Homogénéisation symplectique

Sommaire

1 Homologie de Floer hamiltonienne et lagrangienne **15**
1.1 Un bref rappel d'homologie . . . 15
1.2 Des variétés de dimension infinies . . . 17
1.3 La fonctionnelle d'action . . . 17
1.4 Comparaisons classiques . . . 20
1.5 Dualité de Poincaré . . . 20
1.6 Une structure d'anneau . . . 21
1.7 Catégorie de Fukaya . . . 24
1.8 Exemple . . . 25

2 Invariants spectraux **26**
2.1 Filtration et définition . . . 26
2.2 Hamiltoniens à flot complet . . . 29
2.3 Propriétés . . . 30
2.3.1 Dualité . . . 30
2.3.2 Relations de Künneth . . . 31
2.3.3 Inégalités triangulaires . . . 32
2.3.4 Les invariants spectraux hamiltoniens . . . 33
2.3.5 Comparaison des invariants spectraux hamiltoniens et lagrangiens . . . 33
2.4 Estimation des perturbations . . . 35
2.5 Un cadre général . . . 36
2.6 Résumé des propriétés . . . 36

3 Homogénéisation symplectique **37**
3.1 Le cas de $T^*\mathbb{T}^n$ . . . 37
3.1.1 Rappels rapides de la théorie des fonctions génératrices 38
3.1.2 Relations entre les invariants de Floer et les invariants des fonctions génératrices . . . 41
3.1.3 Construction et propriétés . . . 41
3.2 Le cas général des cotangents . . . 42
3.2.1 Construction . . . 43
3.2.2 Propriétés . . . 43
3.2.3 Egalité avec la version de Viterbo . . . 47
3.2.4 Détails . . . 48

3.2.5 Exemples de Calcul 51

4 Applications **54**
4.1 Théorie d'Aubry-Mather non convexe 54
4.1.1 La fonction α de Mather 54
4.1.2 Γ-convergence des l_+ 57
4.1.3 Sous-différentiel 58
4.1.4 Homogénéisé d'une perturbation 60
4.1.5 Vers des ensembles de Mather pour la théorie non convexe 60
4.2 Rigidité du Crochet de Poisson 61
4.3 Non-déplaçabilité 62
4.4 Géométrie du groupe (Ham, d_{Hofer}) 64
4.5 Connexion avec d'autres constructions 68

5 Conjecture de Viterbo sur les capacités **69**
5.1 Quasi-morphisme et cohomologie bornée de $\mathcal{G}_r$ 71
5.2 Commutativité du crochet de Poisson 72
5.3 Equation d'Hamilton Jacobi 72

6 Homogénéisation sur d'autres variétés **74**
6.1 Homogénéisation visqueuse 74
6.1.1 Absence d' homogénéisation classique sur $\mathbb{T}^{2n}$ 74
6.1.2 L'homogénéisation visqueuse comme réponse 75
6.2 Applications à l'homogénéisation sur le tore 78
6.2.1 Existence et propriétés 78
6.2.2 Quelques exemples 79
6.3 La sphère 80
6.3.1 ...vue comme compactifiée du cylindre 80
6.3.2 ...et le tore de Clifford 86

Nous présentons ici la théorie de l'homogénéisation symplectique, définie par Viterbo dans un premier temps sur le cotangent du tore, puis dans [MVZ] dans le cas général. L'idée centrale est de récupérer des invariants symplectiques étant donnée un système Hamiltonien. La théorie de Floer que nous rappelons dans les premiers chapitres donne déjà des invariants qualitatifs. Nous montrons ensuite que le fait de garder l'information contenue dans la filtration par l'action permet d'extraire des invariants quantitatifs. Les différentes propriétés de l'homogénéisation en font un quasi-état symplectique partiel, notion déjà définie par Entov et Polterovich à partir des invariants spectraux hamiltoniens. Dans le cas du cotangent, nous verrons que l'homogénéisation "lagrangienne" donne une théorie plus riche que lorsque l'on applique le programme d'Entov et Polterovich dans le cas du cotangent. En particulier, une conjecture de Viterbo sur la distance spectrale des lagrangiennes, impliquerait que l'homogénéisation est en fait un quasi-état et peut être vu comme un quasi-morphisme sur le groupe des difféomorphisme hamiltonien. Finalement, nous tenterons de voir comment généraliser cette construction au niveau de la catégorie de Fukaya.

1 Homologie de Floer hamiltonienne et lagrangienne

Le but de ce chapitre est de rappeler la construction de l'homologie de Floer Lagrangienne et Hamiltonienne. La théorie développée par Andreas Floer est assez similaire à la théorie de Morse, mais ici l'espace n'est plus une variété de dimension finie mais une variété Hilbertienne. La différence avec la dimension finie est qu'elle ne coïncide pas avec l'homologie singulière. Il existe cependant quelques articles qui la définissent en terme de cycles pseudo-infinis [Lip]. Dans toute cette thèse, nous nous placerons dans le cadre du cotangent à une variété lisse connexe et compacte notée T^*M et muni de la forme symplectique canonique $d\lambda$, λ la 1-forme de Liouville. Cependant, l'essentiel des arguments de la partie A pourraient être exportés sans réel changement dans les preuves au cas exact et avec un peu plus de difficulté au cas monotone.

1.1 Un bref rappel d'homologie

L'homologie se définit toujours à partir d'un complexe de chaine et d'une application bord. Il est d'ailleurs bon de rappeler que celle-ci n'est qu'une partie des invariants algébriques, l'information algébrique étant plus complète au niveau des complexes de chaines.

Définition 1.1. Un complexe de chaine est la donnée d'une suite de groupe abélien C_n et d'une application

$$\partial = \sum \partial_i : C = \bigoplus C_n \to C$$

avec $\partial_i : C_i \to C_{i-1}$ et $\partial^2 = 0$

Durant toute la suite, nous prendrons comme groupes abéliens des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ espace vectoriels. L'homologie d'une suite :

$$.. \to C_i \to C_{i-1} \to ...$$

mesure la non exactitude de cette dernière.

Définition 1.2. On définit le i-ème groupe d'homologie par :

$$H_i(C_\bullet) = Ker\partial_i / Im\partial_{i+1}$$

Définition 1.3. Un morphisme de chaine est une famille de morphismes

$$s_\bullet : (C_\bullet, \partial) \to (\tilde{C}_\bullet, \tilde{\partial})$$

qui commutent avec la différentielle, ie.

$$\tilde{\partial} \circ s_k = s_{k-1} \circ \partial$$

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & C_k & \xrightarrow{\partial} & C_{k-1} & \longrightarrow \\ & \downarrow{\scriptstyle s_k} & & \downarrow{\scriptstyle s_{k-1}} & \\ \longrightarrow & C_k & \xrightarrow{\partial} & C_{k-1} & \longrightarrow \end{array}$$

Ils servent à définir des morphismes sur l'homologie. On définie aussi la notion de cohomologie associée à un complexe :

Définition 1.4. On définie la cohomologie comme l'homologie du cocomplexe $Hom(C_\bullet, k)$. On la note avec un indice en exposant.

Définition 1.5. Un complexe de chaine filtré est un triplet $(C_\bullet = vect(v_\bullet), \mathcal{A}, \partial)$, où $v_\bullet$ est un ensemble de générateurs de degré $\bullet$, $\mathcal{A}$: $v_\bullet \to \mathbb{R}$ est une fonction et $(C_\bullet, \partial)$ un complexe de chaîne. De plus, il respecte la filtration $C_\bullet^{<a} := \mathbb{Z}_2 \otimes vect(v_\bullet \cap \{\mathcal{A} < a\})$ est stable par ∂ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Dans le cas de l'homologie de Floer, comme dans l'homologie de Morse-Witten, le complexe est donné par l'espace vectoriel des points critiques et les applications de bords par la combinatoire des flots de gradients d'une fonctionnelle d'action. Nous tâchons dans les chapitres suivant d'établir le cadre et les définitions exactes de l'homologie de Floer.

1.2 Des variétés de dimension infinies

Comme nous l'avons dit auparavant, le complexe est obtenu à partir d'une fonctionnelle. Nous présentons ici deux espaces de dimensions infinis qui sont les ensembles de définition des fonctionnelles définissant le complexe de Floer hamiltonien et lagrangien.

Définition 1.6. On prend

$$\Omega(T^*M) := \{\gamma : [0,1] \to T^*M, \gamma(0) = \gamma(1)\}$$

l'ensemble des boucles du cotangent. De même,

$$\Omega(T^*M, L) := \{\gamma : [0,1] \to T^*M, \gamma(0) \in L \text{ et } \gamma(1) \in L\}$$

l'ensemble des lacets ouverts avec conditions d'appartenance à la lagrangienne au bord.

Remarque 1.7. Lorsque cela sera possible nous traiterons les deux cas simultanément et les nommerons par Ω.

En analogie avec le cas de l'homologie de Morse, il faut munir ces espaces d'une métrique. On munit tout d'abord (T^*M, ω) d'une structure presque complexe compatible $J \in \mathcal{J} \subset \mathrm{End}(TT^*M)$, c'est à dire qui vérifie $J^2 = -Id$ et $\omega(., J.)$ est une métrique. Il faut noter que cet espace est contractile, remarque importante pour la non dépendance de l'homologie de Floer en fonction de J. Il est également possible de prendre un chemin $J(t)$ de structure presque complexes.

Les variétés Ω sont équipées d'une structure hilbertienne $< ., . >_J$, et qui en font des variétés hilbertiennes de dimension infinie.

Définition 1.8. La métrique sur l'espace des lacets est donnée par :

$$\forall (v, w) \in T\Omega|_\gamma, < v, w >_J = \int_0^1 \omega(v, Jw)$$

1.3 La fonctionnelle d'action

Etant donné un hamiltonien H, nous définissons la fonctionnelle d'action sur la variété Ω :

Définition 1.9. Les fonctions suivantes sont appelées fonctionnelles d'action :

$$\mathcal{A} : \gamma \mapsto -\int_\gamma \lambda + \int_0^1 H_t(\gamma(t))dt$$

Les points critiques de $\mathcal{A}$ sont les orbites hamiltoniennes associées à H. Dans la théorie de Morse-Witten, les points critiques viennent avec une graduation naturelle donnée par l'indice de Morse de la fonction. Ici, cependant, l'espace étant de dimension infini, nous sommes souvent confrontés à des indices de Morse eux-même infinis.

Exemple 1.10. L'exemple suivant est d'ailleurs historiquement celui de Hofer et Zehnder, qui cherchaient à démontrer l'existence d'orbites périodiques. Plaçons nous dans $T^*\mathbb{R}^n$, la partie $\int_0^1 H_t(\gamma(t))dt$, étant le plus souvent un opérateur compact nous regarderons surtout la partie en $\int \lambda$. En décomposant l'espace $\Omega(\mathbb{R}^n)$ en série de Fourier, on obtient l'écriture d'un élément comme $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e_k$ avec $a_k \in \mathbb{R}^n$ et $e_k = e^{ik\theta}$. L'opérateur a alors la forme suivante

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} k|a_k|^2$$

On étudie le flot de gradient de la fonctionnelle $\mathcal{A}$ pour $< ., . >_J$ fixée. Les solutions seront donc des applications u: $(\Sigma, j) \to (T^*M, J)$ avec (Σ, j) un cylindre conforme. On calcule alors

$$\partial_s u(s,t) = -grad\mathcal{A}$$

qui donne l'équation de Floer :

$$\partial_s u(s,t) - J(\partial_t u(s,t) - X_H(u(s,t))) = 0$$

Dans le cadre de la dimension finie les orbites du flot de gradient commencent et finissent sur des points critiques. Ici, il faut demander de surcroit que les orbites soient d'énergie finie.

Définition 1.11. L'énergie d'une solution de l'équation de Floer u est $E(u) = \int uda$ où a est l'aire donnée par la métrique hilbertienne, donc :

$$E(u) = \int\int |\partial_s u(s,t)|^2 + |\partial_t u(s,t) - X_H(u(s,t))|^2 dtds$$

On a alors la proposition suivante :

Proposition 1.12. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *L'énergie de u, $E(u)$ est finie*
- *Il existe x et y critiques tels que :*

$$\lim_{s\to-\infty} u(s,t) = x$$
$$\lim_{s\to\infty} u(s,t) = y$$

- *Il existe une constante $\delta > 0$ and $b > 0$ tal que $|\partial_s u(s,t)| \leq be^{\delta|s|} \forall s, t \in \mathbb{R}$*

Bien que nous ayons vu que l'indice ne peut être défini comme dans le cas de la dimension finie. Il est possible de retrouver une différence d'indice, par la dimension de l'intersection de l'espace instable de x et l'espace stable de y pour le flot de gradient. L'analyse du linéarisé de l'opérateur de Cauchy-Riemann perturbé permet de calculer cette dimension qui est finie (J étant choisi génériquement).

Cette dimension peut être également exprimée de manière géométrique comme la différence des indices de Maslov des deux points critiques. Pour le calculer, on considère le chemin de matrice constitué de la différentielle du flot le long d'une trajectoire hamiltonienne et on compte le nombre de tour dans $Sp(n)$.

Remarque 1.13. Il est possible de normaliser l'indice de Conley-Zehnder pour qu'il soit compatible avec l'indice de Morse. Dans le cas de l'homologie de Floer lagrangienne par rapport à la section nulle, on prend ainsi l'indice de Conley-Zehnder égal à celui de Morse pour $H = \pi^* f$ le tiré en arrière d'une fonction de Morse sur M.

L'espace de module des solutions de l'équation de Floer tel que $\lim_{s\to-\infty} u(s,t) = x$ et $\lim_{s\to\infty} u(s,t) = y$ est noté $\mathcal{M}(x,y,J,H)$. Il peut être quotienté par une reparamétrisation selon la variable s. On définit alors $\tilde{\mathcal{M}}(x,y,J,H) = \mathcal{M}(x,y,J,H)/\mathbb{R}$. Il convient ensuite de stocker toute cette information sous forme de complexe de chaine. L'ensemble CF^k est le $\mathbb{Z}_2-$espace vectoriel engendré par l'ensemble des points critiques d'indice de Conley-Zenhder k. La différentielle se définit par :

$$\partial x = \sum_{\substack{y \\ m_H(x)-m_H(y)=1}} \sharp\mathcal{M}(x,y,J)y$$

Le fait que cet objet soit une différentielle est déduit comme dans le cas Morse par l'étude des trajectoires brisées. Elle nécessite cependant d'utiliser les résultats de compacité de Gromov sur les trajectoires de Floer d'énergie finie ainsi qu'une hypothèse de convexité. Cette dernière dans le cas du cotangent réside dans le fait que nous puissions prendre la structure complexe induite par une métrique sur la base en dehors d'un compact de T^*M. Géométriquement, on étudie le bord de l'espace de module $\tilde{\mathcal{M}}(x,z,J,H)$ qui est de dimension 1 si la différence d'indice de x et z est 2. Son bord est constitué des trajectoires brisées de différence d'indice 1.

L'homologie de Floer hamiltonienne ne peut pas être correctement définie pour des hamiltoniens à support compact puisque à l'extérieur d'un compact toutes les orbites sont critiques. Nous sommes dans une situation dégénérée. Pour pallier à cela, nous considèrerons des hamiltoniens dont le support est fixé dans un fibré en boule et dont le comportement près de la frontière est prescrit.

Plus en détail, fixons $R > 0$ ainsi qu'une fonction lisse $h\colon (-\varepsilon,\infty) \to \mathbb{R}$, où $\varepsilon > 0$, tel que $h(t) = 0$ pour $t \geq 0$ et $h'(t) \geq 0$, pour $t \leq 0$. De plus, $h'(t)$ devra

être assez petit pour que le flot de $h(\|p\|-R)$ ne présente aucune orbite périodique de période inférieure à 1 pour $\|p\| \in (-\varepsilon, 0)$. Alors pour $H_t \in C_c^\infty(T^*N)$ tel que $H_t(q,p) = h(\|p\| - R)$ pour $\|p\| \geq R - \varepsilon$ le complexe de Floer $CF(H)$ est bien défini si nous prenons comme générateur les orbites 1-périodiques de H dans $T^*_{<R}N$ et toutes celles-ci non-dégénérées. L'opérateur de bord compte là aussi les cylindres de Floer joignant deux orbites critiques. Le comportement de H près de $\|p\| = R$ garantit que toutes les trajectoires de gradient restent dans $T^*_{\leq R-\varepsilon}N$. Nous noterons l'homologie de $CF_\bullet(H)$ par $HF_\bullet(H; h, R)$.

1.4 Comparaisons classiques

Le premier fait important est que même si le complexe de chaines dépend de la structure presque complexe J et du hamiltonien H. Il existe un quasi-isomorphisme de chaines pour deux complexes $CF_\bullet(H_1, J_1)$ et $CF_\bullet(H_2, J_2)$. L'application immédiate et la plus largement utilisée est que l'homologie de ces complexes ne dépend ni de J ni de H.

Proposition 1.14 (par exemple Salamon). *On a l'isomorphisme suivant pour tout Hamiltonien lisse compact et structure complexe compatible*

$$H_\bullet(H_1, J_1) = H_\bullet(H_2, J_2)$$

On obtient ainsi deux groupes d'homologie différents, l'homologie de Floer Hamiltonienne $HF_\bullet(T^*M) = HF_\bullet(T^*M, H, J)$ et l'homologie de Floer Lagrangienne $HF_\bullet(T^*M, L) = HF_\bullet(T^*M, L, H, J)$.

Dans le cas des cotangents qui nous intéressent ici, celles-ci ont été calculées :

Proposition 1.15. *L'homologie de Floer Hamiltonienne :* $HF_\bullet(T^*M) = H_\bullet^{Morse}(M)$

L'homologie de Floer Lagrangienne, pour L, section nulle : $HF_\bullet(T^*M, L) = H_\bullet^{Morse}(M)$

Le morphisme de Piunikhin-Salamon-Schwarz [**?**] donne une réalisation explicite du morphisme précédent.

1.5 Dualité de Poincaré

Dans cette sous-section, on considère un hamiltonien H régulier, c'est à dire, tel que $\phi_H(N)$ et N s'intersectent transversalement pour $N \subset T^*M$ lagrangienne exacte compacte. Il est possible de développer des arguments de dualité entre homologie et cohomologie comme dans [Sch] par exemple.

On considère l'hamiltonien $\overline{H}$ qui engendre "l'isotopie retour" de celle générée par H, c'est à dire :

$$\phi_{\overline{H}}^t = \phi_H^{1-t}\phi_H^{-1}$$

L'hamiltonien est alors donné par $\overline{H}(t,x) = -H(1-t,x)$

Employons nous à exhiber le complexe de Floer associé à $\overline{H}(t,x)$. On utilise l'involution suivante sur $\Omega(N)$:

$$i : \gamma \mapsto \overline{\gamma} = \gamma(1-\cdot)$$

Elle permet de relier les différents éléments de la théorie de Floer de $\overline{H}$ à ceux de H. Les points critiques de $\mathcal{A}_H$ et $\mathcal{A}_{\overline{H}}$ sont envoyés les uns sur les autres par i . De plus, si J est une structure presque complexe, régulière pour H, $\overline{J}(t,\cdot) = J(1-t,\cdot)$ est aussi compatible et régulière pour $\overline{H}$. On peut donc également identifier les espaces de modules $\mathcal{M}(\gamma_-,\gamma_+,H,J)$ et $\mathcal{M}(\overline{\gamma}_+,\overline{\gamma}_-,\overline{H},\overline{J})$, dont la formule explicite est $u \mapsto \overline{u}$, $\overline{u}(s,t) = u(-s,1-t)$. Enfin, Il convient également de vérifier comment les indices sont modifiés $m_H(\gamma) = n - m_{\overline{H}}(\overline{\gamma})$. Toutes ces données montrent qu'il existe un isomorphisme de chaine :

$$CF^\bullet(H) = CF_{n-\bullet}(\overline{H})$$

1.6 Une structure d'anneau

Etant donnés deux Hamiltoniens H et H' tels que $H_1(.) = H'_0(.)$, il est naturel de regarder leur concaténation

$$(H\sharp H')_t(x) = \begin{cases} H_t(x) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ H'_{t-1}(x) & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}.$$

Dans le cas où ce dernier est non dégénéré, il est possible de le perturber et ensuite de démontrer que rien ne dépend de la perturbation.

Remarque 1.16. Une procédure de lissage expliquée dans [Pol1] mais aussi [Os] nous autorise à remplacer tout hamiltonien par un autre nul sur un voisinage de 0 et 1. Cette procédure rendra intacts les invariants spectraux définis dans les sections 2. Voici un aperçu de cet algorithme :

1. Soit $H(t,x)$, un hamiltonien dépendant du temps de T^*M avec support compact. Soit f: $[0,1] \to [0,1]$ une fonction lisse avec $f' \geq 0$ partout et $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Soit $H^f(t,x) = f'(t)H(f(t),x)$. C'est également un hamiltonien lisse à support compact. Son flot est une reparamétrisation dans le temps et satisfait $\phi_{H^f}^t = \phi_H^{f(t)}$. Ainsi on détermine une bijection entre

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Crit}(H:N) & \to & \mathrm{Crit}(H^f:N) \\ \gamma & \mapsto & \gamma^f, \gamma^f(t) = \gamma(f(t)) \end{array}$$

L'action est préservée :

$$\mathcal{A}_H(\gamma) = \mathcal{A}_{H^f}(\gamma^f) \ .$$

De ce fait, si f_τ: $[0,1] \to [0,1]$, $\tau \in [0,1]$, est une isotopie lisse $f_0 = \mathrm{id}_{[0,1]}$, $f_1 = f$ et $f_\tau(0) = 0$, $f_\tau(1) = 1$, $f'_\tau \geq 0$, alors le spectre $\mathrm{Spec}(H^{f_\tau} : N)$ ne dépend pas de τ (en fait on a également que les invariants spectraux qui sont un sous-ensemble de *spec* sont conservés) .

2. Maintenant prenons f satisfaisant l'hypothèse additionnelle $f(t) = 0$ pour t près de 0 et $f(t) = 1$ pour t près de 1. Considérons un autre hamiltonien dépendant du temps K et une autre fonction g avec les même propriétés que f. La concaténation $H^f \sharp K^g$ est lisse , et ses invariants spectraux sont indépendants de f, g utilisé pour le lissage, de plus, si la concaténation $H \sharp K$ est lisse, alors $H \sharp K$ et $H^f \sharp K^g$ possèdent les même invariants également. Si H est un hamiltonien régulier, alors H^f aussi. Si le choix de la structure presque complexe est régulière pour H, alors $J^f = J(f'(\cdot), \cdot)$ l'est aussi pour H^f, avec l'identification évidente entre les différents espaces de module relatifs à (H, J) et (H^f, J^f).

On définit un morphisme de chaine :

Définition 1.17. Le produit $\cap$ est donné par :

$$\cap : CF_j(H, L) \otimes CF_k(H', L) \to CF_{i+j-n}(H \sharp H', L)$$

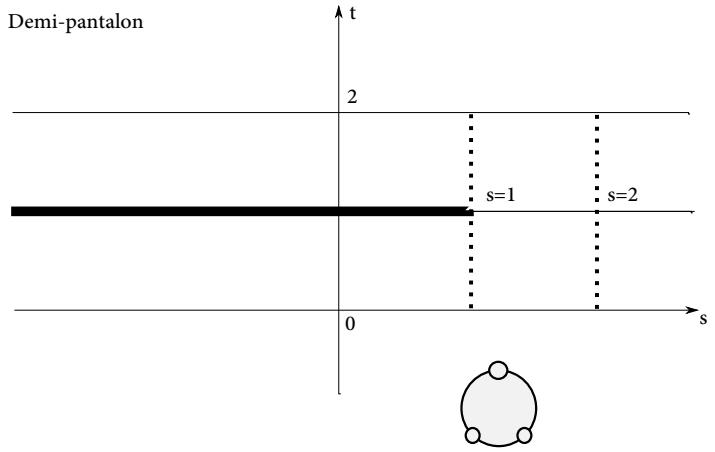
$$(\gamma, \gamma') \to \sum_{\gamma''} \sharp \mathcal{M}(\gamma, \gamma', \gamma'')\gamma''$$

Ce produit existe également en homologie de Floer hamiltonienne et il est plus classique, il s'agit du produit en pantalon. Nous donnons ici les grandes lignes dans la démonstration du fait qu'il s'agisse d'un morphisme de chaîne.

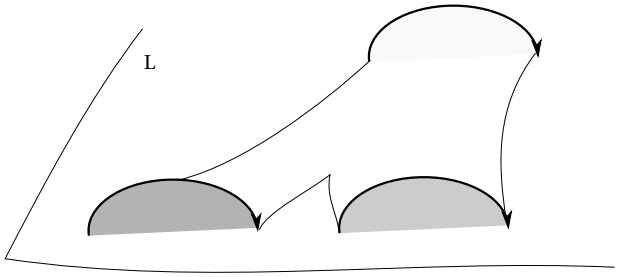
Démonstration. La remarque précédente ainsi que la propriété de continuité des invariants spectraux, montre qu'il est suffisant de prouver le résultat pour H, H' régulier et lisse, c'est à dire $H' = 0$ pour des temps t près de 0 et 1.

Soit $\varepsilon > 0$, considérons la concaténation $H''_0 = H \sharp H'$. Elle peut être rendue régulière, en la perturbant en un hamiltonien régulier H'' tel que $\|H'' - H''_0\|_{C_0} < \varepsilon$. De plus, on choisit une autre fonction K: $\mathbb{R} \times [0,2] \times T^*N \to \mathbb{R}$ telle que $K(s,t,\cdot) = H(t,\cdot)$ pour $s \leq 1$ et $t \in [0,1]$, $K(s,t,\cdot) = H'(t-1,\cdot)$ pour $s \leq 1$ et $t \in [1,2]$, $K(s,t,\cdot) = H''(t,\cdot)$ pour $s \geq 2$ et tout t et pour $s \in [1,2]$ on ait $\left|\frac{\partial K}{\partial s}\right| < \varepsilon$ pour tout t.

Fixons une structure presque complexe J_t, définie pour $t \in [0,2]$, qui coïncide avec la structure presque complexe qui provient de la métrique à l'extérieur d'un compact. Pour $\gamma, \gamma', \gamma''$ des points critiques de $\mathcal{A}_H$, $\mathcal{A}_{H'}$, $\mathcal{A}_{H''}$ respectivement, nous considérons l'espace de module $\mathcal{M}(\gamma, \gamma'; \gamma'')$ des applications u: $\Upsilon \to T^*M$, où Υ est la bande fendue [1] qui apparait dans[AS], avec pour coordonnées (s,t), où $t \in [0,2]$, et qui satisfait



$$\frac{\partial u}{\partial s}(s,t) + J_t(u)\left(\frac{\partial u}{\partial t}(s,t) - X_K(s,t)\right) = 0$$



ainsi que des conditions aux bords $u(\partial\Upsilon) \subset N$ et les conditions asymptotiques $u(-\infty, \cdot) = \gamma$, $u(-\infty, \cdot - 1) = \gamma'$, $u(\infty, \cdot) = \gamma''$. Pour un choix générique de J, $\mathcal{M}(\gamma, \gamma'; \gamma'')$ est une variété de dimension $m_{H:N}(\gamma) + m_{H':N}(\gamma') - m_{H'':N}(\gamma'') - n$, compacte en dimension 0. Cela permet de définir l'application bilinéaire

$$CF_j(H:N) \times CF_k(H':N) \to CF_{j+k-n}(H'':N)$$

1. Ce Υ est une surface de Riemann à bords, Conformément équivalente au disque fermé dont 3 point auraient été enlevés sur le bord ; Nous mettons sur celle-ci les coordonnées conformes provenant de l'identification de l'intérieur du domaine avec $\mathbb{R} \times (0,2) - (-\infty, 0] \times \{1\} \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Les coordonnées conformes près de $(0,1)$ sont données par la racine carré.

$$(\gamma, \gamma') \mapsto \sum_{\gamma''} \#\mathcal{M}(\gamma, \gamma'; \gamma'')\, \gamma''$$

en examinant le bord de la compactification de l'espace de module de dimension 1, nous voyons que cette application est en fait un morphisme de chaine, et descend ainsi en homologie,

$$\cap\colon HF_j(H : N) \times HF_k(H' : N) \to HF_{j+k-n}(H'' : N)\,.$$

□

On a vu que dans le cas des cotangents, l'homologie de Floer est isomorphe à l'homologie de la base. En fait, nous avons même mieux :

Proposition 1.18. *La structure d'anneau sur* $HF_\bullet(T^*M, L) = H_\bullet^{Morse}(M)$ *et* $HF_\bullet(T^*M, L) = H_\bullet^{Morse}(M)$ *est la même que sur* $H_\bullet^{Morse}$.

Il s'agit en fait, sous l'identification naturelle $HF_\bullet = H_\bullet(N)$, du produit d'intersection. En effet, Oh [Oh3] a prouvé qu'une version légèrement modifiée de ce Υ-produit correspond au cup produit en cohomologie singulière. De part, sa convention de signe, et la dualité de Poincaré dont nous avons déjà parlé, il est naturel de voir apparaitre le produit d'intersection ici.

Remarque 1.19. Plus généralement, dans les variétés dites monotones, on obtient comme homologie de Floer hamiltonienne un anneau isomorphe à l'homologie quantique dont le produit s'interprète comme un produit d'intersection déformé de classe d'homologie. Le facteur de déformation dépendant de l'espace de module des sphères pseudo-holomorphes dont la classe d'homologie est fixée. En ce qui concerne, les variétés lagrangiennes monotones la structure de produit n'a pas été décrite dans ce contexte. Cependant, les complexes de perles de Biran-Cornea possède une structure produit. Il serait intéressant de comprendre le rapport avec l'homologie de Floer lagrangienne.

1.7 Catégorie de Fukaya

Ici, nous avons présenté une version dynamique de l'homologie de Floer Lagrangienne. Une version équivalente et plus géométrique peut être construite à partir de la donnée de deux lagrangiennes monotones [Lec].

Définition 1.20. Une lagrangienne est dite monotone si il existe $r \geq 0$ tel que pour tout $D \in \pi_2(M, L), \omega(D) = r.\mu(D)$ et avec μ indice de Maslov du disque D. Une intersection lagrangienne (L_1, L_2) sera dite monotone si il existe $r \geq 0$ tel que pour tout $D \in \pi_2(M, L_1 \cup L_2)$, $\omega(D) = r.\mu(D)$.

Dans ce cas, il est également possible de définir un complexe de chaine engendré par les orbites du flot Hamiltonien allant de L_1 à L_2 et dont les lignes de flot sont données par les solutions de l'équation de Floer. Ce cadre plus général, inclus l'homologie de Floer Lagrangienne telle que définit préalablement, en effet il suffit de considérer $H = 0$ et prendre $L_1 = L$ et $L_2 = \phi(L)$ qui est équivalent à prendre $L_1 = L_2 = L$ et H engendrant ϕ.

Le cadre plus général est alors celui des catégories A^∞ de Fukaya.

Définition 1.21. Une catégorie $\mathcal{C}$ est A^∞ si :

- d'objets $Ob(\mathcal{C})$
- pour chaque paire d'objet C_1, C_2 d'un ensemble gradué de morphisme $Hom(C_1, C_2)$.
- pour tout $d > 0$ et tout ensemble $C_1, .., C_d$ d'objet, d'une application multilinéaire :

$$\mu^d \colon Hom(C_{d-1}, C_d) \otimes .. \otimes Hom(C_0, C_1) \to Hom(C_0, C_d)[2-d]$$

et vérifie :

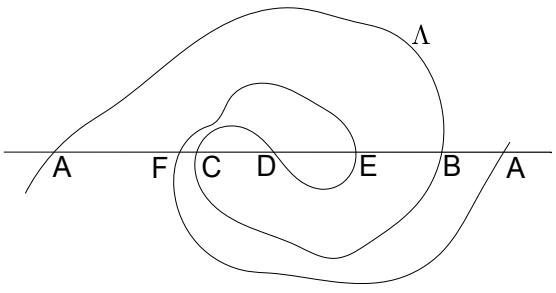
$$\sum_{m,n} (-1)^{\aleph} \mu^{d-m+1}(a_d, .., a_{n+m+1}, \mu^m(a_{n+m}, .., a_{n+1}), a_n, .., a_1) = 0$$

avec $\aleph = \sum_{i=n} |a_i| - n$.

Pour la catégorie de Fukaya, les objets sont les lagrangiennes (plus une structure spin en réalité) et les opérations supérieures sont données par le décompte de polygones pseudoholomorphes. Le cap produit s'intégre à l'ensemble des opérations supérieure comme étant le μ^2.

1.8 Exemple

Le cas de $T^*\mathbb{S}^1$ possède l'avantage que les courbes holomorphes entre lagrangiennes sont reconnaissables à vue. Ainsi, si on prend Λ ainsi :



On calcule le complexe de chaîne $CF_\bullet(T^*_{\mathbb{S}^1}\mathbb{S}^1, \Lambda)$ comme suit.

Points	A	B	C	D	E	F
Indices	0	1	2	3	2	1

$$\begin{aligned}\partial D &= E + C\\ \partial C &= B + F\\ \partial E &= F + G\\ \partial B &= 0\\ \partial F &= 0\\ \partial A &= 0\end{aligned}$$

On retrouve bien l'homologie du cercle comme homologie du complexe :

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \overset{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}{\to} \mathbb{Z}_2^2 \overset{\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}}{\to} \mathbb{Z}_2^2 \overset{0}{\to} \mathbb{Z}_2 \to 0\ .$$

2 Invariants spectraux

Nous décrivons dans ce chapitre les invariants spectraux lagrangiens et hamiltoniens. Ils sont apparus dans la littérature pour la première fois dans le travail de Viterbo sur les fonctions génératrices puis systématisées par Schwarz et Oh, dans le cadre de l'homologie de Floer hamiltonienne et lagrangienne. Bien qu' assez classiques, nous rappelons leurs propriétés. La principale étant l'inégalité triangulaire dont nous démontrons une version un peu différente de la définition ordinaire. Cette dernière propriété est à la base de la construction de l'homogénéisation.

Nous concluons enfin avec une discussion concernant une généralisation de l'inégalité triangulaire dans le cadre de la catégorie de Fukaya.

2.1 Filtration et définition

Définition 2.1. On définit le spectre d'action de H dans le cas hamiltonien puis lagrangien par :

$$spec(H) = \{\mathcal{A}(\gamma)\ s.t.\ \gamma \in \Omega(T^*M), d\mathcal{A}(\gamma) = 0\}$$

$$spec(H : L) = \{\mathcal{A}(\gamma)\ s.t.\ \gamma \in \Omega(T^*M, L), d\mathcal{A}(\gamma) = 0\}$$

Le spectre est un ensemble compact et nulle part dense qui ne dépend que du temps 1 du flot engendré par H. Considérons les $\mathbb{Z}_2$ espaces vectoriels $CF(H)$ et $CF(H : L)$ engendrés par les points critiques. Ils sont filtrés par l'action, c'est à dire que pour tout $a \notin spec(H)$ ou $b \notin spec(H : L)$, $CF^{<a}(H)$ et $CF^{<b}(H : L)$ sont aussi les éléments de complexes de chaine donnés par les restrictions des différentielles. Le flot de gradient faisant décroitre les valeurs de l'action, la différentielle fait de même, $CF^{<a}(H)$ et $CF^{<b}(H : L)$ sont stables par la différentielle. Il existe de plus une application canonique $i_*^a : HF_*^{<a} \to HF_*$.

Remarque 2.2. De même, on peut considérer $CF_*^{>a} := CF_*/CF_*^{<a}$. La différentielle passe aussi au quotient, et on obtient le morphisme : $j_*^a : HF_* \to HF_*^{<a}$.

Les différents groupes d'homologies ne dépendent pas de J comme nous l'avons vu précédemment. Nous avons donc fait disparaitre J de la notation. Nous sommes alors en mesure de définir, pour un H générique, les invariants spectraux lagrangiens et hamiltoniens pour $\alpha \in HF_*(H) = H_*(M)$ et $\beta \in HF_*(H : L) = H_*(M)$:

Définition 2.3. L'invariant hamiltonien associé à α est :

$$c(\alpha, H) := inf\{a|\ \alpha \in im(i_*^a)\}$$

L'invariant lagrangien associé à β est :

$$l(\alpha, H : L) := inf\{a|\ \beta \in im(i_*^a)\}$$

Oh a prouvé les propriétés suivantes :

Proposition 2.4. *1. $l(\alpha, H : M) \in spec(H : M)$, en particulier c'est un nombre fini ;*

2. si H_k est une suite d'hamiltonien régulier qui tend vers 0 de manière C^1, alors $l(\alpha, H_k : M) \to 0$;

3. $\int_0^1 \min(H_t - K_t)\, dt \leq l(\alpha, H : M) - l(\alpha, K : M) \leq \int_0^1 \max(H_t - K_t)\, dt$; en particulier, les invariants spectraux sont lipschitziens pour la norme C^0.

La propriété (3.) sera nommé continuité *des invariants.*

Si H est un hamiltonien arbitraire à support compact, il est possible de trouver H_k, une suite d'hamiltoniens génériques qui approximent H de manière C^∞. La propriété de continuité des invariants spectraux implique que $l(\alpha, H_k)$ est une suite convergente dont la limite ne dépend que de H. On peut étendre les invariants spectraux à tous les Hamiltoniens même continus. Bien sûr, la propriété (iii) reste vrai par extension d'une fonction lipshitzienne. Bien qu'une définition stable du point de vue dynamique d'un flot continue (regarder cependant [Hum]) n'existe pas vraiment, il est possible par cette propriété de continuité (en fait 1-lipshitz) de définir des valeurs spectrales pour ce genre de flot.

Le fait de pouvoir considérer des hamiltoniens non génériques donnent déjà des résultats assez surprenants sur certains sous-groupes du groupe hamiltonien. On note $\mathcal{G}$, l'ensemble des temps 1 des difféomorphismes hamiltoniens à support compact qui constitue ainsi le groupe hamiltonien de T^*M.

Etant donné un ouvert $U \subset T^*M$, on note $\mathcal{G}_U \subset \mathcal{G}$ le sous groupe généré par les hamiltoniens à support compact dans U. De plus, on prend $T^*_{<r}M = \{(q,p) \,|\, \|p\| < r\}$, pour $r > 0$.

Un autre sous groupe intéressant de $\mathcal{G}$ consiste en ceux qui qui conserve la section nulle M globalement. On le notera $\mathcal{G}^0$.

Proposition 2.5. *Il existe un homomorphisme d'action* $\mathcal{R}$: $\mathcal{G}^0 \to \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit H_t un hamiltonien générant $\phi \in \mathcal{G}^0$. Pour tout $q \in M$, prenons $\gamma_q(t) = \phi_H^t(q)$. C'est une orbite critique et l'on définit

$$\mathcal{R}(\phi) = \mathcal{A}_H(\gamma_q) \in spec(H : M)$$

Cette définition ne dépend pas du point q choisi, en effet, dans notre situation, l'ensemble des points critiques est une sous-variété difféomorphe à M (difféomorphisme donné par le temps 0 de l'isotopie hamiltonienne). Toutes les orbites ont donc la même action par connexité de M.

Il faut ensuite vérifier que l'homomorphisme $\mathcal{R}$ ne dépend pas du H_t choisi.

□

Lemme 2.6. *Soient* $H, H' \in C_c^\infty([0,1] \times T^*M)$ *deux hamiltoniens possèdant le même temps* 1, $\phi_H = \phi_{H'}$ *alors les invariants spectraux lagrangiens de* H *et* H' *coïncident.*

Démonstration. Soit $G \in C_c^\infty([0,1] \times T^*M)$ un hamiltonien engendrant une boucle $\phi_G = \mathrm{id}$. Nous montrons que les invariants sont tous nuls. Il est possible de lisser G près de 0 et 1 ce qui n'altère ni les invariants spectraux ni le fait que ϕ_G soit toujours l'application identité. Comme $l(\alpha, G)$ est une valeur spectrale, elle correspond à l'action d'une orbite. Or celles-ci sont toutes périodiques. L'ensemble des points critiques est donc connexe pour le problème lagrangien et hamiltonien. Un calcul standard effectué par [Sch] montre que les actions $\mathcal{A}_G(\gamma_x)$ sont toutes identiques $\gamma_x(t) = \phi_G^t x$. Il s'en suit qu'elles valent toutes 0 si l'on prend par exemple x à l'extérieur du support de G. D'où $\mathcal{A}_G(\gamma) = 0$. □

Comme conséquence directe de la spectralité nous obtenons ce lemme qui est important pour les applications ultérieures :

Lemme 2.7. *La restriction des invariants spectraux* $l(\alpha, \cdot : M)$ *au groupe* $\mathcal{G}^0$ *coincide avec le morphisme d'action. Alors pour tout* $H \in C_c^\infty([0,1] \times T^*M)$ *tel que* $H|_N \geq c$ *(respectivement* $H|_M \leq c$*) pour un* $c \in \mathbb{R}$*, alors* $l(\alpha, H : M) \geq c$

(respectivement $l(\alpha, H : M) \leq c$), pour tout $\alpha \neq 0$. Un cas particulier que l'on obtient est que si $H|_M = c$, alors $l(\alpha, H : M) = c$.

Démonstration. Soit H un élément engendrant $\phi \in \mathcal{G}^0$ alors $l(\alpha, H : M)$ correspond à l'action d'une orbite de H par spectralité. La proposition 2.5 montre que l'action vaut $\mathcal{R}(\phi)$. Cela prouve également que $l(\alpha, H : M)$ ne dépend que de ϕ. Le cas $H|_M = c$ est hautement dégénéré, cependant, toutes les orbites restent dans M qui est lagrangienne. □

2.2 Hamiltoniens à flot complet

Nous décrivons dans ce chapitre comment définir les invariants spectraux $l(\alpha, \cdot : M)$ associés à un flot complet. Cela repose sur le lemme suivant qui localise le complexe de Floer.

Lemme 2.8. *Soit H, H' deux hamiltoniens à support compact tel qu'il existe 2 ouverts*

$$U \subset V \subset T^*M$$

tels que $M \subset U$, $\phi_H^t(U), \phi_{H'}^t(U) \subset V$, $\forall t \in [0,1]$ et $H|_{[0,1]\times V} = H'|_{[0,1]\times V}$. Alors les invariants spectraux de ϕ_H et $\phi_{H'}$ coïncident.

Démonstration. On utilise une isotopie sur les hamiltoniens $H^\tau = \tau H' + (1-\tau)H$. Alors H^τ est un hamiltonien lisse dont le flot envoie U sur V pour tout temps t et qui coïncide avec H et H' sur V. Quelque soit τ, H^τ possède les mêmes orbites $\Omega(M)$. Si l'on compare également l'action celle-ci est aussi indépendante de τ □

Si H possède un flot complet, il y existe $R > 0$ tel que $\phi_H^t(M) \subset T^*_{<R}M$ pour tout $t \in [0,1]$. N'importe quelle troncature à support compacte de H, H', H'' vérifie à l'extérieur de $T^*_{<R}M$ les hypothèses du lemme et possède alors des invariants spectraux identiques $l(\alpha, H') = l(\alpha, H'')$ que l'on nomme $l(\alpha, H'')$. Ces invariants spectraux possèdent les mêmes propriétés que ceux définies pour les flots.

Lemme 2.9. *Soit H un hamiltonien dépendant du temps possédant un flot complet qui laisse la section nulle dans un ouvert U pour tout temps. Alors si G est une troncature de H à l'extérieur de U, nous avons pour tout t, $l(\alpha, \phi_G^t : M) = l(\alpha, \phi_H^t : M)$.*

Remarque 2.10. Il serait tentant de dire que les complexes de Floer sont isomorphes mais ce n'est malheureusement pas vrai. Il n'est pas toujours possible de définir un tel complexe dans un cadre aussi général, puisque les espaces de module des trajectoires de Floer peuvent ne pas être compacts du au comportement de l'hamiltoien à l'infinie. Même si dans certains cas (support compact ou hamiltonien quadratique à l'infinie) ceux ci puissent être compact, il est bien

connu que cela ne donne pas la même homologie.
Il est également faux de dire que les complexes de Floer de deux troncatures sont isomorphes. Par contre, la donnée de deux troncatures induit un morphisme de chaine canonique, qui descend en un isomorphisme d'homologie à niveau fixé.

2.3 Propriétés

Les invariants spectraux possèdent une série de propriétés qui découlent pour la plupart de l'étude des morphismes classiques définis en chapitre 1 vis à vis de la filtration. Ils peuvent être vus en ce sens comme une suspension de la théorie de Floer originale.

2.3.1 Dualité

La première propriété des invariants est celle relative à l'existence du morphisme de dualité 1.5.

Propriété 2.11. Ce morphisme agit sur les filtrations en les renversants :

$$CF^*_{\mathcal{A}_H>a}(H:M) = CF_{n-*}^{\mathcal{A}_{\overline{H}}<-a}(\overline{H}:M)$$

pour tout $a \notin \mathrm{Spec}(H:M)$, puisque $\mathcal{A}_H(\gamma) = -\mathcal{A}_{\overline{H}}(\overline{\gamma})$. On conclue que

$$l(\mathrm{pt}, H) = l(1, H) = -l([M], \overline{H})$$

où $\mathrm{pt} \in H_0(M)$, $[N] \in H_n(M)$, $1 \in H^0(M)$, $\mu_M \in H^n(M)$ sont les générateurs.

La propriété de continuité des invariants spectraux permet de déduire le même résultat pour tout hamiltonien lisse. Il est même possible de l'étendre aux invariants spectraux des fonctions continues.

Remarque 2.12. En fait, nous pouvons déduire un résultat plus général comme dans [EP1] :

$$l(\alpha, H) = -\inf\{l(u, \overline{H}) \,|\, u \in H^*(M) \text{ et } u(\alpha) \neq 0\}$$

ou en homologie,

$$l(\alpha, H) = -\inf\{l(\beta, \overline{H}) \,|\, \beta \in H_*(M) \text{ et } \alpha \cap \beta \neq 0\}$$

Notation 2.13. On note $l_-(\phi_H) = l(\mathrm{pt}, \phi_H)$ et $l_+(\phi_H) = l([M], \phi_H)$.

2.3.2 Relations de Künneth

Dans cette sous-section on prouve une formule découlant du morphisme de Künneth qui se révèle être un élément essentiel pour prouver la non déplaçabilité de certains ensembles.

Theorème 2.14. *Soit H, H' deux hamiltoniens à flot complet et dépendants du temps sur T^*M, T^*M'. Alors, $\forall \alpha \in H_*(M) - \{0\}$ et $\forall \alpha' \in H_*(M') - \{0\}$, on a :*

$$l(\alpha \otimes \alpha', H \oplus H') = l(\alpha, H) + l(\alpha', H')$$

avec $\alpha \otimes \alpha' \in H_*(M) \otimes H_*(M') = H_*(M \times M')$.

Démonstration. Etant donnés deux complexes de chaine $\mathcal{V} = (V, \vec{v}, \mathcal{A}, \partial)$ et $\mathcal{V}' = (V', \vec{v}', \mathcal{A}', \partial')$, Il est possible de définir un produit de complexes de chaine filtré $\mathcal{V}'' := \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}' = (V'' := V \otimes V', \vec{v}'' := \vec{v} \times \vec{v}', \mathcal{A}'' := \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}', \partial'' := \partial \otimes \mathrm{id}_{V'} + \mathrm{id}_V \otimes \partial')$, où $(\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}')(v_i, v'_j) = \mathcal{A}(v_i) + \mathcal{A}(v'_j)$, alors $H(V'', \partial'') = H(V, \partial) \otimes H(V', \partial')$. □

Nous avons besoin du lemme suivant pour terminer la preuve :

Lemme 2.15. *Soit $\mathcal{V}, \mathcal{V}', \mathcal{V}''$ tel que précédemment. Alors pour $\alpha \in H(V, \partial) - \{0\}$, $\alpha' \in H(V', \partial') - \{0\}$,*

$$l(\alpha'', \mathcal{V}'') = l(\alpha, \mathcal{V}) + l(\alpha, \mathcal{V}')$$

où $\alpha'' = \alpha \otimes \alpha' \in H(V'', \partial'')$.

La preuve est présente dans [EP3].

suite de la preuve de 2.14. il est toujours possible de perturber (génériquement en topologie $\mathcal{C}^\infty$) un hamiltonien à flot complet en un autre générique, tel que les complexes de Floer de n'importe quel troncature forment un complexe de chaine filtré. De plus, une fois deux troncatures données, il est possible de perturber les hamiltoniens tels que les perturbations de leur somme directe soit générique. Grâce à la propriété de continuité des invariants spectraux pour la norme $\mathcal{C}^0$ il suffit de se restreindre à H, H' générique dans ce sens, et tel que la somme $H \oplus H'$ soit aussi générique, ce que nous choisissons.

Soit G, G' des troncatures de H, H'. La somme $G \oplus G'$ possède un flot complet. Nous choisissons alors $R > 0$ suffisamment large de sorte que $T^*_{<r}M \times T^*_{<r'}M' \subset T^*_{<R}(M \times M')$, où r est assez large pour que $T^*_{<r}M$ puisse contenir les points critiques de $\mathcal{A}_G$, aussi bien que les trajectoires de Floer de $\mathcal{A}_G$, et respectivement pour r', T^*M' et G'. Soit G'' la troncature de $G \oplus G'$ à l'extérieur de $T^*_{<R}(M \times M')$. Alors c'est aussi une troncature de $H \oplus H'$, en particulier

$$l(\alpha'', G'') = l(\alpha'', H \oplus H')$$

De plus, G'' est générique par construction et $J'' := J \oplus J'$ est une structure presque complexe régulière. Il s'en suit que le complexe de Floer de $CF_\bullet(M, G'', J'')$ est filtré, il s'agit d'ailleurs du complexe de Floer de G, G'. Il convient alors d'appliquer le lemme 2.15,

$$l(\alpha \otimes \alpha', H \oplus H') = l(\alpha \otimes \alpha', G'') = l(\alpha, G) + l(\alpha', G') = l(\alpha, H) + l(\alpha, H')\,.$$

□

2.3.3 Inégalités triangulaires

Theorème 2.16. *Soit H et H' deux hamiltoniens lisses dépendants du temps, alors :*

$$l(\alpha \cap \beta, H \sharp H') \leq l(\alpha, H) + l(\beta, H')$$

Démonstration. On utilise la définition du produit d'intersection donné en 1.6. Un simple calcul montre ([AS]) que si $u \in \mathcal{M}(\gamma, \gamma'; \gamma'')$, alors

$$\mathcal{A}_H(\gamma) + \mathcal{A}_{H'}(\gamma') - \mathcal{A}_{H''}(\gamma'') \geq E(u) - \varepsilon$$

où $E(u) \geq 0$ est l'énergie de u. On peut donc restreindre le morphisme $\cap$ au sous complexe filtré :

$$CF_j^{<a}(H : M) \times CF_k^{<b}(H' : M) \to CF_{j+k-n}^{a+b+\varepsilon'}(H'' : M)$$

pour tout a, b, ε' tel que $a \notin \mathrm{Spec}(H : M)$, $b \notin \mathrm{Spec}(H' : M)$, $\varepsilon' > \varepsilon$, et $a+b+\varepsilon' \notin \mathrm{Spec}(H'' : M)$. Cela implique que

$$l(\alpha \cap \beta, H'') \leq l(\alpha, H) + l(\beta, H') + \varepsilon$$

Comme H'' a été pris ε-proche de $H \sharp H'$, la passage à la limite $\varepsilon \to 0$, implique l'inégalité triangulaire.

$$l(\alpha \cap \beta, H \sharp H') \leq l(\alpha, H) + l(\beta, H')$$

□

Remarque 2.17.

1. On remarque que l'inégalité triangulaire repose uniquement sur deux faits, la relation entre aire des demi-pantalons et action ainsi que sur la restriction au complexe filtré que cela implique.
2. Le théorème est valable pour des hamiltoniens qui ne vérifient pas forcément les conditions de concaténation, et grâce à un lissage, il est possible de remplacer la notation des invariants spectraux par celle dépendant du symplectomorphisme au temps 1 et non de l'hamiltonien.

2.3.4 Les invariants spectraux hamiltoniens

Ceux ci apparaissent déjà dans le cadre des variétés symplectiques convexes à l'infini dans le travail de [FS], et dans le cadre plus général des variétés symplectiques positives et convexes à l'infinie dans [La1].

Les invariants associés à cette théorie possèdent aussi les propriétés de continuité, l'inégalité triangulaire et la spectralité. De plus, il ne dépendent pas des choix de h et R nécessaires à la définition de l'homologie de Floer. Enfin, ils ne dépendent que de ϕ_H, et nous utiliserons donc la notation $c(\alpha, \phi_H)$.

Notation 2.18. On note $c_-(\phi_H) := c(\mathrm{pt}, \phi_H)$ et $c_+(\phi_H) := -c(\mathrm{pt}, \phi_{\overline{H}})$.

Remarque 2.19. Nous n'avons pas une dualité de Poincaré parfaite comme dans le cas de l'homologie de Floer lagrangienne. En particulier, $c([M], \phi_H) \neq c_+(\phi_H)$.

Proposition 2.20 (borne convexe). *[FS] Si $U \subset T^*N$ est déplaçable par $\psi \in \mathcal{G}$ alors pour tout $\phi \in \mathcal{G}_U$:*

$$-\Gamma(\psi) \leq c_-(\phi) \leq c_+(\phi) \leq \Gamma(\psi)$$

où $\Gamma(\psi) = c_+(\psi) - c_-(\psi)$ est la norme spectrale de ψ.

Remarque 2.21. Il faut noter que les invariants hamiltoniens contrairement aux lagrangiens, ne peuvent être définis pour des hamiltoniens possédants un flot complet. Il n'est pas possible de procéder à des troncatures comme dans le cas lagrangien sans que cela n'affecte les complexes de Floer de manière imprévisible. Pour les même raisons liés à la construction de l'homologie de Floer sur une variété non bornée, il n'existe pas de relation de dualité aussi agréable que dans le cas lagrangien. Entre autre $c_+(\phi) \neq c([M], \phi)$.

2.3.5 Comparaison des invariants spectraux hamiltoniens et lagrangiens

Il est maintenant temps de voir comment se relie les différents invariants que nous avons rappelés.

Proposition 2.22. *Soit $\phi \in \mathcal{G}$. Alors*

$$l_-(\phi) \geq c_-(\phi)$$

Ce qui induit par dualité les inégalités :

$$c_-(\phi) \leq l_-(\phi) \leq l_+(\phi) \leq c_+(\phi)$$

Démonstration. La preuve est essentiellement celle de [Alb], sauf qu'ici elle n'est pas restreinte au cas des variétés fermées. Il s'agit encore une fois de suivre l'action d'un morphisme de chaine ι: $CF_*(H:M) \to CF_*(H)$ vis à vis de la filtration et utiliser la positivité de l'aire d'une courbe pseudo-holomorphe.

Sans perdre de généralité, on prend H_t autonome au voisinage de $t = 0, 1$. Etant donné un arc hamiltonien γ ainsi qu'une orbite x de H périodique, on considère l'espace de module $\mathcal{M}(\gamma, x)$ qui consiste en les solutions de l'équation de Floer définie sur la surface de Riemann Υ', qui est conforme à un disque épointé sur le bord et sur l'intérieur. Celle ci est obtenue à partir de la surface avec fente Υ (dont nous nous sommes servis pour le morphisme d'intersection) en identifiant la frontière du haut et celle du bas. On obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J_t(u)\left(\frac{\partial u}{\partial t} - X_H\right) = 0$$

Avec comme condition asymptotique que $\lim_{s\to-\infty} u(s,t) = \gamma$, que l'intérieur du disque soit asymptotique à x et enfin que que la frontière soit envoyée sur la lagrangienne (ici la section nulle). Albers a démontré que l'espace de module des solutions était une variété lisse de dimension $m_{H:N}(\gamma) - m_H(x)$. Elle est de surcroit compacte en dimension 0 par des arguments classiques. Soit ι l'application linéaire définie par :

$$\iota(\gamma) = \sum_{m_H(x)=m_{H:N}(\gamma)} \#\mathcal{M}(\gamma, x)\, x$$

Albers ensuite démontre que c'est un morphisme de chaine, et l'identification canonique $HF_*(H:M) = H_*(M)$ et $HF_*(H) = H_*(T^*M)$ ainsi que la donnée de l'isomorphisme $H_*(M) \to H_*(T^*M)$ induit part l'inclusion de la section nulle dans T^*M sont compatibles avec ι. Nous utilisons encore une fois la comparaison des valeurs de l'action aux bords des solutions de l'équation de Floer $u \in \mathcal{M}(\gamma, x)$ donne :

$$\mathcal{A}_H(\gamma) - \mathcal{A}_H(x) = E(u) \geq 0$$

Ainsi ι se restreint bien conformément à la filtration, $CF_*^{<a}(H:M) \to CF_*^{<a}(H)$ pour $a \notin \mathrm{Spec}(H) \cup \mathrm{Spec}(H:M)$. Il s'en suit que $c_-(H) \leq l_-(H)$. □

On en déduit que si U est un ouvert déplacé par ψ, alors pour tout $\phi \in \mathcal{G}_U$ on a :

$$-\Gamma(\psi) \leq l_-(\phi) \leq l_+(\phi) \leq \Gamma(\psi)$$

2.4 Estimation des perturbations

Dans ce chapitre, nous décrivons une nouvelle estimation des invariants spectraux lorsque on perturbe l'hamiltonien. Les invariants spectraux étant des valeurs critiques, étudions l'évolution des valeurs critiques sous l'hypothèse que l'on perturbe une fonction de Morse dont les valeurs critiques associées à chaque points critiques sont différentes, cette condition est générique. Nous nous plaçons volontairement dans un cadre général de variété hilbertienne Ω et on considère F une fonction de Morse $C^2(\Omega)$. On a alors le théorème suivant :

Theorème 2.23. *Soit x_0 un point critique de F tel que $F(x_0) = f_0$, et soit G un hamiltonien générique $C^2(\Omega)$ alors :*

$$\exists \delta, \forall 0 < \epsilon < \delta, \exists! x\colon\ [0,\delta) \to \Omega \text{ vérifiant } \begin{cases} x(\epsilon) \text{ est un point critique de } F + \epsilon G \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

De plus,

$$x(\epsilon) = x_0 + \epsilon dG(x_0) \circ d^2F(x_0)^{-1} + o(\epsilon)$$

Démonstration. Il suffit d'applique le théorème des fonctions implicites à

$$(x, \epsilon) \to d(F + \epsilon G)|_x$$

au voisinage de $(x_0, 0)$. En effet, la fonction F étant de Morse sa dérivée seconde en x_0 est non-dégénérée et inversible. Il vient sur un petit voisinage en ϵ :

$$x(\epsilon) = x_0 + \epsilon dG(x_0) \circ d^2F(x_0)^{-1} + o(\epsilon)$$

□

Il est alors possible de suivre la variation des valeurs critiques :

Corollaire 2.24. *Les valeurs critiques se déforment ainsi :*

$$F(x(\epsilon)) = F(x_0) + \epsilon G(x_0) + o(\epsilon).$$

Démonstration. Une simple application de F à la formule précédente ainsi que le fait que x_0 soit un point critique de F. □

Si la fonction de départ est dégénérée, il se produit une bifurcation au niveau de l'ensemble des points critiques. Suivant la perturbation, celle-ci choisira une direction différente.

Appliquons cela à notre théorie homologique graduée, et plus particulièrement à l'invariant $l_+(\phi_H)$. On suppose que la valeur critique $l_+(\phi_H)$ est atteinte en un seul point(nous étudierons plus tard, ce qu'il se passe sinon), alors le théorème précédent s'applique et on a :

Proposition 2.25. *Pour tout H et K lisses à support compact, tel qu'il existe un unique lacet γ_0 tel que $l_+(\phi_H) = \mathcal{A}_H(\gamma_0)$ alors,*

$$l_+(\phi_{H+\epsilon K}) = l_+(\phi_H) + \epsilon \int_{\gamma_0} K + o(\epsilon) \ .$$

Démonstration. C'est une application directe du théorème précédent à $F = \mathcal{A}$, la graduation du complexe ne changeant pas et par séparation de la liste des valeurs critiques, on obtient que la déformation des valeurs spectrales correspond à celle des valeurs critiques. □

Lorsque la valeur critique, est atteinte pour plusieurs points critiques il y a également une bifurcation qui se produit, l'exemple standard en dimension finie étant $f(x) = -x^4 + 2x^2$.

Remarque 2.26. Il convient ici de mettre le lecteur en garde face à risque important, celui d'appliquer directement ces estimations à la perturbation des valeurs de l'homogénéisé que nous définissons plus loin. En effet, lors de l'homogénéisation on s'intéresse au flot en temps long, or nous ne connaissons pas à priori l'estimation de $o(\epsilon)$ en fonction du temps (par exemple si il est bornée en temps).

2.5 Un cadre général

Dans le cadre des catégories de Fukaya, on suppose connu les relations algébriques comme développées dans [S]. Elles sont la généralisation des produits de Massey pour l'homologie de Floer. Comme les opérations supérieures sont données par des polygones pseudo-holomorphes, il n'est pas invraisemblable de poser la question suivante :

Question 2.27. Existe-il des relations entre les valeurs spectrales qui se déduisent de la positivité de l'aire des polygones ? En d'autres termes peut on définir des inégalités "triangulaires" pour les invariants spectraux issus des produits de Massey ?

2.6 Résumé des propriétés

Pour la facilité de lecture nous faisons ici le sommaire des propriétés de ces invariants tels que nous les avons démontrés précédemment :

Theorème 2.28. *Soit M une variété connexe compact. A chaque $\alpha \in H_*(M) - \{0\}$ on associe la fonction $l(\alpha, \cdot)\colon \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ telle que :*

1. *$l(\alpha, \phi) \in \mathrm{Spec}(\phi : M)$;*
2. *si H, K engendre ϕ, ψ, alors $\int_0^1 \min(H_t - K_t)\, dt \leq l(\alpha, \phi) - l(\alpha, \psi) \leq \int_0^1 \max(H_t - K_t)\, dt$;*

3. $l(\alpha \cap \beta, \phi\psi) \leq l(\alpha, \phi) + l(\beta, \psi)$ *; en particulier,* $l_+(\phi\psi) \leq l_+(\phi) + l_+(\psi)$ *;*
4. $l_-(\phi) \leq l(\alpha, \phi) \leq l_+(\phi)$ *;*
5. $l_\pm(\phi) = -l_\mp(\phi^{-1})$*, et donc* $l_-(\phi\psi) \geq l_-(\phi) + l_-(\psi)$ *;*
6. *la restriction de* $l(\alpha, \cdot)$ *à* $\mathcal{G}^0$ *coïncide avec le morphisme d'action* $\mathcal{A}$*; en particulier si* H *engendre* ϕ *et* $H|_M = c$ *(respectivement* $H|_M \geq c$*,* $H|_M \leq c$*) pour* $c \in \mathbb{R}$*, alors* $l(\alpha, \phi) = c$ *(respectivement* $l(\alpha, \phi) \geq c$*,* $l(\alpha, \phi) \leq c$*) ;*
7. *if* $U \subset T^*M$ *est un ouvert* $\psi \in \mathcal{G}$ *est telle que* $\psi(U) \cap U = \varnothing$*, alors*

$$-\Gamma(\psi) \leq l_-(\phi) \leq l_+(\phi) \leq \Gamma(\psi)$$

   pour $\phi \in \mathcal{G}_U$ *;*
8. $|l(\alpha, \phi) - l(\alpha, \psi\phi\psi^{-1})| \leq l_+(\psi) - l_-(\psi)$.

Démonstration. Seul reste à prouver les points (iv) et (viii). Le point (iv) relève de l'inégalité triangulaire :

$$l(\alpha, \phi) = l(\alpha \cap [M], \mathrm{id} \circ \phi) \leq l(\alpha, \mathrm{id}) + l([M], \phi) = l_+(\phi)$$

car $l(\alpha, \mathrm{id}) = 0$, l'identité étant engendré par l'hamiltonien nul.

Le point (xi) est la conséquence de l'inégalité triangulaire aussi.

$$l(\alpha, \psi\phi\psi^{-1}) \leq l(\alpha, \phi) + l_+(\psi) + l_+(\psi^{-1}) = l(\alpha, \phi) + l_+(\psi) - l_-(\psi)$$

□

3 Homogénéisation symplectique

3.1 Le cas de $T^*\mathbb{T}^n$

L'homogénéisation symplectique est un terme inventé par Viterbo dans [Vi2] où il définit l'homogénéisé sur le cotangent du tore. Il obtient ce dernier comme limite pour la norme spectrale hamiltonienne d'une suite d'hamiltoniens à support compact $H_k(q, p) = H(kx, p)$. La preuve utilise de nombreux faits qui ne sont pas transportables du cotangent de $\mathbb{T}^n$ à d'autres variétés. Les pas importants dans la généralisation sont les suivants :

- On doit relaxer les hypothèses de convergence en norme spectrale hamiltonienne et plutôt regarder l'action des difféomorphismes hamiltoniens sur les lagrangiennes du cotangent. De ce fait, on s'intéresse aux invariants spectraux lagrangiens.
- Le deuxième point important réside, une fois les invariants spectraux lagrangiens introduits, de voir comment ils apparaissent de manière implicite dans le travail de Viterbo. Ainsi on a trouvé une définition cohérente de l'homogénéisé en terme de valeurs spectrales.

– Les mécanismes qui entrent en jeux sont ceux d'une moyennisation de l'invariant spectral l_+ possible de par l'inégalité triangulaire (méthode semblable à la définition de l'entropie en dynamique). A ce stade, il est intéressant de remarquer que la construction classique des quasi-morphismes d'Entov et Polterovich repose également sur une homogénéisation d'invariants spectraux, mais ceux-ci hamiltoniens ; remarque qui inscrit parfaitement notre construction dans le paysage des techniques de la "théorie symplectique des fonctions".

3.1.1 Rappels rapides de la théorie des fonctions génératrices

Nous rappelons ici la théorie des fonctions génératrices. Elle peut être vue comme une réduction de la théorie de Floer à la dimension finie. En fait, historiquement, elle fût précurseur en matière d'invariants spectraux [Vi1]. Ce n'est qu'avec [MO2] que le lien avec la théorie de Floer fût établi dans le cas des cotangents. Cette théorie s'étend aujourd'hui avec la théorie des faisceaux générateurs dans le cas des cotangents (voir partie II). Les principaux avantages comparés à la théorie de Floer est tout d'abord que la théorie de Morse se réalise en dimension finie, ensuite il existe une identification quasi univoque entre fonction génératrice et lagrangienne isotope à la section nulle. Dans [Vi1], l'auteur prouve que la correspondance entre lagrangienne hamiltoniennement isotope à la section nulle et les fonctions génératrices est bijective à stabilisation près, et ajout d'une constante. Le degré de liberté qui consiste à ajouter une constante, peut être fixé en demandant que les invariants spectraux soient égaux à ceux de la fonctionnelle d'action [CV, MO2].

Définition Une fonction génératrice quadratique à l'infini, ou fgqi, est une fonction S: $M(q) \times E(\xi) \to \mathbb{R}$, avec E un espace vectoriel de dimension fini tel que $\|\partial_\xi S - \partial_\xi B\|_{C^0}$ est borné, et B: $E \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique non dégénérée. On note $E = E^+ \oplus E^-$ la décomposition en sous espaces positif et négatif de B.

On considère l'homologie relative $H_*(\{S < a\}, \{S < b\})$. Il s'en suit que pour a assez grand et b assez petit ce groupe est indépendant de a, b et est canoniquement isomorphe à $H_*(M) \otimes H_*(E^-, E^- - 0) \simeq H_{*+d}(M)$, avec $d = \dim E^-$ où le dernier isomorphisme ("isomorphisme de Thom") est donné en tensorisant avec le générateur de $H_d(E^-, E^- - 0) \simeq \mathbb{Z}_2$. On note ce groupe $H_*(S : M)$. Il existe un autre morphisme naturel d'inclusion i^b: $H_*(\{S < b\}) \to H_*(S : M)$ par limite inductive. A chaque $\alpha \in H_*(M)$ on associe l'invariant spectral :

$$l(\alpha, S) = \inf\{b \,|\, \alpha \in \operatorname{im} i^b\} \ .$$

Ces invariants sont alors définis pour les variétés lagrangiennes de T^*M. Une fgqi donne lieu à une immersion lagrangienne[Vi1].

Définition 3.1. Soit (q,ξ) les coordonnées sur $M\times\mathbb{R}^k$ et S: $M\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ une fonction lisse, S est une fonction génératrice de L si :

1. L'application $(q,\xi)\to S_\xi(q,\xi)$ possède 0 comme valeur régulière.
2. La variété $\Sigma_S=\{(q,\xi)|S_q(q,\xi)=0\}$ est compacte dans $M\times\mathbb{R}^k$ et

$$\begin{aligned} i_S:\Sigma_S &\to T^*M\\ (q,\xi)&\mapsto (q,S_q(q,\xi))\end{aligned}$$

à pour image $i_S(\Sigma_S)=L$.

Une lagrangienne isotope à la section nulle admet une unique fgqi à stabilisation près (une transformation de jauge sur la forme quadratique), et l'addition d'une constante [Vi1], [The]. On peut alors dire que les invariants spectraux des fgqi sont attachés à la lagrangienne. Il a été prouvé par Sikorav que les fgqi décrivent toutes les lagrangiennes hamiltonienement isotope à la section nulle.

Theorème 3.2 (Sikorav). *Si L est une lagrangienne engendrée par une fgqi, et ϕ un difféomorphisme hamiltonien à support compact, alors $\phi(L)$ peut être également engendrée par une fgqi.*

Remarque 3.3. N'importe quelle forme quadratique en les fibres est une fgqi pour la section nulle, il existe ainsi une fonction génératrice pour tous les lagrangiennes isotope à section nulle.

Relativement à ce résultat d'existence, il existe une notion d'unicité [Vi1] :

Theorème 3.4 (Viterbo[Vi1]). *Si S_1 et S_2 sont des fgqi pour la même lagrangienne $L\in T^*M$ hamiltoniennement isotopique à la section nulle, alors elles appartiennent à la même classe pour la relation d'équivalence "à stabilisation près et ajout d'une constante".*

Une histoire de signes Dans ce qui suit, on relie notre construction à certains résultats concernant les fonctions génératrices issus de l'homologie de Floer et ceux venant de la théorie des fonctions génératrices [MO1], [MO2]. Comme notre convention de signe dans la fonctionnelle d'action diffère de la leur, il faut donc traduire précisément leurs résultats.

Notre convention de signe provient du fait que l'homologie de Floer associée à la fonctionnelle d'action est une perturbation de la théorie de Morse, l'hamiltonien devant être ainsi entré avec un signe positif.

Notation 3.5. Tous les objets définis avec la convention de Milinković et Oh, seront surlignés,à l'exception de $\overline{H}$, qui sert déjà à dénoter l'Hamiltonien renversé (qui génère l'isotopie hamiltonienne inverse).

Soit H un hamiltonien compact dépendent du temps sur T^*M. La fonctionnelle d'action $\overline{\mathcal{A}}_H$: $\Omega(M) \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$\overline{\mathcal{A}}_H(\gamma) = -\mathcal{A}_H(\gamma) = -\int_0^1 H_t(\gamma(t))\,dt + \int \gamma^*\lambda$$

La forme symplectique $\overline{\omega} = -\omega = -d\lambda = -dp \wedge dq$. Le champ hamiltonient $\overline{X}_H$ est défini par l'équation $\overline{\omega}(\overline{X}_H, \cdot) = dH$ et donc $\overline{X}_H = X_H$. En particulier, le flot dans les deux conventions de signes sont identiques.

Prenons maintenant H régulier, tel que $\phi_H(M) \cap M$ soit transverse. Alors, $\mathrm{Crit}(\overline{\mathcal{A}}_H) = \mathrm{Crit}(\mathcal{A}_H)$, mais le spectre est reversé : $\mathrm{Spec}(\overline{\mathcal{A}}_H) = -\mathrm{Spec}(H)$. Milinković et Oh utilisant le flot de gradient négatif de $\overline{\mathcal{A}}_H$ pour produire l'équation de Floer. Dans leur convention, une structure presque complexe J est compatible avec $\overline{\omega}$ si $\overline{\omega}(\cdot, \overline{J}\cdot)$ est riemannienne. On prendra donc $J = -\overline{J} = (\overline{J})^{-1}$. Il s'en suit que l'on peut identifier les espaces de modules :

$$\overline{\mathcal{M}}(\gamma_+, \gamma_-) = \mathcal{M}(\gamma_-, \gamma_+)$$

pour $\gamma_\pm \in \mathrm{Crit}(H)$. Ainsi, leur opérateur de bord est le dual du notre. La convention pour les indices est $\overline{m}_H(\gamma) = \dim M - m_H(\gamma)$ pour $\gamma \in \mathrm{Crit}(H)$. Donc leur complexe de Floer :

$$(\overline{CF}_*(H), \overline{\partial}_H)$$

est isomorphe à :

$$(CF^{\dim M - *}(H : M), (\partial_{H:M})^*)$$

l'homologie qu'ils obtiennent est alors isomorphe à la cohomologie $H^{\dim M - *}(M)$, qui par dualité de Poincaré est isomorphe à $H_*(M)$. A partir de là et, comme $\overline{\partial}$ fait décroitre l'action $\overline{\mathcal{A}}_H$, ils définissent des invariants spectraux ; que l'on note $\overline{l}(\alpha, H)$ pour $\alpha \in H_*(M)$.

La dualité de Poincaré nous donne alors,

$$(\overline{CF}_*(H), \overline{\partial}_H) = (CF^{n-*}(H), (\partial_H)^*) = (CF_*(\overline{H}), \partial_{\overline{H}})$$

et puisque nous avons $\overline{\mathcal{A}}_H(\gamma) = \mathcal{A}_{\overline{H}}(\overline{\gamma})$, c'est à dire $(\overline{CF}_*(H : M), \overline{\partial}_{H:M})$ par $\overline{\mathcal{A}}$ coïncide avec $(CF_*(\overline{H} : M), \partial_{\overline{H}:M})$ par $\mathcal{A}_{\overline{H}}$, on a alors :

$$\overline{l}(\mathrm{pt}, H) = l(\mathrm{pt}, \overline{H}) = -l([M], H) \quad \text{est} \quad \overline{l}([M], H) = l([M], \overline{H}) = -l(\mathrm{pt}, H)$$

En dualisant, les invariants spectraux correspondants à la cohomologie peuvent être définis :

$$\overline{l}(1, H) = -l(\mu_M, H) \quad \text{and} \quad \overline{l}(\mu_M, H) = -l(1, H)$$

Dans nos notations,

$$\overline{l}_\pm(H) = -l_\mp(H)$$

3.1.2 Relations entre les invariants de Floer et les invariants des fonctions génératrices

Dans [MO1], [MO2] Milinković et Oh montre que les invariants lagrangiens provenants de la théorie de Floer et ceux provenants de la théorie des fonctions génératrices coïncident lorsque ces derniers sont normalisés judicieusement. Si W est une fonction génératrice définie sur un espace E muni d'une submersion $\pi\colon E \to M$ engendrant une lagrangienne *plongée* $L \subset T^*M$, alors elle induit une fonction, $W|L$, sur l'image du plongement via la formule

$$W|L := W \circ (i_W)^{-1}\colon L \to \mathbb{R}$$

avec $i_W\colon \Sigma_W \to T^*M$ l'application canonique qui envoie le lieu critique de W en les fibres Σ_W vers T^*M. Il s'en suit que comme la différentielle $d(W|L)$ coïncide avec $\lambda|_L$ alors deux fonctions génératrices pour L diffèrent d'une constante. Un cas particulier est celui de la fonctionelle d'action $\overline{\mathcal{A}}_H$, définie sur l'espace Ω, où la submersion est donnée par $\Omega \to M$, $\gamma \mapsto \gamma(1)$. Cela engendre $\phi_H(M)$.

On obtient le lemme suivant à partir de [MO1], [MO2] :

Lemme 3.6. *Soit $L \subset T^*M$ une lagrangienne, hamiltoniennement isotope à la section nulle, et H_t un hamiltonien à support compact $\phi_H(M) = L$, tel que $S\colon M \times E \to \mathbb{R}$ est une fgqi pour L. Si les fonctions $\overline{\mathcal{A}}_H|_L$ et $S|_L$ sont égales, alors :*

$$\bar{l}(\alpha, H) = l(\alpha, S|_{M\times E})$$

3.1.3 Construction et propriétés

On commence avec un hamiltonien $H \in C_c^\infty([0,1] \times T^*\mathbb{T}^n)$ et son flot ϕ^t. Le graphe de ϕ^t est une lagrangienne $\Gamma_{\phi^t} \subset T^*\mathbb{T}^n \times \overline{T^*\mathbb{T}^n}$, qui est l'image de la diagonale $\Delta := \Delta_{T^*\mathbb{T}^n} \subset T^*\mathbb{T}^n \times \overline{T^*\mathbb{T}^n}$ par une isotopie hamiltonienne $\mathrm{id} \times \phi^t$. Soit le revêtement symplectique $\tau\colon T^*\Delta \to T^*\mathbb{T}^n \times \overline{T^*\mathbb{T}^n}$ qui envoie la section nulle sur Δ. L'isotopie $\mathrm{id} \times \phi^t$ se relève en une unique isotopie hamiltonienne $\widetilde{\Phi}^t$ et qui envoie la section nulle sur $L(t) = \widetilde{\Phi}^t(\mathcal{O}_\Delta)$. Celle-ci s'envoie sur Γ_{ϕ^t} grâce à τ.

Comme ϕ^t est à support compact, la lagrangienne $L(t)$ coïncide avec la section nulle en dehors d'un compact K. Par conséquent, elle admet une fonction génératrice $S(t)\colon T^*\Delta \times E \to \mathbb{R}$ (E est un espace de paramètres), qui à relation d'équivalence près est uniquement déterminée et qui coïncide avec une forme quadratique sur E dans le complément de $K \times E$. Cela implique que les invariants spectraux sont uniquement déterminés par $L(t)$ et donc par $\phi(t)$. Pour $k \in M$ on définit la fonction $h_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $h_k(p) = \frac{1}{k} l_+(S(k)_p)$ avec $S(k)_p = S(k)|_{\mathbb{T}^n \times \{p\} \times E}$, $\mathbb{T}^n \times \{p\}$ étant considéré comme un sous-ensemble de $\Delta = T^*\mathbb{T}^n$.

En fait, Viterbo utilise une autre définition pour h_k. Nous établissons maintenant les relations avec sa définition. Il utilise le revêtement $\rho_k\colon T^*\mathbb{T}^n \to T^*\mathbb{T}^n$,

$\rho_k(q,p) = (kq,p)$. Etant un revêtement symplectique, cette application nous permet de tirer en arrière le champ hamiltonien via la formule $\rho_k^*(X)(z) = (d_z\rho_k)^{-1}(X(\rho_k(z)))$, ainsi, on définit l'homomorphisme $\rho_k^*\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}$. Soit $H_k \in C_c^\infty([0,1]\times T^*M)$ défini par [2] $H_k(t,q,p) = H(kt,kq,p)$. Le temps-1 du flot de H_k est donné par $\phi_k := \phi_{H_k} = \rho_k^*\phi_H^k$.

Ensuite, Viterbo construit une fonction génératrice S_k pour l'image de la section nulle dans $T^*\Delta$ par le relevé de $\mathrm{id}\times\phi_k$ à $T^*\Delta$ via τ. Puis, il définit la fonction $h_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $h_k(p) = l_+(S_k|_{\mathbb{T}^n\times\{p\}\times E})$. Les deux définitions de h_k coïncident(voir [Vi2]).

Lemme 3.7. *Soit $\phi \in \mathcal{G}$ et $\psi = \rho_k^*\phi$. Soit $S\colon \Delta\times E \to \mathbb{R}$ une fgqi pour le relevé du graphe de Γ_ϕ à $T^*\Delta$ comme plus haut. Alors $T\colon \Delta\times E \to \mathbb{R}$, définie par $T(q,p,\xi) = \frac{1}{k}S(kq,p,\xi)$ est une fgqi pour le relevé dans $T^*\Delta$ du graphe Γ_ψ.*

Les invariants spectraux de T sont $\frac{1}{k}$ fois ceux de S. Une fgqi pour le relevé à $T^*\Delta$ via τ du graphe de Γ_ϕ est une fgqi pour ϕ. Donc, $S(k)$ est une fgqi pour ϕ_H^k, alors que S_k est une fgqi pour $\phi_k = \rho_k^*\phi_H^k$. Il s'en suit que les invariants spectraux de S_k sont $\frac{1}{k}$ fois ceux de $S(k)$, en particulier,

$$l_+(S_k|_{\mathbb{T}^n\times\{p\}\times E}) = \frac{1}{k}l_+(S(k)|_{\mathbb{T}^n\times\{p\}\times E})$$

et les deux cotés de l'égalité sont les deux définitions de $h_k(p)$ plus haut.

Viterbo définit ensuite l'homogénéisé d'un hamiltonien H à support compact par :

$$\overline{H}(p) = \lim_{k\to\infty} h_k(p)\ .$$

Ce dernier possède de nombreuses applications que nous rappelons dans la section suivante puisque notre généralisation correspond dans le cas du tore à cette construction.

3.2 Le cas général des cotangents

Le but de cette section est de trouver un objet qui possède les même propriétés que la construction précédente, et qui dans le cas du tore correspond exactement à l'homogénéisé précédemment défini. Nous avons vu que Viterbo utilise deux faits importants qui ne sont pas transportable sur les autres cotangents. Tout d'abord, si l'on souhaite que notre homogénéisé corresponde à la fonction α de la théorie d'Aubry-Mather, on ne bénéficie plus de l'isomorphisme d'espace vectoriel $H^1(M) \simeq T_x^*M$ comme dans le cas du tore. Enfin, le cadre du tore bénéficie du fait

2. Pour que cela soit bien défini, on prend ici H périodique en temps, hypothèse que nous enlèverons par la suite

que la diagonale de $T^*\mathbb{T}^n \times \overline{T^*\mathbb{T}^n}$ possède comme toute lagrangienne un voisinage tubulaire de Weinstein, isomorphe au cotangent du tore mais encore plus il se prolonge en un revêtement de $T^*\mathbb{T}^n \times \overline{T^*\mathbb{T}^n}$.

3.2.1 Construction

Nous commençons ici par décrire la construction du quasi-morphisme partiel μ_a que nous nommons homogénéisation. Nous verrons par la suite en quoi elle définit le même objet que l'homogénéisation classique.

Définition 3.8. Soit $a = [\alpha] \in H^1(M)$. Alors on définit $\mu_a : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ par :

$$\mu_0(\phi) := \lim_{k\to\infty} \frac{l_+(\phi^k)}{k}$$

Si $\phi = \phi_H$, et $K_\alpha = H(x, p - \alpha(x))$ alors :

$$\mu_a(\phi) := \mu_0(\phi_K)$$

Il faut bien entendu montrer que cette définition ne dépend pas du α choisi. En effet, si on change α pour β dans la même classe, alors il existe f tel que $df = \alpha - \beta$, donc $K_\alpha = K_\beta \circ \phi_f$. Par invariance hamiltonienne que nous vérifions dans les propriétés suivantes, l'indépendance de la forme choisie est prouvée. Il faut prendre garde de ne pas utilisé ϕ_f mais une troncature adéquate de ce dernier.

3.2.2 Propriétés

Dans la section précédente nous avons défini μ_a. Nous présentons ici ses propriétés :

Theorème 3.9. *Soit M une variété connexe. Pour tout $a \in H^1(M;\mathbb{R})$, la fonction μ_a: $\mathcal{G} \to \mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes.*

1. *$\mu_a(\phi^k) = k\mu_a(\phi)$ pour $k \geq 0$ un entier ;*
2. *μ_a est invariant par conjugaison dans $\mathcal{G}$;*
3. *Si $\phi, \psi \in \mathcal{G}$ sont générés par des hamiltoniens H, K. Alors*

$$\int_0^1 \min(H_t - K_t)\, dt \leq \mu_a(\phi) - \mu_a(\psi) \leq \int_0^1 \max(H_t - K_t)\, dt\,;$$

   en particulier μ_a est Lipschitz par rapport à la métrique de Hofer.
4. *La restriction de μ_a à $\mathcal{G}_U$ s'annule sur tout ouvert déplaçable U ;*
5. *Pour toute collection d'ouvert $\mathcal{U}$ tels que le maximum d'énergie de déplacement $e(\mathcal{U})$ soit finie. Alors :*

$$|\mu_a(\phi\psi) - \mu_a(\psi)| \leq e(\mathcal{U})\|\phi\|_{\mathcal{U}}\,;$$

6. *la restriction de μ_0 à $\mathcal{G}_0$ coïncide avec l'homomorphisme $\mathcal{A}$;*
7. *Si $\phi \in \mathcal{G}$ est généré par un hamiltonien dont la restriction au graphe d'une 1-forme fermée dans la classe a est $\geq c$ (respectivement, $\leq c$, $= c$). Alors*

$$\mu_a(\phi) \geq c \text{ (respectivement } \leq c, = c)\,;$$

8. *Pour ϕ, ψ qui commutent nous avons $\mu_a(\phi\psi) \leq \mu_a(\phi) + \mu_a(\psi)$;*
9. *Soit $\phi \in \mathcal{G}$ une fonction fixée, on a alors une fonction $H^1(M;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $a \mapsto \mu_a(\phi)$, lipschitz de constante donnée par une semi-norme.*

Démonstration. 1. Nous avons défini μ_0 par :

$$\mu_0(\phi) = \lim_{k\to\infty} \frac{l_+(\phi^k)}{k}\,.$$

qui convergence par sous additivité de $\{l_+(\phi^k)\}_k$ vers un nombre fini grâce au point (ii) du théorème 2.28. De manière triviale on obtient (i).

2. Le point (viii) du théorème 2.28 implique que pour tout $\phi, \psi \in \mathcal{G}$ on a

$$|l_+\big((\psi\phi\psi^{-1})^k\big) - l_+(\phi^k)| = |l_+(\psi\phi^k\psi^{-1}) - l_+(\phi^k)| \leq l_+(\psi) - l_-(\psi)\,.$$

En divisant par k et faisant tendre ce dernier vers l'infini $\mu_0(\psi\phi\psi^{-1}) = \mu_0(\phi)$.

3. Sans perdre de généralité, montrons la borne supérieure pour μ_0. On a :

$$l_+(\phi) - l_+(\psi) = l_+(H) - l_+(K) \leq \int_0^1 \max(H_t - K_t)\,dt$$

Soit f une fonction de lissage 1.16, alors,

$$l_+(H) - l_+(K) = l_+(H^f) - l_+(K^f) \leq \int_0^1 \max(H_t^f - K_t^f)\,dt\,.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ il y existe un tel lissage tel que :

$$\int_0^1 \max(H_t^f - K_t^f)\,dt \leq \int_0^1 \max(H_t - K_t)\,dt + \varepsilon\,.$$

Et donc, il s'en suit :

$$\frac{l_+(\phi^k) - l_+(\psi^k)}{k} = \frac{l_+\big((H^f)^{\sharp k}\big) - l_+\big((K^f)^{\sharp k}\big)}{k} \leq \int_0^1 \max(H_t - K_t)\,dt + \varepsilon\,,$$

On passe ensuite à la limite pour k, et puis pour $\varepsilon \to 0$, on obtient

$$\mu_0(\phi) - \mu_0(\psi) \leq \int_0^1 \max(H_t - K_t)\,dt\,.$$

4. Si U est déplaçable par $\psi \in \mathcal{G}$, on a d'après 2.28 :

$$|l_+(\phi)| \leq \Gamma(\psi)$$

pour tout $\phi \in \mathcal{G}_U$.

$$|\mu_0(\phi)| = \lim_{k\to\infty} \frac{|l_+(\phi^k)|}{k} \leq \lim_{k\to\infty} \frac{\Gamma(\psi)}{k} = 0\,.$$

Pour $a \in H^1(M;\mathbb{R})$ and $\alpha \in a$ on a que $T_{-\alpha}\phi T_\alpha \in \mathcal{G}_{T_{-\alpha}(U)}$ et que $T_{-\alpha}(U)$est déplaçable par $T_{-\alpha}\psi T_\alpha$.

5. On dira que $\phi \in \mathcal{G}$ est *dominée* par U si ϕ est engendrée par un hamiltonien dont le support est dans U. Soit ϕ dominée par l'un des éléments de $\mathcal{U}$. L'inégalité triangulaire pour $l_\pm$ donne pour tout $\alpha, \beta \in \mathcal{G}$

$$l_-(\alpha) + l_+(\beta) \leq l_+(\alpha\beta) \leq l_+(\alpha) + l_+(\beta)\,.$$

Soit $\phi_j = \psi^j \phi \psi^{-j}$. Alors ϕ_j est aussi dominée par un des éléments de $\mathcal{U}$. On obtient,

$$(\phi\psi)^k = \phi_0\phi_1 \ldots \phi_{k-1}\psi^k\,,$$

qui implique par récurrence que

$$\sum_{j=0}^{k-1} l_-(\phi_j) + l_+(\psi^k) \leq l_+((\phi\psi)^k) \leq \sum_{j=0}^{k-1} l_+(\phi_j) + l_+(\psi^k)\,.$$

Puisque tout ϕ_j est dominée par un ensemble déplaçable d'énergie inférieure à $e(\mathcal{U})$, en utilisant le point (vii) du théorème 2.28, on a

$$|l_+((\phi\psi)^k) - l_+(\psi^k)| \leq k e(\mathcal{U})\,,$$

et donc,

$$|\mu_0(\phi\psi) - \mu_0(\psi)| \leq e(\mathcal{U})\,.$$

La proposition tombe alors par récurrence sur $\|\phi\|_{\mathcal{U}}$.

6. La restriction à $\mathcal{G}_0$ des invariants spectraux pour toute classe d'homologie à $\mathcal{G}_0$ coïncide avec l'homomorphisme d'action.

7. Sans perdre de généralité on considère la section nulle et $a = 0$. Du théorème 2.28, on déduit que si par exemple, $H|_M \geq c$, alors

$$l_+(\phi) \geq c$$

Soit K défini par

$$K_t = c(1 - f'(t)) + f'(t)H(f(t), \cdot)\,,$$

où f est un lissage. Biensur, K n'est pas à support compact mais cela peut être arrangé en tronquant à l'extérieur d'un large compact. Le spectre de

K est identique à celui de H^f, décalé vers le haut de $\int_0^1 c(1-f'(t))\,dt$. Ce nombre peut être rendu aussi petit que désiré en jouant sur f. Il s'en suit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un lissage f tel que les invariants spectraux de K soit au plus à ε de ceux de H^f. On a alors

$$l_+(K) \geq c - \varepsilon\,.$$

Mais K vaut c près de $t = 0, 1$ on peut alors le concaténer à lui même. D'où,

$$\frac{l_+(\phi^k)}{k} = \frac{l_+(K^{\sharp k})}{k} \geq c - \varepsilon\,,$$

et enfin,

$$\mu_0(\phi) \geq c\,.$$

8. On utilise l'inégalité triangulaire pour l_+ et que $(\phi\psi)^k = \phi^k\psi^k$.
9. On pose

$$|\mu_a(\phi_H) - \mu_b(\phi_H)| = |\mu_0(T_{-\alpha}\phi_H T_\alpha) - \mu_0(T_{-\beta}\phi_H T_\beta)|\,,$$

avec $\alpha \in a, \beta \in b$. Le terme de droite est majoré par :

$$\int_0^1 \|H_t \circ T_\alpha - H_t \circ T_\beta\|_{C^0}\,dt\,.$$

Pour toute 1-forme χ sur M on a

$$\max_{T^*M} |H_t - H_t \circ T_\chi| \leq |dH_t|(\chi)\,,$$

avec

$$|dH_t|(\chi) = \max_{(q,p)\in T^*M} \left|\left\langle d_{(q,p)}H_t|_{T^{\mathrm{vert}}_{(q,p)}T^*M}, \chi(q)\right\rangle\right|\,,$$

où on identifie $T^{\mathrm{vert}}_{(q,p)}T^*M = T^*_qM$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est l'accouplement de T^*_qM et T_qM. On déduit alors,

$$|\mu_a(\phi_H) - \mu_b(\phi_H)| \leq |dH|(a-b)\,,$$

où $|dH|\colon H^1(M;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est la semi-norme définie par :

$$|dH|(a) = \inf_{\alpha\in a} \int_0^1 |dH_t|(\alpha)\,dt\,.$$

Cela signifie que $a \mapsto \mu_a(\phi)$ est lipschitz, de constante la semi norme $|dH|$.

□

Nous appelons μ_a un quasi-morphisme partiel. Plus loin, nous étudierons dans l'hypothèse de véracité de la conjecture de Viterbo que ce quasi-morphisme partiel est un vrai quasi-morphisme.

Un point de vue infinitésimal correspondant au théorème précédent est donné dans le théorème suivant. On définit pour tout hamiltonien autonome $F \in \mathcal{C}^\infty(T^*M)$, $\zeta_a(F) := \mu_a(\phi_F)$, alors :

Theorème 3.10. *1.* $\zeta_a(\lambda F) = \lambda\zeta_a(F)$ *pour* $\lambda \geq 0$ *réel;*

2. ζ_a *est invariant sous l'action naturelle de* $\mathcal{G}$ *sur* $C_c^\infty(T^*M)$ *;*

3. $\min(F-G) \leq \zeta_a(F)-\zeta_a(G) \leq \max(F-G)$*, en particulier* $|\zeta_a(F)-\zeta_a(G)| \leq \|F-G\|_{C^0}$ *;*

4. $\zeta_a(F) = 0$ *pour* $supp(F)$ *déplaçable;*

5. Pour U *déplaçable, pour tout* $F \in C_c^\infty(T^*M)$ *et tout* G *dont le support est dominé par* U*, nous avons :*

$$|\zeta_a(F+G) - \zeta_a(F) - \zeta_a(G)| \leq \sqrt{2e(U)\|\{F,G\}\|_{C^0}}\,;$$

En particulier si F, G *commutent et le support de* G *est déplaçable alors* $\zeta_a(F+G) = \zeta_a(F) + \zeta_a(G) = \zeta_a(F)$ *;*

6. Si $F \geq c$ *(respectivement,* $\leq c$*) restreint au graphe d'une* 1*-forme fermée dans la classe* a*, alors* $\zeta_a(F) \geq c$ *(respectivement,* $\leq c$*);*

7. Si $\{F,G\} = 0$ *alors* $\zeta_a(F+G) \leq \zeta_a(F) + \zeta_a(G)$*.*

3.2.3 Egalité avec la version de Viterbo

Theorème 3.11. *Soit* $M = \mathbb{T}^n$*. Alors* $\overline{H}(p) = \mu_p(\varphi_H)$*, pour tout* $H \in C_c^\infty([0,1] \times T^*\mathbb{T}^n)$ *et tout* $p \in \mathbb{R}^n$*.*

Avec cette fonction en main, on peut montrer que la séquence $h_k(p)$ est sous-additive pour un p fixé. La limite $h = \lim_k h_k$ existe, et est en fait une fonction continue. On note $\overline{H}(q,p) = h(p)$, et c'est l'homogénéisé symplectique de H. Il est clair qu'à partir de la description précédente et et si $H_p(t,q,\cdot) = H(t,q,\cdot+p)$, que $\overline{H_p}(0) = \overline{H}(p)$.

Proposition 3.12. $\overline{H}(0) = \mu_0(\phi_H)$.

Il suffit de le voir pour tout k,

$$h_k(0) = \frac{l_+(\phi_H^k)}{k}$$

puisque les deux cotés de l'égalité sont obtenus comme limite respectives quand $k \to \infty$. La proposition sera prouvé si on montre que :

$$l_+(S(k)|_{\mathbb{T}^n \times \{0\} \times E}) = l_+(\phi_H^k)$$

Le point principal est que $S(k)|_{\mathbb{T}^n \times \{0\} \times E}$ engendre une lagrangienne de $T^*\mathbb{T}^n$, qui est l'image par $\phi_H^k(\mathcal{O}_{\mathbb{T}^n})$ et $(q,p) \mapsto (q,-p)$. Commme la fonctionelle d'action correspondant à $H^{\sharp k}$ engendre la même lagrangienne, ses invariants spectraux vont coïncider avec ceux de $S(k)_0$ si les deux induisent la même fonction sur

la lagrangienne. Ce qui permet de conclure est que la fonctionelle d'action correspondant au relevé de l'isotopie $\widetilde{\Phi}^k$, ainsi que la fgqi $S(k)$, engendre la même lagrangienne $L(k)$, qui est le relevé dans $T^*\Delta$ via τ du graphe Γ_{ϕ^k}. Enfin, ces deux sont normalisés comme étant nulle en dehors d'un compact suffisament large. Il s'en suit que leurs invariants spectraux, et en particulier ceux de $S(k)_0$ et $\mathcal{A}_{H^{\sharp k}}$ sont les mêmes, en utilisant plusieurs fois 3.6.

3.2.4 Détails

Réinterprétons la construction de l'homogénéisation symplectique selon Viterbo. Soit $H \in C_c^\infty([0,1] \times T^*\mathbb{T}^n)$ et soit $\phi^t \equiv \phi_H^t$ l'isotopie engendrée par H_t, et $\phi = \phi^1$. On note également $\Phi^t = \mathrm{id} \times \phi^t \colon T^*\mathbb{T}^n \times \overline{T^*\mathbb{T}^n} \to T^*\mathbb{T}^n \times \overline{T^*\mathbb{T}^n}$. L'isotopie Φ^t est engendrée par l'hamiltonien $K_t = 0 \oplus (-H_t)$, soit $K_t(z,z') = -H_t(z')$ pour $z, z' \in T^*\mathbb{T}^n$. Considérons le revêtement symplectique $\tau \colon T^*\Delta \to \mathbb{T}^*\mathbb{T}^n \times \overline{T^*\mathbb{T}^n}$, avec $\Delta := \Delta_{T^*\mathbb{T}^n} = T^*\mathbb{T}^n$ la diagonale, donnée par

$$\tau(u,v;U,V) = (u-V, v; u, v-U).$$

On obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} T^*\mathbb{R}^n \times \overline{T^*\mathbb{R}^n} & \longleftarrow & T^*\Delta_{T^*\mathbb{R}^n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^*\mathbb{T}^n \times \overline{T^*\mathbb{T}^n} & \xleftarrow{\tau} & T^*\Delta_{T^*\mathbb{T}^n} \end{array} .$$

On prend $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Les flêches de droites et gauches sont induites par les applications quotients [3] $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$ et $T^*\mathbb{R}^n \to T^*\mathbb{T}^n$. L'application d'en haut est donnée par $(q,p;Q,P) \mapsto (Q,p;p-P,Q-q)$.

Considérons l'hamiltonien $\widetilde{H}_t = K_t \circ \tau$ sur $T^*\Delta$. Il engendre un relevé $\widetilde{\Phi}^t$ de Φ^t : $\Phi^t \circ \tau = \tau \circ \widetilde{\Phi}^t$. On note $L = \widetilde{\Phi}^1(\mathcal{O}_\Delta)$. Alors $\tau(L) = \Gamma_\phi$.

On extrait alors les invariants spectraux de $\widetilde{H}_t$. Cet hamiltonien n'est pas à support compact, mais pour un t fini, il suffit de tronquer à l'extérieur d'une boule, et on considère la fonctionnelle d'action correspondante. Par abus de notation on note cette fonctionnelle aussi par $\mathcal{A}_{\widetilde{H}}$. Elle possède la même action sur tous les arcs hamiltoniens qui partent de la section nulle et suivent le flot $\widetilde{\Phi}^t$ que la fonctionnelle d'origine avant la troncature.

De nouveau, le fait que H_t soit à support compact implique que L diffère de la section nulle seulement dans un compact de $T^*\Delta$, on peut alors compactifier

3. En général, si il existe une fonction fonction lisse $f \colon X \to Y$, il n'y a pas de manière canonique d'associer une fonction lisse entre les différents cotangents, cependant si cette fonction est un difféomorphisme local, alors on obtient $f_* \colon T^*X \to T^*Y$ donné par $f_*(\alpha) = \alpha \circ (d_x f)^{-1}$ pour $\alpha \in T_x^*X$, et est symplectique : $(f_*)^*\omega^{T^*Y} = \omega^{T^*X}$.

les objets à $T^*(\mathbb{T}^n \times S^n) = T^*(\Delta \cup \mathbb{T}^n \times \{\infty\})$; objets que nous noterons avec les mêmes lettres que les objets d'origine dans $T^*\Delta$.

Viterbo a donné une formule pour une fgqi engendrant L [Vi2]. La formule précise ne semble pas être utile ici, car comme nous l'avons mentionné en sous section 3.1.3, les invariants spectraux d'une fgqi pour L sont uniquement déterminés dès que nous la normalisons égale à une forme quadratique à l'extérieur d'un compact $K \times E$, $K \subset \Delta$. On note la fgqi de L, normalisé de cette manière, par S: $\Delta \times E \to \mathbb{R}$, jusqu'à la fin de cette sous section.

De la définition de $\widetilde{H}$, il est clair que les points de $\mathbb{T}^n \times \{\infty\}$, considérés comme des courbes constantes, sont des ars hamiltoniens pour $\widetilde{H}_t$, qui commencent et terminent sur la section nulle et de plus, que $\widetilde{H}_t$ vaut 0 sur un voisinage ouvert de $\mathbb{T}^n \times \{\infty\}$ dans $T^*(\mathbb{T}^n \times S^n)$, ce qui signifie en particuler que l'action d'un point de $\mathbb{T}^n \times \{\infty\}$, considéré comme un arc hamiltonien est zéro.

On rappelle que $\overline{\mathcal{A}}_{\widetilde{H}}$ et S engendrent L, et induisent donc des fonctions sur $L \subset T^*(\mathbb{T}^n \times S^n)$ et que ces fonctions diffèrent par une constante. Maintenant, il s'en suit à partir des derniers paragraphes que les valeurs de ces deux fonctions en un point de $\mathbb{T}^n \times \{\infty\}$ est zéro, ce qui implique qu'elles coïncident. En particulier, si γ: $[0,1] \to T^*(\mathbb{T}^n \times S^n)$ est un arc hamiltonien pour $\widetilde{H}_t$, partant de la section nulle, et $z = \gamma(1) \in L$, alors

$$(S|L)(z) = \overline{\mathcal{A}}_{\widetilde{H}}(\gamma) = -\mathcal{A}_{\widetilde{H}}(\gamma)$$

L'homogénéisation symplectique est définie en terme d'invariant spectral de la fonction : S_p: $\mathbb{T}^n \times E \to \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$, avec S: $T^*\mathbb{T}^n \times E \to \mathbb{R}$ la fonction génératrice de $L = \widetilde{\Phi}^1(\mathcal{O}_\Delta)$ décrite plus haut, et $S_p(q;\xi) := S(q,p;\xi)$. On en conclue que S_p engendre la lagrangienne de $T^*\mathbb{T}^n$ donnée par :

$$L_p = \{(Q(q,p), p - P(q,p)) \,|\, q \in \mathbb{T}^n, (Q(q,p), P(q,p)) = \phi(q,p)\}$$

Puisque l'on souhaite prouver la proposition 3.12, nous nous restreignons au cas $p = 0$, et donc S_0 engendre la lagrangienne :

$$L_0 = \{(Q(q,0), -P(q,0)) \,|\, q \in \mathbb{T}^n, (Q(q,0), P(q,0)) = \phi(q,0)\} = \overline{\phi(\mathcal{O}_{\mathbb{T}^n})}$$

où pour une lagrangienne $Y \subset T^*X$ on note par $\overline{Y}$ la lagrangienne renversée par l'involution $(q,p) \mapsto (q,-p)$.

La même lagrangienne est engendrée par la fonctionnelle d'action $\mathcal{A}_H$. On souhaite montrer que les invariants spectraux de H coïncident avec ceux de S_0, c'est à dire $l_\pm(H) = l_\pm(S_0)$. D'abord, on a :

Lemme 3.13. *En restreignant à L_0 :*

$$\mathcal{A}_H|_{L_0} = S_0|_{L_0}$$

Démonstration. Comme $\mathcal{A}_H$ et S_0 engendre la même lagrangienne L_0, il suffit de montrer qu'elles sont égales en un point de L_0. Soit $z \in L_0 \cap \mathcal{O}_{\mathbb{T}^n}$, il existe par la théorie de l'intersection lagrangienne. Soit γ l'arc hamiltonien terminant en z, relatif au flot de ϕ_H^t, c'est à dire tel que $\gamma(t) = \phi_H^t(\gamma(0))$ et $\gamma(1) = z$. On note $(q,0) = \gamma(0) \in T^*\mathbb{T}^n$. En coordonnées, $\gamma(t) = (Q_t, P_t)$. On voit que la courbe $t \mapsto Q_t \in \mathbb{T}^n$ se relève sur $\mathbb{R}^n$, et pour tout tel relevé, $\delta(t)$, la différence $\delta(t) - \delta(0)$ est indépendante du relevé. On prend cette différence égale à $Q_t - q \in \mathbb{R}^n$.

Considérons l'arc suivant $\widetilde{\gamma}$: $[0,1] \to T^*\Delta$:

$$\widetilde{\gamma}(t) = \widetilde{\Phi}^t(\gamma(0))$$

avec $\gamma(0) \in T^*\mathbb{T}^n = \Delta$; on a

$$(\tau \circ \widetilde{\gamma})(t) = (q, 0; \gamma(t)) = (q, 0; Q_t, P_t) \in T^*\mathbb{T}^n \times \overline{T^*\mathbb{T}^n}$$

et

$$\widetilde{\gamma}(t) = (Q_t, 0; -P_t, Q_t - q) \in T^*\Delta$$

Calculons alors l'action d'un tel arc pour $\widetilde{H}_t$, c'est à dire,

$$\mathcal{A}_{\widetilde{H}}(\widetilde{\gamma}) = \int_0^1 \widetilde{H}_t(\widetilde{\gamma}(t))\, dt - \int \widetilde{\gamma}^* \lambda^\Delta$$

avec λ^Δ la forme de Liouville sur $T^*\Delta$. On obtient pour la première intégrale :

$$\int_0^1 \widetilde{H}_t(\widetilde{\gamma}(t))\, dt = \int_0^1 (K_t \circ \tau \circ \widetilde{\gamma})(t) = \int_0^1 (0 \oplus -H_t)(q, 0; \gamma(t))\, dt = -\int_0^1 H_t(\gamma(t))\, dt$$

La seconde vaut :

$$-\int_0^1 \lambda^\Delta(\dot{\widetilde{\gamma}}(t))\, dt = -\int_0^1 \langle (-P_t, Q_t - q), \tfrac{d}{dt}(Q_t - q, 0) \rangle\, dt = \int_0^1 \langle P_t, \dot{Q}_t \rangle\, dt = \int \gamma^* \lambda$$

Au final au peut écrire :

$$-\mathcal{A}_{\widetilde{H}}(\widetilde{\gamma}) = \mathcal{A}_H(\gamma)$$

En notant $\widetilde{z} = \widetilde{\gamma}(1)$, on a

$$(S_0|_{L_0})(z) = (S|_L)(\widetilde{z}) = -\mathcal{A}_{\widetilde{H}}(\widetilde{\gamma}) = \mathcal{A}_H(\gamma)$$

La première de ces égalités provient du fait que L_0 est obtenu à partir de L par la réduction symplectique (qui est juste une reformulation du fait que L_0 est engendrée par la fgqi S_0 qui elle même est la restriction de S à la section nulle de $\mathcal{O}_{\mathbb{T}^n} \subset T^*\mathbb{T}^n = \Delta$), et qu'après réduction $\widetilde{z}$ est envoyé sur z. □

Comme $\mathcal{A}_H$ et S engendrent L_0, il suffit de montrer que $\overline{\mathcal{A}}_H = -\mathcal{A}_H$ et $-S_0$ engendre $\overline{L_0} = \phi(\mathcal{O}_{\mathbb{T}^n})$, et que $(-\mathcal{A}_H)|_{\overline{L_0}} = (-S_0)|_{\overline{L_0}}$, ce qui donne (voir 3.1.1, 3.1.2)

$$l_\pm(\phi) = l_\pm(H) = -\bar{l}_\mp(H) = -l_\mp(-S_0)$$

Par dualité (voir [Vi1]),

$$l_\pm(-S_0) = -l_\mp(S_0)$$

on obtient finalement,

$$l_\pm(\phi) = l_\pm(S_0)$$

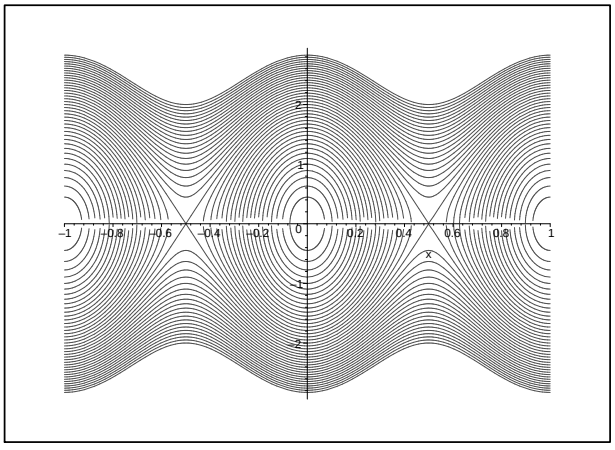
On voit que toute la construction jusqu'à présent peut être réalisé avec ϕ remplacé par ϕ^k et alors

$$l_+(\phi^k) = l_+(S(k)_0)$$

où, comme avant, $S(k)$ est une fgqi pour la lagrangienne $\widetilde{\Phi}^k(\mathcal{O}_\Delta) \subset T^*\Delta$.

3.2.5 Exemples de Calcul

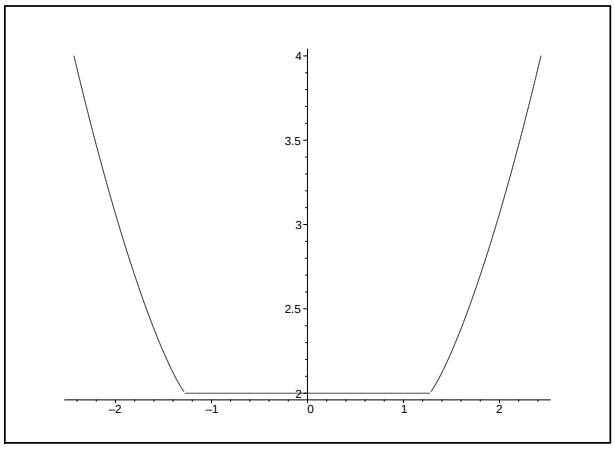
On choisit $H(q,p) = \frac{|p|^2}{2} + \cos(2\pi q) + 1$



Nous allons prouver la proposition suivante :

Proposition 3.14.

$$\begin{cases} \overline{H}(p) = 2 \quad si \quad |p| \leq \int_0^1 (-2cos(2\pi x) + 2)^{1/2} dx \\ \\ \overline{H}(p) = \lambda \quad où\ \lambda\ résoud\ |p| = \int_0^1 \left(-2cos(2\pi x) - 2 + 2\lambda\right)^{1/2} dx \\ \qquad\qquad si\ |p| \geq \int_0^1 (-2cos(2\pi x) + 2)^{1/2} dx \end{cases}$$



Démonstration. 1. On commence par s'occuper de la valeur de $\overline{H}(P)$ pour $|P| \geq S = \int_0^1 (-2cos(2\pi x)+2)^{1/2} dx$. On considère une lagragienne L (courbe isotope à une section constante) au dessus de la courbe L_h définis par$p = (-2cos(2\pi q) - 2 + 2h)^{1/2}$ tel que l'on ait donc $L \in \{(q,p), H(q,p) \geq h\}$. Ainsi, on aura : $H \geq h\chi_L$ d'après les propriétés précédentes, en notant $Aire(L) = \int_L \lambda$

$$\forall P \geq Aire(L) > Aire(L_h), \overline{H}(P) \geq h$$

d'où

$$\forall P \geq Aire(L_h), \overline{H}(P) \geq h$$

On a un fuseau U définit entre L son symetrique par rapport à la section nulle. On définit alors $\kappa_U = h\chi_U + \infty\chi_{U^c}$, ce qui nous mène à

$$H \leq \kappa_U$$

et d'où

$$\overline{H} \leq h\chi_{|p|\leq \int_0^1 (-2cos(2\pi q)-2+2h)^{1/2} dq} + \infty\chi_{|p|\leq \int_0^1 (-2cos(2\pi q)-2+2h)^{1/2} dq}$$

d'où le résultat

$$\overline{H}(P) = h \text{ tel que } P = \int_0^1 (-2cos(2\pi q) - 2 + 2h)^{1/2} dq$$

2. Pour $P < \int_0^1 (-2cos(2\pi q) - 2 + 2h)^{1/2} dq$, soit $\epsilon > 0$, on peut faire passer une lagrangienne à travers la section nulle tout en restant dans $\{(q,p), H(q,p) > 2 - \epsilon\}$ de sorte que l'on peut créer un "réservoir". Ainsi, pour tout P, $\overline{H}(P) > 2 - \epsilon$ d'où

$$\overline{H} \geq 2$$

étant donner qu'il est facile de voir avec un ϵ-fuseau autour de la séparatrice que,

$$\overline{H}(P) \leq 2$$

le résultat attendu tombe.

□

En fait, en dimension 2, on obtient tous les homogénéisés des hamiltoniens autonomes par une description explicite de l'arbre de Reeb associé à un hamiltonien H. En effet, le feuilletage en ligne de niveau d'un hamiltonien H à support compact possèdent dans le cas générique que des fibres circulaires, hormis pour les valeurs critiques. Il est ainsi possible de représentés, H par son arbre de Reeb qui est le graphe associé au feuilletage lorsque que l'on regarde l'espace des feuilles. Dans l'exemple précédent même s'il n'est pas à support compact, l'hamiltonien possède un arbre de Reeb donné par un tronc et une branche. Calculer l'homogénéisé revient à effectuer un élagage de cet arbre.

Il est possible également dans le cas général de prouver un encadrement de l'homogénéisé qui rappelle une formule classique pour le calcul de l'hamiltonien effectif (ou fonction α de Mather).

Proposition 3.15. *Soit H un hamiltonien autonome, alors :*

$$\sup_{f\in\mathcal{C}^2} \min_x H(x, df(x)) \leq \bar{H}(0) \leq \inf_{f\in\mathcal{C}^2} \max_x H(x, df(x))$$

Démonstration. Tout d'abord, il convient de remarquer que l'application $(x,p) \mapsto (x, p + df(x))$ est un symplectomorphisme hamiltonien (à flot complet). Ainsi, $H(., df(.)) = \bar{H}$. De plus, pour tout x de la section nulle, $H(., df(.))$ restreint à la section nulle est supérieure à $\min_x H(x, df(x))$. Les propriétés générales de l'homogénéisé donnent donc :

$$\min_x H(x, df(x)) \leq \bar{H}(0)$$

Il suffit alors de prendre le sup sur les $f \in \mathcal{C}^2$. L'inégalité de droite s'obtient de la même manière. □

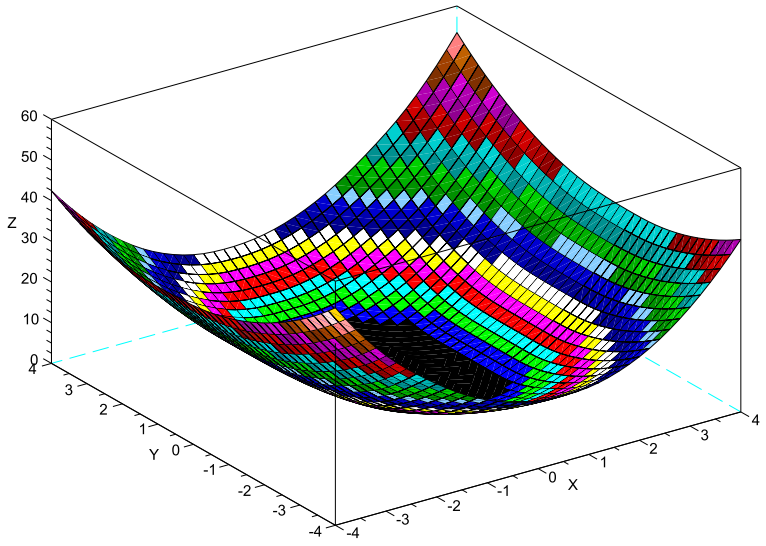
Dans le cas des hamiltoniens de Tonneli, la théorie générale d'Aubry-Mather produit la formule suivante :

$$\bar{H}(0) = \inf_{f\in\mathcal{C}^2} \max_x H(x, df(x))$$

Nous avons pu également utiliser cette formule dans un schéma numérique à pas de gradient pour résoudre ce problème d'optimisation. Cet algorithme est

d'autant plus intéressant qu'il pourrait permettre également l'étude de certaines perturbation de l'homogénéisé.

Nous donnons ici le graphique, du système chaotique constitué de deux pendules dont un n'est pas attaché au support mais à l'autre pendule. On obtient :



La partie noire centrale est plate, ce qui on le verra, s'interprète en terme de vecteur de rotation nul. Il est physiquement acceptable que pour des systèmes à faibles taux d'énergie qu'il existe des mesures minimisantes de vecteur de rotation nul. C'est à dire tel qu'en moyenne les deux pendules ne tournent pas. La question est de savoir si dans les niveaux d'énergie en dessous du pallier noir, il existe tout de mêmes des orbites tel que les pendules tournent en moyenne, chose à laquelle ne répond pas la théorie de Mather.

4 Applications

4.1 Théorie d'Aubry-Mather non convexe

4.1.1 La fonction α de Mather

La théorie d'Aubry-Mather associe entre autre à tout hamiltonien Tonelli H une fonction sur $H^1(M;\mathbb{R})$ notée α_H: $H^1(M;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Elle est appelée fonction α de Mather. Son rôle est central puisque récemment, Bernard et Dos Santos ont prouvé qu'il est possible de construire les autres objets de cette théorie à partir de cette donnée dans le cas Tonelli toujours.

Définition 4.1. Un hamiltonien H: $[0,1] \times T^*M \to \mathbb{R}$ est appelé Tonelli si il est strictement convexe et superlinéaire et possède un flot complet

L'intérêt principal de ce genre d'hamiltonien est d'utiliser une dualité donnée par la transformation de Legendre. Celle ci fait correspondre de manière bijective les hamiltoniens Tonelli avec une fonction sur le tangent nommée lagrangien (lui même possèdant des propriétés de convexités et de coercivité). Les problèmes provenant de la physique regorgent d'hamiltonien Tonelli, et dans un certains sens la version avec lagrangien est souvent préférée. Etudier la dynamique revient alors à minimiser $\int L$ sur les trajectoire possible. Mather dans [Mat] généralise ce procédé de minimisation et minimise cette intégrale sur toutes les mesures.

Theorème 4.2. *Soit H un hamiltonien de Tonelli périodique en temps. Alors pour $a \in H^1(M;\mathbb{R})$*

$$\alpha_H(a) = \mu_a(\phi_H) \ .$$

Il est possible d'interpréter ce résultat comme une extension de la fonction α à tout hamiltonien H à flot complet $\alpha_H(a) := \mu_a(\phi_H)$. Ce théorème 4.2 est apparu pour la première fois dans [Vi2] pour $M = \mathbb{T}^n$.

Une fois ce lien tissé, il est aisé de déduire des résultats concernant la fonction α, en utilisant les propriétés de l'homogénéisation, par exemple :

Corollaire 4.3. *Soit H un hamiltonien Tonelli et $\phi \in \mathcal{G}$ telle que $H \circ \phi$ est toujours Tonelli*[4]*. alors :*

$$\alpha_{H\circ\phi} = \alpha_H \ .$$

Il est connu depuis [Ber] que la fonction α possède une invariance dans le cadre de Tonelli. Il est également possible de trouver la trace de ce résultat mais de manière plus implicite dans [PPS], si H est autonome.

Démonstration du théorème 4.2. Sans perdre de généralité plaçons nous dans le cas $a = 0$. Dans [Mat], la minimisation d'une fonctionnelle sur l'espace des mesures est réduite à la recherche de mesures minimisantes supportées sur des chemins. On obtient ainsi une expression explicite de $\alpha_H(0)$.

$$\alpha_H(0) = -\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \inf\{\mathcal{A}_L^k(\gamma) \,|\, \gamma\colon [0,k] \to M\}$$

où $k \in \mathbb{N}$ et

$$\mathcal{A}_L^k(\gamma) = \int_0^k L(t,\gamma(t),\dot\gamma(t))\,dt$$

$L\colon \mathbb{R}\times TM \to \mathbb{R}$ étant le Lagrangien de période 1 en temps associé à H par la dualité de Legendre.

Considérons la fonctionnelle $\mathcal{A}_L^k\colon \mathcal{P}_k \to \mathbb{R}$, avec $\mathcal{P}_k = \{\gamma\colon [0,k] \to M, \gamma(0) = x_0\}$. L'introduction de x_0 est indépendante du problème de minimisation. De

4. Puisque ϕ est à support compact $H \circ \phi$ possède automatiquement un flot complet.

manière heuristique, minimiser une fonctionnelle de Tonelli sur un temps long ne dépend pas beaucoup de l'endroit dont on part qui a un cout fini.

L'évaluation en temps k, π_k: $\mathcal{P}_k \to M$, $\gamma \mapsto \gamma(k)$, est une submersion. Ainsi, il est possible de voir $\mathcal{A}_L^k$ comme une fonction génératrice. Celle-ci engendre la Lagrangienne $\phi_H^k(M)$. En effet, l'espace des paramètres de cette fonction génératrice est donné par la fibre de π_k. La différentielle dans la fibre en $(q(t), q'(t))$ est donnée par :

$$h \mapsto \int_0^k [\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), q'(t)) - \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial v}(q(t), q'(t)))] \times h(t)dt - h(0)\frac{\partial L}{\partial v}(q(0), q'(0))$$

qui s'annule pour γ vérifiant l'équation de Lagrange et $\frac{\partial L}{\partial v}(q(0), q'(0)) = 0$ et $\frac{\partial L}{\partial v}(q(0), q'(0)) = 0$. La lagrangienne associée est alors l'ensemble,

$$(x(k), \frac{\partial L}{\partial v}(q(k), q'(k))) =: (x(k), p(k)) = \phi_H^k(M)$$

avec $(x(t), p(t))$ solution de l'équation d' Hamilton (par dualité du flot lagrangien) telle que $p(0) = 0$. Le minimum de $\mathcal{A}_L^k(\gamma)$ est en fait une valeur critique de la fonction génératrice, donc de la fonctionnelle d'action associée à H. Il est possible ensuite d'associer une réduction de dimension finie S_k, qui est donc aussi une fonction génératrice de $\phi_H^k(M)$ dont la forme quadratique est définie positive ; [5] dans ce cas

$$\min S_k = l_-(S_k) \ .$$

Ainsi par unicité des invariant spectraux associés à une même lagrangienne :

$$\min \mathcal{A}_L^k = \min S_k = l_-(S_k) \ .$$

On utilise enfin le fait que la théorie des fonctions génératrices traite de la cohomologie de Floer suivant nos conventions de signes. Ainsi,

$$\min \mathcal{A}_L^k = l_-(S_k) = -l_+(\phi_H^k)$$

Cela donne :

$$\alpha_H(0) = \lim_{k\to\infty} \frac{l_+(\phi_H^k)}{k} = \mu_0(\phi_H)$$

comme souhaité.

□

Il serait souhaitable que l'on puisse retrouver les autres objets de la théorie d'Aubry-Mather d'un point de vue géométrique et symplectique. Nous proposons dans la suite de ce travail des pistes pour généraliser la théorie de Mather à un cadre non-convexe.

5. Une preuve de cela peut être trouvé dans la dernière version de [Vi2], appendix D.

4.1.2 Γ-convergence des l_+

On suppose $\mathcal{C}^\infty(T^*M \times \mathbb{S}_1) = E$. Dans cette section nous supposons connu la théorie de la Γ- convergence utilisée dans de nombreux problèmes variationnels. Sinon nous référons le lecteur à [D].

On s'intéresse pour toute suite H^n dans E à la suite :

$$a_n := \frac{l_+(\phi^n_{H^n})}{n}$$

Lemme 4.4. *On suppose également qu'il existe $H \in E$ tel que $\int max(H - H^n)dt$ converge vers 0 (en fait on peut demander moins). Alors :*

$$liminf a_n \geq \lim_n \frac{l_+(\phi^n_H)}{n} = \bar{H}(0)$$

Démonstration. D'après la propriété de continuité des invariants spectraux.

$$\int_0^1 max(nH_{nt} - nH^n_{nt})dt \geq l_+(\phi^n_H) - l_+(\phi^n_{H^n})$$

$$n\int_0^1 max(H_u - H^n_u)du \geq l_+(\phi^n_H) - l_+(\phi^n_{H^n})$$

On a donc :

$$\forall \epsilon, \exists n_0, \forall n \geq n_0, l_+(\phi^n_{H^n}) \geq l_+(\phi^n_H) - n\epsilon$$

ce qui implique le résultat. □

Ce lemme est fondamental dans l'étude des perturbations de l'homogénéisé. Prenons $H_\epsilon = H + \epsilon F$ alors on le résultat suivant :

Proposition 4.5. *La suite de fonctions définie par $f_n(\epsilon) = \frac{l_+(\phi^n_{H_\epsilon})}{n}$ Γ-converge vers $\bar{H}_\epsilon(0)$.*

Démonstration. La suite constante $\epsilon_n = \epsilon$ vérifie $\lim_{n\to\infty} f_n(\epsilon_n) = \overline{H}_\epsilon(0)$ telle que la limite est atteinte par une suite. Le lemme précédent donne la propréiété suivante :

$$\forall \epsilon_n, \text{ telle que } \epsilon_n \to \epsilon, \liminf \frac{l_+(\phi^n_{H_{\epsilon_n}})}{n} \geq \overline{H}_\epsilon(0)$$

□

On peut également choisir un sous espace de dimension finie généré par N hamiltoniens F_i et obtenir

$$H_\epsilon = H + \sum_{i=0}^{N} \epsilon F_i$$

Il y a encore Γ-convergence des f_n vers $\bar{H}_\cdot(0)$.

On considère le cas particulier où $F_i = b_i \frac{\partial H}{\partial p_i}$ b étant un vecteur de $H^1(M)$ fixé. L'hamiltonien H_ϵ est alors un développement limité de $H(x_i, p_i + \epsilon b_i)$.

4.1.3 Sous-différentiel

Nous allons comparer comme dans la théorie classique d'Aubry-Mather, le sous différentiel de f, à l'existence de mesures invariantes, d'action $\bar{H}(0)$ et de vecteur de rotation un élément du sous-différentiel de f en 0. Il existe dans la littérature plusieurs définitions de sous-différentiel. Il est commode dans le cadre de la théorie classique d'utiliser le sous-différentiel proximal dont nous donnons la définition par la suite, il est particulièrement bien adapté au cas des fonctions lipshitziennes et convexes qui apparaissent dans le cas Tonelli. Ici, f est à support compact et non convexe, nous utiliserons la définition du sous différentiel proximal. Le sous-différentiel ne capture pas toujours l'information souhaitée. Nous pallions partiellement à cette difficulté en introduisant un sous différentiel positif et négatif.

Définition 4.6. Nous dirons que $v \in T^*M$ appartient à $\partial^+ f|_{x_0}$ si il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tels que

$$\min_{x \in X} f(x) - < v_0, x - x_0 > + A d(x, x_0)^2 = f(x_0)$$

Nous dirons que $v \in T^*M$ appartient à $\partial^- f|_{x_0}$ si il existe p et $A \in \mathbb{R}^+$ tels que

$$\max_{x \in X} f(x) - < v_0, x - x_0 > - A d(x, x_0)^2 = f(x_0)$$

Remarque 4.7. Dans le cas, par exemple de $f(x) = arcsin(sin(x))$ le sous différentiel positif (sous différentiel proximal) en $\frac{\pi}{2}$ est vide, alors que l'on aimerait que l'opération $f \to -f$ induisent une certaine symétrie.

Cependant, la définition précédente ne permet pas de voir des points selles non différentiables comme pour $f(x, y) = |x| - |y|$ en $(0, 0)$ comme des valeurs critiques. Comment également considérer $f(x) = \sqrt{|x|}$ qui n'est plus lipschitzienne mais qui peut arriver comme homogénéisé de fonctions continues ? Nous verrons dans la partie II que l'introduction des faisceaux pourrait s'avérer être un outil intéressant dans ces cas là.

Nous introduisons maintenant le théorème fondamental de la Γ-convergence.

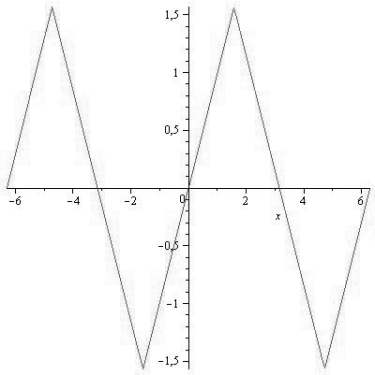


FIGURE 1 – $f(x) = Arsin(sin(x))$

Theorème 4.8 (DalMaso). *Soit (F_n) une suite de fonctions d-équicoercives $\Gamma(d)$-convergente vers F. Alors on a la convergence du minimum :*

$$\min\{F(x) : x \in X\} = \liminf_n F_n(x) : x \in X.$$

On a de plus la convergence des minimiseurs :

$$si\ x_n \to x\ et\ \lim_n F_n(x_n) = \liminf_n F_n,$$

Alors x est un minimiseur pour F.

Theorème 4.9. *Pour tout (b_i) vecteur dans le sous-différentiel de $\bar{H}$ en ϵ_0, il existe une mesure invariante de vecteur de rotation (b_i) qui a pour action moyenne $\bar{H}(\epsilon_0)$*

Démonstration. On pose $H_\epsilon(x,p) = H(x,p+\epsilon)$. Sans perdre de généralité supposons que $b = 0$ et $\epsilon_0 = 0$. On pose $A > 0$ tel que $A|\epsilon|^2 + \frac{l_+(\phi^n_{H_\epsilon})}{n}$ est strictement coercif (n'admet alors qu'un unique minimum) et Γ-converge donc aussi vers $A|\epsilon|^2 + \bar{H}(\epsilon)$ qui possède un unique minimum en 0. Nous allons utiliser le théorème de Dal Maso dans le cadre du chapitre précédent mais par l'absurde. En effet, le minimum de

$$f_n(\epsilon) := A|\epsilon|^2 + \frac{l_+(\phi^n_{H_\epsilon})}{n}$$

est atteint pour une valeur critique de la fonction,

$$(\gamma, \epsilon) \mapsto -\int_\gamma \lambda + \frac{1}{n}\int_\gamma H(x_i, p_i + \epsilon_i) + A|\epsilon|^2$$

On obtient donc l'équation par différentiation :

$$\epsilon_{i,n} = \frac{2}{An} \int_0^n \frac{\partial H}{\partial p_i}(\gamma_{\epsilon_{(i,n)}}(t))dt$$

avec γ_ϵ orbite critique du problème de Floer lagrangien au temps n.

Par l'absurde, si $\epsilon_{i,n}$ (qui est bornée) ne possèdent pas 0 comme valeur d'adhérence d'après le théorème fondamental de la Γ-convergence $\exists \tilde{\epsilon} \neq 0$ tel que $\min f = f(\tilde{\epsilon})$ ce qui est impossible par hypothèse sur A. Donc, $\lim_n \epsilon_{i,n} = 0$, il vient :

$$\lim_n Rot(\mu_{i,n}) := \lim_n \frac{1}{n} \int_0^n \frac{\partial H}{\partial p_i}(\gamma_{\epsilon_{(i,n)}}(t))(t)dt = 0$$

Les mesures $\mu_{i,n}$ étant les poussées en avant de la mesure uniforme sur $[0, n]$ par γ_{ϵ_n}. Celles-ci restent dans une région bornée, et ont donc une valeur d'adhérence pour la convergence faible des mesures μ. Cette mesure à donc un vecteur de rotation nul et d'action moyenne la limite des action des γ_{ϵ_n} soit $\bar{H}(0)$. Enfin on vérifie que la limite est invariante. En effet, les $\mu_{i,n}$ sont presque invariantes avec une erreur de l'ordre de $\frac{1}{n}$. □

4.1.4 Homogénéisé d'une perturbation

Un résultat précédent sur la perturbation des invariants spectraux, nous permet d'effectuer la conjecture suivante :

Conjecture 4.10. Pour tout H, le sous-différentiel de $H \mapsto \bar{H}(0)$ est l'ensemble des mesures de Mather pour un sens à préciser pour chacun des objets.

4.1.5 Vers des ensembles de Mather pour la théorie non convexe

Nous n'avons pas décrit jusqu'à présent ce qui serait la généralisation de l'ensemble des mesures de Mather. Tout d'abord, il faut noter que pour tout hamiltonien H, il est possible d'associer un ensemble de mesures comme suit :

$$\mathcal{M}(H)_k = \{\gamma_\sharp \mathscr{L}eb_{[0,k]} | \gamma \text{ lacets critiques de valeur } l^+, \gamma(0) \in 0, \gamma(k) \in 0\}$$

Dans le cas d'un hamiltonien à support compact, ou Tonneli, cet ensemble de mesures est borné pour tout k. On peut donc définir l'ensemble des limites faibles.

$$\mathcal{M}(H) = \{\mu | \mu = \lim_k \mu_k, \mu_k \in \mathcal{M}(H)_k\}$$

Cet ensemble est alors constitué de mesures invariantes par le flot de H, et enfin, l'intégrale de H contre ces mesures donne $\overline{H}(0)$.

4.2 Rigidité du Crochet de Poisson

On notera $\zeta = \zeta_0$. La propriété (v) de ζ implique un théorème de rigidité du crochet de Poisson. Celui-ci était déjà connu sur des variétés symplectiques compactes, du principalement à l'existence de quasi-états partiels établie par Entov et Polterovich. Récemment dans [Pol2], ce genre d'inégalité semble avoir une interprétation en terme de quantification.

Theorème 4.11. *Il existe des constantes*[6] $C, C' > 0$ *telles que si* $\{f_i\}_{i=1}^K$ *sont des fonctions lisses telles que le support de chacune d'entres elles est dominée par un élément d'une collection d'ouverts déplaçables* $\mathcal{U}$*, et qui satisfont* $\sum_i f_i|_M \geq 1$*, alors*

$$\max_{i<j} \|\{f_i, f_j\}\|_{C^0} \geq \frac{C}{e(\mathcal{U})K^3}$$

De plus, si il existe un nombre k *tel que le nombre de supports des* f_j *s'intersectant en un point de* T^*M *est au plus* k*, alors :*

$$\max_{i<j} \|\{f_i, f_j\}\|_{C^0} \geq \frac{C'}{e(\mathcal{U})kK^2}$$

Démonstration. On note $r_k := \sum_{i=1}^{k-1} f_i$, alors :

$$\begin{aligned}
1 \leq \xi_{r_K} \leq & \sum_{k=1}^{K-1} |\xi(r_{k+1}) - \xi(r_k)| \\
& \leq \sum_{k=1}^{K-1} |\xi(r_{k+1}) - \xi(r_k) - \xi(f_k)| \\
& \leq \sum_{k=1}^{K-1} \sqrt{2e(\mathcal{U})\|\{r_k, f_k\}\|} \\
& \leq \sum_{k=1}^{K-1} \sqrt{2e(\mathcal{U}) \sum_i^k \|\{f_i, f_k\}\|} \\
& \leq \sum_{k=1}^{K-1} \sqrt{2e(\mathcal{U}) \max_{i<k} ||\{f_i, f_k\}||k} \\
& \leq \sqrt{2e(\mathcal{U}) \max_{i<j} ||\{f_i, f_k\}||} \sum_{k=1}^{K-1} \sqrt{k} \\
& \leq \sqrt{2e(\mathcal{U}) \max_{i<j} ||\{f_i, f_k\}||} \tfrac{2}{3} K^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

6. Au moment de l'écriture les meilleures constantes connues sont $C \geq \frac{9}{8}$ et $C' \geq 1/2$.

4.3 Non-déplaçabilité

Nous étudions ici les applications de notre construction à la non déplaçabilité comme dans [EP2], [EP3] qui l'ont traitée dans le cas des variétés symplectiques fermées.

Conformément aux notations de [EP3], nous définissons :

Définition 4.12. Un sous-ensemble $X \subset T^*M$ est dit ζ-superlourd, ou superlourd, si pour toute fonction $f \in C_c^\infty(T^*M)$ avec $f|_X = c \in \mathbb{R}$, on a $\zeta(f) = c$.

Remarque 4.13. L'invariance par conjugaison dans $\mathcal{G}$ de ζ, implique que l'ensemble des sous-ensembles superlourds est aussi invariant par symplectomorphisme hamiltonien .

Lemme 4.14. *Un sous ensemble X est superlourd si et seulement si pour tout f $\zeta(f) \leq \max_X f$.*

Démonstration. Supposons que X est superlourd pour un f lisse et soit $c = \max_X f$. On prend, $g = max(c, f)$ alors $g|_X = c$ et$f \leq g$. On a alors,

$$\zeta(f) \leq \zeta(g) \leq c$$

Réciproquement si $f|_X = c$, alors $\zeta(f) \leq c$. D'autre part

$$c = \min_X f = -\max_X(-f) \leq -\zeta(-f) \leq \zeta(f)$$

où nous utilisons la propriété (vii) du théorème 3.10. Ainsi $\zeta(f) = c$. □

Les ensembles superlourds participent au phénomène de rigidité symplectiques puisqu'il s'intersectent mutuellement :

Proposition 4.15. *Soit X, X' deux ensembles superlourds ; alors $X \cap X' \neq \varnothing$.*

En particulier, on voit qu'un ensemble superlourds est non-déplaçable.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde, et prenons $f, f' \in C_c^\infty(T^*M)$ tels que $f|_X = f'|_{X'} = -1$ et $\|f\|_{C^0} = \|f'\|_{C^0} = 1$, et tels que les supports de f, f' sont disjoints. En particulier cela signifie qu'ils commutent pour le crochet de Poisson. Alors d'après la propriété (vii) de ζ,

$$\zeta(f + f') \leq \zeta(f) + \zeta(f') = -2$$

ce qui impossible à cause de $|\zeta(f + f')| \leq \|f + f'\|_{C^0} = 1$. □

La propriété suivante est essentielle dans la construction d'ensemble superlourds :

Proposition 4.16. *Soit X un compact tel que $T^*M - X = U_\infty \cup \bigcup_i U_i$ est une union disjointe avec U_∞ appartenant à la composante connexe non bornée (l'union des composantes non bornées dans le cas $\dim M = 1$). Supposons de surcroit que U_∞ est disjointe de la section nulle et que chacun des U_i est déplaçable. Alors X est superlourd.*

Démonstration. Nous devons montrer que si $f \in C_c^\infty(T^*M)$ satisfait $f|_X = c$ alors $\zeta(f) = c$. Par la propriété de continuité C^0 de ζ il suffit de le montrer uniquement pour tout f égal à c sur un voisinage ouvert de X. Ainsi soit f une telle fonction. Soit $\widehat{X} = X \cup \bigcup_i U_i = T^*M - U_\infty$ et soit $\widehat{f}$ défini comme il suit : coïncidant avec f sur U_∞ et valant c sur $\widehat{X}$. Alors $\widehat{f}$ est lisse et $\widehat{f}|_M = c$ puisque $\widehat{X} \supset M$. Il s'en suit que $\zeta(\widehat{f}) = c$. D'un autre coté, si nous définissons la fonction f_i par $f_i|_{U_i^c} = 0$ et $f_i|_{U_i} = c - f$ pour tout i, il vient que f_i est une fonction lisse à support compact dans U_i, qui est déplaçable, et tous les f_i commutent deux par deux avec f, et $\widehat{f} = f + \sum_i f_i$. Cela implique, en adjoignant les propriétés de ζ, que $\zeta(f) = \zeta(\widehat{f}) = c$. □

Exemple 4.17. Le squelette de codimension 1 d'une triangulation du disque unité du cotangent dans T^*M, considéré comme une variété à bord, satisfait les hypothèses de la proposition et est donc superlourd.

Enfin, dans le but d'obtenir encore plus d'exemple, nous formulons le résultat suivant.

Theorème 4.18. *Soit $X_i \subset T^*M_i$, $i = 1, 2$, des sous-ensembles superlourds, alors le produit $X_1 \times X_2 \subset T^*M_1 \times T^*M_2 = T^*(M_1 \times M_2)$ est superlourd.*

Démonstration. Prenons $X = X_1 \times X_2$. Il suffit de montrer que pour tout f tel que $f|_X = c$, nous ayons $\zeta(f) \leq c$. Grâce à la propriété de continuité lipschitzienne de ζ, il suffit de montrer cela pour tout fonction f qui vaut c sur un voisinage de X. Ainsi choisissons une fonction f et soit U un voisinage. Alors $U_i \supset X_i$ est un voisinage de X_i tel que $\overline{U_1 \times U_2} \subset U$. Soit S_i un disque fermé du cotangent T^*M_i qui contient l'image du support de f sous la projection $T^*(M_1 \times M_2) \to T^*M_i$. Enfin, prenons $M > 0$ un réel qui vérifie $\min(2M, M + c/2) \geq \max f$. On peut alors considérer des fonctions $f_i \in C_c^\infty(T^*M_i)$ telles que $f_i|_{X_i} = c/2$, $f_i|_{U_i - X_i} \geq c/2$, $f_i|_{S_i - U_i^c} = M$, et $f_i|_{S_i^c} \geq 0$. Alors, $f_1 \oplus f_2 \geq f$ sur S, et de plus $f_1 \oplus f_2$ est positif sur un petit voisinage V de $S_1 \times S_2$. De plus, le flot de $f_1 \oplus f_2$ laisse la section nulle dans $S_1 \times S_2$. Soit g une troncature de $f_1 \oplus f_2$ à l'extérieur de V. Alors g est une fonction à support compact qui vérifie $g \geq f$, et de plus le flot hamiltonien de g laisse la section nulle dans $S_1 \times S_2$.

La définition de ζ pour des hamiltoniens à flot complet montre que si h est à flot complet et h' est une troncature à l'extérieur d'un compact qui contient l'image de la section nulle sous le flot de h, alors $\zeta(h) = \zeta(h')$ (lemme 2.9). Les

propriétés de ζ (théorème 3.10) montrent alors que

$$\zeta(f) \leq \zeta(g) = \zeta_1(f_1) + \zeta_2(f_2) = c$$

□

Corollaire 4.19. *Soit $X_i, X_i' \subset T^*M_i$, $i = 1, \ldots, k$ des ensembles comme dans la proposition 4.16. Alors $\prod_i X_i \cap \phi\big(\prod_i X_i'\big) \neq \varnothing$ pour tout difféomorphisme hamiltonien ϕ on $T^*\prod_i M_i$. En particulier, $\prod_i X_i$ est non-déplaçable.*

4.4 Géométrie du groupe (Ham, d_{Hofer})

Pour $\phi \in \mathcal{G}$ prenons

$$\rho(\phi) = \inf_H \int_0^1 \operatorname{osc} H_t \, dt$$

avec osc = max − min dont l'infinimum est pris sur tous les hamiltoniens à support compact dont le temps 1 est ϕ. Prenons alors aussi :

$$\rho(\phi, \psi) = \rho(\phi\psi^{-1})$$

La fonction ρ est une métrique $\mathcal{G}$, appelée la métrique de Hofer. Elle est biinvariante [Pol1].

Le groupe $\mathcal{G}$ possède d'autres normes biinvariantes introduites par Viterbo, Schwarz, Oh, et dans notre contexte par Frauenfelder et Schlenk [FS]. A partir des invariants spectraux $c_\pm$: $\mathcal{G} \to \mathbb{R}$, on définit la norme spectrale par

$$\Gamma(\phi) = c_+(\phi) - c_-(\phi)$$

On utilise 2.3.4. Puisque cette norme est invariante par conjugaison [FS], elle engendre une autre métrique biinvariante sur $\mathcal{G}$, que nous appelons distance spectrale.

$$\Gamma(\phi, \psi) = \Gamma(\phi\psi^{-1})$$

Il est démontré que[FS] :

$$\Gamma(\phi, \psi) \leq \rho(\phi, \psi)$$

On considère alors la norme donnée par l'oscillation osc sur $C_c^\infty(0,1)$.

Theorème 4.20. *(i) Si M admet une 1-forme fermée non singulière, alors il existe un plongement isométrique $(C_c^\infty(0,1), \operatorname{osc})$ dans $(\mathcal{G}, \rho)$; plus précisément, il existe une fonction ι: $C_c^\infty(0,1) \to \mathcal{G}$, telle que*

$$\rho(\iota(f), \iota(g)) = \operatorname{osc}(f - g)$$

(ii) sinon il existe un plongement isométrique de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{G}$; (iii) la même chose est valable si on remplace la distance d'Hofer par la distance spectrale.

Que l'on peut comparer avec [Py], où l'auteur construit grâce à des inégalités énergie-capacités des plongements quasi-isométriques de $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$, dans le groupe hamiltonien d'une variété symplectique qui admet un plongement lagrangien π_1-injectif d'une variété Riemannienne de courbure sectionnelle négative.

Démonstration. Occupons nous d'abord de (ii). Soit $H \in C_c^\infty(T^*M)$ tel que $H|_M = 1$ et $0 \leq H \leq 1$ partout. Définissons $\iota\colon \mathbb{R} \to \mathcal{G}$ par $t \mapsto \phi_{tH}$. On obtient

$$\rho(\iota(t), \iota(t')) \leq \operatorname{osc}(t - t')H = |t - t'|$$

D'un autre coté,

$$\rho(\iota(t), \iota(t')) \geq |\mu_0(\phi_{tH}) - \mu_0(\phi_{t'H})| = |t - t'|$$

car $tH|_M = t$ et $t'H|_M = t'$.

La preuve de (i) joue sur une amélioration de cette astuce. Prenons une 1-forme fermée non singulière α et soit $a = [\alpha] \in H^1(M; \mathbb{R})$. Soit $H\colon T^*M \to \mathbb{R}$ lisse, telle que la restriction de H au graphe de $t\alpha$ vaille pour $t \in [0, 1]$. Cela est rendu possible du fait que α n'a pas de zéros. Définissons une application $C_c^\infty(0,1) \to C_c^\infty(T^*M)$ par $f \mapsto H_f := f \circ H$. Elle est linéaire. Et prenons $\iota\colon C_c^\infty(0,1) \to \mathcal{G}$ définie par $\iota(f) \equiv \phi_f := \phi_{H_f}$. Celle-ci est un homomorphisme de groupe. Nous avons alors :

$$\max H_f = \max f$$

et idem pour min et osc. Par conséquent,

$$\rho(\iota(f), \iota(g)) \leq \operatorname{osc}(H_f - H_g) = \operatorname{osc}(f - g)$$

De plus, si F, G sont des hamiltoniens engendrant ϕ_f, ϕ_g, alors

$$\mu_{ta}(\phi_f) - \mu_{ta}(\phi_g) \leq \int_0^1 \max(F_t - G_t)\, dt$$

mais

$$\mu_{ta}(\phi_f) - \mu_{ta}(\phi_g) = f(t) - g(t) = (f - g)(t)$$

par construction, puisque $f \circ H$ vaut $f(t)$ sur le graphe de $t\alpha$, et de la même manière pour g. Il s'en suit que

$$\max(f - g) \leq \int_0^1 \max(F_t - G_t)\, dt$$

et

$$\min(f - g) \geq \int_0^1 \min(F_t - G_t)\, dt$$

Ces deux inégalités, nous permettent d'affirmer que

$$\operatorname{osc}(f - g) \leq \rho(\phi_f, \phi_g) = \rho(\iota(f), \iota(g))$$

□

On définit la norme asymptotique de Hofer :

$$\rho_\infty(\phi) = \lim_{k\to\infty} \frac{\rho(\phi^k)}{k}$$

Comme dans le cas de la norme d'Hofer, on peut définir une version asymptotique de la norme spectrale :

$$\Gamma_\infty(\phi) = \lim_{k\to\infty} \frac{\Gamma(\phi^k)}{k}$$

On obtient alors

Proposition 4.21. *Soit $\phi \in \mathcal{G}$. Alors :*

$$\mathrm{osc}_{a\in H^1(M;\mathbb{R})}\, \mu_a(\phi) \leq \Gamma(\phi) \leq \rho(\phi)$$

que nous homogénéisons pour obtenir :

$$\mathrm{osc}_{a\in H^1(M;\mathbb{R})}\, \mu_a(\phi) \leq \Gamma_\infty(\phi) \leq \rho_\infty(\phi)$$

Des résultats similaires peuvent être trouvés dans [PS], [Si2], [SV], [MZ].

Démonstration. Si H est un hamiltonien engendrant ϕ, alors pour tout $a \in H^1(M;\mathbb{R})$ on a

$$\int_0^1 \min H_t\, dt \leq \mu_a(\phi) \leq \int_0^1 \max H_t\, dt$$

Il suit que :

$$\int_0^1 \min H_t\, dt \leq \min_{a\in H^1(M;\mathbb{R})} \mu_a(\phi) \leq \max_{a\in H^1(M;\mathbb{R})} \mu_a(\phi) \leq \int_0^1 \max H_t\, dt$$

et donc,

$$\mathrm{osc}_{a\in H^1(M;\mathbb{R})}\, \mu_a(\phi) \leq \int_0^1 \mathrm{osc}\, H_t\, dt$$

qui implique le résultat sur la métrique de Hofer asymptotique. En ce qui concerne la distance spectrale, on a l'inégalité :

$$c_-(\phi) \leq l_+(\phi) \leq c_+(\phi)$$

L'inégalité triangulaire pour $c_\pm$ implique que la suite $\{c_+(\phi^k)\}_{k\geq 1}$ est sous-additive, donc $\{c_-(\phi^k)\}_{k\geq 1}$ est super-additive, ce qui donne :

$$c_-(\phi) \leq \frac{l_+(\phi^k)}{k} \leq c_+(\phi)$$

puis

$$c_-(\phi) \leq \mu_0(\phi) \leq c_+(\phi)$$

Les invariants spectraux $c_\pm$ sont invariants par les symplectomorphismes T_α (référence à la preuve de 3.9 pour leurs définitions), alors

$$\mathrm{osc}_{a\in H^1(M;\mathbb{R})}\, \mu_a(\phi) \leq c_+(\phi) - c_-(\phi) = \Gamma(\phi).$$

Enfin, on note que la norme spectrale satisfait $\Gamma(\phi) \leq \rho(\phi)$. □

Il existe également un lien entre la théorie de Aubry-Mather et la géométrie de Hofer , comme étudié dans [Si1]. On prend $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions hamiltoniennes sur le fibré en disque du cotangent $B \subset T^*M$ qui s'annulent aux bords et qui admettent une extension lisse à tout le cotangent qui dépend seulement de $\|p\|$ et t à l'extérieur du disque unité. On peut définir une version de la norme de Hofer par :

$$\rho_{\mathcal{H}}(\phi) = \inf_{H \in \mathcal{H}} \int_0^1 \operatorname{osc} H_t \, dt$$

où ϕ: $B \to B$ est le temps 1 d'un flot hamiltonien de $\mathcal{H}$ et H décrivant tous les hamiltoniens dans $\mathcal{H}$ engendrant ϕ. On a :

Theorème 4.22. *Soit $\widetilde{H}$ un hamiltonien qui s'annule pour $\|p\| = 1$ et qui dépend seulement de $\|p\|$ pour $\|p\| \geq 1$. Soit $H = \widetilde{H}|_B \in \mathcal{H}$. Alors*

$$\rho_{\mathcal{H}}(\phi_H) \geq - \min_{H^1(M;\mathbb{R})} \alpha_{\widetilde{H}}$$

Cela a été prouvé dans [Si1] pour $M = \mathbb{T}^n$ et dans [ISM] pour une classe d'hamiltonien du cotangent de n'importe qu'elle base, en utilisant d'autre méthode. Le minimum du membre de droite dépend seulement de H. Bien sûr, puisque nous avons une définition de la fonction α pour tout hamiltonien à temps complet et que la norme de Hofer est définie pour tout hamiltonien à support compact, la proposition 4.21 donne une formulation plus naturelle de la relation entre la norme de Hofer et la fonction α.

Démonstration. Considérons une fonction lisse f: $[0, \infty) \to [0, 1]$ telle que $f(t) = t$ pour $t \in [0, 1/2]$, $f(t) = 1$ pour $t \geq 2$ et $f'(t) \geq 0$ partout. Pour $\varepsilon > 0$ prenons $f_\varepsilon(t) = \varepsilon f(t/\varepsilon)$. Définissons $K_\varepsilon = f_\varepsilon \circ \widetilde{H}$. Alors, le flot de K_ε est engendré par les hamiltoniens à support compact $K_\varepsilon - \varepsilon$.

On prend alors (comme par exemple dans [SV]) :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \rho(\phi_{K_\varepsilon}) = \rho_{\mathcal{H}}(\phi_H)$$

puis, pour tout $a \in H^1(M; \mathbb{R})$ tel que $\|a\| < 1$, on a :

$$\alpha_{K_\varepsilon}(a) = \alpha_{\widetilde{H}}(a)$$

Enfin, on note que les minima $\min \alpha_{\widetilde{H}}$, $\min \alpha_{K_\varepsilon}$ sont tout deux négatifs et atteints pour $\{\|a\| < 1\} \subset H^1(M; \mathbb{R})$. Pour tout $\|a\| < 1$,on obtient :

$$\rho(\phi_{K_\varepsilon}) \geq -\mu_a(\phi_{K_\varepsilon}) = -\alpha_{K_\varepsilon}(a)$$

Ainsi,

$$\rho(\phi_{K_\varepsilon}) \geq - \min \alpha_{K_\varepsilon} = - \min \alpha_{\widetilde{H}}$$

et en laissant filer $\varepsilon \to 0$, on obtient le résultat escompté. □

4.5 Connexion avec d'autres constructions

Ici nous indiquons les relations avec des constructions analogues.

Lanzat [La1], [La2] démontre que dans certaines variétés symplectiques ouvertes le groupe hamiltonien à support compact (ou son revêtement universel) admet des quasi-morphismes, et donc que l'espace des fonctions lisses à support compact, admet un quasi-état symplectique. Il montre également comment construire un quasi-état partiel et un quasi-morphisme partiel sur une variété convexe (fortement semipositive). En particulier sa construction s'applique aux cotangents. Les invariants spectraux $c_+ \colon \mathcal{G} \to \mathbb{R}$, introduit dans 2.3.4, satisfont l'inégalité triangulaire et donc peuvent être homogénéisé pour obtenir une fonction $\nu \colon \mathcal{G} \to \mathbb{R}$, dont le tiré en arrière sur $C_c^\infty(T^*M)$ est noté η. Ces ν, η, en fait coïncide avec les fonctions de Lanzat sur les cotangents, et jouissent de propriétés analogues à μ_a, ζ_a. De plus, de par la comparaison des invariants spectraux lagrangiens et hamiltoniens (sous-section 2.3.5), nous pouvons conclure que $\mu_a \leq \nu$ et $\zeta_a \leq \eta$ pour tout $a \in H^1(M;\mathbb{R})$. En particulier, tout ensemble ζ_a-superlourd est η-lourd et donc les ensembles de la proposition 4.16 aussi. Cela signifie que η puisse être utilisé pour prouver la non déplaçabilité de tels sous ensembles. Cependant, puisque $\eta(f) = 0$ pour des fonctions négatives f, la collection de sous-ensemble η-superlourds est vide, et donc il n'y a pas d'application à la rigidité symplectique. Il est instructif de noté ici qu'en contraste, la collection des ζ_a-superlourds n'est pas vide.

Nous voudrions également faire remarquer que certains fibrés en disque du cotangent, tels que ceux du tore $\mathbb{T}^n$, admettent des plongements symplectiques dans des variétés symplectiques fermées dont le groupe hamiltonien possède de vrais quasi-morphismse, qui peuvent être tiré en arrière pour créer des quasi-morphismes sur le groupe hamiltonien de ce fibré en disque. Obtient on μ_0 par ce biais ? Un résultat partiel dans cette direction est présenté dans [MZ]. En particulier, il n'est pas clair que le quasi-morphisme sur le fibré en disque du tore soit invariant par revêtement comme μ_0.

Nous mentionnons également le fait que les invariants spectraux lagrangiens sur le groupe hamiltonien peuvent être traités dans le cas de toute variété lagrangienne asphèrique d'une manière analogue. Il faut alors travailler avec l'espace des lacets dont les extrémités appartiennent à la lagrangienne et qui représente l'élément trivial dans le π_1 relatif, puis introduire systématiquement des demi-disques holomorphes qui apparaissent dans les bords des espaces de modules . Le reste de la théorie est identique. Il faut mentionner qu'un travail sur les invariants spectraux dans ce cadre a été réalisé par Rémi Leclercq dans [Lec]. L'auteur y définit des invariants associés aux lagrangiennes au lieu des difféomorphismes hamiltoniens, en fait, sa construction permet une généralisation de la notre pour des lagrangiennes symplectiquement asphériques. Les applications que nous pourrions en tirer sont similaires à celles prouvées précédemment, puisqu'une fois les propriétés de quasi-morphisme partiel établis, les preuves restent les mêmes. Ainsi, la

seule application qui ne survivrait pas serait la correspondance avec la fonction α de Mather. Cependant, cela doit être plutôt pensé comme une généralisation que comme un problème. Dans le cadre développé ici, l'espace de définition de α, qui est $H^1(M)$, est concrétisé par un ensemble de lagrangiennes qui sont les graphes des 1-formes fermées. Ainsi, dans une version généralisée, la théorie d'Aubry-Mather possèderait comme ensemble de définition pour α les objets de la catégorie de Fukaya qui possèdent des morphismes remarquables et comme ensemble de valeurs, les quasi-morphismes associés à chaque lagrangienne. Il conviendrait également de quotienter cette catégorie de Fukaya, car de nombreuses lagrangiennes donne le même quasi-morphisme (en particulier si elles sont hamiltoniennement isotopes). Il est instructif de regarder le cas de $\mathbb{C}P^2$ bien que non asphérique. Les sous-variétés $\mathbb{R}P^n$ et $\mathbb{T}^n$ le tore de Clifford sont lagrangiennes et possèdent une homologie de Floer non nulle présentant un élément idempotent. Admettant l'existence de l'inégalité triangulaire, cela permet de créer des quasi-états et quasi-morphismes (la borne de capacité (comparer conjecture à conjecture 5.1) étant donnée par le volume de $\mathbb{C}P^n$. On obtient 2 quasi-états, Frol Zapolsky, conjecture que ceux ci sont égaux à celui découvert par Entov et Polterovich par homogénéisation des invariants hamiltoniens. L'argument est donné par une comparaison des invariants hamiltoniens et lagrangiens qu'il reste à écrire. Cela pourrait paraitre fort aride, cependant dans des cas comme $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, il existe au moins deux quasi-morphismes distincts, qui semblent correspondre (de par leurs supports) au quasi-morphismes créés par homogénéisation des invariants spectraux lagrangiens associés au produit des tores de Clifford (fibre non déplaçable) ainsi qu'à l'antidiagonale. Da manière encore plus générale, cela pose la question des relations entre catégorie de Fukaya et cohomologie quantique de la variété. Pour conclure, il serait intéressant également d'étudier les relations suffisantes au niveau des morphismes de la catégorie de Fukaya qui permettent d'assurer que deux quasi-morphismes sont égaux.

5 Conjecture de Viterbo sur les capacités

Dans ce chapitre, nous envisageons les résultats additionnels que l'on obtient si l'on considère la conjecture suivante vrai [7] :

Conjecture 5.1 (Viterbo). Soit M compacte. Il existe $C > 0$, pour tout L lagrangienne isotope à la section nulle par une isotopie hamiltonienne engendrée par H à support compact et telle que L soit incluse dans le fibré unitaire cotangent de T^*M, on a :

$$l_+(\phi_H) - l_-(\phi_H) \leq C$$

7. Il semblerait que dans le cas de la dimension 1, Frol Zapolsky sache prouver ce résultat, en utilisant une description combinatoire de l'homologie de Floer ainsi associée à la notion de profondeur de bord

On rappelle la définition d'un quasi-morphisme :

Définition 5.2. Soit G un groupe, on appelle μ: $G \to \mathbb{R}$ quasi-morphisme, si son défaut :

$$D(\mu) := \sup_{a,b \in G} |\mu(ab) - \mu(a) - \mu(b)|$$

est fini.

En particulier, la conjecture implique que l'homogénéisé défini par l_+ et par l_- est le même dans le cas d'hamiltoniens géométriquement bornés (dont le flot envoie tout compact dans un compact défini à l'avance). On a alors le théorème suivant, les preuves restant identiques par rapport à la section 3.2.

Theorème 5.3. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute classe $a \in H^1(M, \mathbb{R})$, μ_a: $\mathcal{G} \to \mathbb{R}$ vérifie :*

la restriction de $\mu_a|_{\mathcal{G}_r}$ est un quasi-morphisme homogène de défaut $D(\mu_a|_{\mathcal{G}_r}) \leq C(r + ||a||)$ qui sur $\mathcal{G}_r^0$ dégénère en un homomorphisme 2.7, et est invariant par conjugaison ;

En fait, comme les invariants spectraux l_+ et l_- encadrent tous les autres, l'homogénéisation de n'importe quel invariant spectral converge vers μ_a.

De plus, la version infinitésimale de μ_a, ξ_a est un quasi-état symplectique, c'est à dire vérifie en plus des propriétés de quasi-états partiels :

Proposition 5.4. – *Pour tout hamiltonien autonome à support compact H, K tels que $\{H, K\} = 0$ alors*

$$\xi_a(H + K) = \xi_a(H) + \xi_a(K)$$

– *Pour tout hamiltonien autonome à support compact H, $\xi_a(-H) = -\xi_a(H)$*

Démonstration. Le deuxième point résulte directement de la conjecture et des résultats de dualité sur les invariants spectraux. En ce qui concerne le premier point, nous avions déjà l'inégalité,

$$\xi_a(H + K) \leq \xi_a(H) + \xi_a(K)$$

quand nous avons montré que ξ_a est un quasi-état partiel. On utilise alors la première étape de cette preuve. Comme $\{-H, -K\} = 0$, $\xi_a(-H-K) \leq \xi_a(-H) + \xi_a(-K)$, donc

$$\xi_a(H + K) \geq \xi_a(H) + \xi_a(K)$$

□

5.1 Quasi-morphisme et cohomologie bornée de $\mathcal{G}_r$

Nous rappelons ici l'importance de la théorie des quasi-morphismes de groupe. Lorsque nous essayons de comprendre le groupe $\mathcal{G}_r$ de manière algébrique, il est tentant de comprendre ses morphismes. C'est en effet un bon moyen pour dévisser le groupe à travers les différents noyaux des morphismes qui sont des groupes simples. Le problème est que le groupe hamiltonien ne possède qu'un morphisme non trivial, le morphisme de Calabi :

$$Cal(\phi_H) := \int_x \int_t H(x,t) d\omega^n(x) dt$$

La notion de quasi-morphisme peut être alors comprise comme des morphismes à une erreur près appelé défaut. Celle-ci possède de nombreuses applications dans l'étude géométrique des groupes (discrets par exemple). Gromov a inscrit ce mécanisme dans une théorie plus vaste de cohomologie bornée qui étend dans un certain sens la cohomologie des groupes.

Rappelons que dans le cas d'un groupe on définit la cohomologie de G, $H^\bullet(G,\mathbb{R})$ par la cohomologie associée au complexe de cochaine $C^k(G,\mathbb{R}) = \{f\colon G^k \to \mathbb{R}\}$ et le cobord

$$\delta f(g_0,..,g_k) = f(g_1,..,g_k) + \sum_{i=1}^{k} (-1)^k f(g_0,..,g_i g_{i+1},..,g_k) + (-1)^{k+1} f(g_1,..,g_k)$$

Le premier groupe de cohomologie est alors l'ensemble des morphismes de G dans $\mathbb{R}$. La cohomologie bornée consiste à se restreindre à des cochaines bornées. On a par exemple $H^1_b = 0$ car constitué des morphismes bornés. Il existe un morphisme naturel entre les cocycles :

$$Z^2_b(G,\mathbb{R}) \to Z^2(G,\mathbb{R})$$

On obtient un morphisme :

$$H^2_b(G,\mathbb{R}) \to H^2(G,\mathbb{R})$$

dont le noyau est :

$$\mathcal{Q}(G) = QM_h(G,\mathbb{R})/Hom(G,\mathbb{R})$$

avec QM_h l'ensemble des quasi-morphismes homogènes.

Un corollaire important de la proposition 5.4 est le suivant :

Corollaire 5.5. *Pour $r > 0$,*

1. *si* $H^1(M,\mathbb{R}) \neq 0$ *alors* $Q(\mathcal{G}_r) \subset H_b^2(\mathcal{G}_r)$ *ne possède pas de base dénombrable ;*
2. *sinon ils sont non nuls.*

Démonstration. Il est évident que nous utilisons les μ_a qui sont bien des quasi-morphismes homogènes. Il reste à démontrer qu'il sont bien indépendants, nous utilisons alors la preuve 4.4 □

5.2 Commutativité du crochet de Poisson

Ayant lié l'homogénéisation à la théorie de Mather, il est naturel d'interpréter la propriété de quasi-morphisme en terme de la fonction α :

Corollaire 5.6. *Si* H, K *sont deux hamiltoniens autonomes (possiblement Tonelli) et* $\{H,K\} = 0$ *alors*

$$\alpha_H + \alpha_K = \alpha_{H+K}$$

Ce résultat est à rapprocher de ceux de [Zav]. Ce dernier ne démontre pas exactement cela, mais plutôt que les ensembles de Mather de H, K sont identiques. ce qui implique notre résultat.

5.3 Equation d'Hamilton Jacobi

Nous avons beaucoup parlé des relations de l'homogénéisation avec la théorie de Mather. Dans la littérature, une autre approche de cette théorie est obtenue par la théorie KAM faible de Fathi. Celle-ci utilise les solutions de l'équation d'Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = H_t \circ du \ (HJ)$$

pour définir les objets de la théorie de Mather. La théorie KAM utilise des solutions appelées solution de viscosité. D'un autre coté il existe une notion de solution variationnelle développée par Chaperon et qui utilise les invariants spectraux. La différence entre ces deux notions existe réellement d'après un exemple de Laudenbach. Cependant dans le cas Tonelli, Zhukovskaya [Zhu] a démontré que ces deux notions correspondent (nous évitant ainsi de rappeler la notion de solution de viscosité). Il semblerait qu'il existe même plus de connexions, puisque récemment d'après des résultats de Wei Qiaoling, il est possible de construire les solutions de viscosités à partir des solutions variationnelles. Celle-ci utilise la projection de $\phi_H(L)$ sur un sous espace des "lagrangiennes lipshitz" donnée par le sous différentiel de Clarke de la solution variationnelle. Puis, elle calcule de nouveau la solution variationnelle en prenant la précédente comme condition initiale. En réalisant cet algorithme sur des pas de temps toujours plus courts,

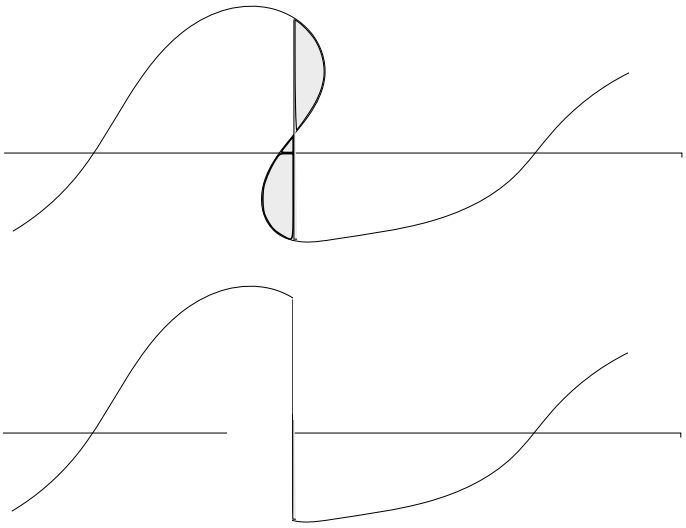
elle obtient les solutions de viscosité ainsi que la propriété de semi-groupe de ces solutions. On peut alors penser aux solutions de viscosités, comme à une perte de mémoire du système étudié.

Définition 5.7. La solution variationnelle de l'équation d'Hamilton-Jacobi (HJ) est donnée par la fonction lipschitzienne :

$$u(t,q) = l_q(\phi_H^t)$$

avec l_q l'invariant spectral associé à l'unique classe d'homologie de $HF(M, T_q^*M, H)$ pour des chemins définis jusqu'au temps t.

Il a été défini en premier lieu dans la théorie des fonctions génératrices, cependant cette dernière définition est équivalente, c'est le sélecteur d'action. Cette fonction est solution de (HJ) du fait que le graphe de sa différentielle satisfasse l'équation presque partout (ce qui est différent de satisfaire l'équation en tous ses points de différentiabilité qui sont de mesure pleine).



La conjecture sur la borne des capacités implique également un théorème sur les solutions d'Hamilton-Jacobi.

Theorème 5.8. *L'asymptotique des solutions de (HJ) est donnée par :*

$$\lim_{t\to\infty} ||\frac{u(t,.)}{t} - \alpha_H(0)||_{C^0} = 0$$

Démonstration. Il existe une formule de comparaison des invariants spectraux due à Oh :

$$l_-(\phi_H^t) \leq l_q(\phi_H^t) \leq l_+(\phi_H^t)$$

Il s'en suit que

$$\frac{l_-(\phi_H^t)}{t} - \alpha_H(0) \leq \frac{l_q(\phi_H^t)}{t} - \alpha_H(0) \leq \frac{l_+(\phi_H^t)}{t} - \alpha_H(0)$$

□

6 Homogénéisation sur d'autres variétés

6.1 Homogénéisation visqueuse

Il se pose alors la question de l'existence d'un objet sur le tore similaire à l'homogénéisé sur les cotangents, quitte à sacrifier certaines propriétés comme la linéarité sur les sous-algèbres commutatives. Tout d'abord, nous montrons que bien que la distance de Viterbo soit définie pour les difféomorphismes hamiltoniens du tore, l'homogénéisation telle qu'elle a été précédemment définie ne peut exister par défaut de convergence de certains hamiltoniens. Ensuite, nous introduirons la notion d'homogénéisation visqueuse pour les hamiltoniens bornés de $T^*\mathbb{T}^n$. Après avoir énoncé quelques unes de ces propriétés, nous donnerons une application pour les difféomorphismes du tore.

6.1.1 Absence d' homogénéisation classique sur $\mathbb{T}^{2n}$

Bien sûr, il serait possible d'utiliser la version de l'homogénéisé développée pour les flots complets. Cependant, nous ne savons pas si la méthode qui suit donne le même résultat.

La première idée que l'on a lorsque l'on veut étendre l'homogénéisation sur le tore est de se donner pour tout hamiltonien $H \in Ham(\mathbb{T}^{2n})$ un hamiltonien H' sur le cotangent de $\mathbb{T}^n$. Ce dernier est alors périodique en les variables fibres. Si dans certains cas le flot se comportant bien (flot géométriquement bornée), on peut homogénéiser sans trop de difficultés, que dire du cas $H(q,p) = f(q)$?

Une manière de comprendre l'impossibilité d'une telle définition est de calculer la distance de Viterbo sur le tore entre le difféomorphisme hamiltonien ϕ_{f_k} et Id. En effet si f_k converge c'est vers une fonction ne dépendant que de p donc constante. Ici, le graphe $\Delta_k := \Gamma_{\phi_{f_k}}$ inclus dans $\mathbb{T}^{2n} \times \overline{\mathbb{T}^{2n}}$ est une variété lagrangienne tout comme $\Delta := \Gamma_{Id}$ lui même isomorphe à $\mathbb{T}^{2n}$.

Plutôt que d'appliquer le théorème des voisinages tubulaires pour se ramener au cotangent, on remarque qu'il existe un relèvement gobal de $\mathbb{T}^{2n} \times \overline{\mathbb{T}^{2n}}$ dans $T^*\Delta$. Par le théorème suivant, nous montrerons donc que le relevé $\tilde{\Delta}_k$ reste à distance égale de l'identité et ne peut donc converger.

Theorème 6.1. *Pour tout f lisse ne dépendant que de q,*

$$\gamma(\tilde{\Delta}_k, 0) = osc(f)$$

où osc(f) représente l'oscillation maximale de f, 0 la section nulle de $T^*\Delta$ et γ est la distance de Viterbo sur les lagrangiennes.

Démonstration. Le difféomorphisme au temps 1 ϕ_{f_k} est explicite, il s'écrit :

$$\phi_{f_k}(q,p) = (q, p + nf'(nq))$$

On a alors accès au relevé de son graphe. La fonction génératrice elle aussi est exprimable et ses points critiques correspondent aux intersections du relevé avec la section nulle. □

Remarque 6.2. On obtient par la même un exemple de partie bornée non compacte pour la distance de Viterbo.

L'impossibilité d'appliquer les méthodes standards d'homogénéisation, nous amène à généraliser le problème, à savoir : Comment définir une notion d'homogénéiser en accord avec le cas à support compact (ou coercif) pour les fonctions bornées de $T^*\mathbb{T}^n$.

6.1.2 L'homogénéisation visqueuse comme réponse

Dans la théorie des équations de Hamilton-Jacobi, une des méthodes de résolution est celle de *viscosité*. Elle consiste à se ramener à une équation du second ordre que l'on sait résoudre par l'ajout d'un terme laplacien $\epsilon\Delta u$. Faisant tendre ϵ vers 0, on obtient ce que l'on appelle la solution de viscosité.

On s'inspire de cette méthode par la suite pour modifier l'hamiltonien, permettre le calcul, et faire tendre ensuite le paramètre de modification vers 0.

Définition 6.3. Etant donné un Hamiltonien $H \in \mathcal{B}(T^*\mathbb{T}^n)$ ensemble des fonctions bornées, et g métrique sur $T^*\mathbb{T}^n$, $H^g_\epsilon := \epsilon g_q(p,p) + H$

On peut alors définir l'objet voulu :

Définition 6.4. $\forall H \in \mathcal{B}(T^*\mathbb{T}^n)$, on a *l'homogénéisé visqueux* donné par :

$$\mathcal{V}^g(H) = \lim_{\epsilon \to 0} \overline{H^g_\epsilon}$$

Remarque 6.5. $\mathcal{V}^g(H)$ est bien défini sur les fonctions bornées car dans ce cas précis :

- H_ϵ^g est bien coercif pour tout ϵ grâce au terme quadratique, on peut donc prendre l'homogénéisé.
- H_ϵ^g décroit avec ϵ, donc $\overline{H_\epsilon^g}$ aussi d'après [Vi2]. Etant minorée par inf(H), la limite existe.

Tout d'abord, on peut se poser la question de l'universalité de cette procédure ne serait que par le choix d'une métrique. On va voir que ce paramétrage est en fait assez souple.

Proposition 6.6. *Pour toutes métriques g_1 et g_2 sur le tore,*

$$\mathcal{V}^{g_1}(H) = \mathcal{V}^{g_1}(H) := \mathcal{V}(H)$$

Démonstration. Prenons g_1 et g_2 deux métriques sur le tore. En chaque point du tore, il existe donc A_q et B_q réels postifs non nuls tel que :

$$A_q g_1(p,p) \leq g_2(p,p) \leq B_q g_1(p,p)$$

Ceux ci sont des valeurs extrêmes du "spectres de g_2 " pour la métriques g_1. Ils dépendent donc continuement de q. Par compacité, il existe donc A et B réels postifs non nuls tel que :

$$\begin{gathered} A g_1(p,p) \leq g_2(p,p) \leq B g_1(p,p) \\ H_{A\epsilon}^{g_1} \leq H_\epsilon^{g_2} \leq H_{B\epsilon}^{g_1} \\ \mathcal{V}^{g_1}(H) \leq \mathcal{V}^{g_2}(H) \leq \mathcal{V}^{g_1}(H) \end{gathered}$$

□

Ceci déterminé, il faut s'assurer que notre définition est cohérente vis à vis de la théorie classique pour les fonctions continues à support compact. Le théorème suivant nous permet donc de voir l'homogénéisé visqueux comme une extension de la théorie précédemment développée.

Theorème 6.7. *Pour tout hamiltonien continue à support compact,*

$$\mathcal{V}(H) = \overline{H}$$

Démonstration. On utilisera toujours la métrique riemannienne canonique à la vue de la proposition 6.6. Soit H dont le support est le compact K, K est inclus strictement dans un fibré de disque de rayon r noté D.

$$D = \mathbb{T}^n \times B(0,r)$$

la fonction $t(q,p) := ||p||^2$ s'écrit alors :

$$t = t_1 + t_2$$

avec t_1 à support dans D et t_2 constante sur K. De surcroit, t_1 et t_2 poisson commutent et t_2 et H aussi. Alors :

$$\begin{aligned}\overline{\epsilon t + H} &= \epsilon\overline{t_2} + \overline{\epsilon t_1 + H} \\ &= \epsilon t_2 + \overline{\epsilon t_1 + H}\end{aligned}$$

t_1 et H étant à support compact, on peut appliquer le fait que l' homogénéisé classique est lipschitzien et donc :

$$||\overline{\epsilon t_1 + H} - \overline{H}||_{\mathcal{C}_0} \leq \epsilon ||t_1||_{\mathcal{C}_0}$$

Pour tout $\delta > 0$, il existe donc un ϵ_0 positif tel que :

$$\forall 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0, |\overline{\epsilon t + H} - \overline{H}| \leq \delta$$

et ce en tout point p.

De ce fait, $\overline{\epsilon t + H}$ converge bien vers $\overline{H}$

□

Il semble difficile que nous gardions la propriété de linéarité sur les sous-algèbres commutatives du groupe des difféomorphismes hamiltoniens. Nous en verrons un contrexemple dans la section suivante. Cependant dans certains cas, l'homogénéisation visqueuse est invariante par symplectomorphisme.

Proposition 6.8. *Soit ϕ un difféomorphisme hamiltonien à support compact, alors,*

$$\mathcal{V}(H \circ \phi) = \mathcal{V}(H)$$

Démonstration. De part la compacité du support de ϕ, il existe $\delta \in \mathbb{R}$, tel que

$$||p \circ \phi - p||_{\mathcal{C}^0} \leq \delta$$

On a donc par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{gathered}(\delta - ||p||)^2 \leq ||p \circ \phi||^2 \leq (\delta + ||p||)^2 \\ ||p||^2 - (1+\delta^2) \leq ||p \circ \phi||^2 \leq (1+\delta^2) + (1+\delta^2)||p||^2\end{gathered}$$

Inégalités qui sont loin d'être optimales mais qui suffisent à prouver la convergence de $\overline{H_\epsilon \circ \phi}$ lorsque ϵ tend vers 0. La limite est alors bien $\mathcal{V}(H)$

□

Remarque 6.9. Au moment de l'écriture aucun contrexemple n'est connu avec des difféomorphismes qui ne sont pas à support compact.

6.2 Applications à l'homogénéisation sur le tore

6.2.1 Existence et propriétés

Nous avions vu que la notion d'homogénéisé de fonctions sur $\mathbb{T}^{2n}$ vues comme fonctions du cotangent $T^*\mathbb{T}^n$ périodique en la variable p pose problème. Cependant, grâce à la notion d'homogénéisation visqueuse, on peut obtenir une fonction ne dépendant que de p. La première propriété importante à vérifier est la périodicité en p de l'homogénéisation visqueux.

Proposition 6.10. *Soit H un hamiltonien périodique en la variable p et continue, alors $\mathcal{V}(H)$ est périodique.*

Démonstration. On prend encore une fois la métrique canonique sur le cotangent du tore. Soit $k \in \mathbb{Z}^n$, on pose :

$$\begin{aligned} K(q,p) &= H(q,p+k) + \epsilon||p+k||^2 \\ &= H(q,p+k) + \epsilon||p||^2 + 2\epsilon < p,k > +\epsilon||k||^2 \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{\epsilon}{2}||p||^2 - 2\epsilon||k||^2 \leq \epsilon||p||^2 + 2\epsilon < p,k > \leq 2||p||^2 + \epsilon||k||^2$$

Donc,

$$H(q,p) + 2\epsilon||p||^2 + 2\epsilon||k||^2 \leq K(q,p) \leq H(q,p) + \frac{\epsilon}{2}||p||^2 - \epsilon||k||^2$$

La poisson commutativité des constantes et ϵ tendant vers 0 nous avons le résultat voulu. □

De même, nous avons l'invariance par tout difféomorphisme hamiltonien du tore. Celui ci n'est pas à support compact comme dans la proposition 6.8 et ne rentre pas dans la remarque 6.9.

Proposition 6.11. *Il existe une notion d'homogénéisation sur le tore possédant la propriété d'invariance par symplectomorphisme hamiltonien. Elle est donnée par $\mathcal{V}(H)$.*

La preuve est est essentiellement la même que pour la proposition 6.8.

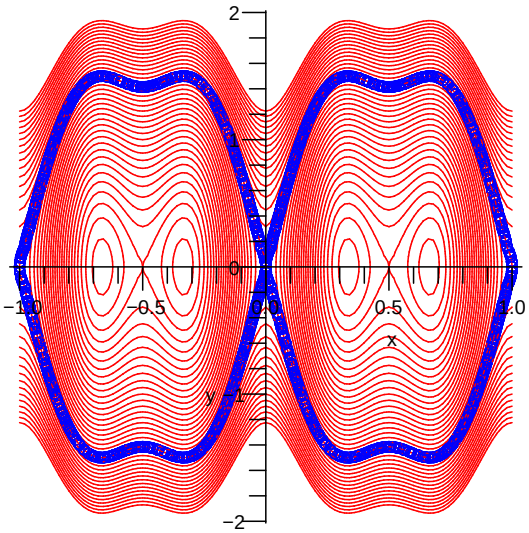
Remarque 6.12. En fait il existe une infinité d'homogénéisés puisque cela dépend du relevé choisi pour le tore.

6.2.2 Quelques exemples

Nous calculons des exemples explicites. Le premier concerne une fonction ne dépendant que de q comme nous l'avons vu dans la section 1. Le second concerne une fonction classique sur le tore la fonction hauteur.

Dans le premier cas prenons donc $H(q,p) = f(q)$

Les lignes de niveau de H_ϵ sont alors ainsi :



D'après les propriétés de l'homogénéisation classique, on sait qu'une telle fonction a pour homogénéisé une fonction convexe présentant un plateau à la valeur critique correspondant au maximum de f. Ce plateau croit en taille lorsque ϵ. La fonction $\overline{H_\epsilon}$ tend donc simplement vers $\max(f)$.

Remarque 6.13. Le résultat est bien invariant par symplectomorphisme hamiltonien, mais la non linéarité du max est aussi un contrexemple en ce qui concerne la linéarité sur les sous-algèbres commutatives de notre objet.

Une bonne question, à la vue de cet exemple, serait de savoir si une sous additivité est toutefois conservée ou alors une linéarité sur les fonctions à supports disjoints.

Remarque 6.14. On voit également que l'opposé de l'homogénéisé visqueux n'est pas forcément l'homogénéisé visqueux de l'opposé.

Le deuxième exemple est l'étude de la fonction "classique" sur le tore qu'est la hauteur :

$$H(q,p) = \cos(2\pi p) + \frac{1}{2}\cos(2\pi q)$$

L'étude des sous niveaux non-déplaçables de l'hamiltonien $\epsilon p^2 + H(q,p)$, nous conduit à la remarque suivante : son homogénéisé présente des plateaux. Ceux-ci décroissent tous vers la valeur critique $\frac{1}{2}$. A la limite, on obtient :

$$\mathcal{V}(H) = 0.5 \ .$$

Remarque 6.15. Comme précédemment dit, il aurait été facile de définir l'homogénéisé sur le tore comme homogénéisé du problème relevée qui lui est à flot complet. Cela en utilisant la définition d'homogénéisé basée sur le quasi-état partiel ξ_a. La relation de notre construction avec cette théorie est conjecturale.Pour relier les deux il faudrait alors montrer la conjecture suivante.

Conjecture 6.16. Soit H à flot complet, alors $\lim_{\epsilon \to 0} \xi_a(H + \epsilon \|.\|^2) = \xi_a(H)$

6.3 La sphère

6.3.1 ...vue comme compactifiée du cylindre

Nous souhaitons ici développer la théorie de l'homogénéisation symplectique dans le cas où la variété n'est pas le cotangent d'un tore. Cependant, la notion de tore est inévitablement reliée à ce procédé dans la formulation de Viterbo. C'est pourquoi, nous nous inscrirons dans le cas des variétés symplectiques de dimension $2n$, admettant une action torique de $\mathbb{T}^n$ noté ici Θ. On se ramènera au cas d'une variété cotangente en regardant une classe d'équivalence d'hamiltonien sur cette dernière.

Un exemple fondateur : le disque symplectique Nous allons tenter de comprendre comment définir une notion d'homogénéisé sur le disque $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$. Plusieurs questions se posent à nous :

- Comment définir proprement l'homogénéisé ?
- Comment conserver la donnée de la structure symplectique sur le disque ?
- La définition selon une action d'un tore donné dépend elle finalement de ce tore ?

La méthode que nous emploierons est la suivante : Etant donné que la variété D considérée, admet une action de $\mathbb{S}^1$ par rotation autour de l'origine. D peut être vu comme une fibration en cercle au dessus de $[0,1[$.

Considérons alors un hamiltonien $H(r,\theta)$ sur D en coordonnées polaires, données par la fibration de l'action de $\mathbb{S}^1$.Alors on peut définir un hamiltonien sur $T^*\mathbb{S}^1$ par

$$K'(q,p) = H(\sqrt{2p}, q) \ si \ p \geq 0$$

Cet hamiltonien se prolonge d'après le théorème de Tietze-Urison en une application K sur $T^*\mathbb{S}^1$. Le choix de K peut de surcroit être pris à support compact en multipliant par une approximation $\mathcal{C}^\infty$ d'une fonction caractéristique à support

compact bien choisi. On considère l'homogénisé de K, $\overline{K}(p)$.
Ce processus semble naturel cependant son universalité n'est pas clairement défini. En effet, cela dépend il de la forme symplectique, quel est alors le rôle de la paramétrisation de (r, θ) grâce à (p, q) ? Enfin le prolongement de l'hamiltonien sur le cotangent du cercle pour les p négatifs a-t-il une influence sur l'homogénisé ? C'est à ces questions que nous tentons de répondre.

L'extension de l'homogénisation aux fonctions continues Il a été démontré dans les chapitres précédents que comme l'homogénéisé est lipshitzien, on peut le prolonger aux fonctions continues.

Equivalence d'hamiltoniens homegénéisés Dans cette section, nous abordons la notion de classe d'équivalence relativement à une variété. En effet, nous avons vu dans l'exemple du disque qu'il nous été permis de choisir plusieurs fonctions continues à support compact représentant le même hamiltonien sur le disque. Le but de ce chapitre est de démontrer que l'homogénéisé ne dépend pas du représentant choisi.

Proposition 6.17. *Soit K_1 et K_2 représentant le même hamiltonien $H \in \mathcal{C}^\infty$ sur le disque ie sont égales sur $[0, 1[\times \mathbb{S}^1$. Alors $\overline{K_1}$ et $\overline{K_2}$ sont égaux sur le domaine correspondant au disque.*

Démonstration. Etant donné que K_1 et K_2 sont des fonctions continues, on approche leur homogénéisé par celui des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ définies de la manière suivante.

On définit

$$\chi_{U_1,U_2} : T^*\mathbb{S}^1 \to [0, 1]$$

avec $U_1 \subset U_2$ ouvert et fermé respectivement et tel que χ_{U_1,U_2} est une fonction égale à 1 sur U_1 et 0 sur le complémentaire de U_2,compris entre 0 et 1 le reste du temps.

On applique l'algorithme suivant :
- On prend $a := K_1(0, q) = K_2(0, q)$,$b := K_1(1, q) = K_2(1, q)$
- Grâce à une fonction χ on définit $B \in \mathcal{C}^\infty$ sur [0,1] de valeur a à gauche et b à droite de dérivées n-ièmes nulles sur les extrémités
- $K = (K - B) + B$
- $U_1 :=]2\epsilon, 1 - 2\epsilon[$, $U_2 :=]\epsilon, 1 - \epsilon[$
- $K_\epsilon := (K - B)\chi_{U_1,U_2} + B$ est $\mathcal{C}^\infty$, plate aux extrémités. De plus, $||K - K_\epsilon||_\infty \leq \omega$ est contrôlée par le module de continuité de $K - B$ et tend vers 0 lorsque ϵ tend vers 0.
- En dehors de la zone réservé au disque K étant continue à support compact, on l'approche par une fonction lisse nulle aux extrémités comme précédemment

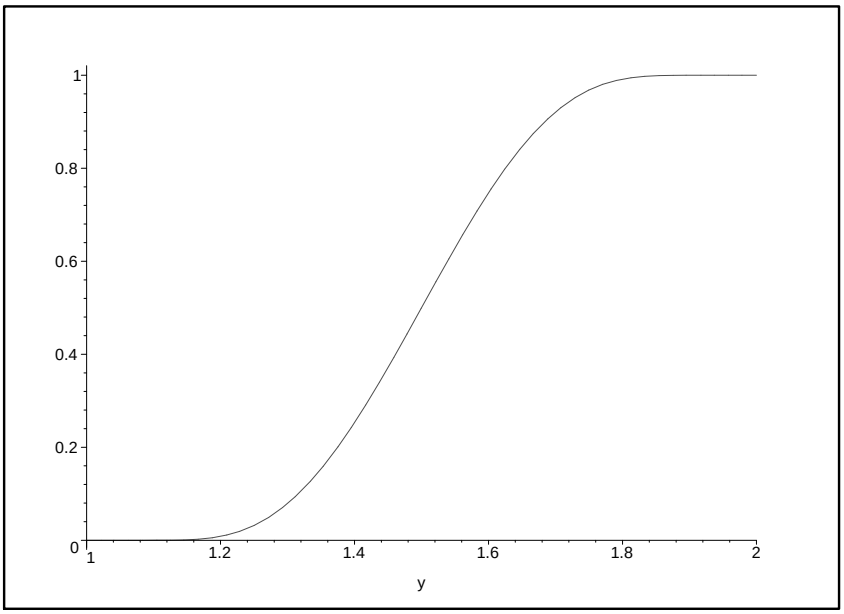


FIGURE 2 – Exemple de fonction χ

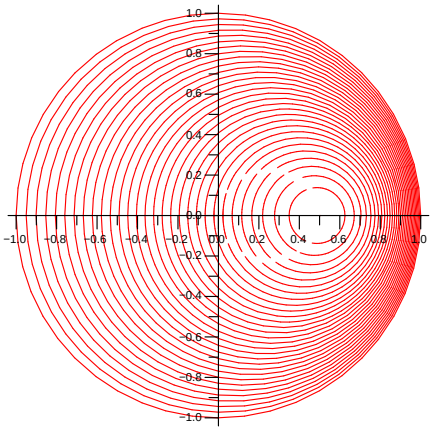
On a alors défini une fonction lisse $\mathcal{C}^0$ proche de K et "plate" près de 0 et 1. On termine alors la démonstration en regardant les flot de $K_{1,\epsilon}$ et $K_{2,\epsilon}$ qui sont égaux dans le domaine correspondant au disque. Par un lemme d'Humilière [Hum] sur les limites de suites de flots égale sur une restriction et grâce à l'existence de l'homogénéisation sur le cotangent du tore, la restriction des flots $\phi_{1,\epsilon}$ et $\phi_{2,\epsilon}$ au domaine correspondant au disque admet donc une homogénéisation unique. □

Remarque 6.18. Une autre preuve consisterait à écrire la fonction comme somme de deux fonctions à supports disjoints et se servir de la commutation pour vérifier que l'homogénéiser sur la bande ne dépend que des valeurs de la fonctions sur cette même bande.

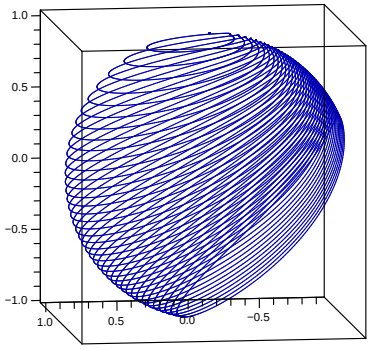
Corollaire 6.19. *Il existe une notion d'homogénisation sur le disque, et sur la sphère relativement à une action circulaire.*

L'action circulaire a en effet, toute son importance. Par exemple, considérer une lagrangienne sur le disque (courbe fermée) et homogéniser la relativement à une action circulaire dont le centre se situe à l'"intérieur" ou à l'"extérieur" de la courbe. Un coup cela donnera l'aire, sinon cela donnera 0 conformément aux chapitres précédents.
La question de l'existence d'une telle action de manière explicite est résolu avec par exemple un renormalisé de l'hamiltonien :

$$H(r,\theta) := \frac{4r^2 - 4r\cos(\theta) + 1}{r^2 - 4r\cos(\theta) + 4}$$



Ou encore sur la sphère obtenue par projection stéréographique :



Une question alors légitime est celle de la dépendance en fonction de l'action ou simplement en fonction du "point d'homogénéisation". En dimension 2, la question se résout facilement car on peut déduire les fibres d'une action à une autre par difféomorphisme hamiltonien. Or ce même difféomorphisme conserve la valeur de l'homogénéisé [Vi2]. Seul le point de référence pour l'homogénéisation (les 2 points dans le cas de la sphère) influe sur le résultat.

Des quasi-états symplectiques sur la sphère Nous savons déjà que l'homogénéisé sur le cotangent du tore (en fait son integrale relativement à une mesure quelconque) est un quasi-état. Dans cette section, nous entendons par quasi-états la définition suivante donnée par [EP2], en omettant la condition de nullité pour les hamiltoniens à support déplaçable :

Définition 6.20. $\xi : \mathcal{C}^\infty \to \mathbb{R}$ est un quasi-état si :
- $\forall F \in \mathcal{C}^\infty \; et \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\xi(\lambda F) = \lambda \xi(F)$
- ξ est croissant

- $\xi(1) = 1$
- $\{F, G\} = 0 \Rightarrow \xi(F + G) = \xi(F) + \xi(G)$
- Pour tout symplectomorphisme hamiltonien ϕ, $\xi(H \circ \phi) = \xi(H)$

Nous pouvons alors penser que l'homogénéisé serait à la base d'un quasi-état hamiltonien sur la sphère (et sur le disque). Cependant, l'invariance par difféomorphisme hamiltonien n'est pas réalisé par $\int \bar{H}^{x,y}(a)d\mu(a)$ pour μ mesure sur $\mathbb{R}$.

C'est pourquoi on pose la définition-proposition suivante suivante :

Proposition 6.21. *$\forall \mu$ mesure sur $[-1, 1]$ (image du moment map de la sphere), il existe :*

$$\xi_\mu(H) = \int_{(x,y)\in\mathbb{S}^2\times\mathbb{S}^2} \frac{\omega^2}{16\pi^2} \int_{-1}^{1} \frac{\bar{H}^{x,y}(a)d\mu(a)}{\int_{-1}^{1} d\mu}$$

quasi-état sur la sphère unité.

Démonstration. $\int_{-1}^{1} \frac{\bar{H}^{x,y}(a)d\mu(a)}{\int_{-1}^{1} d\mu}$ est déjà un quasi-état excepté le fait qu'il n'est conservé que par difféomorphisme hamiltonien conservant les points x et y. Ainsi en intégrant le tout sur la sphère, on obtient bien le résultat voulu.
En effet, si ϕ est un difféomorphisme hamiltonien, contentons nous de prouvez l'invariance par symplectomorphisme de la sphère dans le cas où μ est un dirac en a.

$$\int \overline{H \circ \phi}(x, y)(a) = \int \overline{H}(\phi^{-1}(x), \phi(y)^{-1})(a)$$

□

On obtient alors explicitement la valeur des quasi-états tout d'abord pour les fonctions de Morse "simples". Par exemple, supposons que f soit une fonction de Morse sur la sphère possédant un seul maximum réalisé en z et un minimum réalisé en y.

Corollaire 6.22.

$$\xi_{\delta_a}(f) = \frac{g(-a) + g(a)}{4}(1 - a^2) + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} K_a(x)g(x)dx$$

avec $K_a(x)$ la fonction symetrique qui vaut 1 sur $[0, a]$ et $(1 - x) sur [a, 1]$ et $g(x) = \overline{H}^{z,y}(x)$

Remarque 6.23. Ceci répond à la non unicité d'un quasi-état sur la sphère, il ne correspond pas à celui de Polterovich, qui consisterait simplement à prendre g(0).Ne peut on toutefois pas reconstruire celui-ci à partir de notre ensemble non dénombrable ?

Remarque 6.24. Cela permet de prouver la non déplaçabilité de certains ensembles lorsque la valeur de la quasimesure associée est supérieure à $\frac{1}{2}$. Ainsi, on obtient effectivement que tout "cercle" coupant la sphere en 2 parties égales est non déplaçable. Mais on obtient également que 2 calottes d'aire totale supérieure à $\frac{1}{2}$ sont aussi non-déplaçables.

Remarque 6.25. Dans le cas du disque on trouve également un quasi-états par la même méthode. Il donne la non déplaçabilité des lagrangiennes "d'aire intérieure plus grande que 1/2"

Nous pouvons généraliser ce genre de résultat pour des fonctions plus complexes dont nous connaissons l'arbre de Reeb. Cela se calcule aisément à partir des formules précédentes. On obtient la non-déplçabilité de la fibre déconnectant l'arbre en deux aires égales.

Par exemple, pour en voir la philosophie, supposons que nous ayons un arbre de Reeb à trois branches d'aires a b et c ($a+b+c=1$), que l'unique fibre déconnectant l'arbre en 2 parties d'aires égales à $\frac{1}{2}$ est noté 0 , et m représente la fibre "noeud" alors le quasi-état μ_{δ_0} est de la forme :

$$\frac{f(O)}{2} + 2bcf(m) + \frac{1}{2}(\int K_a f + \int K_b f + \int K_c f)$$

où K_i sont des potentiels similaires à ceux du cas précédents.

Remarque 6.26. On remarquera tout de même que la limite b=0 redonne bien-sur le résultat de l'arbre de Reeb trivial.

L'algorithme explicite de calcul de μ_{δ_0} pour un arbre de Reeb binaire (obtenant les autres par continuité) est donné par la récursion suivante :

- Le cas simple est donné par la formule si dessus. L'arbre est alors composé de 2 arrêtes, 2 sommets et 1 noeud désignant la fibre équateur.
- On se donne un arbre de reeb dont les noeuds sont numéroté n_j, les arrêtes a_i et des sommets s_k. On suppose que l'on a construit $\mu_{\delta_0} = \sum_j c_j H(n_j) + \frac{1}{2}\sum_i \int_{-1}^{1} \psi_{a_i}(x)\bar{H}^{a_i}(x)dx$ pour un arbre donné, où $\bar{H}^{a_i}(x)$ est l'homogénéisé vis à vis d'une action torique dont la chaine reliants les points fixes contient a_i (on reviendra sur cette notion d'homogénéisation relative à une action torique).
- On souhaite alors transformer une arrête extérieur a_{prec}en une arrête intérieure a_{s1}, 2 extérieuresa_{s2} et a_{s3}, et un noeud n :
- On remplace alors dans la fonction préalablement défini, $\int_{-1}^{1} \psi_{a_{prec}}(x)\bar{H}^{a_{prec}}(x)dx$ par la somme de :
  1. $\int_{-1}^{1} \psi_{a_{prec}} \mathbb{1}_{[-1+\frac{(aire(a_{s2})+aire(a_{s3}))}{2\pi}, 1-\frac{(aire(a_{s2})+aire(a_{s3}))}{2\pi}]}(x)\bar{H}^{a_{prec}}(x)dx$
  2. $\int_{-1}^{1} \psi_{a_{prec}} \mathbb{1}_{[-1,-1+\frac{(aire(a_{s2})+aire(a_{s3}))}{2\pi}]\cup[1-\frac{(aire(a_{s2})+aire(a_{s3}))}{2\pi}, 1]}(x)\bar{H}^{a_{s2}}(x)dx$

3. $\int_{-1}^{1} \psi_{a_{prec}} \mathbb{1}_{[-1,-1+\frac{(aire(a_{s2})+aire(a_{s3}))}{2\pi}]\cup[1-\frac{(aire(a_{s2})+aire(a_{s3}))}{2\pi},1]}(x)\bar{H}^{a_{s3}}(x)dx$
4. $\frac{aire(a_{s2})aire(a_{s3})}{4\pi^2}H(n)$

La preuve de non-déplaçabilité d'une lagrangienne peut être améliorer pour donner :

Proposition 6.27. *Si μ est un quasi-état sur M, H un Hamiltonien et $\mu(H) \geq \frac{1}{2}$ alors pour tout difféomorphisme hamiltonien ψ, il existe $x \in M$ tel que $H(x) + H(\phi(x)) \geq 1$*

Démonstration. Par l'absurde, nous obtenons

$$\begin{aligned} \exists \epsilon, H + H \circ \phi &\leq 1 - \epsilon \\ H &\leq 1 - \epsilon - H \circ \phi \\ \mu(H) &\leq 1 - \epsilon - \mu(H) \\ \mu(H) &\leq \frac{1-\epsilon}{2} \; Impossible \end{aligned}$$

□

6.3.2 ...et le tore de Clifford

Une autre manière d'obtenir des quasi-états (partiels du moins) sur d'autres variétés symplectiques, serait d'homogénéiser les invariants spectraux, par exemple du tore de Cifford sous l'action d'un symplectomorphisme. Cependant, dans le cas des lagrangiennes monotones, les techniques n'ont jusqu'à présent pas étaient développées pour traiter du cup produit. Si les bornes entre les invariants spectraux lagrangiens et hamiltoniens existent aussi dans ce cadre, pour CP^n, on devrait retrouver le quasimorphisme d'Entov et Polterovich.