

Généralités sur les ondes élastiques de surface

Dans ce travail de thèse, afin de mieux appréhender la conception du capteur de pression à ondes élastiques de surface, des travaux de modélisation ont précédé la phase de réalisation pratique. Ce chapitre a pour but de rappeler les développements théoriques mis en œuvre au sein des dernières décennies afin de pouvoir modéliser le comportement électrique de dispositifs à ondes élastiques de surface sur des substrats piézoélectriques. L'objectif est de rappeler au lecteur les grandes lignes permettant la modélisation de ces dispositifs. Les résultats suivants s'appuient sur les travaux de modélisation développés au sein de la plateforme Composants et Systèmes Micro Acoustiques au sein de l'institut Femto-st de Besançon.

2.1 La piézoélectricité

2.1.1 L'effet piézoélectrique

L'effet piézoélectrique a été observé pour la première fois en 1880 par les frères Pierre et Paul-Jacques Curie [14], âgés respectivement de 21 et 25 ans, et préparateurs à la faculté des sciences de Paris. Ils ont observé que sous l'application d'une contrainte mécanique selon une direction appropriée, certains cristaux se polarisent. La tension ainsi générée sur les faces opposées du cristal est proportionnelle à la valeur de la contrainte appliquée. Il s'agit du phénomène de piézoélectricité directe.

En 1881, l'effet inverse fut prédit par Gabriel Lippman et immédiatement vérifié par les Curie : lorsque certains cristaux sont polarisés, ceux-ci voient leur forme changer. Il s'agit de la piézoélectricité inverse. La figure 2.1 illustre ces différents phénomènes.

L'équation (2.1) permet de modéliser les effets piézoélectriques en corrélant les déplacements électriques et les déformations mécaniques avec les tensions électriques et les contraintes mécaniques.



FIGURE 2.1 – Schématisation de l'effet piézoélectrique. À gauche, le cristal est non contraint. Le deuxième et troisième dessin représente l'effet piézoélectrique direct ; sous l'action d'une force pressante, il apparaît une différence de potentiel entre les deux faces du cristal. Les deux schémas de droite représentent l'effet piézoélectrique inverse. La polarisation du cristal induit un allongement ou un rétrécissement du matériau.

$$\begin{pmatrix} \text{Déplacements} \\ \text{électriques} \\ \text{Déformations} \\ \text{mécaniques} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Constantes} \\ \text{électriques} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \text{Couplage} \\ \text{électro-mécanique} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \text{Couplage} \\ \text{mécano-électrique} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \text{Constantes} \\ \text{mécaniques} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \text{Tensions} \\ \text{électriques} \\ \text{Contraintes} \\ \text{mécaniques} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

2.1.2 Les matériaux piézoélectriques

Certains matériaux comme le quartz sont naturellement piézoélectriques. Nous décrirons principalement le quartz car c'est le matériau utilisé pour la fabrication du capteur. Il s'agit d'un matériau cristallin de la famille cristalline hexagonale dont la forme naturelle est celle d'un prisme hexagonal aux extrémités pyramidales et dont chaque maille est composée d'un atome de silicium chargé positivement et de deux atomes d'oxygène chargés négativement comme illustré sur la figure 2.2 [15].

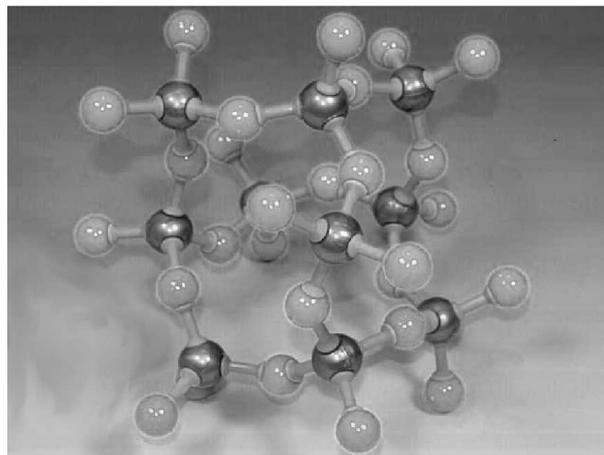


FIGURE 2.2 – Modèle de la maille élémentaire du quartz. Les boules sombres représentent les atomes de silicium et les claires les atomes d'oxygène.

Il possède donc un axe d'ordre 3 appelé axe optique et trois axes d'ordre 2. Ainsi, toute rotation

du cristal de quartz autour de son axe optique de $2\pi/3$ est invariante. Compte tenu des symétries liées à sa classe cristalline [16], la matrice des constantes élastiques peut alors se simplifier et s'écrire sous la forme :

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & -C_{14} & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ C_{14} & -C_{14} & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{14} & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

La matrice des constantes piézoélectriques s'écrit :

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} e_{11} & -e_{11} & 0 & e_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{14} & -e_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Et la matrice des constantes diélectriques s'écrit :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

La piézoélectricité est un phénomène qui, à l'échelle cristalline crée un déplacement du centre des charges positives et des charges négatives, à l'origine de la polarisation de la maille. L'intensité de la polarisation est directement proportionnelle à la déformation induite par la contrainte. Les propriétés de symétrie de la classe cristalline sont fondamentalement liées au phénomène de piézoélectricité comme le montre la figure 2.3 [17]. Comme l'illustre la figure 2.4, les centres de charges positives et négatives changent de position sous l'application d'une contrainte. Les caractéristiques physiques du quartz sont détaillées en annexe B.

2.2 Les dispositifs à ondes élastiques de surface

Les premiers dispositifs à ondes élastiques de surface virent le jour en 1965 avec l'invention du transducteur à peignes interdigités par White et Voltmer [18]. Ces premiers dispositifs étaient réalisés sur des substrats de PZT puis ensuite de quartz. En une vingtaine d'années, ils ont connu un développement très rapide avec de nombreuses applications industrielles en tant que filtres et sources de fréquence. Leur faible coût de production ainsi que les progrès croissants de la photolithographie ont fait que de nos jours, ce type de dispositif est encore très largement utilisé pour les applications radio fréquence.

La figure 2.5 montre un exemple de résonateur à ondes élastiques de surface. Les deux zones importantes sont représentées par les peignes interdigités métalliques qui génèrent les ondes et par les réflecteurs de Bragg qui les réfléchissent.

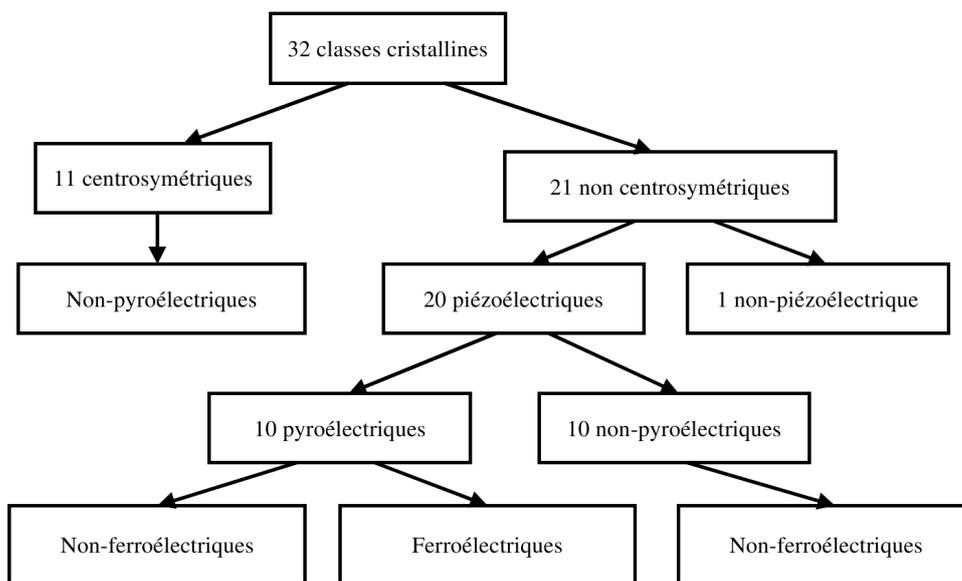


FIGURE 2.3 – Regroupement des différentes classes cristallines en fonction de leurs propriétés piézoélectriques, pyroélectriques et ferroélectriques.

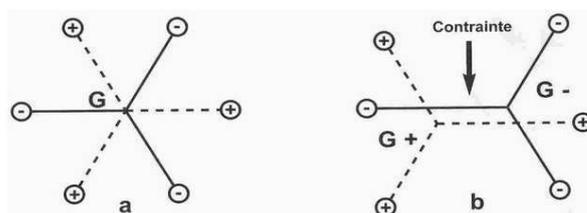


FIGURE 2.4 – Lorsque la maille est soumise à une contrainte, on observe une déformation géométrique de la maille. Le centre des charges positives $G+$ est différent du centre de charges négatives $G-$ et induit la création d'un dipôle électrique.

Dans l'exemple représenté sur la figure 2.5, deux peignes interdigités métalliques adjacents sont chacun reliés à un potentiel électrique différent. La tension ainsi générée entre eux crée une contrainte mécanique qui va se propager le long du dispositif. La réponse électrique globale de l'ensemble des peignes interdigités dépend de la géométrie totale du système à savoir l'écart entre chaque peigne, le nombre de peignes, la largeur de métallisation ainsi que l'épaisseur de métal. La géométrie des réflecteurs de Bragg est conçue de sorte que certaines longueurs d'onde sont réfléchies au sein d'une telle structure. Ces longueurs dépendent également de la géométrie globale du système.

De fait, la réponse électrique du dispositif est une réponse complexe qui nécessite la mise en

œuvre d'un outil de modélisation permettant de prendre en compte cette géométrie. De même, ces outils sont nécessaires pour élaborer des dispositifs rentrant dans un gabarit donné.

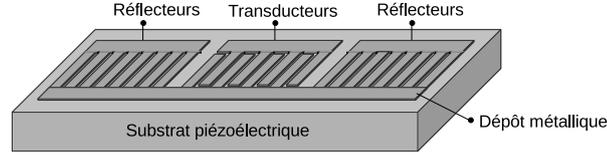


FIGURE 2.5 – Schéma de principe d'un résonateur à ondes élastiques de surface. Les ondes élastiques de surface sont générées au niveau des transducteurs. Les réflecteurs permettent aux ondes de se réfléchir de sorte que l'énergie élastique reste confinée au sein du dispositif.

2.3 Modélisation de dispositifs à ondes de surface

Dans cette partie, nous présentons une méthode de modélisation des dispositifs à ondes élastiques de surface. Le modèle que nous développerons est le modèle harmonique. Il s'agit du modèle couramment utilisé au sein de notre laboratoire.

2.3.1 Propagation d'ondes planes

2.3.1.1 Fonction de Green surfacique

En théorie des systèmes linéaires, on définit la réponse impulsionnelle d'un système comme la transformée de Fourier inverse de la fonction de transfert. Appliqué au cas des dispositifs à ondes élastiques de surface, on utilise la fonction de Green surfacique définie comme la réponse impulsionnelle d'un milieu à une excitation sur une surface plane et homogène. Elle est une fonction matricielle reliant les grandeurs d'excitations aux grandeurs cherchées. Dans notre cas, la fonction de Green surfacique relie les contraintes normales T_{2j} et la densité surfacique de charge ΔD_2 , avec les ondes représentées par leurs déplacements mécaniques u_i et leur potentiel électrique ϕ associé [19]

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \phi \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} [G_{ij}](x-y, t) \begin{pmatrix} T_{21} \\ T_{22} \\ T_{23} \\ \Delta D_2 \end{pmatrix} dy \quad (2.5)$$

On peut également déterminer la fonction de Green dans l'espace des fréquences et des nombres d'onde. Il s'agit alors de fonction de Green spectrale. Dans la suite, nous considérerons le vecteur des contraintes généralisées introduit par Boyer $\mathbf{t}_j = (T_{j1}, T_{j2}, T_{j3}, D_j)^T$ [20].

Afin de s'affranchir de la dépendance entre la fréquence et la fonction de Green spectrale, le vecteur des contraintes normalisées $\boldsymbol{\tau}_j$ est introduit et vaut

$$\boldsymbol{\tau}_j = \frac{\mathbf{t}_j}{-j\omega} \quad (2.6)$$

Dans le domaine spectral, le terme purement électrique G_{44} est directement lié à la permittivité effective de surface. Cette grandeur fut introduite par Ingebrigsten [21] et relie la densité de charge à la composante tangentielle du champ électrique de la manière suivante :

$$\varepsilon_{eff}(|k|) = \frac{1}{|k|} \frac{\Delta D_2}{\Phi} = \frac{1}{|k|G_{44}} \quad (2.7)$$

où $|k| = \omega|s|$ est le module du vecteur d'onde dans le plan d'excitation et $|s|$ le module de lenteur associé.

$\varepsilon_{eff}(|k|)$ permet de caractériser la réponse électrique du milieu à une distribution de charge au niveau de l'interface. Fonction de la lenteur, cette permittivité permet de détecter l'existence de modes et de les caractériser :

- un pôle sur la permittivité effective correspond à une condition de guidage d'ondes de surface où l'interface métallisée est portée à la masse : cette lenteur correspondante appelée lenteur métallisée du mode est notée s_m .
- un zéro de permittivité effective correspond à une charge majeure nulle au niveau de l'interface, c'est à dire lorsque le circuit est ouvert : cette lenteur appelée lenteur libre du mode de l'onde est notée s_0 .

D'autre part, la lenteur du pôle informe sur la nature physique de l'onde. Lorsque le pôle est un réel pur, celle-ci est guidée au niveau de l'interface et ne rayonne pas d'énergie à l'intérieur du matériau, il s'agit alors d'un mode guidé. Lorsque le pôle est complexe, une partie de l'énergie est diffusée par rayonnement électroacoustique et il s'agit alors d'un pseudo-mode. Les lenteurs métallisées et libres permettent d'estimer le couplage électromécanique k^2 lorsque les pertes de propagation sont faibles en l'absence d'autres modes grâce à l'équation 2.8 [22].

$$k^2 = 2 \frac{s_m - s_0}{s_m} \quad (2.8)$$

Ce coefficient traduit la capacité du matériau à transformer l'énergie électrique en énergie mécanique et réciproquement. Toutefois, la permittivité effective ne donne pas d'information sur la polarisation de l'onde. Pour ce faire, il faut comparer chacun des termes électromécaniques $G_{4j}(j = 1, 3)$ de la fonction de Green entre eux. L'amplitude relative de chacun d'eux permettra de connaître la polarisation dominante et l'efficacité de couplage correspondante.

2.3.1.2 Propagation d'ondes planes dans un solide

Considérons la figure 2.6 définissant la géométrie du problème et cherchons à déterminer les lois de propagation des ondes planes dans divers matériaux. Les solutions recherchées sont sous la forme d'ondes planes monochromatiques à la pulsation ω dans le plan (x_1, x_3) . Tous les champs ont une forme générale de la forme $exp(j\omega(t - s_i x_i))$ où \vec{s} est le vecteur des lenteurs, relié au vecteur d'onde \vec{k} par la relation $\vec{k} = \omega\vec{s}$.

Ondes planes dans un solide piézoélectrique

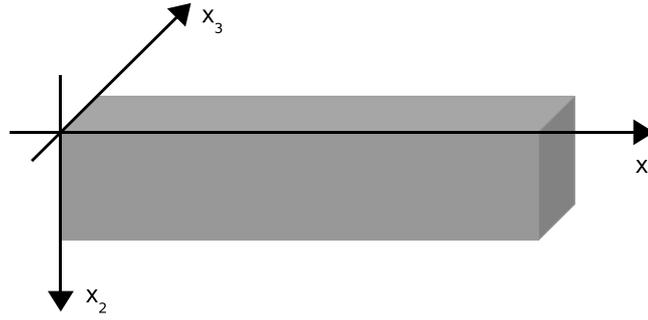


FIGURE 2.6 – Géométrie utilisée dans le problème.

Équations d'état Nous détaillons brièvement ici le cas d'un solide piézoélectrique. La vitesse des ondes élastiques étant largement inférieure à celle des ondes électromagnétiques, le problème est considéré dans l'approximation quasi-statique. Le champ électrique dérive donc du potentiel ϕ tel que $\vec{E} = -\nabla\phi$. En outre, les équations constitutives de la piézoélectricité permettent de coupler les grandeurs mécaniques aux grandeurs électriques de la manière suivante :

$$\begin{cases} T_{ij} = C_{ijkl}S_{kl} - e_{lij}E_l \\ D_i = \varepsilon_{il}E_l + e_{ikl}S_{kl} \end{cases} \quad (2.9)$$

Cette expression peut être contractée en utilisant les vecteurs contraintes t_i et déplacements u généralisés comme suit :

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{A}_{il}\mathbf{u}_j \quad (2.10)$$

A_{il} contient 9 matrices communément appelées «matrices matériau», elles sont de rang 4 et s'obtiennent à partir des constantes physiques du matériau tel que :

$$\begin{cases} A_{il}|_{jk} = C_{ijkl} \text{ pour } j, k = 1, 2, 3 \\ A_{il}|_{j4} = e_{lij} \text{ pour } j = 1, 2, 3 \\ A_{il}|_{4k} = e_{ikl} \text{ pour } k = 1, 2, 3 \\ A_{il}|_{44} = -\varepsilon_{il} \end{cases} \quad (2.11)$$

$$A_{il} \text{ est donc de la forme : } A_{il} = \begin{bmatrix} c & e \\ e & \varepsilon \end{bmatrix}$$

L'équation (2.6) peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{t}_i = (s_1\mathbf{A}_{i1} + s_2\mathbf{A}_{i2} + s_3\mathbf{A}_{i3})\mathbf{u} \quad (2.12)$$

La symétrie du tenseur des constantes physiques [23] induit la symétrie de la matrice A_{ij} d'où il vient :

$$\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}_{ji}^T \text{ pour } i, j = 1, 2, 3 \quad (2.13)$$

Équations d'équilibre En l'absence de forces volumiques comme la gravité, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \text{div} \tilde{\mathbf{T}} \quad (2.14)$$

où ρ représente la masse volumique du milieu considéré.

Le matériau piézoélectrique étant isolant, aucune charge n'est présente dans son volume et l'équilibre électrique est régi par la loi de Poisson

$$\text{div} \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad (2.15)$$

Les deux lois précédentes peuvent être écrites sous forme matricielle en supposant le cas des ondes monochromatiques :

$$s_1 \boldsymbol{\tau}_1 + s_2 \boldsymbol{\tau}_2 + s_3 \boldsymbol{\tau}_3 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (2.16)$$

Avec $\boldsymbol{\rho} = \rho \mathbf{I}_3$

Valeurs propres Fahmy et Alder ont proposé une approche afin de résoudre le problème électromécanique à partir des équations (2.16) et (2.12). Les inconnues sont les composantes normales des champs électroacoustiques, c'est-à-dire le vecteur d'état $\mathbf{h} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}_2)^T$. Le principe du calcul consiste à résoudre le système aux valeurs propres et donc à chercher une matrice \mathbf{M} vérifiant la relation

$$s_2 \mathbf{h} = \mathbf{M} \mathbf{h} \quad (2.17)$$

Les 8 valeurs propres s_2 sont les composantes suivant la profondeur de la lentille. \mathbf{M} ne dépend donc que des composantes s_1 et s_3 et des constantes physiques du matériau. A partir de l'équation (2.12) avec $i = 2$ et de l'équation (2.16) on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} s_2 \mathbf{u} = \left[-s_1 \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21} - s_3 \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{23} \right] \mathbf{u} - \mathbf{A}_{22}^{-1} \boldsymbol{\tau}_2 & (a) \\ s_2 \boldsymbol{\tau}_2 = \boldsymbol{\rho} \mathbf{u} - s_1 \boldsymbol{\tau}_1 - s_3 \boldsymbol{\tau}_3 & (b) \end{cases} \quad (2.18)$$

L'équation (2.18)(a) a bien la forme désirée. Cependant, l'équation (2.18)(b) fait encore intervenir les contraintes normalisées $\boldsymbol{\tau}_1$ et $\boldsymbol{\tau}_3$ que l'on élimine en utilisant l'expression de 2.16 avec $j = 1$ et $j = 3$. On obtient alors

$$s_2 \boldsymbol{\tau}_2 = \left[\boldsymbol{\rho} - s_1^2 \mathbf{A}_{11} - s_3^2 \mathbf{A}_{33} - s_1 s_3 (\mathbf{A}_{13} + \mathbf{A}_{31}) \right] \mathbf{u} - (s_1 \mathbf{A}_{12} + s_3 \mathbf{A}_{23}) s_2 \mathbf{u} \quad (2.19)$$

En reportant l'équation 2.18.a dans 2.19 on obtient la relation cherchée

$$s_2 \boldsymbol{\tau}_2 = \left[\boldsymbol{\rho} - s_1^2 (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21}) - s_3^2 (\mathbf{A}_{33} - \mathbf{A}_{32} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{23}) \right] \mathbf{u} - s_1 s_3 (\mathbf{A}_{13} + \mathbf{A}_{31} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{23} - \mathbf{A}_{32} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21}) \mathbf{u} - (s_1 \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} + s_3 \mathbf{A}_{32} \mathbf{A}_{22}^{-1}) \boldsymbol{\tau}_2 \quad (2.20)$$

La matrice \mathbf{M} peut donc se décomposer en 4 sous-matrices de rang 4 dont les expressions sont données ci-dessous

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \text{ avec :} \quad (2.21)$$

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{11} = -s_1 \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21} - s_3 \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{M}_{12} = \mathbf{A}_{22}^{-1} \\ \mathbf{M}_{22} = -s_1 \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} - s_3 \mathbf{A}_{32} \mathbf{A}_{22}^{-1} \\ \mathbf{M}_{21} = \rho - s_1^2 (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21}) - s_3^2 (\mathbf{A}_{33} - \mathbf{A}_{32} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{23}) \\ \quad - s_1 s_3 (\mathbf{A}_{13} + \mathbf{A}_{31} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{23} - \mathbf{A}_{32} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21}) \end{cases}$$

Soit un couple de lenteur (s_1, s_3) , la résolution du système 2.17 donne 8 vecteurs propres et 8 valeurs propres associées $s_2^{(i)}$. Ils constituent la base des modes partiels de l'onde sur laquelle le vecteur d'état \mathbf{h} peut se décomposer.

$$\mathbf{h}(x_2) = \mathbf{F} \Delta(x_2) \mathbf{a} \exp(2j\pi f(t - s_1 x_1 - s_3 x_3)) \quad (2.22)$$

\mathbf{a} est le vecteur des amplitudes des modes partiels dont les valeurs sont obtenues grâce aux conditions aux limites. Ce sont maintenant les inconnues indépendantes du problème.

La matrice \mathbf{F} dite matrice de Fahmy regroupe l'ensemble des vecteurs propres de \mathbf{M} . la dépendance en x_2 de tous les champs est contenue dans la matrice diagonale Δ dont les éléments sont de la forme

$$\Delta_{ii}(x_2) = \exp(-2j\pi f s_2^{(i)} x_2) \quad (2.23)$$

La symétrie de l'opérateur, liée à celle du matériau, permet de montrer que les valeurs propres de \mathbf{M} sont complexes conjuguées pour des couples de lenteur (s_1, s_3) réels [20]. Le signe de leur partie imaginaire implique que l'amplitude de l'onde partielle associée croît ou décroît de manière exponentielle avec la profondeur x_2 du milieu. On peut alors classer les modes partiels en deux groupes de quatre éléments : les modes incident (+) et réfléchis (-) [20]. Les règles de cette classification sont fournies dans le tableau 2.1.

- Dans le cas de modes inhomogènes, la décroissance ou l'amplification du mode est le critère de choix.
- Dans le cas de modes propagatifs, l'énergie est rayonnée dans le volume. Le sens du rayonnement selon l'axe x_2 obtenu via le vecteur de Poynting permet l'identification de la nature du mode :

$$P_2 = -\frac{\partial u_i}{\partial t} T_{2i} + \Phi \frac{\partial D_2}{\partial t} = \frac{\omega^2}{2} \Re \left[\mathbf{u}^{*T} \boldsymbol{\tau}_2 \right] \quad (2.24)$$

Modes partiels	Propagatif	Inhomogène
réfléchis (+)	$\Im(s_2^{(i)}) > 0$ et $P_2^{(i)} > 0$	$\Im(s_2^{(i)}) < 0$
Incidents (-)	$\Im(s_2^{(i)}) < 0$ et $P_2^{(i)} < 0$	$\Im(s_2^{(i)}) > 0$

TABLE 2.1: Classification des modes partiels en modes incidents et réfléchis

Ondes planes dans un solide diélectrique Les équations relatives au comportement d'un solide diélectrique sont les suivantes

$$\begin{cases} T_{ij} = C_{ijkl}S_{kl} \\ D_i = \varepsilon_{il}E_j \end{cases} \quad (2.25)$$

Les phénomènes électriques et mécaniques sont découplés, cela nous ramène au cas de la piézoélectricité avec un couplage électromécanique nul qui se traduit par un tenseur piézoélectrique e_{ijk} nul. Le système d'équation 2.17 admet toujours des valeurs propres non nulles. On peut donc écrire les matrices matériau A_{ij} comme suit :

$$\begin{cases} A_{il|jk} = C_{ijkl} \text{ pour } j, k = 1, 2, 3 \\ A_{il|j4} = 0 \text{ pour } j = 1, 2, 3 \\ A_{il|4k} = 0 \text{ pour } k = 1, 2, 3 \\ A_{il|44} = -\varepsilon_{il} \end{cases} \quad (2.26)$$

Ondes planes dans un métal Les phénomènes d'origine élastique et électrique sont découplés dans un métal. D'un point de vue électrostatique, le solide conducteur n'admet ni charge ni champ électrique en son intérieur. Cependant, vu les fréquences utilisées (supérieures à 100 MHz), l'épaisseur de peau nous pousse à imposer un potentiel électrique sur la surface du matériau. Le rapport entre les constantes de temps électriques et élastiques nous permettent de faire l'approximation d'un phénomène quasi-statique.

Les lois de comportement mécanique d'un métal sont les mêmes que pour le solide diélectrique à savoir :

$$\begin{cases} T_{ij} = C_{ijkl}S_{kl} \\ \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \text{div} \vec{T} \end{cases} \quad (2.27)$$

Les degrés de liberté associés aux grandeurs électriques ayant disparu, on ne peut plus conserver la méthode des paragraphes précédents. En effet, les matrices A_{ij} deviennent singulières. Il est donc nécessaire de ne considérer le problème que sous sa contribution élastique. Les six inconnues du problème sont les déplacements \mathbf{u} et les contraintes mécaniques normalisées $\boldsymbol{\tau}_i$ tels que :

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T \text{ et } \boldsymbol{\tau}_j = \frac{1}{-j\omega} (T_{j1}, T_{j2}, T_{j3}, \dots)^T \quad (2.28)$$

Les matrices matériau ne contiennent plus que les termes élastiques et $A_{il|jk} = C_{ijkl}$ peut se résumer sous la forme $A_{il} = [c]$. Les lois de comportement mécanique peuvent maintenant s'écrire :

$$\begin{cases} s_1 \boldsymbol{\tau}_1 + s_2 \boldsymbol{\tau}_2 + s_3 \boldsymbol{\tau}_3 = \rho \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\tau}_1 = (s_1 \mathbf{A}_1 + s_2 \mathbf{A}_2 + s_3 \mathbf{A}_3) \mathbf{u} \end{cases} \quad (2.29)$$

Comme précédemment dans le cas d'un matériau piézoélectrique, on peut déterminer un système aux valeurs propres dont l'expression est la même que pour le matériau piézoélectrique.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \text{ avec :} \quad (2.30)$$

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{11} = -s_1 \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21} - s_3 \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{M}_{12} = \mathbf{A}_{22}^{-1} \\ \mathbf{M}_{22} = -s_1 \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} - s_3 \mathbf{A}_{32} \mathbf{A}_{22}^{-1} \\ \mathbf{M}_{21} = \rho - s_1^2 (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21}) - s_3^2 (\mathbf{A}_{33} - \mathbf{A}_{32} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{23}) \\ \quad - s_1 s_3 (\mathbf{A}_{13} + \mathbf{A}_{31} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{23} - \mathbf{A}_{32} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21}) \end{cases}$$

Ondes planes dans un fluide parfait Afin de mieux appréhender le comportement des ondes planes dans divers dispositifs, il est intéressant de caractériser le comportement des ondes planes dans les fluides afin de pouvoir traiter les problèmes de rayonnements élastiques dans l'air ou dans des liquides.

Nous supposons que les fluides étudiés sont parfaits et newtoniens de manière à rester dans les hypothèses de l'élasticité linéaire. Il faut distinguer deux cas :

- les fluides isolants, comme l'air, sont considérés comme des matériaux diélectriques,
- les fluides conducteurs, comme l'eau, se comportent électriquement comme un métal et seule la contribution mécanique est prise en compte.

Un fluide parfait peut être considéré comme un solide isotrope ne subissant aucun cisaillement. Le tenseur élastique contracté se réduit à une seule composante notée c [22].

En considérant que la mécanique du fluide est la même que celle d'un solide métallique ou diélectrique, la loi de comportement peut alors s'écrire sous la forme matricielle suivante

$$\begin{cases} \tau_{ij} = 0 \text{ pour } i \neq j \\ \tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = c(s_1 u_1 + s_2 u_2 + s_3 u_3) \end{cases} \quad (2.31)$$

La relation fondamentale de la dynamique 2.27 permet d'établir les relations suivantes

$$\rho u_i = s_i \tau_{ii} \text{ pour } i = 1, 2, 3 \quad (2.32)$$

En regroupant les deux relations précédentes, le système mécanique aux valeurs propres peut s'écrire

$$s_2 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \tau_{22} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & 0 & s_3 & c^{-1} \\ 0 & s_3 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \tau_{22} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Les contraintes τ_{21} et τ_{23} étant nulles, la solution du système $\mathbf{h} = \langle \mathbf{u}, \tau_{22} \rangle^T$ est réduit à quatre composantes. Le problème aux valeurs propres devient analytiquement résoluble

$$\det(\mathbf{M} - s_2 \mathbf{I}_4) = s_2^2 (s_2^2 + s_1^2 + s_3^2 - \frac{\rho}{c}) \quad (2.34)$$

Pour les deux valeurs propres non nulles, la condition d'existence des modes propagatifs et évanescents se déduit de la lenteur $s_p = \sqrt{\frac{c}{\rho}}$.

- Si $s_1^2 + s_3^2 < s_p^2$, l'onde est une onde plane progressive se propageant dans la direction propre donnée par le vecteur d'onde $\vec{k} = \omega \vec{s}$. Les valeurs propres sont $s_2 = \pm \sqrt{s_p^2 - s_1^2 - s_3^2}$. Le mode propre tel que $s_2 = \sqrt{s_p^2 - s_1^2 - s_3^2}$ est le mode réfléchi, seul admissible dans le cas d'un milieu semi-infini.
- Si $s_1^2 + s_3^2 > s_p^2$, l'onde émise est une onde plane inhomogène se propageant dans le plan (x_1, x_3) ; évanescence selon l'axe x_2 . Les valeurs propres sont $s_2 = \pm j \sqrt{s_1^2 + s_3^2 - s_p^2}$ et le mode correspondant à $s_2 = -j \sqrt{s_1^2 + s_3^2 - s_p^2}$ est le mode réfléchi, seul admissible dans le cas d'un milieu semi-infini.

Que la nature du mode partiel soit propagatif ou inhomogène, le vecteur propre associé a toujours la même expression, soit :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{s_1}{s_2} u_2 \\ u_3 = \frac{s_3}{s_2} u_2 \\ \tau_{22} = \frac{\rho}{s_2} u_2 \end{cases} \quad (2.35)$$

La valeur propre nulle du système 2.34 est dégénérée et correspond à deux ondes de compression dans le plan (x_1, x_3) . Les deux vecteurs propres associés forment la base $B = (V_{p1}, V_{p2})$ telle que

$$V_{p1} = \frac{1}{\sqrt{1 + c^2 s_1^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ c s_1 \end{pmatrix} \text{ et } V_{p2} = \frac{1}{\sqrt{1 + c^2 s_3^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ c s_3 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

On considère une interface parallèle au plan (x_1, x_3) entre un fluide (milieu 1) et un autre matériau (milieu 2). Au niveau de cette interface, les déplacements mécaniques normaux sont continus, les déplacements mécaniques tangentiels sont libres. Les contraintes mécaniques normales sont également continues et les contraintes mécaniques tangentielles sont nulles car le fluide est non visqueux. Ces conditions se traduisent formellement par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_2^{(2)} = u_2^{(1)} \\ \tau_{22}^{(2)} = \tau_{22}^{(1)} = -p^{(1)} \\ \tau_{21}^{(2)} = \tau_{23}^{(2)} = 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

Comme le système (2.34) admet des valeurs propres nulles, certaines variables sont corrélées entre elles. Le système (2.35) montre que la connaissance d'une variable mécanique suffit à déterminer les deux autres. Les conditions aux limites ne portant que sur les composantes u_2 et τ_{22} , les déplacements u_1 et u_3 peuvent être éliminés du problème. Le système contracté permet de travailler avec le nouveau vecteur solution $\mathbf{h} = (u_2, \tau_{22})^T$ continu au niveau d'une interface fluide/fluide.

$$s_2 \mathbf{h} = \mathbf{M} \mathbf{h} \text{ avec } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c} - \frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_3} \\ \rho & 0 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

La matrice \mathbf{M} n'est plus singulière. Les solutions des modes propres sont représentées dans les tableaux 2.2 et 2.3

	$s_1^2 + s_3^2 < S_p^2$: Modes propagatifs	
Nature du mode	Incident(-)	Réfléchis(+)
Valeur propre	$s_2 = -\sqrt{s_p^2 - s_1^2 - s_3^2}$	$s_2 = \sqrt{s_p^2 - s_1^2 - s_3^2}$
Vecteur propre	$\frac{1}{N}(s_2\rho)^T$	
Facteur de normalisation	$N = \sqrt{S_p^2(\rho c + 1) - s_1^2 - s_3^2}$	

TABLE 2.2: Modes propres propagatifs d'un fluide parfait

	$s_1^2 + s_3^2 > S_p^2$: Modes inhomogènes	
Nature du mode	Incident(-)	Réfléchis(+)
Valeur propre	$s_2 = j\sqrt{s_p^2 - s_1^2 - s_3^2}$	$s_2 = -j\sqrt{s_p^2 - s_1^2 - s_3^2}$
Vecteur propre	$\frac{1}{N}(s_2\rho)^T$	
Facteur de normalisation	$N = \sqrt{S_p^2(\rho c - 1) + s_1^2 + s_3^2}$	

TABLE 2.3: Modes propres inhomogènes d'un fluide parfait

Traisons maintenant le cas des fluides diélectriques. Dans le cas de fluides conducteurs, il suffit de connaître les conditions aux limites pour connaître le comportement électrique. Le fluide étant supposé isotrope, le tenseur des constantes diélectriques est diagonal

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon I_3 \quad (2.39)$$

Lorsque le fluide est isolant, on peut appliquer l'approximation électrostatique et le champ électrique dérive du potentiel ϕ tel que :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = -\varepsilon \text{grad}\Phi \quad (2.40)$$

La loi de comportement (2.40) ainsi que la loi de Poisson (2.15) s'écrivent de la manière suivante pour les ondes harmoniques lorsque l'on remplace le champ d'induction D_j par le déplacement diélectrique normalisé $D_j / -j\omega$:

$$\begin{aligned} D_j &= -\varepsilon s_j \phi \\ \vec{D} \cdot \vec{s} &= 0 \text{ soit } D_1 s_1 + D_2 s_2 + D_3 s_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Et le système aux valeurs propres devient alors

$$s_2 \begin{pmatrix} D_2 \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon^{-1} \\ \varepsilon(s_1^2 + s_3^2) & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} D_2 \\ \phi \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Les valeurs propres de ce système ainsi que les vecteurs propres correspondants sont répertoriées dans le tableau 2.4.

Modes partiels	Valeur propre	Vecteur propre
Incident(-)	$s_2 = j\sqrt{s_1^2 + s_3^2}$	$V_p = \frac{1}{N} \left(1 - j\varepsilon \sqrt{s_1^2 + s_3^2} \right)^T$
Réfléchis(+)	$s_2 = -j\sqrt{s_1^2 + s_3^2}$	$V_p = \frac{1}{N} \left(1 + j\varepsilon \sqrt{s_1^2 + s_3^2} \right)^T$
Facteur de normalisation	$N = \sqrt{\varepsilon^2 + (s_1^2 + s_3^2)}$	

TABLE 2.4: Modes propres électriques d'un fluide parfait

Lorsque l'interface sépare un fluide diélectrique d'un milieu isolant, le potentiel électrique et la composante normale du déplacement électrique sont continus. Dans les autres cas, les conditions aux limites sont les mêmes que celles appliquées en surface d'un métal.

2.3.2 Excitation sous un réseau périodique d'électrodes

2.3.2.1 Admittance harmonique

Dans cette partie, on considère un réseau périodique infini d'électrodes. On cherche à déterminer l'influence des électrodes sur la propagation des ondes de surface. Il est donc nécessaire de savoir simuler la contribution de ces électrodes afin de déterminer leur influence sur la propagation des ondes. Le principe du calcul consiste en la détermination de la fonction de transfert de ce dispositif. Ces développements qui s'appuient sur la fonction de Green et la permittivité effective de surface sont largement inspirés des travaux de Ventura [24] et [25]. On considère une excitation élémentaire comme illustrée en figure 2.7. On impose une tension électrique ϕ_m sur l'électrode m , on suppose également que toutes les autres électrodes sont court circuitées afin de pouvoir appliquer le théorème de superposition.

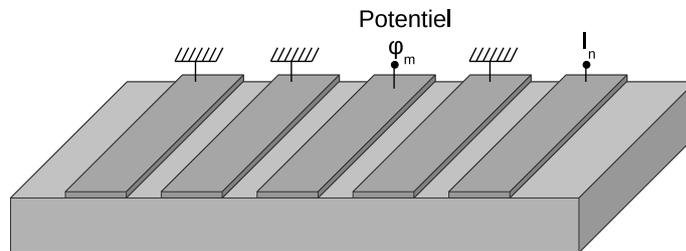


FIGURE 2.7 – Excitation électrique élémentaire d'une électrode au sein d'un réseau infiniment périodique infini.

Soit I_n le courant de court-circuit circulant dans l'électrode n . L'admittance mutuelle entre les électrodes m et n notée Y_{mn} vaut :

$$Y_{mn} = \frac{I_n}{\Phi_m} \quad (2.43)$$

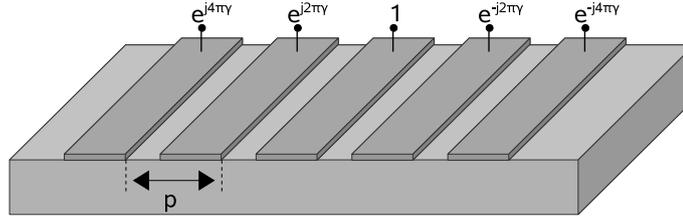


FIGURE 2.8 – Excitation harmonique du réseau périodique d'électrodes.

En appliquant ce principe à chaque électrode du dispositif et en utilisant le théorème de superposition, on peut déduire le courant électrique I_n circulant dans l'électrode n , soit :

$$I_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Y_{mn} \Phi_m \quad (2.44)$$

Afin de décrire le comportement électrique du réseau périodique, il suffit de connaître les admittances mutuelles entre les électrodes. Toujours par superposition, on peut déduire le courant circulant dans l'ensemble des électrodes quelle que soit l'excitation électrique de chaque électrode. Cependant, le calcul des admittances mutuelles est difficile en raison de la géométrie des électrodes et de la nature non homogène du problème. Afin de simplifier le calcul des admittances mutuelles, on ne considère, dans un premier temps, qu'une seule période du réseau. Les champs électroacoustiques se propagent dans un milieu périodique et doivent respecter le théorème de Floquet. On introduit alors la fonction d'onde de Bloch [26] pour tenir compte des effets propagatifs dans le réseau, il vient alors :

$$f(x_1 + np) = f(x_1) e^{-j2\pi n \gamma} \text{ avec } \gamma = \frac{p}{\lambda} = \frac{fp}{V_0} \quad (2.45)$$

où n est un entier représentant la cellule n du réseau, p sa période, γ le nombre d'onde normalisé et V_0 la vitesse de propagation de l'onde. On cherche donc à utiliser cette propriété pour une excitation harmonique de type :

$$\Phi_n(\gamma) = \Phi_0 e^{-j2\pi n \gamma} \quad (2.46)$$

Comme l'illustre la figure 2.8, la symétrie du réseau impose aux courants de suivre une loi similaire [27] telle que :

$$I_n(\gamma) = I_0 e^{-j2\pi n \gamma} \quad (2.47)$$

L'admittance harmonique $\tilde{Y}(\gamma) = I_n / \Phi_n$ est indépendante de la position de l'électrode dans le réseau et peut s'écrire :

$$\tilde{Y}(\gamma) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Y_m e^{-j2\pi m \gamma} \quad (2.48)$$

Cette valeur contient les informations permettant la caractérisation électrique du réseau d'électrode. Nous allons donc centrer nos efforts sur la détermination numérique de ces grandeurs.

2.3.2.2 Modèle FEM/BIM

La méthode FEM/BIM «Finite Element Method/Boundary Integral Method» est une méthode numérique qui permet de calculer l'admittance harmonique d'un réseau d'électrodes en tenant compte de leur masse dans l'analyse. Il s'agit d'une approche mixte combinant une méthode de moment avec l'analyse par éléments finis pour le calcul de l'admittance harmonique d'un réseau d'électrodes.

- Le comportement mécanique de l'électrode est déterminé à l'aide de la méthode des éléments finis.
- Le comportement électroacoustique de la structure est pris en compte par une formulation intégrale de surface sur une période du réseau, fondé sur le concept de fonction de Green périodique harmonique.

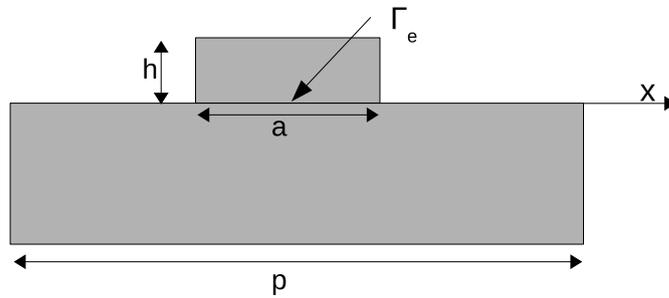


FIGURE 2.9 – Géométrie générale d'une électrode, l'épaisseur de métallisation est h , le taux de métallisation est défini par le ration a/p .

Cette approche a été mise en oeuvre par Ventura dans les années 1990 pour le cas de substrats semi-infinis homogènes [24] et [25]. On considère la géométrie de la figure 2.9 dans laquelle intervient l'épaisseur de métallisation h . D'un point de vue électrique, l'électrode unique est supposée infiniment fine et de même constante diélectrique que l'air. Les charges ne peuvent s'accumuler qu'au niveau de la surface Γ isopotentielle, le potentiel étant laissé libre ailleurs ($\phi(x) = V_0$ pour $|x| < \frac{a}{2}$). Le problème élastique au niveau de l'électrode permet, par la méthode des éléments finis de relier les grandeurs mécaniques au niveau de l'interface (déplacements et contraintes). Ces relations mécaniques sont reliées par un opérateur linéaire intégral noté L_i tel que :

$$\begin{cases} u_i = L_{ij} T_{2j} \text{ pour } |x| < \frac{a}{2} \\ T_{2j} = 0 \text{ pour } \frac{a}{2} < |x| < \frac{p}{2} \end{cases} \quad (2.49)$$

Comportement électromécanique Le cœur de cette méthode consiste en la détermination de la fonction de Green surfacique de la structure qui caractérise son comportement électroacoustique. La lenteur s_3 est imposée nulle car l'analyse est restreinte au plan (x_1, x_2) sans perte de généralité. La fonction de Green est alors une fonction à deux dimensions telle que :

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}(s_1, s_3 = 0, f) \boldsymbol{\tau}_2 \quad (2.50)$$

Par transformée de Fourier inverse, cette relation devient un produit de convolution. De manière à réduire l'étude à une seule période du réseau, on réécrit cette équation en utilisant un développement de Floquet [26]. On obtient alors :

$$u_i(x_1) = \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} G_{ij}^p(x_1 - y, f) \tau_{2j}(y) dy \quad \text{avec} \quad G_{ij}^p(x_1, f) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} G_{ij}(x_1 - np, f) \exp(j2\pi n\gamma) \quad (2.51)$$

Où G_{ij}^p est la fonction de Green harmonique qui s'écrit comme une série de Fourier dont les coefficients, appelés harmoniques spatiaux, sont définis à partir de la fonction de Green périodique spectrale suivante [24] :

$$G_{ij}^p(x_1, f) = \frac{1}{p} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} G_{ij}\left(\frac{2\pi}{p}(\gamma + l), f\right) \exp\left(j\frac{2\pi}{p}(\gamma + l)x\right) \quad (2.52)$$

Afin d'obtenir une représentation discrète des intégrales de frontière, les champs électromécaniques sont exprimés comme une combinaison linéaire de fonctions de base. La base des polynômes de Tchebychev est bien adaptée au problème, elle permet de décrire précisément le comportement singulier des charges et des contraintes aux bords des électrodes. On choisit comme base orthonormale les polynômes de Tchebychev T_n de première espèce pour la mesure de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ avec le produit scalaire associé tel que :

$$\langle T_m | T_n \rangle = \int_{-1}^1 \frac{T_m(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi \delta_{mn}}{\chi_m} \quad \text{avec} \quad \chi_m = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ 2 & \text{si } m \neq 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

Tous les champs électroacoustiques sont développés à l'interface Γ_e sur cette base de la manière suivante :

$$\begin{cases} \tau_{2j}(x_1) = \frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{jn} T_n(\bar{x}_1)}{\sqrt{1-\bar{x}_1^2}} \\ u_i(x_1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \beta_{in} T_n(\bar{x}_1) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \bar{x}_1 = \frac{2a}{x_1} \\ |x_1| < a/2 \end{cases} \quad (2.54)$$

Les poids des champs électroacoustiques sur cette base s'écrivent

$$\begin{cases} \alpha_{jn} = \frac{1}{v_n} \int_{-1}^1 \tau_{2j}(x_1) T_n(\bar{x}_1) dx_1 \\ \beta_{in} = \frac{1}{v_n} \int_{-1}^1 \frac{u_i(x_1) T_n(\bar{x}_1)}{\sqrt{1-\bar{x}_1^2}} dx_1 \end{cases} \quad \text{avec} \quad v_n = \frac{a \pi}{2 \chi_n} \quad (2.55)$$

En reportant l'équation (2.54) dans l'équation (2.55), on obtient les relations entre les poids du développement $\beta_{im} = A_{imjn} \alpha_{jn}$ avec

$$A_{imjn} = v_n \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G_{ij}^p\left(\frac{a}{2}(\bar{x}_1 - \bar{y}), f\right) \frac{T_m(\bar{x}_1) T_n(\bar{y})}{\sqrt{1-\bar{x}_1^2} \sqrt{1-\bar{y}^2}} dx_1 dy \quad (2.56)$$

L'expression de la fonction de Green harmonique périodique (2.52) permet la détermination analytique des coefficients A_{imjn} à partir des fonctions de Bessel J_m :

$$A_{imjn} = v_n \frac{\pi^2}{p} j^{m-n} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} G_{ij}\left(\frac{2\pi}{p}(\gamma + l), f\right) J_m\left(\frac{\pi a}{p}(\gamma + l)\right) J_n\left(\frac{\pi a}{p}(\gamma + l)\right) \quad (2.57)$$

Comportement mécanique des électrodes Le comportement mécanique des électrodes est analysé avec la méthode des éléments finis. Le matériau composant l'électrode est supposé isotrope et la pesanteur est négligée. Le problème a deux dimensions et comporte les déplacements mécaniques dans les trois directions de l'espace comme degrés de liberté. La relation fondamentale de la dynamique permet de relier les contraintes aux déplacements mécaniques :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.58)$$

La loi de Hooke permet de relier les contraintes mécaniques aux déformations :

$$T_{ij} = \lambda s_{kk} \delta_{ij} + 2\mu s_{ij} \quad (2.59)$$

où μ et λ sont les coefficients de Lamé du matériau. Dans le cas de petites déformations, le tenseur des contraintes s_{ij} est le tenseur de Green Lagrange $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \ll 1 \right)$.

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.60)$$

Les contraintes sont imposées par les conditions aux limites au niveau de l'interface électrode substrat. Si le matériau occupe l'espace Ω , la formulation variationnelle du problème revient à chercher les fonctions u telles que, quelle que soit la fonction $\vec{\psi}$,

$$\int_{\Omega} \left(\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \psi + c_{ijkl}^E s_{kl}(u) s_{ij}(\vec{\psi}) \right) d\Omega = \int_{\Gamma_u} (T_{ij} \cdot n_j \nu) \psi_i d\Gamma \quad (2.61)$$

Les déplacements et contraintes sont développés sur la base des fonctions d'interpolation des éléments utilisés. Après numérisation selon la procédure classique des éléments finis, le problème peut être écrit sous forme matricielle :

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{F} \quad (2.62)$$

Avec \mathbf{K} la matrice assemblée de raideur, \mathbf{M} la matrice de masse. Les inconnues du problème sont alors les valeurs des déplacements mécaniques aux noeuds du maillage \tilde{u} . Le vecteur \mathbf{F} , appelé vecteur des conditions aux limites, regroupe les valeurs des contraintes mécaniques aux noeuds du maillage. De même que précédemment, la projection de ces relations sur la base des polynômes de Tchebychev permet d'aboutir à un système analogue au système (2.56) tel que :

$$\beta_{im} = D_{imjn} \alpha_{jn} \quad \text{avec } i, j = 1, 2, 3 \quad (2.63)$$

Admittance harmonique En regroupant les coefficients relatifs aux grandeurs électriques et mécaniques, l'étude du comportement électromécanique conduit à la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} \beta_m \\ \beta_E \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ut} & \mathbf{M}_{uq} \\ \mathbf{M}_{\phi t} & \mathbf{M}_{\phi q} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_M \\ \alpha_E \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

Si le développement des champs mécaniques sur la base des polynômes de Tchebychev est noté N , les vecteurs α_M et β_M sont de dimension $3N$ et les vecteurs électriques α_E et β_E de dimension

N^2 .

Le comportement élastique de l'électrode donne le système

$$\beta_M = \mathbf{Y}_{ut} \alpha_M \quad (2.65)$$

et permet de réduire le nombre d'inconnues indépendantes de l'équation (2.64) afin d'obtenir le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \beta_E \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ut} - \mathbf{Y}_{ut} & \mathbf{M}_{uq} \\ \mathbf{M}_{\phi t} & \mathbf{M}_{\phi q} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_M \\ \alpha_E \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

Tous les champs électromécaniques s'expriment finalement comme des fonctions du vecteur relatif à la densité de charge surfacique α_E

$$\begin{cases} \text{Les contraintes mécaniques : } \alpha_M = -[\mathbf{M}_{ut} - \mathbf{Y}_{ut}]^{-1} \mathbf{M}_{uq} \alpha_E \\ \text{Le potentiel électrique : } \beta_E = [\mathbf{M}_{\phi q} - \mathbf{M}_{\phi t} [\mathbf{M}_{ut} - \mathbf{Y}_{ut}]^{-1} \mathbf{M}_{uq}] \alpha_E \\ \text{Les déplacements mécaniques : } \beta_M = -\mathbf{Y}_{ut} [\mathbf{M}_{ut} - \mathbf{Y}_{ut}]^{-1} \mathbf{M}_{uq} \alpha_E \end{cases} \quad (2.67)$$

Le potentiel étant supposé constant sous l'électrode, imposer les conditions aux limites électriques permet d'identifier tous les poids des développements. Grâce aux propriétés d'orthogonalité de la base des polynômes de Tchebychev, le vecteur β_E est connu et a pour valeur :

$$\beta_{40} = \phi_0 \text{ et } \beta_{4m} = 0 \text{ pour } m \neq 0 \quad (2.68)$$

La résolution du système (2.67) permet de déterminer les poids de α_E . La charge sous l'électrode vaut alors :

$$Q_{total} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} Q(x_1) dx_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_{4n} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{T_n(\bar{x}_1)}{\sqrt{1 - \bar{x}_1^2}} dx_1 = \frac{\pi a}{2} a_{40} \quad (2.69)$$

L'admittance harmonique est calculée à partir de l'équation précédente pour une ouverture acoustique égale à deux périodes. Elle vaut :

$$YH(\gamma, fp) = 2pY(\gamma, fp) = \frac{j2p\omega Q_{total}}{\phi_0} = j2\pi fp \frac{\pi a}{2} \left(\frac{\alpha_{40}}{\phi_0} \right) \quad (2.70)$$

2.3.3 Modélisation des dispositifs à ondes élastiques

L'approche utilisée pour l'analyse de dispositifs à ondes élastiques de surface sous contrainte consiste à extraire les paramètres de la matrice mixte à partir des résultats d'un modèle de transducteur infini. La principale approximation de ce modèle est de considérer qu'il est suffisant, pour décrire un dispositif à ondes élastiques de surface, de considérer deux ondes se propageant en sens opposés. Avec cette hypothèse, une période du dispositif peut être modélisée par une matrice reliant le courant et l'amplitudes entrante de l'onde élastique à la tension et à l'amplitude sortante de l'onde élastique. Une autre hypothèse consiste à pouvoir cascader chaque électrode du dispositif, c'est à dire relier l'amplitude d'une onde entrante dans une période du dispositif à l'amplitude de l'onde sortante de la période adjacente et réciproquement.

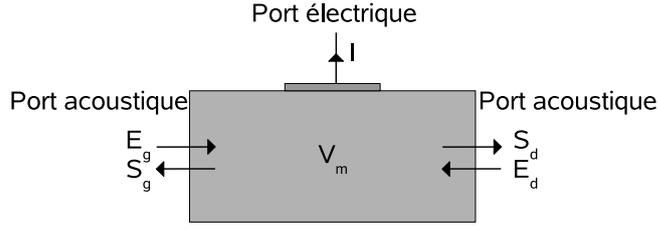


FIGURE 2.10 – Schématisation d'une cellule élémentaire

La réponse électrique d'un dispositif à onde élastique de surface est la somme d'une contribution électrostatique et électroacoustique.

2.3.3.1 Modèle de la matrice mixte

Chaque dispositif à onde de surface peut être décomposé en cellules élémentaires monoélectrodes. Localement, on suppose que les paramètres associés à la matrice mixte peuvent être identifiés à ceux extraits de l'admittance harmonique.

Définition Les valeurs E_d et E_g correspondent aux amplitudes des ondes élastiques entrantes, S_g et S_d aux amplitudes des ondes sortantes. U est la tension électrique à la base de la cellule et i le courant électrique comme on peut le voir sur la figure 2.10. La matrice mixte permet de coupler les composantes électriques et mécaniques des ondes selon les mécanismes synthétisés par l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} S_g \\ S_d \\ I \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} r_g & t_{gd} & \alpha_g \\ t_{dg} & r_d & \alpha_d \\ -\alpha_g & -\alpha_d & Y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_g \\ E_d \\ \phi \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{S} \\ I \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \boldsymbol{\alpha} \\ -\boldsymbol{\alpha}^t & Y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \phi \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

Paramètres de la matrice mixte Les coefficients r_g et r_d sont les réflexions d'onde à gauche et à droite de la cellule, t_{gd} et t_{dg} les coefficients de transmission. Ils forment la matrice de diffraction acoustique \mathbf{D} , \mathbf{S} et \mathbf{E} sont les vecteurs d'ondes sortant et entrant de la cellule. La matrice $\boldsymbol{\alpha}$ contient les termes de couplage électromécaniques, Y est l'admittance élémentaire de la cellule lorsqu'aucune onde ne rentre dans la cellule. Les valeurs des coefficients de la matrice mixte sont explicités dans le système d'équation (2.72)[19]

$$\begin{aligned} t &= \cos \Delta \cdot \exp(-j\psi) \\ r_d &= -j \sin \Delta \cdot \exp[-j(\psi + \psi_r)] \\ r_g &= -j \sin \Delta \cdot \exp[-j(\psi - \psi_r)] \\ Y &= G + jB \\ \alpha_g &= j\sqrt{G} \cdot \exp\left[-j\frac{\psi + \psi_r}{2}\right] \cdot \left[\cos \delta \cdot \exp(-j\frac{\Delta}{2}) + j \sin \delta \cdot \exp(-j\frac{\Delta}{2})\right] \\ \alpha_d &= j\sqrt{G} \cdot \exp\left[-j\frac{\psi - \psi_r}{2}\right] \cdot \left[\cos \delta \cdot \exp(-j\frac{\Delta}{2}) - j \sin \delta \cdot \exp(-j\frac{\Delta}{2})\right] \end{aligned} \quad (2.72)$$

où

– $\sin \Delta$ est l'amplitude du coefficient de réflexion pour une période acoustique,

- ψ_r est la phase entre les centres de transduction et de réflexion de l'électrode,
- δ représente la directivité de l'onde acoustique,
- G est le coefficient de couplage électromécanique de l'onde,
- B est la susceptance élémentaire associée,
- ψ est la variation de phase à travers la cellule. La phase étant supposée linéaire avec la fréquence on a $\psi = \frac{2}{\pi}fpV = 2\pi fp_s$,

Nous verrons plus tard que la connaissance de la matrice mixte pour chaque cellule élémentaire du réseau permet de caractériser la réponse électrique du dispositif à ondes de surface.

Matrice mixte et admittance harmonique On suppose que chaque cellule élémentaire représentée par sa matrice mixte est plongée dans un réseau périodique infini excité de manière harmonique. Dans ce cas, l'admittance élémentaire de la matrice mixte est la contribution des ondes électroacoustiques à l'admittance harmonique sans oublier les effets capacitifs statiques. Les amplitudes des ondes élastiques doivent donc respecter les conditions de périodicité, on aura alors :

$$\begin{cases} S_d = E_g e^{-j2\pi\gamma} \\ S_g = E_d e^{j2\pi\gamma} \end{cases} \quad (2.73)$$

Les relations (2.72) et (2.73) permettent d'exprimer l'intensité circulant dans l'électrode en fonction du potentiel électrique. L'admittance harmonique s'exprime à partir des paramètres de la matrice mixte de la manière suivante :

$$Y_A(\gamma, fp) = jG \frac{\sin\psi - \cos 2\delta \sin\Delta \cos 2\pi\gamma}{\cos\psi - \cos\Delta \cos 2\pi\gamma} + jB \quad (2.74)$$

L'admittance harmonique respecte le principe de la conservation de la charge électrique. Lorsque γ est entier la tension entre les bornes de chaque électrode est nulle et le courant entrant dans chaque électrode est nul.

$$Y_A(\gamma \in \pm\mathbb{N}, fp) = 0 \quad (2.75)$$

La relation (2.75) permet d'écrire l'équation 2.74 sous la forme suivante :

$$Y_A(\gamma, fp) = jG \frac{\cos^2\delta \sin(\psi - \Delta) + \sin^2\delta \sin(\psi + \Delta)}{\cos\Delta - \cos\psi} \frac{1 - \cos 2\pi\gamma}{\cos\psi - \cos\Delta \cos 2\pi\gamma} \quad (2.76)$$

2.3.3.2 Propagation sous une surface homogène

La permittivité effective de surface permet de détecter et de caractériser les ondes couplées piézoélectriquement se propageant sous une surface homogène (rappelons que si l'onde n'est pas couplée de cette façon, elle ne pourra être excitée avec le transducteur interdigité et sort donc d'un tel champ d'analyse).

Paramètres de propagation de l'onde La contribution d'une onde plane à la fonction de Green est connue dans le domaine spectral

$$\varepsilon_{eff}(s, f) = \varepsilon_r(f) + \varepsilon_A(s, f) \text{ avec } \varepsilon_A(s, f) = j\Gamma_m(f) \frac{|s|s_m(f)}{s^2 - s_m^2(f)} \quad (2.77)$$

L'existence d'une onde couplée piézoélectriquement se traduit par la présence d'un pôle $\varepsilon_A(s, f)$ sur la partie imaginaire de la permittivité. Le résidu $\varepsilon_r(f)$ regroupe l'ensemble des contributions diélectriques et phénomènes acoustoélectriques couplés (ondes de volume, comportement asymptotique). Autour de ce pôle, pour des lenteur quasi nulles, les phénomènes diélectriques sont dominants et $\varepsilon_{eff}(s, f)$ tend vers la permittivité piézoélectrique ε_p de la stucture [23].

Si l'interface de propagation de l'onde est totalement métallisée, sa lenteur est donnée par la position du pôle $s_m(f)$: elle est réelle si le guidage est parfait et complexe dans le cas d'une pseudo-onde. Son amplitude est donnée par la force du pôle $\Gamma_m(f)$ qui est directement relié au couplage électromécanique. Les inconnues $s_m, \Gamma_m, \varepsilon_r$ sont fonctions de la fréquence et leur détermination peut se faire numériquement par une méthode de récurrence dite à trois points [20] et [28].

En supposant qu'au voisinage du pôle $s \approx s_m$, l'équation (2.77) devient

$$\varepsilon_{eff}(s, f) = \varepsilon_r + j\Gamma_m(f) \frac{S_m}{S - S_m} \text{ avec } \begin{cases} S = s^2 \\ S_m = s_m^2(f) \end{cases} \quad (2.78)$$

La permittivité effective se calcule en supposant la surface comme lieu de distribution des charge, mais elle ne présuppose pas la surface dans un état spécifique.

Finalement, dans le cas d'une propagation sous une surface court-circuitée, on obtient la lenteur métallisée de l'onde s_m , son couplage électromécanique k^2 et ses pertes de propagation χ_m tels que :

$$\begin{cases} s_m = \Re(\sqrt{S_m}) [s/m] \\ k_m^2 = \Re \frac{\Gamma_m}{\varepsilon_r} [\%] \\ \chi_0 = 40\pi \log(e) \left| \frac{\Im(S_m)}{\Re(S_m)} \right| [dB/\lambda] \end{cases} \quad (2.79)$$

Dans le cas d'une surface libre, la lenteur libre s_0 , le couplage électromécanique k_0^2 et les pertes de propagation χ_0 valent

$$\begin{cases} s_0 = \Re(\sqrt{S_0}) [s/m] \\ k_0^2 = \Re \Gamma_0 \varepsilon_r [\%] \\ \chi_0 = 40\pi \log(e) \left| \frac{\Im(S_0)}{\Re(S_0)} \right| [dB/\lambda] \end{cases} \quad (2.80)$$

La lenteur du mode en surface libre est toujours plus faible qu'en surface court circuitée. Lorsque l'onde est faiblement sensible aux conditions électriques de surface $k_0^2 \approx k_m^2 \approx K^2$, le couplage électromécanique peut être défini comme la différence relative des lenteurs dans les deux conditions de propagation, surfaces libre et métallisée.

$$K^2 = 2 \frac{s_m - s_0}{s_0} \quad (2.81)$$

Matrice mixte d'un interstice Dans les dispositifs à onde de surface, il peut exister des interstices locaux où l'onde se propage dans des conditions de surface libre ou métallisée.

- La matrice mixte du gap est une matrice de transmission acoustique pure.

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} O & t^{gap} \\ t^{gap} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

où t^{gap} est le coefficient de transmission acoustique. Il dépend de la longueur Δx de la ligne, de la lenteur libre s_0 et des pertes de propagation χ_0 .

$$t^{gap} = \exp \left[-j2\pi f s_0 \Delta x \left(1 - j \frac{\chi_0}{40 \log(e)} \right) \right] \quad (2.83)$$

- La matrice mixte correspondante a la même forme que la matrice mixte (2.72) avec un taux de métallisation $a/p = 1$. Les vecteurs électroacoustiques et l'admittance élémentaire sont imposés nuls car il n'y a pas génération d'ondes dans le gap. La surface métallisée est supposée reliée à la masse et ne contribue pas à l'admittance du dispositif.

$$M = \begin{bmatrix} O & t^{gap} & 0 \\ t^{gap} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

où le coefficient de transmission acoustique t^{gap} dépend de la longueur Δx de la ligne, de la lenteur métallisée s_m et des pertes de propagation χ_m .

$$t^{gap} = \exp \left[-j2\pi f s_m \Delta x \left(1 - j \frac{\chi_m}{40 \log(e)} \right) \right] \quad (2.85)$$

Si elle est portée à une autre référence ou simplement libre, elle respecte les lois de conservation de la charge.

2.3.3.3 Propagation sous un réseau d'électrodes

L'objectif est de déterminer les paramètres de la matrice mixte dans un environnement périodique infini à partir du calcul de l'admittance harmonique. On utilise ensuite ces paramètres dans des conditions qui peuvent différer notablement des définitions initiales. L'efficacité de cette approche pousse à accepter la gageure malgré ce défaut évident de cohérence.

Définition L'onde électroacoustique se propageant sous un réseau d'électrodes est sensible aux conditions aux limites. Au niveau des bords de l'électrode, les ruptures d'impédance électriques et mécaniques provoquent la réflexion d'une partie de l'onde électroacoustique. Lorsque toutes ces réflexions sont en phase, l'onde est entièrement réfléchie par le réseau et ce phénomène, dit de Bragg, apparaît pour les plages de fréquence appelées bandes d'arrêt.

Paramètres hors des bandes d'arrêt En dehors des bandes d'arrêt du matériau, le coefficient de réflexion Δ est négligé, ce qui permet de simplifier l'expression de l'admittance harmonique. Le facteur de directivité disparaît et les seuls paramètres indépendants deviennent la phase de propagation et le couplage électromécanique G .

$$Y(fp, \gamma) = Y_r(fp) + jG \left(\frac{\sin \psi}{\cos \psi - \cos(2\pi\gamma)} - \frac{\sin \psi}{\cos \psi - 1} \right) \quad (2.86)$$

où $Y(fp, \gamma)$ est l'admittance harmonique globale. Le résidu $Y_r(fp)$ regroupe toutes les contributions non liées à l'onde élastique. On retrouve la présence d'un pôle sur l'admittance harmonique pour la phase de court-circuit ψ_{cc}

$$\psi_{cc} = \frac{2\pi fp}{V_{cc}} = 2\pi\gamma_{cc} \quad (2.87)$$

Afin d'accéder aux valeurs de vitesse et du couplage, l'équation (2.86) devient

$$Y(V, \gamma) = Y_r(V) + \frac{F}{\cos\psi - \cos(2\pi\gamma)} \text{ avec } F = j \frac{2G}{\tan \frac{\psi}{2}} \sin^2(\pi\gamma) \text{ et } V = fp \quad (2.88)$$

où F est une grandeur complexe qui représente l'amplitude du pôle et V est homogène à une vitesse de phase. Pour des valeurs proches du pôle $\psi \approx \psi_{cc} = 2\pi\gamma_{cc}$. Par développement en série de Taylor au premier ordre on obtient [19] :

$$\cos\psi = \cos\left(2\pi \frac{V}{V_{cc}}\right) \approx \cos(2\pi\gamma) + \frac{2\pi}{V_{cc}} + \frac{2\pi}{\gamma} \sin(2\pi\gamma)(\gamma V_{cc} - V) \quad (2.89)$$

La contribution de l'onde à l'admittance harmonique prend alors la forme simple

$$Y(V, \gamma) = Y_r(V) + \frac{\tilde{F}}{V - \gamma V_{cc}} \text{ avec } \tilde{F} = \frac{-jGV_{cc}}{2\pi} \quad (2.90)$$

En utilisant l'algorithme de la méthode de récurrence à trois points, on détermine la position du pôle α , l'amplitude du pôle \tilde{F} et le résidu Y_r comme le montre l'équation suivante :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{V_1 - V_2}{V_1 - V_3} \frac{Y_3 - Y_1}{Y_2 - Y_1} \text{ et } V_{cc} = \frac{V_3 \alpha - V_2}{\alpha - 1} & (a) \\ \tilde{F}(f) = \frac{Y_3 - Y_1}{V_1 - V_3} (V_3 - \gamma V_{cc})(V_1 - \gamma V_{cc}) & (b) \\ Y_r(V) = Y_1 - \frac{F}{V_1 - \gamma V_{cc}} & (c) \end{cases} \quad (2.91)$$

Paramètres dans la bande d'arrêt Il faut déterminer quatre paramètres de la matrice mixte, la vitesse de phase V , le coefficient de réflexion Δ , le couplage G et le facteur de directivité δ . L'étude dans le domaine des fréquences ne suffit pas à lever l'indétermination du couple vitesse de phase-coefficient de réflexion. Afin de résoudre le problème, la méthode consiste à déterminer la courbe de dispersion du mode [29]. Elle représente la loi de variation de la position du pôle γ_{cc} en fonction de la fréquence. L'expression de l'admittance harmonique peut se mettre sous la forme

$$Y(fp, \gamma) = Y_r(fp) + \frac{F(fp)}{\eta - \eta_{cc}} \text{ avec } \begin{cases} F(f) = j2G \frac{\cos\Delta \sin\psi - \cos(2\delta) \sin\Delta \cos\psi}{\cos\Delta - \cos\psi} \\ \eta_{cc} = \cos^2(\pi\gamma_{cc}) = \frac{\cos\psi}{\cos\Delta} \\ \eta = \cos^2(\pi\gamma) \end{cases} \quad (2.92)$$

La courbe de dispersion permet de mettre en évidence les bandes d'arrêt du réseau. Si $\gamma = \frac{1}{2}$ l'excitation est alternée car $V_n = V_0 e^{j2\pi n \gamma}$, l'entrée fp_e et la sortie fp_s de la bande d'arrêt correspondent au produit fréquence période en respectant les conditions suivantes [30] :

$$\cos(2\pi\gamma_{cc}) = \frac{\cos\psi}{\cos\Delta} = -1 \text{ soit } \begin{cases} \eta_{cc} = \cos^2(\pi\gamma_{cc}) = 0 \\ \psi_{cc} = k\pi + -\Delta \quad (k \in \pm\mathbb{N}) \end{cases} \quad (2.93)$$

Les paramètres de la matrice mixte sont supposés constants dans la plage de fréquence où l'énergie est totalement réfléchi par le réseau ($\eta_{cc} < 0$) et sont déterminés à partir des points d'entrée et de sortie de bande d'arrêt. On peut déterminer :

- la vitesse de phase

$$V = (f_e + f_s)p \quad (2.94)$$

- le coefficient de réflexion

$$\Delta = \pi \frac{fp_s - fp_e}{fp_s + fp_e} \quad (2.95)$$

- le couplage

$$G = -j \frac{F(fp_s) - F(fp_e)}{\tan \Delta} \quad (2.96)$$

- le facteur de directivité

$$\cos(2\delta) = \frac{F(fp_s) + F(fp_e)}{F(fp_s) - F(fp_e)} \quad (2.97)$$

L'atténuation de l'onde n'est pas accessible à partir de la courbe de dispersion. Toutefois, il est possible de l'estimer à partir de la réponse en fréquence du transducteur périodique infini [31]. Autour de la résonance les minimums et maximums de la susceptance sont obtenus pour les fréquences appelées fréquence haute et fréquence basse. Ces fréquences sont reliées aux pertes de propagation χ et aussi au couplage électromécanique comme suit :

$$\chi = 40 \log(e) \pi \frac{\psi_i}{\psi_r} = 40 \log(e) \pi \frac{fp_B - fp_H}{fp_B + fp_H} \text{ dB}/\lambda \text{ et } G = \frac{\pi fp_B - fp_H}{2 fp_B + fp_H} (Y(fp_H) - Y(fp_B)) \quad (2.98)$$

La théorie des perturbations [32] permet en outre de relier les deux définitions du couplage électromécanique G (utilisé pour la matrice mixte) et K^2 (défini pour des ondes de surface peu couplées).

$$G = 4K^2 \varepsilon_p L \omega \left(\frac{\sin\left(\frac{\psi_{cc}}{2}\right)}{P_{-\gamma}\left(-\cos\left(\frac{\pi a}{p}\right)\right)} \right)^2 \quad (2.99)$$

où ε représente la permittivité piézoélectrique de la structure [23], L est l'ouverture acoustique et P représente la fonction de Legendre de paramètre $-\gamma$. Cette relation sera considérée également comme vraie au centre des bandes d'arrêt du réseau.

2.3.4 Simulation des dispositifs à ondes acoustoélectriques guidées

2.3.4.1 Admittance d'un dispositif

L'admittance électrique d'un dispositif à ondes élastiques de surface est la somme d'une contribution électrostatique Y_C et électroacoustique Y_A .

Détermination de la contribution électrostatique Y_C La contribution électrostatique d'un transducteur à ondes élastiques de surface peut se mettre sous la forme

$$Y_c = jC\omega \quad (2.100)$$

où C représente la matrice des capacités mutuelles.

Dans un environnement périodique infini, la contribution électrostatique dépend de la permittivité piézoélectrique ε_p de la structure et s'exprime selon Ingebrigsten [21] de la manière suivante :

$$Y_c(f, p, \gamma) = 2jL\omega\varepsilon_p \sin(\pi\gamma) \frac{P_{\gamma-1}(\cos(\pi a/p))}{P_{\gamma-1}(-\cos(\pi a/p))} \quad (2.101)$$

La capacité mutuelle entre deux électrodes m et n ne dépend que de la différence d'indice $q = |m - n|$ et chaque terme peut s'exprimer de la manière suivante [33] :

$$C_q = 4\varepsilon_p L \int_0^1 \sin(\pi\gamma) \frac{P_{-\gamma}(\cos(\pi a/p))}{P_{-\gamma}(-\cos(\pi a/p))} \cos(2\pi q\gamma) d\gamma \quad (2.102)$$

Détermination de la contribution électroacoustique Y_A Afin d'utiliser le modèle de la matrice mixte, il est important de rappeler les hypothèses et les limites imposées par celui-ci :

- la matrice mixte permet de déterminer la réponse électroacoustique pour un seul type d'onde électroacoustique. Si une coupe présente plusieurs type d'onde électroacoustiques, il n'est possible d'utiliser ce formalisme que dans le cas où les ondes n'intéragissent pas entre elles. Sinon il est nécessaire d'utiliser un type de matrice mixte spécifique pour chacune des ondes.
- les paramètres de la matrice mixte sont déterminés pour une cellule placée dans un environnement harmonique. Nous supposons cependant que ces paramètres restent valables même lorsque les cellules environnantes sont de type différent.
- la matrice mixte ne permet pas de simuler la contribution des ondes de volume dans un dispositif.

Cascade de matrice mixte Au niveau de l'interface entre les deux cellules on peut considérer que l'amplitude de l'onde élastique rentrant dans une cellule est égale à l'amplitude de l'onde sortante de l'autre cellule comme illustré figure 2.11. Il vient alors :

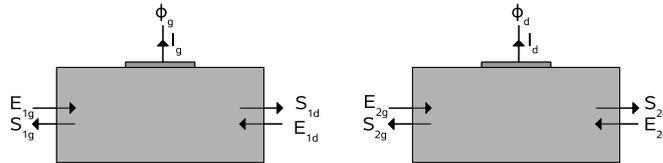


FIGURE 2.11 – Schéma de deux cellules adjacentes.

$$\begin{cases} E_{2g} = S_{1d} \\ E_{1d} = S_{2g} \end{cases} \quad (2.103)$$

Il est alors possible d'effectuer une cascade des matrices afin de n'obtenir qu'une seule matrice. L'équation 2.104 montre la relation matricielle permettant la cascade des matrices.

$$\begin{pmatrix} S_{1g} \\ S_{2d} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & t & \alpha_1^t \\ t & r_2 & \alpha_2^t \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & \mathbf{Y} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_{1g} \\ E_{2d} \\ \phi \end{pmatrix} \text{ avec } \mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_g \\ I_d \end{pmatrix} \text{ et } \phi = \begin{pmatrix} \phi_g \\ \phi_d \end{pmatrix} \quad (2.104)$$

Avec

$$r_1 = r_{1g} + \frac{r_{1d}t_g^2}{\Delta_r}; r_2 = r_{1d} + \frac{r_{2g}t_d^2}{\Delta_r}; t = \frac{t_g t_d}{\Delta_r} \quad \text{avec } \Delta_r = 1 - r_{1d}r_{2g} \quad (2.105)$$

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{1g} + \frac{t_g r_{1d} \alpha_{2g}}{\Delta_r} \\ \frac{t_g \alpha_{1d}}{\Delta_r} \end{pmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} \frac{t_d \alpha_{2g}}{\Delta_r} \\ \alpha_{2d} + \frac{t_d r_{2g} \alpha_{1d}}{\Delta_r} \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_g - \frac{r_{1d} \alpha_{2g}^2}{\Delta_r} & -\frac{\alpha_{2g} \alpha_{1d}}{\Delta_r} \\ \frac{\alpha_{2g} \alpha_{1d}}{\Delta_r} & Y_d - \frac{r_{2g} \alpha_{1d}^2}{\Delta_r} \end{pmatrix} \quad (2.106)$$

En connaissant les propriétés harmoniques de chaque type de cellule élémentaire, il est possible de déterminer la réponse électroacoustique de dispositifs. Pour un dispositif composé de n cellules élémentaire il suffit de réitérer la cascade de matrice mixte $n - 1$ fois afin d'obtenir la matrice électroacoustique du dispositif complet.

2.4 Conclusion

Dans cette partie, nous avons détaillé l'approche de modélisation des dispositifs à ondes élastiques de surface utilisé et développé au sein du laboratoire. De nombreuses thèses ont contribué à mettre ces éléments en place notamment les thèse de Fusero Y. [31] et Pastureaud T. [19]. De plus, ces développements ayant déjà été validés d'un point de vu expérimental, nous nous affranchissons de ces étapes et les résultats développés dans la suite s'appuient directement sur ce formalisme dont les bases sont solides. Dans le chapitre suivant, nous apporteront une pierre de plus à l'édifice avec la modélisation de dispositifs à ondes élastiques en milieu contraint mécaniquement.

