrique pour des valeurs de P_{33}^0 égales en valeurs absolues. De plus, il apparaît que la différence entre les deux tenseurs est 2.5 fois plus importante que celle observée précédemment entre t_{33}^0 et P_{33}^0 . Cet écart s'explique par le produit du tenseur de déformation qui apparaît 2 fois entre t_{33}^0 et σ_{33}^0 alors qu'il n'apparaît qu'une fois entre t_{33}^0 et P_{33}^0 (équations III.4 et II.53.a). Ainsi, l'écart maximum en mode de traction est observé pour des angles $\theta = 48^\circ$ et 138° égale à 0.108%.

II.2.2 Évolutions des différences entre les différents tenseurs de contraintes initiaux pour $\varphi = 90^\circ$

La figure III.6 montre l'évolution de l'écart entre le tenseur de Cauchy t_{33}^0 et le tenseur de Piola-Kirchoff 1 P_{33}^0 en fonction de θ , pour $\varphi = 90^\circ$ et des valeurs de contraintes appliquées comprises entre -110 et 110 MPa.

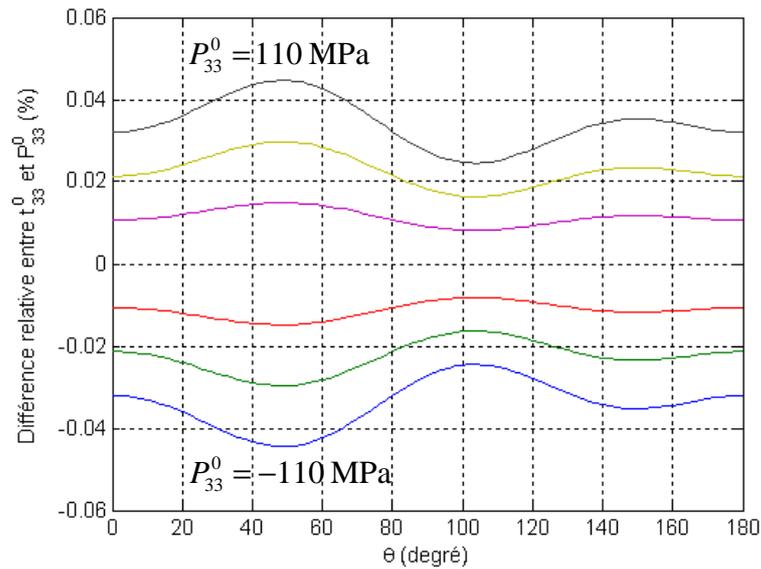


Figure III.6 : Évolutions des écarts entre le tenseur de Cauchy t_{33}^0 et le premier tenseur de Piola-Kirchoff P_{33}^0 en fonction de l'angle θ , pour différentes valeurs de contraintes appliquées (-110, -73, -36.5, 36.5, 73, 110 MPa) et $\varphi = 90^\circ$.

On vérifie que les valeurs de contraintes à $\theta = 0^\circ$ et 180° , sont égales au cas précédent. Ici aussi, les différences relatives pour des valeurs de contraintes opposées ne sont pas symétriques pour des valeurs de P_{33}^0 égales en valeurs absolues. L'écart maximum observé est de 0.045% en mode de traction pour un angle $\theta = 52^\circ$, donc légèrement plus élevé que dans le plan de coupe précédent.

La figure III.7 montre l'évolution de l'écart entre le tenseur de Cauchy t_{33}^0 et le tenseur de Piola-Kirchoff 2 σ_{33}^0 pour différentes valeurs de contraintes appliquées (Piola-Kirchoff 1) comprises entre -110 et 110 MPa, en fonction de θ , pour $\varphi = 90^\circ$.

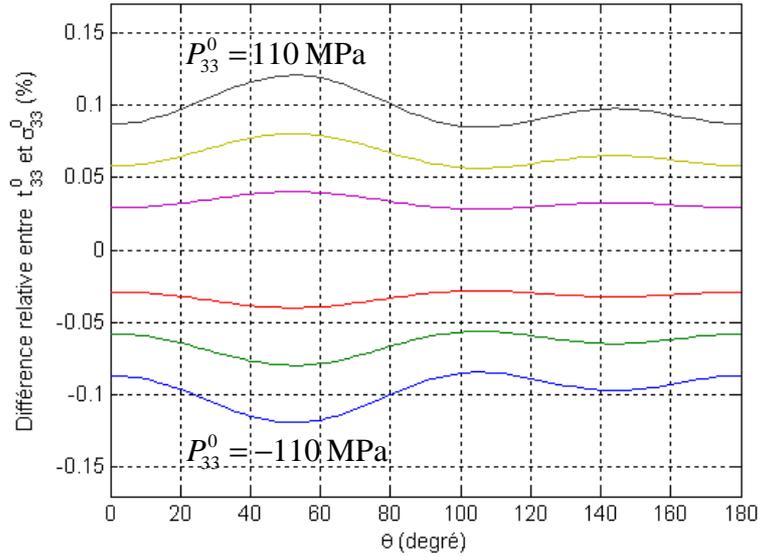


Figure III.7 : Évolutions de la différence entre le tenseur de Cauchy t_{33}^0 et le deuxième tenseur de Piola-Kirchoff σ_{33}^0 en fonction de l'angle θ , pour différentes valeurs de contraintes appliquées (-110, -73, -36.5, 36.5, 73, 110 MPa) pour $\varphi = 90^\circ$.

On vérifie que les valeurs de contraintes à $\theta = 0^\circ$ et 180° sont égales au cas précédent. Ici aussi, les différences relatives pour des valeurs de contraintes opposées ne sont pas symétriques pour des valeurs de P_{33}^0 égales en valeurs absolues. L'écart maximum est observé en mode de traction pour un angle $\theta = 54^\circ$ égale à 0.12%, donc significativement plus élevé que dans le plan de coupe précédent.

Notons que pour une contrainte appliquée P_{33}^0 comprise entre -110 et 110 MPa, les écarts relatifs entre (t_{33}^0, P_{33}^0) et $(t_{33}^0, \sigma_{33}^0)$ sont maximums pour des valeurs de θ et φ proches de $\theta = 130^\circ$ avec $\varphi = 30^\circ$ et valent respectivement de 0.046% et 0.121%.

II.3 Calcul des vitesses longitudinale et transversales dans les deux systèmes de coordonnées

Les équations de Christoffel dans les 2 systèmes de coordonnées ayant été posées (II.91) et (II.101), nous étudions dans cette partie le comportement des vitesses quasi-longitudinales et des premier et second modes quasi-transversaux en fonction des angles de coupe θ et φ , pour différentes valeurs de précontraintes mécaniques. Les 3 modes de vitesses obtenus dans les systèmes de coordonnées naturel et prédéformé sont comparés. Chacun d'eux est présenté dans une

figure différente pour évaluer les différences issues du changement de système de coordonnées. Nous nous intéressons à l'évolution de ces vitesses pour des valeurs de $\varphi = 0^\circ$ et 90° , en faisant varier l'angle θ de 0° à 180° . Chacune des figures décrit ces évolutions pour des valeurs de contraintes appliquées P_{33}^0 de -110 MPa, 0 et 110 MPa. Les vitesses dans le repère naturel se calculent avec le tenseur σ_{33}^0 et celles dans le repère prédéformé avec le tenseur t_{33}^0 . Rappelons qu'à la différence du tenseur de contrainte appliqué P_{33}^0 , les valeurs des deux autres tenseurs changent selon l'angle θ .

II.3.1 Calcul des vitesses longitudinale et transversales dans les deux systèmes de coordonnées pour $\varphi = 0^\circ$

La figure III.8 décrit l'évolution de vitesse quasilongitudinale, en fonction de l'angle θ , pour un angle azimutal $\varphi = 0^\circ$ et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) dans le système de coordonnées de l'état naturel et prédéformé.

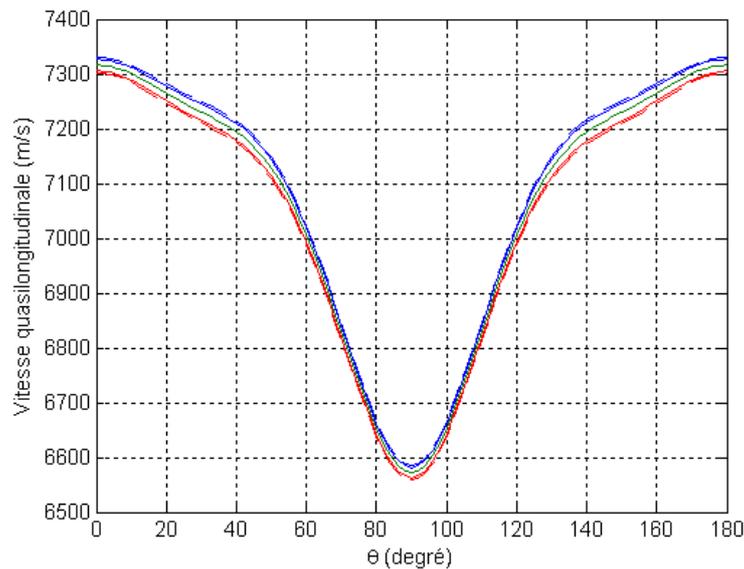


Figure III.8 : Évolutions de la vitesse quasilongitudinale, en fonction de l'angle θ , pour $\varphi = 0^\circ$ et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) de couleurs (bleu, verte et rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).

Cette figure montre que les comportements globaux des vitesses quasilongitudinales dans les deux systèmes de coordonnées sont très proches. On vérifie qu'à contrainte nulle, les évolutions des vitesses dans les deux systèmes de coordonnées sont égales. L'application d'une contrainte positive (étirement du matériau) diminue la vitesse et inversement, une contrainte négative (compression)

augmente la vitesse. Rappelons que les vitesses dans le système de coordonnées naturel sont liées à l'épaisseur initiale du matériau, alors que les vitesses évaluées dans le repère prédéformé sont liées à l'épaisseur du matériau déformée. Par ailleurs, la variation de vitesse dans le système de coordonnées naturel est plus importante que dans le système de coordonnées de l'état prédéformé. En effet, alors qu'en compression l'épaisseur diminue, le temps de parcours diminue lui aussi. L'épaisseur ne variant pas dans le repère naturel, la variation de vitesse dans ce système de coordonnées est donc plus importante que celle définie dans le repère prédéformé. La plus grande variation de vitesse entre les deux repères est obtenue en traction, car cette variation est liée à la déformation, et cette dernière est plus importante dans ce cas. La différence maximale entre les deux vitesses définies dans chacun des repères est de 5 m/s pour $\theta = 50^\circ$ à $P_{33}^0 = 110$ MPa, soit une différence de 0.07%. Cette différence est en partie attribuée à l'écart entre les valeurs de tenseurs σ_{33}^0 et t_{33}^0 est maximum près de cet angle. Notons que l'approximation (II.103.a) prévoyait une variation de 4.9 m/s, soit une erreur de 2%. La différence entre les vitesses définies dans le repère naturel, calculées en mode libre et sous contrainte (110 MPa) dans ce même plan de coupe est de l'ordre de 19 m/s, soit une différence de 0.26%.

La figure III.9 décrit l'évolution de la vitesse quasitransversale 1, en fonction de l'angle θ , pour un angle azimutal $\varphi = 0^\circ$ et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) dans le système de coordonnées de l'état naturel et prédéformé.

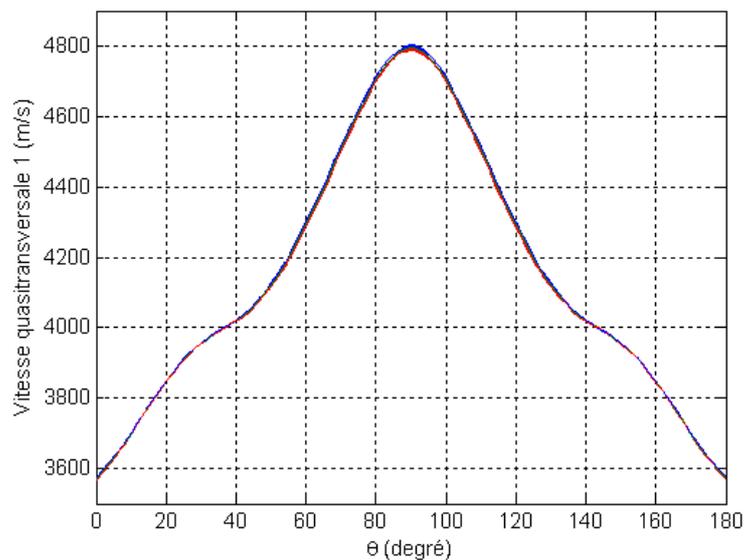


Figure III.9 : Évolutions de la vitesse quasitransversale 1, en fonction de l'angle θ , pour $\varphi = 0^\circ$ et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) de couleurs (bleu, verte et rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).

Ici aussi, les comportements globaux des vitesses dans les deux systèmes de coordonnées sont très proches. On vérifie qu'à contrainte nulle, les évolutions des vitesses dans les deux systèmes de coordonnées sont égales. La variation de vitesse entre les deux repères est plus importante en traction. Cependant, dans le cas des vitesses définies dans le système de coordonnées de l'état prédéformé uniquement, on observe qu'au niveau des angles $\theta = [20^\circ - 40^\circ]$ le phénomène de traction diminue la vitesse, alors que la compression l'augmente. Le phénomène inverse est observé au niveau des angles $\theta = [140^\circ - 160^\circ]$. Alors que les vitesses longitudinales diminuent pour un angle θ proche de 90° , les vitesses de ce mode augmentent pour ce même angle, ce qui est directement lié à la déformation du matériau. La plus grande variation de vitesse entre les systèmes de coordonnées se trouve pour $\theta = 50^\circ$ et $\theta = 130^\circ$, $P_{33}^0 = 110$ MPa et est égale à 2.5 m/s, soit une différence de 0.06%. Cette différence est en partie attribuée à l'écart entre les valeurs de tenseurs σ_{33}^0 et t_{33}^0 qui est maximum près de cet angle. Notons que l'approximation (II.103.b) prévoyait une variation de 2.8 m/s, soit une erreur de 12%. La différence entre les vitesses définies dans le repère naturel dans ce même plan de coupe, en mode libre et sous contrainte (110 MPa) est de l'ordre de 10 m/s, soit 0.24%.

La figure III.10 décrit l'évolution de la vitesse quasitransversale 2, en fonction de l'angle θ , pour $\varphi = 0^\circ$ et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) dans le système de coordonnées de l'état naturel et prédéformé.

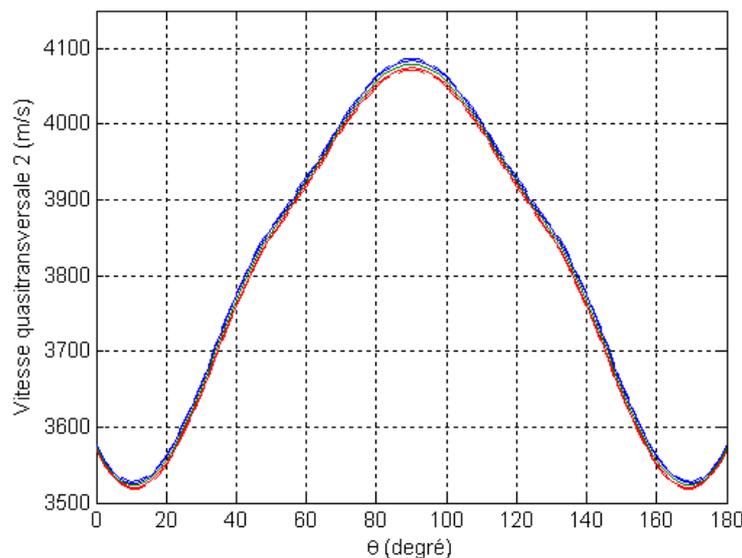


Figure III.10 : Évolutions de la vitesse quasitransversale 2, en fonction de l'angle θ , pour $\varphi = 0^\circ$ et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) de couleurs (bleu, verte et rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).

Ici aussi, les comportements globaux des vitesses dans les deux systèmes de coordonnées sont très proches et la variation de vitesse entre les deux repères est plus importante en traction. On vérifie qu'à contrainte nulle, les évolutions des deux vitesses sont égales. Comme dans le premier mode transverse, la vitesse augmente en se rapprochant de l'angle $\theta = 90^\circ$, mais ici, aucun croisement des évolutions de vitesses avec le mode libre n'est observé. La plus grande variation de vitesse entre les systèmes de coordonnées se trouve pour $\theta = 50^\circ$, $P_{33}^0 = 110$ MPa et est égale à 3 m/s, soit une différence de 0.08%. Cette différence est en partie attribuée à l'écart entre les valeurs de tenseurs σ_{33}^0 et t_{33}^0 qui est maximum près de cet angle. Notons que l'approximation (II.103.c) prévoyait une variation de 2.65 m/s, soit une erreur de 11.6%. La différence entre les vitesses définies dans le repère naturel dans ce même plan de coupe, en mode libre et sous contrainte (110 MPa) est de 6 m/s, soit 0.15%.

II.3.2 Calcul des vitesses longitudinale et transversales dans les deux systèmes de coordonnées pour $\varphi = 90^\circ$

La figure III.11 décrit l'évolution de la vitesse quasilongitudinale, en fonction de l'angle θ , pour un angle azimutal $\varphi = 90^\circ$ et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) dans le système de coordonnées de l'état naturel et prédéformé.

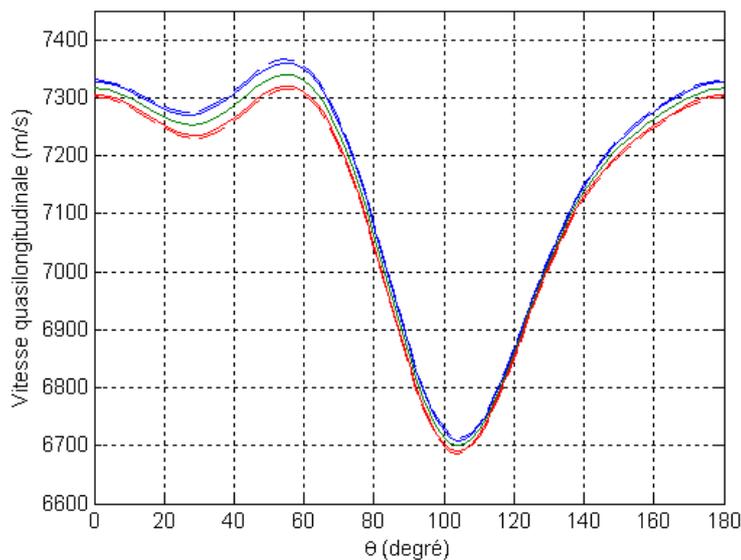


Figure III.11 : Évolutions de la vitesse quasilongitudinale, en fonction de l'angle θ , pour $\varphi = 90^\circ$ et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) de couleurs (bleu, verte et rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).

Dans ce mode aussi, les comportements globaux des vitesses quasilongitudinales dans les deux systèmes de coordonnées sont très proches. On vérifie qu'à contrainte nulle, les évolutions des deux vitesses sont égales. L'application d'une contrainte positive (étirement du matériau) diminue la vitesse et inversement, une contrainte négative (compression) augmente la vitesse. La variation de vitesse dans le système de coordonnées naturel est plus importante que dans le système de coordonnées prédéformé. La plus grande variation de vitesse entre les deux repères est obtenue en traction, et est égale à 5.5 m/s pour $\theta = 50^\circ$ à $P_{33}^0 = 110$ MPa, soit une différence de 0.08%. Cet écart est plus important que dans le plan de coupe précédent. Cette différence est en majeure partie due à l'écart entre les tenseurs σ_{33}^0 et t_{33}^0 qui est plus important pour cette même valeur de θ dans ce plan de coupe. Notons que l'approximation (II.103.a) prévoyait une variation de 5.56 m/s, soit une erreur de 0.18 %. La différence entre les vitesses définies dans le repère naturel, calculées en mode libre et sous contrainte (110 MPa) dans ce plan de coupe est de l'ordre de 26 m/s, soit 0.35%.

La figure III.12 décrit l'évolution de la vitesse quasitransversale 1, en fonction de l'angle θ , pour un angle azimutal $\varphi = 90^\circ$ et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) dans le système de coordonnées de l'état naturel et prédéformé.

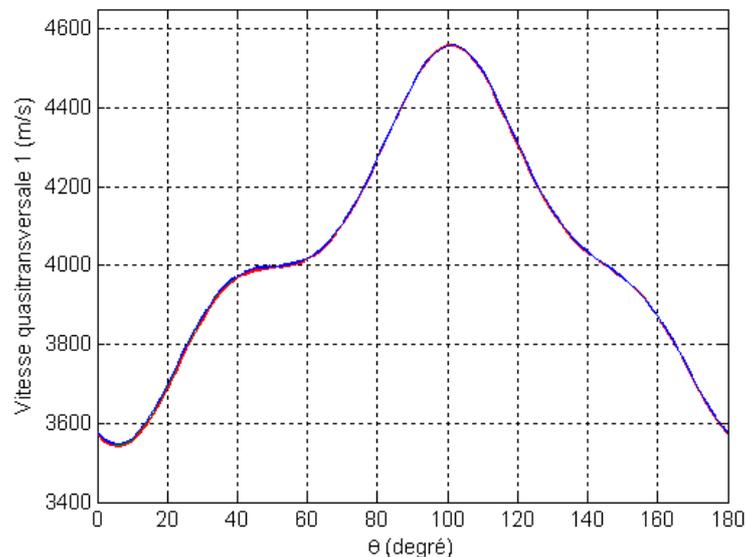


Figure III.12 : Évolutions de la vitesse quasitransversale 1, en fonction de l'angle θ , pour $\varphi = 90^\circ$ et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) de couleurs (bleu, verte et rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).

Dans ce mode aussi, les comportements globaux des vitesses quasitransversales 1 dans les deux systèmes de coordonnées sont très proches. On vérifie qu'à contrainte nulle, les évolutions des deux vitesses sont égales. La variation de vitesse entre les deux repères est plus importante en traction, mais contrairement à la figure précédente et comme nous l'avons déjà observé dans le plan de

coupe précédent, on observe des croisements des courbes de vitesses définies dans le repère prédéformé et aucun dans le système de coordonnées de l'état naturel. Alors qu'initialement les vitesses en compression sont plus importantes que celles en traction, au niveau de l'angle $\theta = 80^\circ$, les vitesses en traction deviennent plus élevées qu'en compression, et s'inversent en $\theta = 105^\circ$, puis à nouveau en $\theta = 145^\circ$ et $\theta = 163^\circ$. Pour ce mode aussi, la plus grande variation de vitesse entre les systèmes de coordonnées se trouve pour $\theta = 50^\circ$, $P_{33}^0 = 110$ MPa et est égale à 2.6 m/s, soit une différence de 0.06%. Cette différence est en partie attribuée à l'écart entre les valeurs de tenseurs σ_{33}^0 et t_{33}^0 qui est maximum près de cet angle. Notons que l'approximation (II.103.b) prévoyait une variation de 3.01 m/s, soit une erreur de 15%. La différence entre les vitesses définies dans le repère naturel dans ce même plan de coupe, calculées en mode libre et sous contrainte (110 MPa) est de l'ordre de 4 m/s, soit 0.1%.

La figure III.13 décrit l'évolution de la vitesse quasitransversale 2, en fonction de l'angle θ , pour un angle azimutal $\varphi = 90^\circ$ et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) dans le système de coordonnées de l'état naturel et prédéformé.

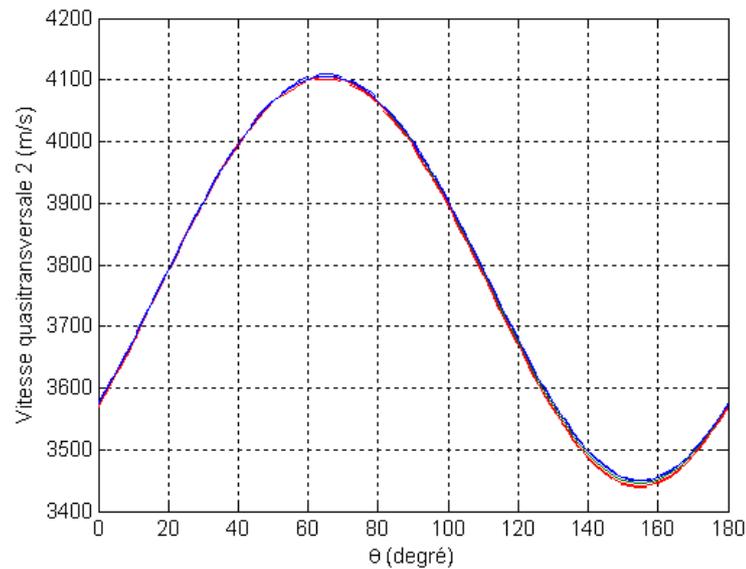


Figure III.13 : Évolutions de la vitesse quasitransversale 2, en fonction de l'angle θ , pour $\varphi = 90^\circ$ et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) de couleurs (bleu, verte et rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).

Dans ce mode aussi, les comportements globaux des vitesses quasitransversales dans les deux systèmes de coordonnées sont très proches. On vérifie qu'à contrainte nulle, les évolutions des deux vitesses sont égales. La variation de vitesse entre les deux repères est plus importante en traction, mais comme nous l'avons déjà observé, les courbes de vitesses définies dans le repère prédéformé se croisent alors que ce n'est pas le cas dans le système de coordonnées de l'état naturel. Ainsi, au

niveau de l'angle $\theta = 20^\circ$, les vitesses en traction sont plus élevées qu'en compression, et s'inversent en $\theta = 55^\circ$. Pour ce mode aussi, la plus grande variation de vitesse entre les systèmes de coordonnées se trouve pour $\theta = 50^\circ$, $P_{33}^0 = 110$ MPa et est égale à 3.2 m/s, soit une différence de 0.08%. Cette différence est en partie attribuée à l'écart entre les valeurs de tenseurs σ_{33}^0 et t_{33}^0 qui est maximum près de cet angle. Notons que l'approximation (II.103.c) prévoyait une variation de 2.74 m/s, soit une erreur de 14%. La différence entre les vitesses définies dans le repère naturel pour le plan de coupe en $\theta = 150^\circ$, calculées en mode libre et sous contrainte (110 MPa) est de l'ordre de 6.4 m/s, soit 0.19%.

II.4 Calcul du coefficient de couplage dans les deux systèmes de coordonnées

Les expressions des coefficients de couplage en mode plaque ayant été établies dans les deux systèmes de coordonnées (II.104) et (II.106), nous étudions dans cette partie l'évolution du k_t en fonction des angles de coupe θ et φ , pour différentes valeurs de contraintes.

II.4.1 Calcul du coefficient de couplage dans les deux systèmes de coordonnées pour $\varphi = 0^\circ$

La figure III.14 décrit l'évolution du coefficient de couplage dans les deux systèmes de coordonnées en fonction de l'angle d'élévation θ et pour différents niveaux de contrainte (-110, 0, 110 MPa) et un angle azimutal $\varphi = 0^\circ$.

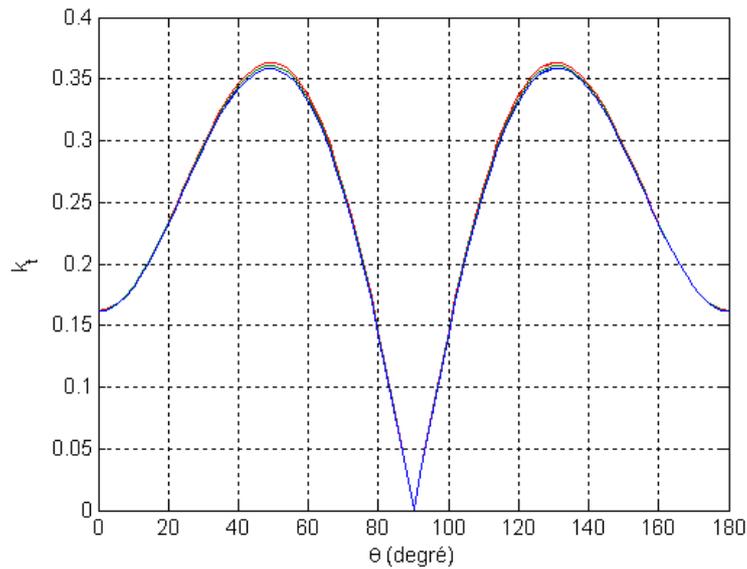


Figure III.14 : Évolutions du coefficient de couplage k_t en fonction de l'angle θ , pour $\varphi = 0^\circ$ et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) de couleurs (bleu, verte et rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).

On observe que la valeur du coefficient de couplage varie en fonction du plan de coupe et de la valeur de la précontrainte. Le coefficient de couplage augmente en traction et diminue en compression. Cet écart est très faible pour des valeurs de θ proches de 0° et 180° , et plus important pour $\theta = 50^\circ$ et 128° , jusqu'à $+0.69\%$ pour $\theta = 50^\circ$. Près de cet angle, la position des maximums n'est pas changée par le changement de système de coordonnées, mais elle est décalée de quelques degrés en moins ou en plus selon que la contrainte est négative ou positive respectivement. Inversement, près de $\theta = 128^\circ$, les maximums sont observés pour des angles θ plus ou moins grands selon que la contrainte est positive ou négative respectivement. Comme dans le cas des vitesses, l'évolution du coefficient est plus importante en mode de traction. Cependant, la différence entre le coefficient calculé dans le système de coordonnées naturel et prédéformé est très faible, en accord avec notre approximation (II.108). Ceci s'explique du fait que les modifications occasionnées par le changement de système de coordonnées modifient uniquement les constantes effectives et le tenseur de contrainte initial, alors que les changements dans le calcul des vitesses sont très sensibles au champ de déformation lui-même, qui intervient plusieurs fois dans l'expression.

II.4.2 Calcul du coefficient de couplage dans les deux systèmes de coordonnées pour $\varphi = 90^\circ$

La figure III.15 décrit l'évolution du coefficient de couplage dans les deux systèmes de coordonnées en fonction de l'angle d'élévation θ et pour différents niveaux de contrainte (-110, 0, 110 MPa) et un angle azimutal $\varphi = 90^\circ$.

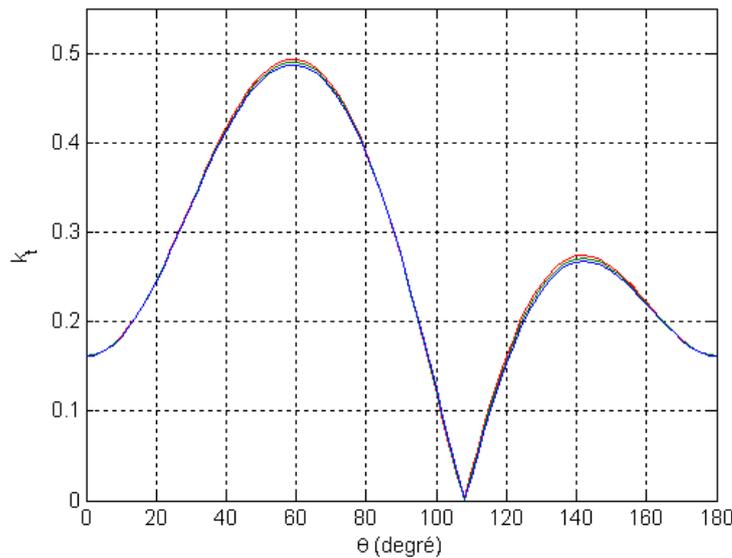


Figure III.15 : Évolutions du coefficient de couplage k_t en fonction de l'angle θ , pour $\varphi = 90^\circ$ et des valeurs de contraintes appliquées de (-110, 0, 110 MPa) de couleurs (bleu, verte et rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).

Ici aussi, la valeur du coefficient varie en fonction du plan de coupe et de la valeur de la précontrainte. Pour des valeurs de θ égales à 0° ou 180° , la valeur du coefficient évolue très peu selon le niveau de contrainte. Cet écart est maximum pour $\theta = 59^\circ$, qui correspond approximativement au plan Y+36 pour lequel le coefficient est égale à 0.49 (dans le cas libre) [Royer1999], et vaut 0.4932 soit un écart de +0.65%. Cependant, l'augmentation est maximum en $\theta = 140^\circ$ et vaut +1.1%. Cette valeur est plus ou moins grande selon le type de contrainte, traction ou compression respectivement. Près de l'angle $\theta = 89^\circ$, les courbes se croisent et le coefficient de couplage en compression devient supérieur à celui calculé en mode libre et inversement pour le mode de traction. L'ensemble de ces courbes s'annule près de $\theta = 104^\circ$, plus ou moins selon le mode de traction ou compression. Le coefficient de couplage augmente en traction et diminue en compression tant que l'angle θ est compris entre 0° et 87° , et entre 104° et 180° . Cet écart est très faible pour des valeurs de θ proches de 0° et 180° , et important pour des angles $\theta = 50^\circ$ et 128° . Près de $\theta = 142^\circ$, plus ou moins selon le mode de traction ou compression, on observe un

deuxième maximum. Comme dans le plan de coupe précédent, la différence entre les calculs de coefficients dans les deux repères est largement négligeable, en bon accord avec l'approximation (II.108).

II.5 Conclusion

Dans cette partie, nous avons montré que les paramètres de vitesses et coefficient de couplage issus du modèle développé dans le précédent chapitre dépendent du plan de coupe, du niveau et du type de contrainte appliquée, mais aussi du système de coordonnées dans lequel le mouvement est étudié. De plus, nous avons vu que la non-linéarité de déformation longitudinale n'excède pas 0.8% à contrainte maximum et que l'écart entre les différents tenseurs de contrainte n'excède pas 0.108%. Ces différences sont toutes plus importantes en mode de traction dans les deux plans de coupe.

L'étude de l'évolution des vitesses dans les deux repères a été faite en fonction de l'angle θ pour des valeurs de $\varphi = 0^\circ$ et 90° et des niveaux de contrainte de -110 à 110 MPa. Cette étude a montré que la différence entre les deux expressions de vitesses longitudinale et transversale pour $\varphi = 0^\circ$ sont inférieures à 19 m/s et 10 m/s, soit 0.26% et 0.24% respectivement. Dans le plan de coupe $\varphi = 90^\circ$, ces écarts sont de 26 m/s et 3.2 m/s, soit 0.35% et 0.08%. Dans le cas des vitesses transversales exprimées dans le système de coordonnées de l'état prédéformé, nous avons observé que les courbes d'évolutions de différents niveaux de contrainte se croisent alors que ce n'est pas le cas dans le système de coordonnées naturel.

De plus, nous avons montré que les approximations de changement de vitesses entre système de coordonnées étaient inférieures à 0.08%, donc relativement négligeable. Notons que ces écarts étaient décrits par nos approximations, avec une précision de l'ordre de quelques pour cents.

L'étude de l'évolution des coefficients de couplage en mode plaque dans les deux repères a été faite en fonction de l'angle θ pour des valeurs de $\varphi = 0^\circ$ et 90° et des niveaux de contrainte de -110 à 110 MPa. Cette étude a montré que l'écart entre le coefficient calculé en mode libre et sous contrainte peut atteindre jusqu'à +0.69% et +1.1% respectivement, mais décroît jusqu'à une valeur nulle selon le plan de coupe et la contrainte appliquée. Notons que les deux maximums de gains sont observés au maximum du coefficient de chaque plan de coupe du matériau, notamment celui du plan $\varphi = 90^\circ$ et Y+36, où le niobate de lithium possède son k_t le plus grand.

De plus, nous avons constaté que la différence entre les coefficients de couplage exprimés dans les deux systèmes de coordonnées est très largement négligeable, comme prédit par nos approximations.

III Étude sous précontrainte électrique

Dans cette partie, nous nous intéressons au comportement du niobate de lithium sous précontrainte électrique. Les valeurs de champs électriques imposés sont comprises entre -17.5 et 17.5 MV/m le long de l'axe (Oy_3) avec un pas de 8.75 MV/m. L'étude est faite pour deux valeurs d'angle azimutal $\varphi = 0^\circ$ et 90° , et des valeurs de θ allant de 0 à 180° .

III.1 Calcul des déformations initiales

III.1.1 Calcul des déformations non-linéaires initiales

Dans un premier temps, il est nécessaire de déterminer les composantes de déformations initiales dans le système de coordonnées de l'état naturel en se servant de l'équation (II.68.a). Pour être consistant avec l'approximation à l'ordre 3 des termes dynamiques, nous considérons ici aussi que les prédéformations définies dans le système de coordonnées naturel sont égales à celles définies dans le système de coordonnées prédéformé. L'écart entre la représentation du vecteur champ électrique entre les deux systèmes de coordonnées est lui aussi négligé pour les mêmes raisons.

Par effet piézoélectrique indirect, le champ électrique appliqué induit une contrainte mécanique. Reprenant l'équation (II.68.a) linéarisée pour calculer le gradient linéaire de déformation, nous procédons aux mêmes approximations que précédemment. Ainsi, alors que sous contrainte mécanique nous négligeons l'effet du champ électrique induit devant celui de la contrainte mécanique, nous négligeons ici l'influence du champ de contrainte mécanique induit sur les prédéformations. L'équation (II.68.a) devient alors :

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma^0}{\partial \xi_\delta} + \frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\eta} \frac{\partial u_\gamma^0}{\partial \xi_\delta} \frac{\partial u_\epsilon^0}{\partial \xi_\eta} - e_{\varphi\alpha\beta} E_\varphi^0 - e_{\varphi\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma^0}{\partial \xi_\delta} E_\varphi^0 - \frac{1}{2} l_{\varphi\omega\alpha\beta} E_\varphi^0 E_\omega^0 = 0 \quad (\text{III.8})$$

Cette relation est non-linéaire et se résout par un algorithme d'optimisation où les valeurs initiales de déformations sont les solutions de cette même équation linéarisée soit :

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma^0}{\partial \xi_\delta} - e_{\varphi\alpha\beta} E_\varphi^0 = 0 \quad (\text{III.9})$$

Comme dans le cas précédent, la résolution du système linéaire oblige à considérer l'approximation (III.6).

III.1.2 Contribution de la non-linéarité de déformations

Les propriétés du matériau évoluant en fonction du plan de coupe et du niveau de champ électrique, nous nous intéressons ici à la non-linéarité de déformation obtenue par optimisation de l'équation (III.8), avec et sans la partie non-linéaire, en fonction de ces deux paramètres. Pour la quantifier, nous traçons l'évolution de l'écart entre le calcul de déformation longitudinale S_{33}^0 linéaire et non-linéaire en fonction de l'angle d'élévation θ , pour des angles azimutaux $\varphi = 0^\circ$ et 90° et des valeurs de champs maximales.

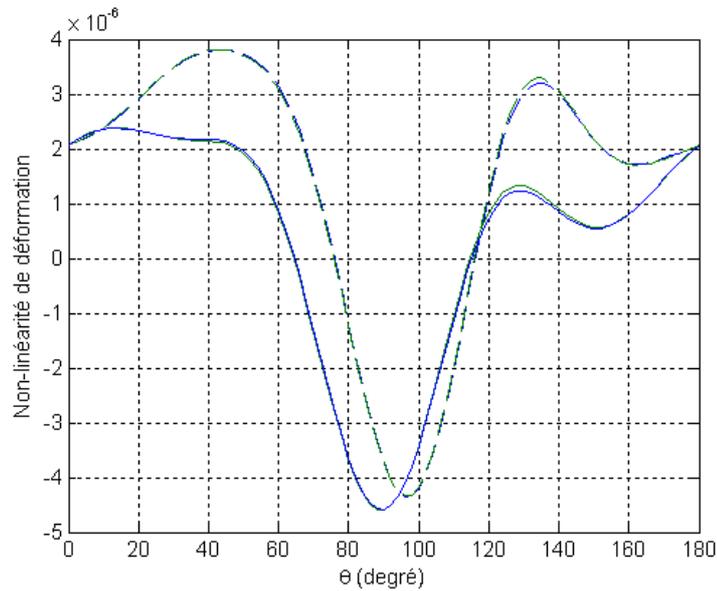


Figure III.16 : Évolutions de la non-linéarité de déformation longitudinale en fonction de l'angle θ , pour deux niveaux de champs électriques, soit -17.5 MV/m (lignes bleues) et 17.5 MV/m (lignes vertes) et pour $\varphi = 0^\circ$ (lignes continues) et 90° (lignes discontinues).

Cette figure montre que dans les deux plans de coupe, la valeur de la contrainte électrique induit peu de différence dans le calcul de la déformation longitudinale. Par ailleurs, nous observons que selon le plan de coupe, l'écart entre le calcul de déformation linéaire et non-linéaire est positif ou négatif. Ainsi, l'écart maximum observé est de $-4.6 \cdot 10^{-6}$ pour un plan de coupe $\varphi = 0^\circ$ et $\theta = 89^\circ$ pour un champ électrique positif.

La figure III.17 illustre l'évolution de la déformation S_{33}^0 pour ce plan de coupe.

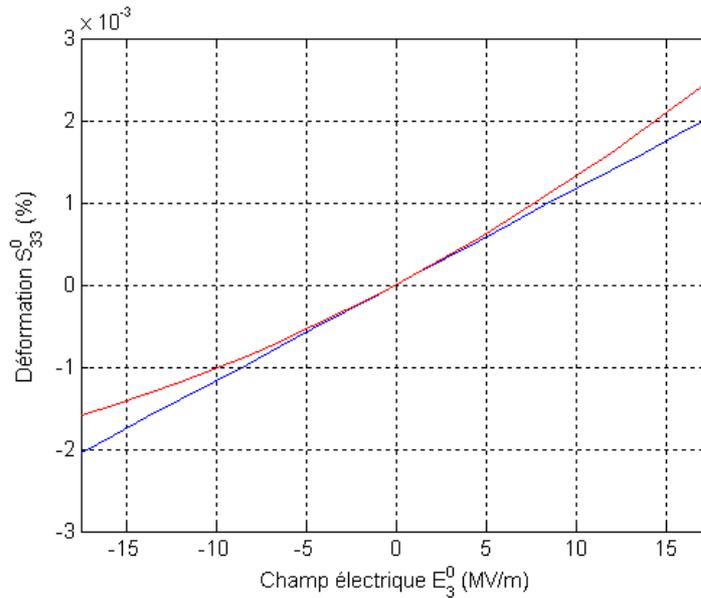


Figure III.17 : Évolutions de la déformation longitudinale en fonction du champ électrique par méthode de résolution linéaire (bleu) et non-linéaire (rouge) dans un plan de coupe $\varphi = 0^\circ$ et $\theta = 89^\circ$.

Nous observons que les déformations sont très petites, mais que la non-linéarité dans ce plan de coupe est non négligeable. L'écart relatif entre ces deux courbes est maximum pour une valeur de champ de 17.5 MV/m et atteint +22.5%.

Notons que dans ce cas, la déformation est très petite, ce qui engendre un pourcentage d'écart conséquent, alors que dans le plan de coupe $\varphi = 90^\circ$ et $\theta = 42^\circ$ ou la déformation non-linéaire est de l'ordre de 0.06%, soit une non-linéarité de 0.63%.

III.2 Calcul des vitesses longitudinale et transversales dans les deux systèmes de coordonnées

Les équations de Christoffel ayant été posées dans les 2 systèmes de coordonnées (II.91) et (II.101), nous étudions dans cette partie le comportement des modes de vitesses quasi-longitudinales et premiers et seconds modes quasi-transversaux en fonction des angles θ et φ , pour différentes valeurs de champs électriques. Chacun des modes est présenté dans une figure différente pour évaluer les différences de chacun d'eux selon le système de coordonnées dans lequel les vitesses sont exprimées. Nous nous intéressons à l'évolution de ces vitesses pour des valeurs de $\varphi = 0^\circ$ et 90° , en faisant varier l'angle θ de 0 à 180° . Chacune des figures décrit ces évolutions pour des valeurs de champ électrique de -17.5, 0 et 17.5 MV/m.

III.2.1 Calcul des vitesses longitudinale et transversales dans les deux systèmes de coordonnées pour $\varphi = 0^\circ$

La figure III.18 décrit l'évolution de la vitesse quasilongitudinale, en fonction de l'angle θ , pour un angle azimutal $\varphi = 0^\circ$ et des valeurs de champs appliquées de (-17.5, 0, 17.5 MV/m) dans le système de coordonnées de l'état naturel et prédéformé.

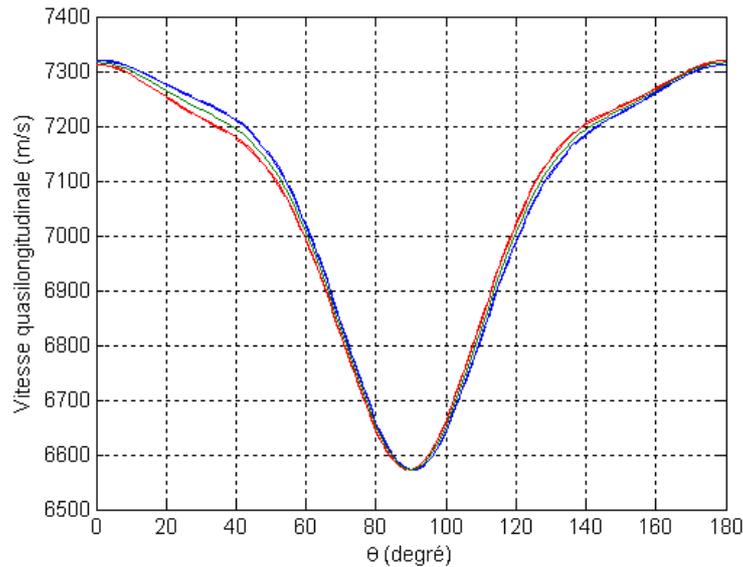


Figure III.18 : Évolutions de la vitesse quasilongitudinale, en fonction de l'angle θ , pour $\varphi = 0^\circ$ et des valeurs de champs électriques appliquées de (-17.5, 0, 17.5 MV/m) de couleurs (bleu, verte, rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).

Nous observons une différence relativement faible entre les évolutions des vitesses selon les différents niveaux de champ électrique et selon le système de coordonnées. On vérifie que les valeurs de vitesses à $\theta = 0^\circ$ sont égales à celles en $\theta = 180^\circ$ pour une valeur de champ électrique opposée. Dans les deux systèmes de coordonnées, les vitesses à champs électriques négatifs sont initialement plus importantes que celles calculées à champ électrique positif, en accord avec la déformation négative induite par le champ électrique négatif. Cet écart augmente en se rapprochant de l'angle $\theta = 40^\circ$ et diminue en se rapprochant de $\theta = 90^\circ$, dans les deux systèmes de coordonnées. Au-delà de cet angle, les vitesses sous champ électrique positif deviennent supérieures aux vitesses sous champs électriques négatifs. La sensibilité du matériau aux champs électriques augmente en se rapprochant de l'angle $\theta = 130^\circ$ et diminue par la suite. L'écart maximum entre la vitesse longitudinale en mode libre et celle sous contrainte électrique est observé dans le plan de coupe $\theta = 40^\circ$ et sous un champ électrique de -17.5 MV/m, et est de 19 m/s, soit 0.26%.

L'écart maximum entre les vitesses définies dans les deux systèmes de coordonnées est maximum près de l'angle $\theta = 40^\circ$ et champ électrique de -17.5 MV/m et vaut 3 m/s, soit 0.04% , donc négligeable. Notons que l'approximation (II.103.a) prévoyait une variation de 2.9 m/s, soit une erreur de 3.3% .

La figure III.19 décrit l'évolution de la vitesse quasitransversale 1, en fonction de l'angle θ , pour $\varphi = 0^\circ$ et des valeurs de champs appliquées de $(-17.5, 0, 17.5$ MV/m) dans le système de coordonnées de l'état naturel et prédéformé.

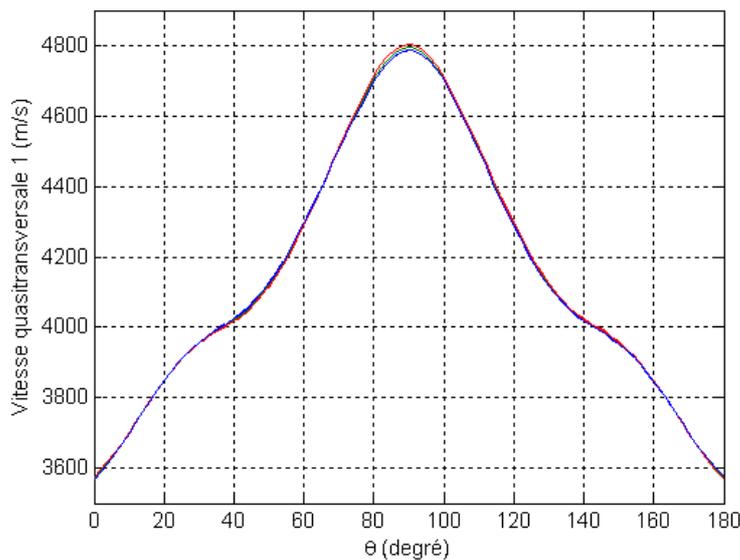


Figure III.19 : Évolutions de la vitesse quasitransversale 1, en fonction de l'angle θ , pour $\varphi = 0^\circ$ et des valeurs de champs électriques appliquées de $(-17.5, 0, 17.5$ MV/m) de couleurs (bleu, verte, rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).

Ici aussi, une différence relativement faible entre les évolutions des vitesses selon les différents niveaux de champ électrique et selon le système de coordonnées est observée. On vérifie que les valeurs de vitesse à $\theta = 0^\circ$ sont égales à celles en $\theta = 180^\circ$ pour une valeur de champ électrique opposée. Initialement, les vitesses à champs électriques positifs sont plus importantes que celles calculées pour un champ électrique positif, mais ceci s'inverse près de $\theta = 17^\circ$ (14° dans le système de coordonnées naturel et 21° dans le système de coordonnées prédéformé), puis près de $\theta = 67^\circ$ (67° dans le système de coordonnées naturel et 66° dans le système de coordonnées prédéformé) et finalement près de $\theta = 164^\circ$ (167° dans le système de coordonnées naturel et 165° dans le système de coordonnées prédéformé). En dehors de ces angles, les vitesses sont relativement sensibles au champ électrique avec un écart maximum près de $\theta = 90^\circ$ où l'écart entre la vitesse quasitransversale 1 en mode libre et celle sous contrainte électrique de 17.5 MV/m vaut 9 m/s, soit 0.18% .

Initialement, les vitesses définies dans le système de coordonnées naturel sont inférieures (supérieures) à celles calculées dans le système de coordonnées prédéformé pour des valeurs de champ électrique positif (négatif). Au-delà de l'angle $\theta = 17^\circ$, les vitesses définies dans le système de coordonnées naturel sont supérieures (inférieures) aux vitesses définies dans le système de coordonnées prédéformé sous contrainte électrique négative (positive). Au-delà de l'angle $\theta = 67^\circ$, les vitesses définies dans le système de coordonnées prédéformé sont supérieures (inférieures) aux vitesses définies dans le système de coordonnées naturel sous contrainte électrique positive (négative). Au-delà de l'angle $\theta = 105^\circ$, les vitesses définies dans le système de coordonnées naturel sont supérieures (inférieures) aux vitesses définies dans le système de coordonnées prédéformé sous contrainte électrique positive (négative). Au-delà de l'angle $\theta = 165^\circ$, les vitesses définies dans le système de coordonnées prédéformé sont supérieures (inférieures) aux vitesses définies dans le système de coordonnées naturel sous contrainte électrique négative (positive). L'écart maximum entre les vitesses définies dans les deux systèmes de coordonnées est maximum près de l'angle $\theta = 48^\circ$ et champ électrique de 17.5 MV/m et vaut 2 m/s, soit 0.04%, donc largement négligeable. Notons que l'approximation (II.103.b) prévoyait une variation de 1.85 m/s, soit une erreur de 7.5%.

La figure III.20 décrit l'évolution de la vitesse quasitransversale 2, en fonction de l'angle θ , pour un angle azimutal $\varphi = 0^\circ$ et des valeurs de champs appliquées de (-17.5, 0, 17.5 MV/m) dans le système de coordonnées de l'état naturel et prédéformé.

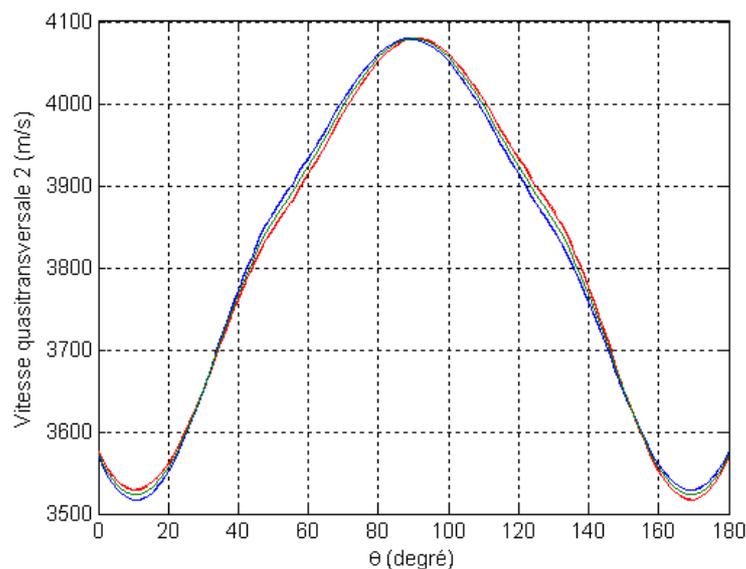


Figure III.20 : Évolutions de la vitesse quasitransversale 2, en fonction de l'angle θ , pour $\varphi = 0^\circ$ et des valeurs de champs électriques appliquées de (-17.5, 0, 17.5 MV/m) de couleurs (bleu, verte, rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).

Ici aussi, une différence relativement faible entre les évolutions des vitesses selon différents niveaux de champs électriques et selon le système de coordonnées est observée. On vérifie que les valeurs de vitesses à $\theta = 0^\circ$ sont égales à celles en $\theta = 180^\circ$ pour une valeur de champ électrique opposée. Initialement, les vitesses à champs électriques positifs sont plus importantes que celles calculées à champ électrique positif, mais ceci s'inverse près de l'angle $\theta = 30^\circ$ (29° dans le système de coordonnées naturel et 31° dans le système de coordonnées prédéformé), puis près de $\theta = 90^\circ$ (dans les deux systèmes de coordonnées) et finalement près de $\theta = 153^\circ$ (154° dans le système de coordonnées naturel et 152° dans le système de coordonnées prédéformé). En dehors de ces angles, les vitesses sont relativement sensibles au champ électrique, avec un écart maximum entre la vitesse quasitransversale 2 en mode libre et celle sous contrainte électrique observé dans le plan de coupe $\theta = 130^\circ$ sous un champ électrique de 17.5 MV/m qui vaut 7 m/s, soit 0.18%.

Initialement, les vitesses définies dans le système de coordonnées naturel sont inférieures (supérieures) à celles définies dans le système de coordonnées prédéformé sous champ électrique positif (négatif). Au-delà de l'angle $\theta = 30^\circ$, les vitesses définies dans le système de coordonnées naturel sont supérieures (inférieures) à celles définies dans le système de coordonnées prédéformé sous champ électrique négatif (positif). Au-delà de l'angle $\theta = 90^\circ$, les vitesses définies dans le système de coordonnées naturel sont supérieures (inférieures) à celles définies dans le système de coordonnées prédéformé sous champ électrique positif (négatif). Au-delà de l'angle $\theta = 154^\circ$, les vitesses définies dans le système de coordonnées prédéformé sont supérieures (inférieures) à celles définies dans le système de coordonnées naturel sous champ électrique négatif (positif). L'écart maximum entre les vitesses définies dans les deux systèmes de coordonnées est maximum près de l'angle $\theta = 130^\circ$ et champ électrique de 17.5 MV/m, et est de 2 m/s, soit 0.05%, donc largement négligeable. Notons que l'approximation (II.103.c) prévoyait une variation de 1.85 m/s, soit une erreur de 7.5%.

III.2.2 Calcul des vitesses longitudinale et transversales dans les deux systèmes de coordonnées pour $\varphi = 90^\circ$

La figure III.21 décrit l'évolution de la vitesse quasilongitudinale, en fonction de l'angle θ , pour un angle azimutal $\varphi = 90^\circ$ et des valeurs de champs appliquées de (-17.5, 0, 17.5 MV/m) dans le système de coordonnées de l'état naturel et prédéformé.

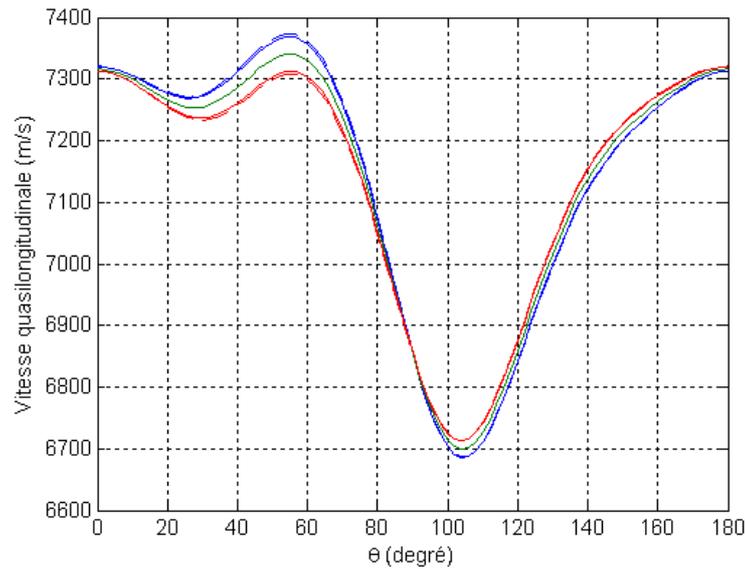


Figure III.21 : Évolutions de la vitesse quasilongitudinale, en fonction de l'angle θ , pour $\varphi = 90^\circ$ et des valeurs de champs électriques appliquées de (-17.5, 0, 17.5 MV/m) de couleurs (bleu, verte, rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).

Nous observons une différence relativement faible entre les évolutions des vitesses selon les différents niveaux de champ électrique et selon le système de coordonnées. On vérifie que les valeurs de vitesses à $\theta = 0^\circ$ sont égales à celles en $\theta = 180^\circ$ pour une valeur de champ électrique opposée. Initialement, les vitesses à champ électrique négatif sont plus importantes que celles calculées pour un champ électrique positif, ce qui est en accord avec la déformation négative induite par le champ électrique négatif. Cet écart augmente en se rapprochant de l'angle $\theta = 40^\circ$ et diminue en se rapprochant de $\theta = 90^\circ$ (91° dans le système de coordonnées naturel et 89° dans le système de coordonnées prédéformé) où les vitesses sous champ électrique positif deviennent supérieures aux vitesses sous champ électrique négatif. L'évolution des vitesses est ensuite très sensible au champ électrique, puis cette sensibilité se réduit près de $\theta = 180^\circ$. L'écart maximum entre la vitesse longitudinale en mode libre et celle sous contrainte électrique de -17.5 MV/m dans un plan $\theta = 55^\circ$ est de 33 m/s, soit 0.44%.

Initialement, les vitesses définies dans le système de coordonnées naturel sont supérieures (inférieures) à celles définies dans le système de coordonnées prédéformé quand soumises à un champ électrique négatif (positif). Au-delà de $\theta = 108^\circ$, les vitesses définies dans le système de coordonnées naturel sont supérieures (inférieures) à celles calculées dans le système de coordonnées prédéformé, pour des valeurs de champs électrique positif (négatif). L'écart maximum entre les vitesses définies dans les deux systèmes de coordonnées maximum près de l'angle $\theta = 55^\circ$ et champ électrique de -17.5 MV/m est de 5 m/s, soit 0.07%, donc négligeable. Notons que l'approximation (II.103.a) prévoyait une variation de 4.9 m/s, soit une erreur de 2%.

vitesse définies dans le système de coordonnées prédéformé sont supérieures (inférieures) à celles calculées dans le système de coordonnées naturel quand soumis à un champ électrique négatif (positif). Par ailleurs, l'écart maximum entre les vitesses définies dans les deux systèmes de coordonnées est maximum près de l'angle $\theta = 50^\circ$ et champ électrique de 17.5 kV/m est de 3 m/s, soit 0.08%, donc largement négligeable. Notons que l'approximation (II.103.b) prévoyait une variation de 2.55 m/s, soit une erreur de 15%.

La figure III.23 décrit l'évolution de la vitesse quasitransversale 2, en fonction de l'angle θ , pour un angle azimutal $\varphi = 90^\circ$ et des valeurs de champs appliquées de (-17.5, 0, 17.5 MV/m) dans le système de coordonnées de l'état naturel et prédéformé.

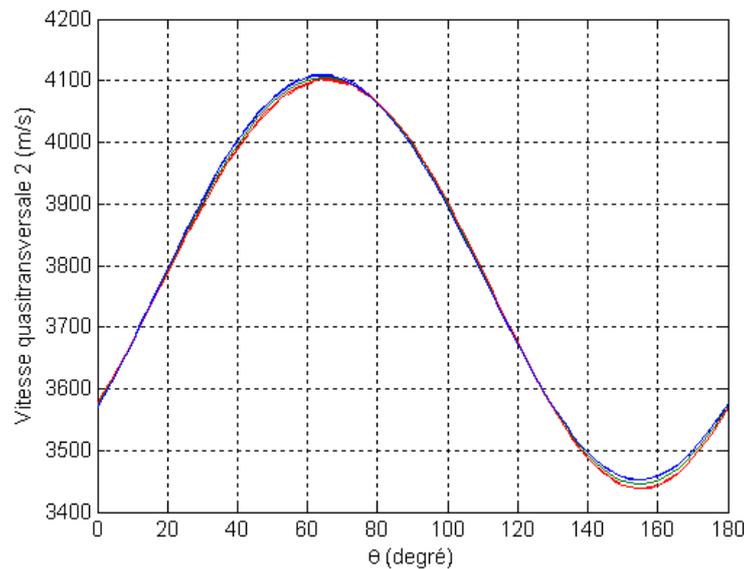


Figure III.23 : Évolutions de la vitesse quasitransversale 2, en fonction de l'angle θ , pour $\varphi = 90^\circ$ et des valeurs de champs électriques appliquées de (-17.5, 0, 17.5 MV/m) de couleurs (bleu, verte, rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).

Ici aussi, une différence relativement faible entre les évolutions des vitesses selon les différents niveaux de champ électrique et selon le système de coordonnées est observée. On vérifie que les valeurs de vitesses à $\theta = 0^\circ$ sont égales à celles en $\theta = 180^\circ$ pour une valeur de champ électrique opposée. Initialement, les vitesses à champ électrique positif sont plus importantes que celles calculées pour un champ électrique négatif, mais ceci s'inverse près de $\theta = 11^\circ$ (10° dans le système de coordonnées naturel et 12° dans le système de coordonnées prédéformé), puis près de $\theta = 80^\circ$ (84° dans le système de coordonnées naturel et 75° dans le système de coordonnées prédéformé) et finalement près de $\theta = 125^\circ$ (127° dans le système de coordonnées naturel et 124° dans le système de coordonnées prédéformé). En dehors de ces angles, les vitesses sont relativement sensibles au champ électrique avec un écart maximum près de $\theta = 154^\circ$. L'écart pour ce même

plan de coupe, entre la vitesse quasitransversale 2 en mode libre et celle sous contrainte électrique de -17.5 kV/m est de 7 m/s, soit 0.2%.

Initialement, les vitesses calculées dans le système de coordonnées naturel et à champ électrique positif (négatif) sont inférieures (supérieures) à celles calculées dans le système de coordonnées prédéformé. On observe que ce phénomène s'inverse pour $\theta = 17^\circ$, les vitesses définies dans le système de coordonnées naturel sont supérieures (inférieures) à celles définies dans le repère prédéformé quand soumises à un champ électrique négatif (positif). Au-delà de l'angle $\theta = 80^\circ$, les vitesses définies dans le système de coordonnées prédéformé sous contrainte positive (négatif) deviennent inférieures (supérieures) à celles définies dans le système de coordonnées naturel. Une fois l'angle $\theta = 112^\circ$, les vitesses définies dans le système de coordonnées naturel sont toutes supérieures à celles définies dans le système de coordonnées prédéformé. L'écart maximum entre les vitesses définies dans les deux systèmes de coordonnées est maximum près de l'angle $\theta = 64^\circ$ et champ électrique de -17.5 kV/m. Il est de 3 m/s, soit 0.07%, donc largement négligeable. Notons que l'approximation (II.103.c) prévoyait une variation de 2.8 m/s, soit une erreur de 6.6%.

III.3 Calcul du coefficient de couplage dans les deux systèmes de coordonnées

Les expressions des coefficients de couplage en mode plaque ayant été établies dans les deux systèmes de coordonnées (II.104) et (II.106), nous étudions dans cette partie l'évolution du k_t en fonction des angles θ et φ , pour différentes valeurs de champs électriques.

III.3.1 Calcul du coefficient de couplage dans les deux systèmes de coordonnées pour $\varphi = 0^\circ$

La figure III.24 décrit l'évolution du coefficient de couplage dans les deux systèmes de coordonnées en fonction de l'angle d'élévation θ et pour différents niveaux de champs électriques (-17.5, 0, 17.5 MV/m) pour un angle azimutal $\varphi = 0^\circ$.

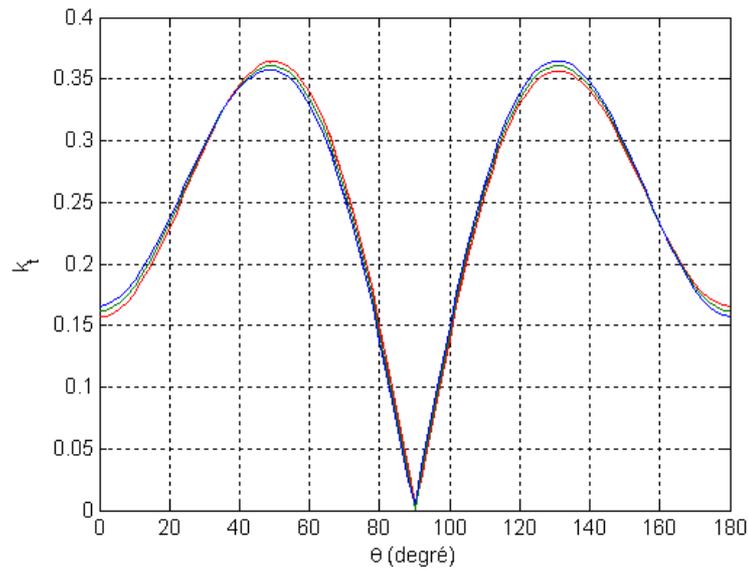


Figure III.24 : Évolutions du coefficient de couplage k_t en fonction de l'angle θ , pour $\varphi = 0^\circ$ et des valeurs de champs électriques appliquées de (-17.5, 0, 17.5 MV/m) de couleurs (bleu, verte, rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).

Nous observons que la sensibilité du coefficient au champ électrique appliqué est initialement grande, le champ électrique négatif (positif) augmente (diminue) la valeur du coefficient. Dans les deux systèmes de coordonnées, ce comportement s'inverse à partir de l'angle $\theta = 35^\circ$. Cette sensibilité augmente jusqu'à $\theta = 50^\circ$ puis décroît jusqu'à une valeur nulle du coefficient de couplage pour un angle d'élévation $\theta = 90^\circ$. Passé cet angle, le coefficient de couplage augmente avec la sensibilité et est maximum en $\theta = 131^\circ$. Au cours de cette croissance, le coefficient est augmenté (diminué) par l'application d'un champ électrique négatif (positif) et ce, jusqu'à un angle $\theta = 161^\circ$ où cet ordre s'inverse. On vérifie alors que les valeurs de coefficients à $\theta = 0^\circ$ sont égales à celles en $\theta = 180^\circ$ pour des valeurs de champs électriques opposés. La différence entre le coefficient de couplage en mode libre et sous contrainte électrique est maximum pour $\theta = 180^\circ$ et une valeur de champ électrique positif, et est égale à +2.9%.

L'évaluation de l'écart maximum entre le calcul du coefficient de couplage dans le système de coordonnées naturel et prédéformé est inférieure à 0.02%, en accord avec l'approximation (II.108), donc largement négligeable.

III.3.2 Calcul du coefficient de couplage dans les deux systèmes de coordonnées pour $\varphi = 90^\circ$

La figure III.25 décrit l'évolution du coefficient de couplage dans les deux systèmes de coordonnées en fonction de l'angle d'élévation θ et pour différents niveaux de champs électriques (-17.5, 0, 17.5 MV/m) pour un angle azimutal $\varphi = 90^\circ$.

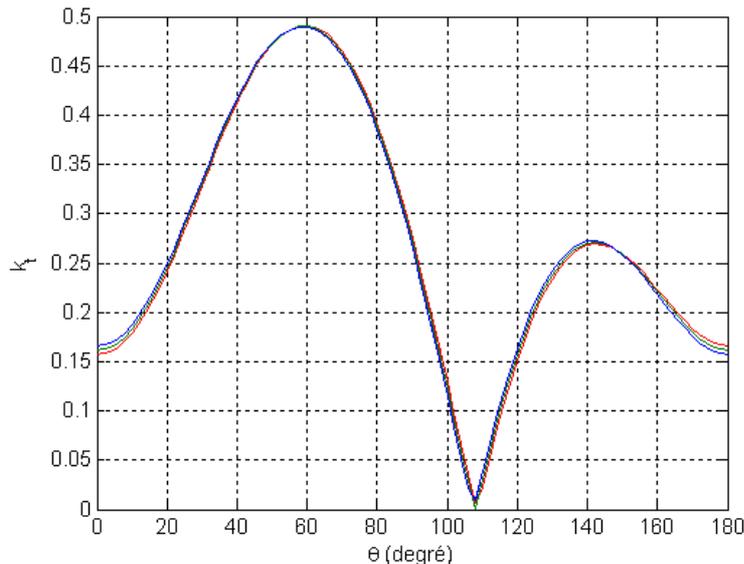


Figure III.25 : Évolutions du coefficient de couplage k_t en fonction de l'angle θ , pour $\varphi = 90^\circ$ et des valeurs de champs électriques appliquées de (-17.5, 0, 17.5 MV/m) de couleurs (bleu, verte, rouge) dans le système de coordonnées de l'état naturel (lignes discontinues) et prédéformé (lignes continues).

On observe qu'ici aussi, la sensibilité du coefficient au champ électrique appliqué est initialement grande, le champ électrique négatif (positif) augmente (diminue) la valeur du coefficient. La sensibilité diminue jusque $\theta = 55^\circ$, seuil à partir duquel le coefficient est augmenté (diminué) par un champ électrique positif (négatif). Par la suite, la sensibilité augmente, puis reste relativement constante, mais les comportements se croisent quand le coefficient s'annule en $\theta = 108^\circ$. Au-delà de cet angle, le coefficient est augmenté (diminué) par un champ électrique négatif (positif). La sensibilité augmente ensuite rapidement, puis reste relativement constante jusque $\theta = 135^\circ$, puis diminue en se rapprochant de l'angle $\theta = 148^\circ$ où les comportements se croisent. Au-delà de cet angle, le coefficient est augmenté (diminué) par un champ électrique positif (négatif). L'écart entre le coefficient en mode libre et sous contrainte électrique est maximum en $\theta = 0^\circ$ et 180° , et vaut 0.004, soit +2.4%.

L'évaluation de l'écart maximum entre le calcul du coefficient de couplage dans le système de coordonnées naturel et prédéformé est inférieure à 0.02%, ce qui est en accord avec l'approximation (II.108) et donc largement négligeable

III.4 Conclusion

Dans cette partie, nous avons calculé les déformations induites par l'application d'un champ électrique compris entre les valeurs positives et négatives du champ coercitif du niobate de lithium, soit $\pm 17.5 \text{ MV/m}$. Nous avons montré que ces déformations sont 100 fois plus petite que sous contrainte mécanique. Cependant, nous avons mis en avant la non-linéarité de la déformation qui approche les 22.5% au maximum (à déformation très faible).

Par la suite, nous avons évalué les 3 modes de vitesses dans des plans de coupe à angle d'élévation quelconque et angle azimutal égale à 0° et 90° . Dans le premier cas, les différences maximums entre vitesses longitudinale et transversales sous mode libre et sous contrainte électrique sont toujours inférieures à 19 m/s et 9 m/s respectivement, soit 0.26% et 0.18% d'écart. Dans le second cas les écarts pour ces même vitesses sont de 33 m/s et 9 m/s, soit 0.44% et 0.21%. Ainsi, la différence de vitesse sous contrainte électrique est faible. La différence de vitesse entre système de coordonnées est toujours inférieure à 0.08%, donc négligeable. Cet écart était prédit par nos approximations avec une erreur de quelques pourcentages. Notons que de nombreux croisements des courbes de vitesses définis dans chacun des repères ont été observés.

Dans un deuxième temps, avons évalué l'écart sur le coefficient de couplage entre le mode libre et sous contrainte électrique. Cet écart est de l'ordre de 2.9% quand $\varphi = 0^\circ$, et proche de 2.4% quand $\varphi = 90^\circ$, donc relativement faibles dans les deux cas. Notons cependant que ce type de contrainte n'augmente le k_t dans le plan de coupe où il est maximum. Par ailleurs, la différence entre le coefficient de couplage exprimé dans les deux systèmes de coordonnées est inférieure à 0.02% dans tous les plans de coupe, donc largement négligeable. Cette remarque est en accord avec l'approximation (II.108) que nous avons faite.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit la dépendance des vitesses et du coefficient de couplage en mode plaque du niobate de lithium aux contraintes électrique et mécanique appliquées dans

différents plans de coupe, mais aussi dans les systèmes de coordonnées statique et prédéformé. La contrainte mécanique maximale appliquée correspond à la limite élastique du matériau, soit ± 110 MPa. La limite en champ électrique correspond au champ coercitif, soit ± 17.5 MV/m. Cette étude a montré que la non-linéarité de déformation longitudinale n'excède pas 0.8% à contrainte mécanique maximum, mais atteint 22.5% à contrainte électrique maximum (à déformation très faible). En outre, l'écart entre les différents tenseurs de contrainte mécanique n'excède pas 0.108%, et les écarts maximums sont tous observés quand le matériau est étiré.

L'étude de l'évolution des vitesses dans les deux repères a été faite en fonction de l'angle θ , pour des valeurs de $\varphi = 0^\circ$ et 90° . Cette étude a montré que les différences entre le mode libre et sous contrainte des vitesses longitudinale et transversales pour $\varphi = 0^\circ$ sont inférieures à 19 m/s et 10 m/s dans le cas mécanique, et inférieures à 19 m/s et 9 m/s dans le cas électrique. Ces écarts représentent 0.26% et 0.24% mécaniquement, et 0.26% et 0.18% électriquement. Dans le plan $\varphi = 90^\circ$, ces écarts sont respectivement de 26 m/s et 3.2 m/s sous contrainte mécanique et de 33 m/s et 9 m/s sous contrainte électrique, soient des écarts de 0.35% et 0.08% mécaniquement et 0.44% et 0.21% électriquement. Il apparaît donc que les effets non-linéaires des contraintes mécanique et électrique sur les 3 modes de vitesse sont d'un ordre comparable.

Dans le cas des vitesses transversales exprimées dans le système de coordonnées de l'état prédéformé, nous avons observé que les courbes d'évolutions de différents niveaux de contrainte mécanique se croisent alors que ce n'est pas le cas dans le système de coordonnées naturel. Ceci a aussi été observé en électrique, pour les deux modes de vitesses.

Par ailleurs, pour les deux types de contrainte, la différence de vitesse entre systèmes de coordonnées est toujours inférieure à 0.08%, donc négligeable. Cet écart était prédit par nos approximations avec une erreur de quelques pourcentages.

L'étude de l'évolution du coefficient de couplage en mode plaque dans les deux repères a été faite en fonction de l'angle θ pour des valeurs de $\varphi = 0^\circ$ et 90° . Sous contrainte mécanique, cette étude a montré que le k_t atteint +0.69% et +1.1% respectivement, mais décroît jusqu'à zéro selon le plan de coupe et la contrainte appliquée. Sous contrainte électrique, cet écart est de l'ordre de 2.9 % quand $\varphi = 0^\circ$, et proche de 2.4% quand $\varphi = 90^\circ$. Notons que le maximum du k_t du niobate de lithium, obtenu pour $\varphi = 90^\circ$ en Y+36, est augmenté uniquement sous contrainte mécanique.

Dans les deux cas, nous avons constaté que la différence entre les coefficients de couplage exprimés dans les deux systèmes de coordonnées n'excède pas 0.02%, donc très largement négligeable, comme prédit par nos approximations.