

# Étude de l'échantillonnage aléatoire à temps quantifié

## Introduction

Après avoir fait le point sur les différentes contraintes appliquées à l'étage Front End principalement au niveau de l'étage en bande de base, nous nous focalisons sur l'avantage de l'utilisation de l'échantillonnage aléatoire dans un récepteur radio. Nous nous intéressons donc aux types d'échantillonnages aléatoires dont l'implémentation matérielle est simple à réaliser. L'échantillonnage aléatoire à temps quantifié est naturellement le candidat favorable pour cette application. Il considère des instants quantifiés possibles à réaliser matériellement.

Étant donné que les travaux réalisés jusqu'à présent ne se sont pas intéressés à l'échantillonnage aléatoire à temps quantifié, nous étudions dans ce chapitre son pouvoir de réduction du repliement spectral. Après une présentation de l'échantillonnage aléatoire à temps quantifié (TQ-RS, Time-Quantized Random Sampling), nous discuterons le choix d'étudier le TQ-RS basé sur la méthode de construction JRS avec une distribution uniforme des instants d'échantillonnage. Il s'agit de l'échantillonnage TQ-JRS (Time-Quantized Jittered Random Sampling). Toujours dans le but de la simplification de la réalisation matérielle et de l'application du RS, nous introduisons dans ce chapitre une variante du TQ-RS à caractère périodique. Cette méthode est appelée échantillonnage pseudo-aléatoire à temps quantifié (TQ-PRS, Time-Quantized Pseudo-Random Sampling). Nous utilisons une méthode de construction JRS avec une distribution uniforme des instants d'échantillonnage. Il s'agit de l'échantillonnage TQ-JPRS (Time-Quantized Jittered Pseudo-Random Sampling).

Dans la première section, nous démontrons le pouvoir de réduction des répliques d'un signal échantillonné avec le TQ-RS en estimant la transformée de Fourier d'un signal échantillonné en TQ-RS. La formule théorique obtenue est comparée avec les résultats de simulation sur MATLAB d'un signal échantillonné par la même méthode. La comparaison inclut à la fois la prise en compte de l'échantillonnage et de l'échantillonnage avec la considération des effets de la représentation spectrale choisie. Les spectres montrent bien une totale corroboration avec les spectres des formules analytiques. La métrique de comparaison utilisée est l'atténuation des répliques. Dans la deuxième section, nous présentons le TQ-PRS. Nous formulerons analytiquement l'allure de son spectre en sortie de l'échantillonnage TQ-PRS. Nous mesurons le pouvoir du TQ-

PRS à réduire les répliques. La dernière section argumente la possibilité de l'utilisation du TQ-RS et du TQ-PRS dans le cas d'un signal modulé. La transposition de fréquences par le TQ-PRS dans une architecture à échantillonnage est aussi discutée.

## II.1 Démonstration de la réduction du repliement spectral par l'échantillonnage aléatoire à temps quantifié

Dans l'ensemble des travaux qui se sont intéressés à l'échantillonnage aléatoire, seul l'échantillonnage aléatoire à temps continu est étudié soit sous la forme d'un échantillonnage selon la construction JRS ou ARS (24; 23; 18) . Les conditions de l'anti-repliement de ces deux traitements de signal diffèrent selon la construction de leur axe temporel. Pour le JRS, la condition d'anti repliement se résume simplement à prendre une distribution uniforme de la variable aléatoire  $\{\tau_k\}$  dans l'intervalle  $[-T_{RS}/2, T_{RS}/2]$ . Quant à l'ARS, une distribution gaussienne ou uniforme de  $\{\tau_k\}$  sur l'intervalle  $[T_{RS}/2, 3T_{RS}/2]$  répond à la condition d'anti-repliement (18). Dans l'objectif d'une réalisation matérielle, une quantification de l'axe temporel du JRS ou de l'ARS est nécessaire afin de construire l'échantillonnage aléatoire à temps quantifié.

### II.1.1 Présentation du TQ-JRS

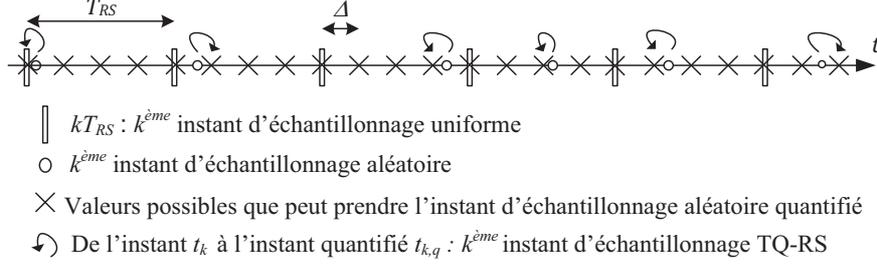
L'échantillonnage aléatoire à temps quantifié est dédié à l'implémentation matérielle du RS. En effet, un passage par la quantification des instants d'échantillonnage est primordial dans le cas d'une implémentation. Les instants aléatoires d'échantillonnage sont générés selon le mode JRS ou ARS puis quantifiés. Nous fixons un pas de quantification  $\Delta$  de la période moyenne d'échantillonnage  $T_{RS}$  donné par l'équation Eq. II-1.

$$\Delta = \frac{T_{RS}}{q} \quad \text{Eq. II-1}$$

avec  $q$  le facteur de la quantification temporelle qui définit le nombre de valeurs possibles que peut prendre un instant d'échantillonnage quantifié dans une période d'échantillonnage moyenne  $T_{RS}$ . La quantification est faite de façon à comparer la distance  $dt_k = t_k - kT_{RS}$  pour le  $k^{ième}$  instant d'échantillonnage avec un multiple entier  $n$  de  $\Delta$ . La distance  $dt_k$  est ensuite substituée par  $dt_{k,q}$  comme présenté par l'équation Eq. II-2.

$$dt_{k,q} = n\Delta \quad \text{si} \quad \left(n - \frac{1}{2}\right)\Delta < dt_k \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta \quad \text{Eq. II-2}$$

De cette manière, tous les instants d'échantillonnage quantifiés correspondent à un multiple de  $\Delta$ . La quantification de l'axe temporel avec un facteur  $q = 4$  est présentée par la Figure II-1.



**Figure II-1. Description du mode TQ-JRS pour q=4.**

D'un point de vue statistique, chaque instant d'échantillonnage a une densité de probabilité qui dépend de la densité de probabilité des instants en temps continu. Deux définitions de la probabilité peuvent être prises en compte. La première expression de la densité de probabilité de l'instant d'échantillonnage est déduite par la considération de l'instant quantifié. La seconde expression est donnée suite à la considération de l'intervalle auquel appartient l'instant quantifié à savoir l'intervalle  $\left[ kT_{RS} + \left( n - \frac{1}{2} \right) \Delta, kT_{RS} + \left( n + \frac{1}{2} \right) \Delta \right]$  pour le  $k^{ième}$  échantillon quantifié de valeur  $kT_{RS} + n\Delta, n \in \llbracket 0, q - 1 \rrbracket$ .

### II.1.1.1 Détermination de la densité de probabilité des instants d'échantillonnage quantifiés

La détermination de la densité de probabilité de l'instant de l'échantillonnage quantifié a été précédemment introduite par Wojtiuk (23) et Ben-Romdhane (26). Si nous notons par  $p(\tau)$  la densité de probabilité de la variable aléatoire  $\{\tau_k\}$  choisie pour la construction de l'axe temporel du JRS ou de l'ARS, la densité de probabilité des instants du TQ-JRS est présentée par l'équation Eq. II-3.

$$p_q(\delta t_{k,q}) = \sum_{n=0}^{q-1} Q(n\Delta) \delta(dt_{k,q} - n\Delta) \quad \text{Eq. II-3}$$

Ceci en définissant  $Q(x)$  comme la densité de probabilité de la fonction de la quantification définie par l'équation Eq. II-4.

$$Q(x) = P(x + \Delta/2) - P(x - \Delta/2), \text{ pour chaque } x \in \{n\Delta, n \in \llbracket 0, q - 1 \rrbracket\} \quad \text{Eq. II-4}$$

Comme toute densité de probabilité,  $q(x)$  doit satisfaire la condition :

$$\sum_{n=0}^{q-1} Q(n\Delta) = 1$$

La fonction  $P(x)$  représente la fonction de répartition de la variable aléatoire  $\{\tau_k\}$ . Elle est définie par Eq. II-5.

$$P(x) = \int_{-\infty}^x p(\tau) d\tau \quad \text{Eq. II-5}$$

Une autre approche pour déterminer la densité de probabilité des instants d'échantillonnage TQ-JRS est de considérer les intervalles de quantification. En effet, chaque instant aléatoire construit selon JRS ou ARS appartient à un des intervalles de quantification de largeur  $\Delta$ . Quelque soit sa position dans l'intervalle de quantification, l'instant d'échantillonnage aléatoire sera toujours ramené par la quantification vers l'instant le plus proche dont la valeur est multiple de  $\Delta$ . Ainsi, chaque instant d'échantillonnage quantifié aura exactement la probabilité d'apparition de tout l'intervalle de quantification comme l'explique la Figure II-2. L'axe des ordonnées présente la probabilité des instants aléatoires en temps continu et la probabilité des instants quantifiés.

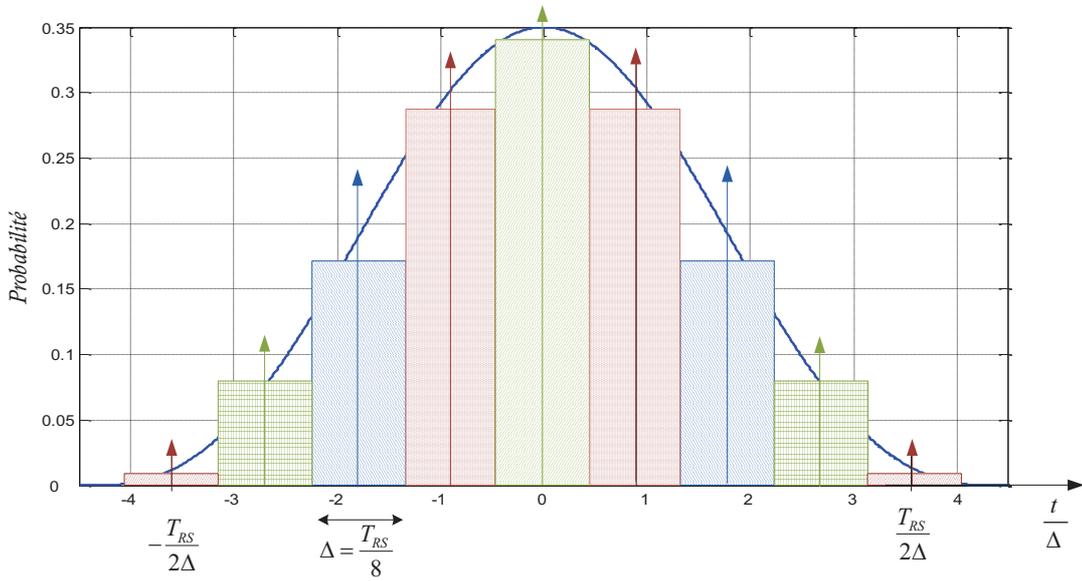


Figure II-2. Considération de la probabilité de tous les instants dans le cas du TQ-JRS.

Il s'agit donc de comptabiliser la probabilité de tout l'intervalle de quantification et de sélectionner en utilisant la fonction porte. Ainsi, la densité de probabilité des instants d'échantillonnage dans le cas d'une distribution uniforme sur  $\left[-\frac{T_{RS}}{2}, \frac{T_{RS}}{2}\right]$  est donnée par l'équation Eq. II-6.

$$p_q(t) = \sum_{n=0}^{q-1} \text{rect}_{1/\Delta} \left( \frac{t - n\Delta}{\Delta} \right) \int_{(n-\frac{1}{2})\Delta}^{(n+\frac{1}{2})\Delta} p(\tau) d\tau \quad \text{Eq. II-6}$$

La fonction  $\text{rect}_y(x)$  est la fonction porte qui prend la valeur de  $y$  si  $|x| \leq 1/2$  et 0 sinon. Avec cette considération, nous parvenons à calculer la probabilité des instants d'échantillonnage en temps continu et de la canaliser sur le pic présentant l'instant d'échantillonnage quantifié. La formule en Eq. II-6 est simplement la représentation en temps continu de la formule en Eq. II-3. Elle sera utilisée dans le reste des

démonstrations dans le but de justifier le pouvoir de réduction du repliement spectral du TQ-JRS.

### II.1.1.2 Choix de la distribution des instants d'échantillonnage quantifiés

L'échantillonnage aléatoire à temps quantifié est basé sur le JRS ou l'ARS. Il est donc judicieux de voir la différence entre ces deux constructions d'échantillonnages aléatoires avant de continuer l'étude théorique de l'échantillonnage aléatoire à temps quantifié. D'après les formules des estimées de la transformée de Fourier d'un signal échantillonné en JRS et celle d'un signal échantillonné en ARS données par les Eq. I-15 et Eq. I-17, nous pouvons constater que l'ARS parvient à supprimer les répliques en présence d'un plancher de bruit assez élevé. Le JRS de son côté se limite à réduire le repliement spectral mais avec un plancher de bruit moins élevé. Un signal sinusoïdal à une fréquence porteuse  $f_{in} = 100 \text{ kHz}$  a été échantillonné avec une fréquence moyenne égale à  $3.22 \text{ MHz}$  en JRS et en ARS. L'analyse spectrale indique la réduction du repliement spectral par le JRS et la suppression des répliques par l'ARS. En plus, le SNR dans la bande du canal calculé en présence d'un échantillonnage JRS est supérieur de 14 dB par rapport au même signal échantillonné en ARS. D'autre part, nous verrons plus loin dans ce chapitre que la quantification temporelle que nous allons considérer induira une réduction des répliques plutôt qu'une suppression. Ainsi, il est préférable de choisir le type de RS qui fournit un meilleur SNR plutôt que celui qui élimine les raies. Par conséquent, nous choisissons le JRS comme le type de RS à temps continu sur lequel la quantification sera effectuée. La distribution de la variable aléatoire  $\{\tau_k\}$  sera donc uniforme sur l'intervalle  $[kT_{RS} - T_{RS}/2, kT_{RS} + T_{RS}/2]$  afin de satisfaire un échantillonnage à période moyenne  $T_{RS}$  aboutissant à une réduction des répliques.

Dans ce cas de figure, la densité de probabilité de la distribution uniforme de la variable aléatoire  $\{\tau_k\}$  est  $p(\tau) = 1/T_{RS}$ . Ainsi, la formule de l'Eq. II-6 s'écrit sous la forme donnée par Eq. II-7.

$$p_q(t) = \frac{1}{q} \sum_{n=0}^{q-1} \text{rect}_{1/\Delta} \left( \frac{t - n\Delta}{\Delta} \right) \quad \text{Eq. II-7}$$

Étant la transformée de Fourier de la distribution de probabilité  $p_q(t)$  calculée à  $-f$ , la fonction caractéristique est donnée par l'équation Eq. II-8.

$$\Phi(-f) = e^{-j\pi f(T_{RS} - \Delta)} \text{sinc}(\pi f T_{RS}) \quad \text{Eq. II-8}$$

### II.1.1.3 Discussion sur la valeur du facteur de quantification

Afin d'avoir une bonne quantification de l'axe temporel, un paramètre statistique est à choisir avec soin. Ce paramètre, valant  $\sigma/T_{RS}$ , fait intervenir l'écart type  $\sigma$  de la distribution de la variable aléatoire. Dans le cas d'une distribution discrète uniforme sur un intervalle de largeur  $T_{RS}$  et en considérant une quantification avec un facteur égal à  $q$ , l'écart type est donné par Eq. II-9.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} \left( i\Delta - \left( \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} j\Delta \right) \right)^2} = \Delta \sqrt{\frac{q^2 - 1}{12}} \quad \text{Eq. II-9}$$

Le paramètre statistique dans le cas de la distribution uniforme discrète est donné par Eq. II-10.

$$\frac{\sigma}{T_{RS}} = \frac{1}{q} \sqrt{\frac{q^2 - 1}{12}} \quad \text{Eq. II-10}$$

La valeur de l'écart type pour le cas d'une distribution uniforme continue sur un intervalle de largeur  $T_{RS}$  est égal à  $T_{RS}/\sqrt{12}$ . Ce même paramètre a donc la valeur  $1/\sqrt{12} = 0.2887$  dans le cas de la distribution uniforme continue. Une étude faite dans (26) montre bien qu'un choix de quantification temporelle avec un facteur égal à 8 permet d'être à 1% de la valeur du paramètre statistique dans le cas du temps continu.

#### II.1.1.4 Formulation analytique de l'estimée de la transformée de Fourier d'un signal échantillonné en TQ-JRS

Afin de prévoir l'effet de l'utilisation de l'échantillonnage aléatoire à temps quantifié, une estimation de la transformée de Fourier d'un signal échantillonné en TQ-JRS est faite. Les détails de la démonstration analytique sont présentés dans l'Annexe B. Le résultat de cette démonstration est présenté par Eq. II-11.

$$\begin{aligned} \hat{X}_{s,q}(f) = & X(f) \circledast [(1 - e^{-j\pi f(T_{RS}-\Delta)}) \text{sinc}(\pi f T_{RS})] \\ & + \frac{1}{T_{RS}} e^{-j\pi f(T_{RS}-\Delta)} \text{sinc}(\pi f T_{RS}) \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} X\left(f - \frac{k}{T_{RS}}\right) \end{aligned} \quad \text{Eq. II-11}$$

Le premier terme de la formule représente un plancher de bruit qui vient s'ajouter au spectre. Nous remarquons également l'existence du terme  $X(f - k/T_{RS})$  dans l'expression de  $\hat{X}_{s,q}(f)$ . Ce terme représente le repliement spectral autour des fréquences multiples de  $f_{RS}$ . Toutefois, ce repliement spectral est atténué par la fonction *sinc* présente dans la formule. La représentation graphique, donnée par la Figure II-3, de la fonction  $\hat{X}_{s,q}(f)$  donne l'allure du spectre après échantillonnage en TQ-JRS.

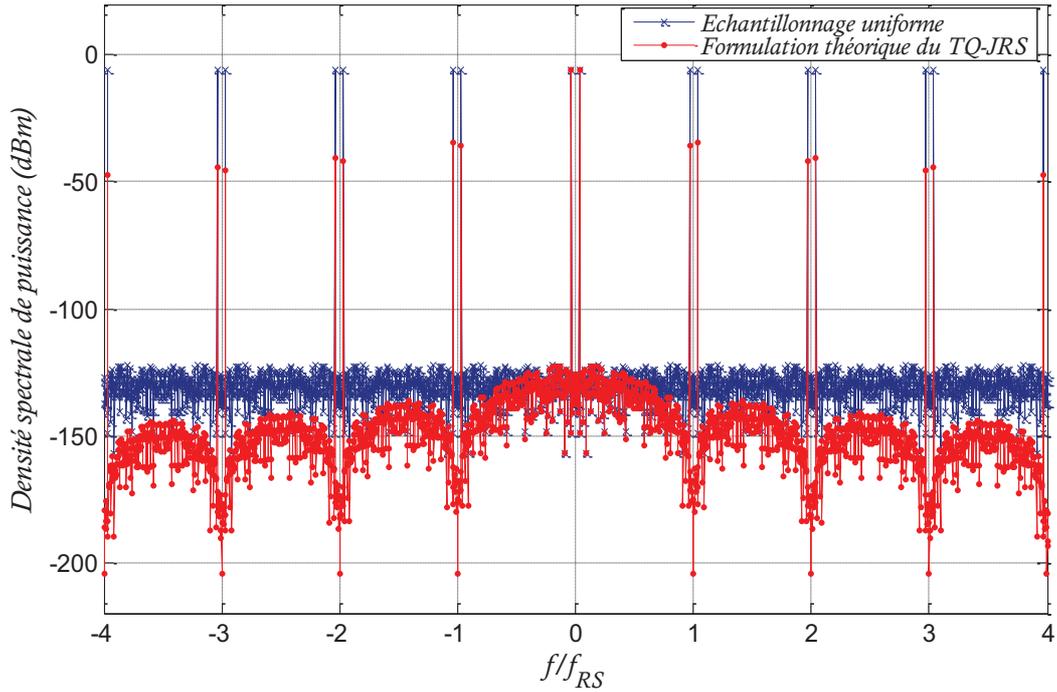


Figure II-3. Allure du spectre après échantillonnage TQ-JRS.

Les densités spectrales de puissance présentées tout au long de ce rapport considèrent lors du calcul une résistance d'une valeur  $1\Omega$ . La Figure II-3 présente l'estimation de la transformée de Fourier d'une sinusoïde à  $f_{in} = 100 \text{ kHz}$  échantillonnée en TQ-JRS à une fréquence moyenne  $f_{RS} = 3.2 \text{ MHz}$ . Cette figure montre bien l'atténuation des répliques grâce à l'utilisation du TQ-JRS ainsi que le plancher de bruit. Afin de pouvoir mesurer la réduction des répliques par le TQ-JRS, nous définirons la métrique de calcul de l'atténuation.

Nous choisissons, comme premier travail de simulation, une sinusoïde afin de modéliser un signal réel de largeur de bande  $B$ . La sinusoïde utilisée marque la limite supérieure de la bande. Ainsi, le signal utile situé en bande de base possède une bande utile  $[0, f_{in}]$  de largeur  $B$ . La première réplique du signal est située autour de  $f_{RS}$ . Le spectre de la Figure II-4 présente les limites de la réplique et du signal. Selon cette considération, le signal de puissance  $P_s$  est présenté par le pic de Dirac avec le bruit se trouvant dans l'intervalle  $[0, f_{in}]$ . La puissance de la réplique  $P_r$  est donc la somme de la puissance du pic replié à  $f_{RS} - f_{in}$  et du bruit dans l'intervalle  $[f_{RS} - f_{in}, f_{RS}]$ . L'atténuation est donc le rapport des deux puissances tel que présenté par Eq. II-12.

$$Att_{TQ-JRS} = \frac{P_s}{P_r} = \frac{P_{pic_s} + \eta_s}{P_{pic_r} + \eta_r} \quad \text{Eq. II-12}$$

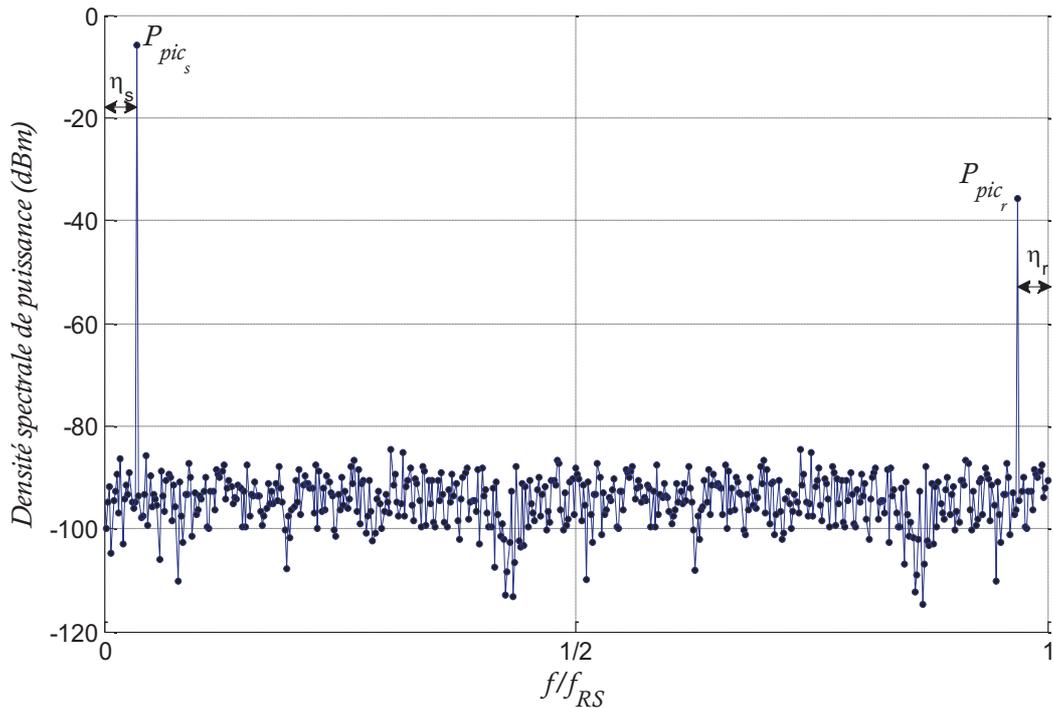


Figure II-4. Présentation de la puissance du signal et de la première réplique.

Étant donné que l'estimation de la transformée de Fourier dont la formule est donnée par Eq. II-11 dépend des deux facteurs  $\Delta$  et  $f_{RS}$ , implicitement  $q$  et  $f_{RS}$ , nous proposons de calculer l'atténuation en fonction de ces deux variables. Dans ce qui suit, nous considérons le facteur de sur échantillonnage (OSR, Over Sampling Ratio) qu'on définit par  $OSR = f_{RS}/2f_{in}$  où  $2f_{in}$  représente la fréquence de Nyquist. Ce facteur est pris en compte pour représenter les variations de  $f_{RS}$ . La Figure II-5 à trois dimensions présente la variation de l'atténuation en fonction des variables  $OSR$  et  $q$

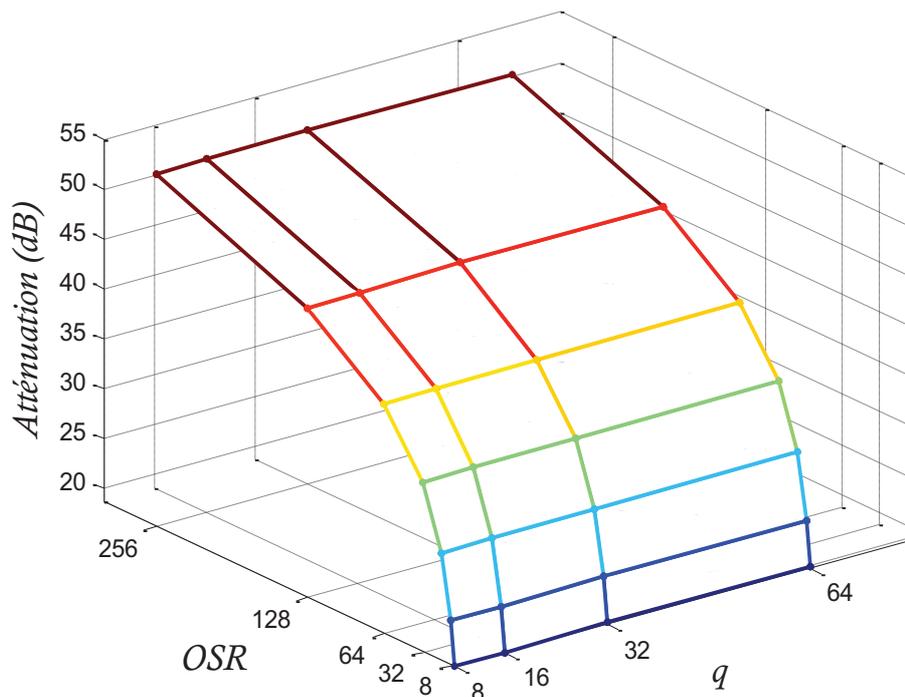


Figure II-5. Variation de l'atténuation en fonction de  $q$  et  $OSR$ .

La Figure II-5 montre bien que l'atténuation ne change presque pas suite à une variation du facteur de la quantification temporelle  $q$ . Elle dépend uniquement de la valeur de l' $OSR$  utilisé.

## II.1.2 Comparaison des résultats de la simulation et la théorie du TQ-JRS

Dans cette partie, nous nous intéressons à valider par simulation le travail théorique élaboré. Nous réalisons les simulations sur MATLAB. En échantillonnage uniforme, l'analyse spectrale offre une représentation fréquentielle sur seulement la bande fréquentielle  $[0, f_{RS}/2]$ . Cependant, en échantillonnage aléatoire, nous voudrions représenter le spectre sur des fréquences dépassant la fréquence d'échantillonnage pour examiner l'effet de l'anti-repliement sur les répliques se trouvant autour des fréquences multiples de  $f_{RS}$ . Pour cela, nous adoptons dans le traçage des spectres la méthode de représentation spectrale *Sample&Hold* (*S&H*): lors des tests faits sur les instants pour effectuer la quantification temporelle, si une nouvelle valeur d'instant d'échantillonnage est détectée, nous considérons l'échantillon correspondant ; sinon la valeur de l'ancien échantillon est maintenue. Par cette méthode, nous pourrions représenter le spectre sur un intervalle fréquentiel de largeur  $qf_{RS}/2$ ,  $q$  étant le facteur de la quantification temporelle.

Dans le but de valider la théorie, nous simulons l'échantillonnage TQ-JRS d'une sinusoïde située à  $f_{in} = 100kHz$  à la fréquence moyenne d'échantillonnage  $f_{RS} = 3.2 MHz$ . La superposition de la représentation de la formule théorique et du spectre en sortie de l'échantillonnage est représentée par la Figure II-6.

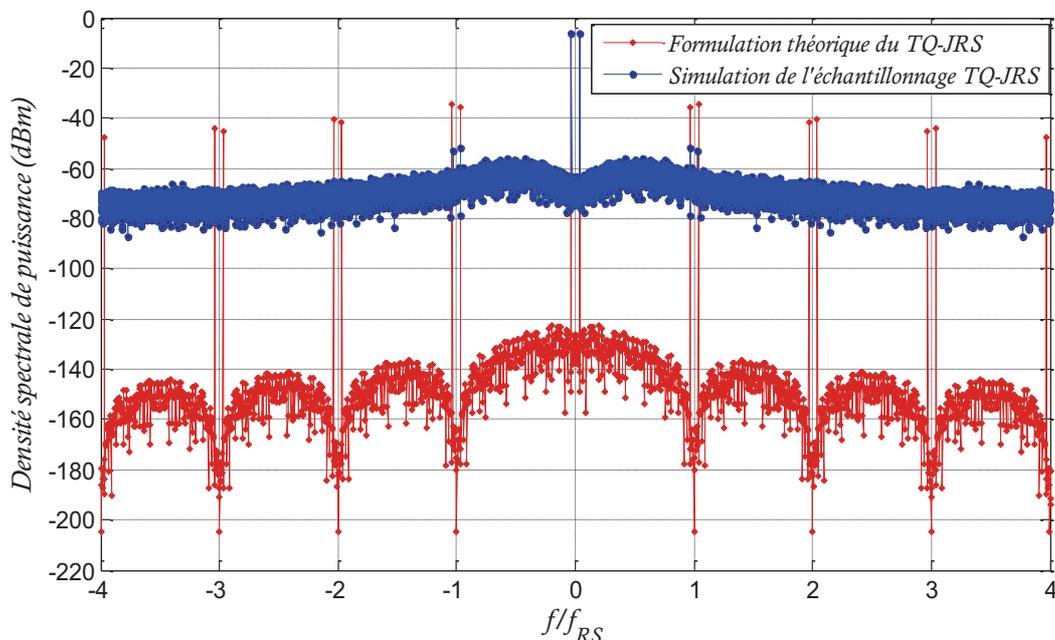


Figure II-6. Superposition de la représentation théorique et du spectre de la simulation du TQ-JRS.

D'après la Figure II-6, l'échantillonnage TQ-JRS simulé montre des répliques plus atténuées et un plancher de bruit plus important. Ce plancher, étant fixé à 120 dBm pour la théorie et la simulation, est passé à 80 dBm pour le spectre de la simulation. Ceci est

dû à la randomisation par MATLAB des répliques tout au long du spectre. D'autre part, les répliques sont plus atténuées en simulation du fait d'adopter la représentation spectrale *Sample&Hold*.

L'opération de blocage de l'ancienne valeur de l'échantillon en attendant un nouvel échantillon est une fonction porte sur l'intervalle  $[t_k, t_{k+1}]$ . En domaine fréquentiel, l'opération *Sample&Hold* est décrite par la fonction de transfert donnée par Eq. II-13.

$$H_{S\&H}(f) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} (t_{k+1} - t_k) e^{-2j\pi f t_k} e^{-j\pi f (t_{k+1} - t_k)} \text{sinc}(\pi f (t_{k+1} - t_k)) \quad \text{Eq. II-13}$$

Cette fonction de transfert comporte une somme infinie. Son approximation serait donc possible par la substitution des termes par leurs valeurs moyennes. Le terme  $(t_{k+1} - t_k)$  présente la période instantanée d'échantillonnage. Cette période est en moyenne égale à  $T_{RS}$ . Les instants d'échantillonnage  $\{t_k = kT_{RS} + \tau_k\}$  sont pris selon une distribution uniforme avec une moyenne égale à  $kT_{RS}$ . La séquence de giges  $\{\tau_k\}$  est prise de moyenne nulle. Après l'utilisation de la formule de Poisson (124), l'approximation de  $H_{S\&H}$  est donnée par Eq. II-14.

$$\begin{aligned} \hat{H}_{S\&H}(f) &= T_{RS} e^{-j\pi f T_{RS}} \text{sinc}(\pi f T_{RS}) \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{-2j\pi f k T_{RS}} \\ &= \text{sinc}(\pi f T_{RS}) e^{-j\pi f T_{RS}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(f - k f_{RS}) \end{aligned} \quad \text{Eq. II-14}$$

Dans l'équation Eq. II-14, seul le terme  $\text{sinc}(\pi f T_{RS})$  contribue à l'atténuation des répliques lors du calcul de la densité spectrale. L'équation Eq. II-14 montre bien la similitude de l'effet de l'application du *Sample&Hold* et l'application du TQ-JRS. En effet, dans l'équation de l'estimée de la transformée de Fourier d'un signal échantillonné par le TQ-JRS, Eq. II-11, le premier terme  $X(f) \circledast [(1 - e^{-j\pi f (T_{RS} - \Delta)} \text{sinc}(\pi f T_{RS}))]$  est bien négligeable devant le second terme  $1/T_{RS} e^{-j\pi f (T_{RS} - \Delta)} \text{sinc}(\pi f T_{RS}) \sum X(f - \frac{k}{T_{RS}})$ . De plus, la fonction exponentielle complexe de module égal à 1 n'intervient pas dans le calcul de la densité spectrale de puissance. Ainsi, une approximation de l'estimée de la transformée de Fourier d'un signal échantillonné en TQ-JRS est donnée par Eq. II-15.

$$\begin{aligned} \hat{X}_{s,q}(f) &\cong \frac{1}{T_{RS}} \text{sinc}(\pi f T_{RS}) \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} X\left(f - \frac{k}{T_{RS}}\right) \\ &\cong H_{TQ\_JRS}(f) X(f) \end{aligned} \quad \text{Eq. II-15}$$

En conséquence, la fonction de transfert de l'opération de l'échantillonnage TQ-JRS notée  $H_{TQ\_RS}$  est approximativement égale à  $\hat{H}_{S\&H}$  en termes d'atténuation des répliques. La simulation d'un échantillonnage uniforme en *S&H* superposée au traçage de la formule analytique de  $\hat{X}_{s,q}$  présentée à la Figure II-7 affirme bien les approximations faites.

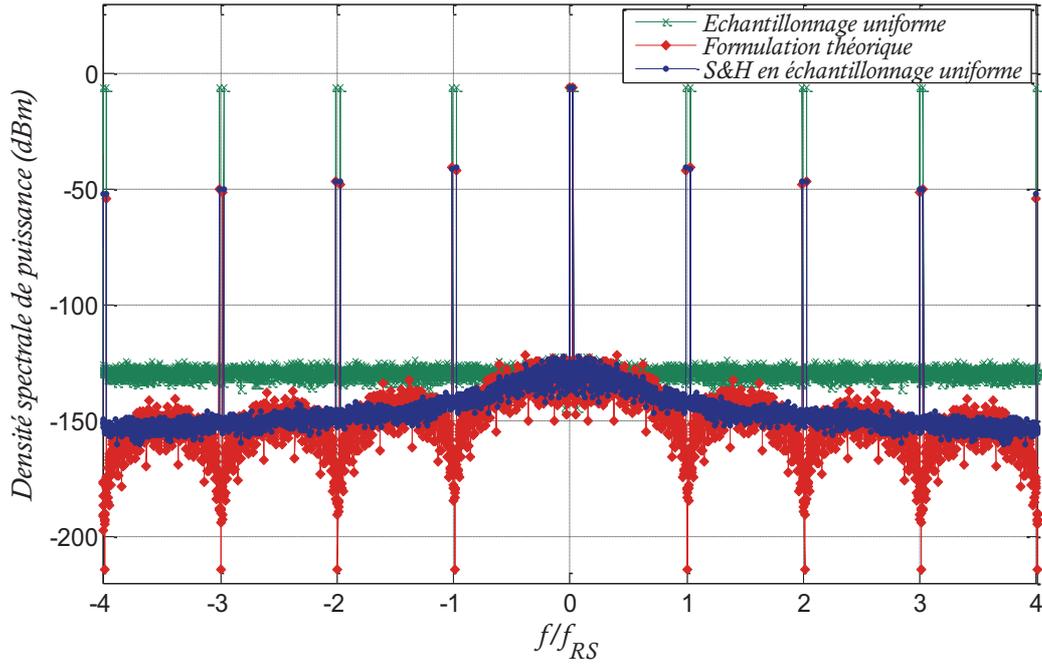


Figure II-7. Superposition du spectre de la simulation d'un échantillonnage uniforme en *S&H* avec le traçage de la formule théorique du spectre en TQ-JRS.

Il est clair d'après la Figure II-7 et l'étude faite ci-dessus que l'échantillonnage TQ-JRS a un pouvoir de réduction du repliement spectral similaire à celui apporté par la représentation spectrale *Sample&Hold* sans pour autant l'avoir appliquée. Ce pouvoir intrinsèque d'atténuation peut être aussi jumelé avec celui de la représentation spectrale. Ainsi, l'échantillonnage TQ-JRS en *S&H* aura un plus grand pouvoir d'atténuation. L'estimation de son équation analytique est donnée par l'Eq. II-16.

$$\begin{aligned} \hat{X}_{s,q_{S\&H}}(f) &= \hat{H}_{S\&H}(f) \hat{H}_{TQJRS}(f) X(f) \\ &= \frac{1}{T_{RS}} \text{sinc}^2(\pi f T_{RS}) e^{-j\pi f T_{RS}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} X\left(f - \frac{k}{T_{RS}}\right) \end{aligned} \quad \text{Eq. II-16}$$

L'application de la fonction de transfert  $H_{S\&H}(f)$  à la formulation analytique de l'Eq. II-11 mène à un échantillonnage aléatoire en temps quantifié en appliquant une fonction porte entre deux instants successifs. Le spectre de simulation de d'échantillonnage TQ-JRS tracé selon la représentation spectrale *Sample&Hold* est superposé à la représentation de la densité spectrale de puissance de  $\hat{X}_{s,q_{S\&H}}$  est présenté par la Figure II-8.

La formule théorique de l'estimation du spectre en sortie d'un échantillonnage TQ-JRS en *S&H* présente des répliques autour des multiples de  $f_{RS}$ . Ces répliques ont des puissances très proches de ceux de la simulation du TQ-JRS.

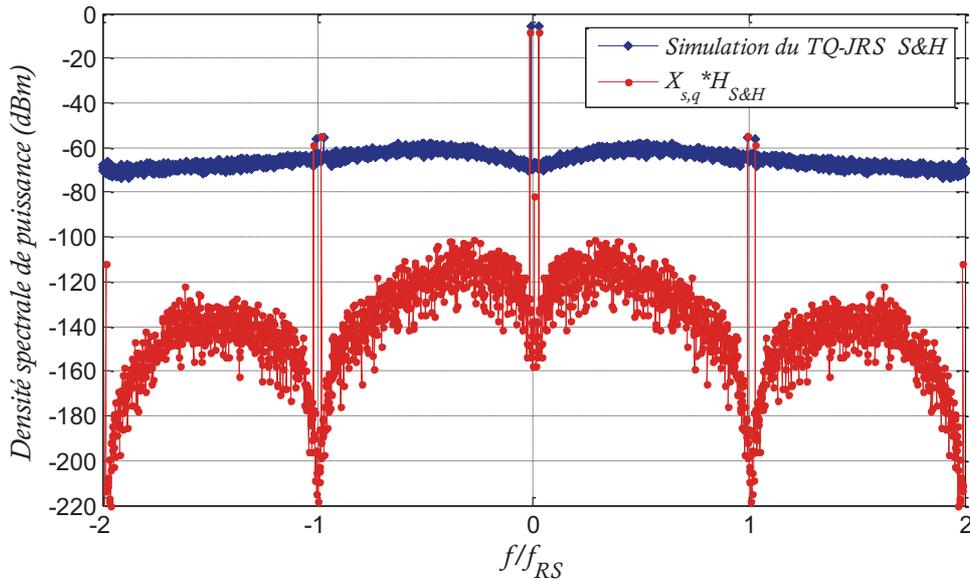
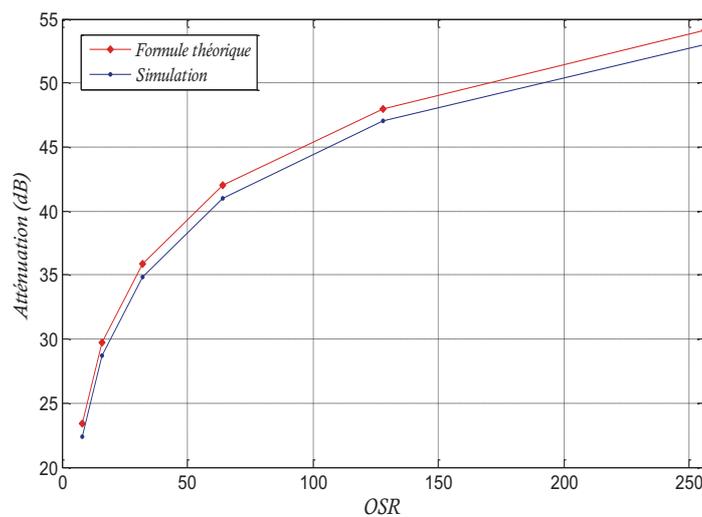


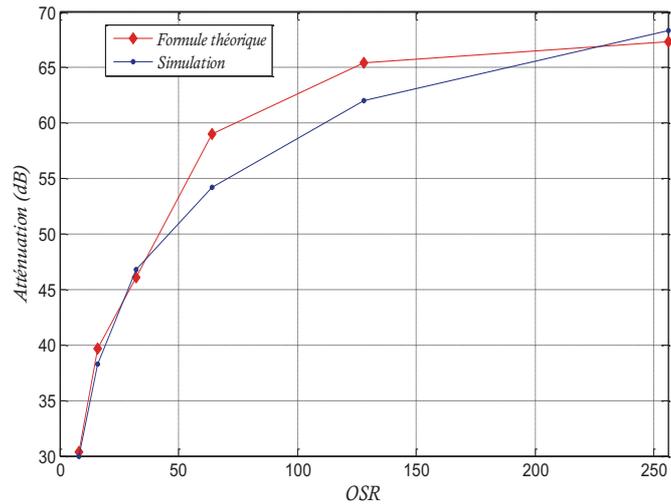
Figure II-8. Superposition de la formule théorique du TQ-JRS en *S&H* avec la simulation du TQ-JRS présenté en *S&H*.

Le spectre simulé ne présente que les deux premiers pics autour de  $f_{RS}$ , les répliques au delà de cette fréquence sont noyées dans le plancher de bruit généré par le calcul de la transformée de Fourier rapide (fft, fast fourier transform) de MATLAB.

En termes d'atténuation, la théorie corrobore avec les simulations. Tracées avec les mêmes conditions, la théorie et la simulation permettent d'atténuer la première réplique du signal tant en échantillonnage qu'en échantillonnage en *S&H*. En variant l'OSR, l'atténuation est calculée et représentée à la Figure II-9 (a) pour l'échantillonnage TQ-JRS en théorie et en simulation et à la Figure II-9 (b) en échantillonnage TQ-JRS avec considération de l'effet de la représentation spectrale *Sample&Hold* en théorie et en simulation.



(a)

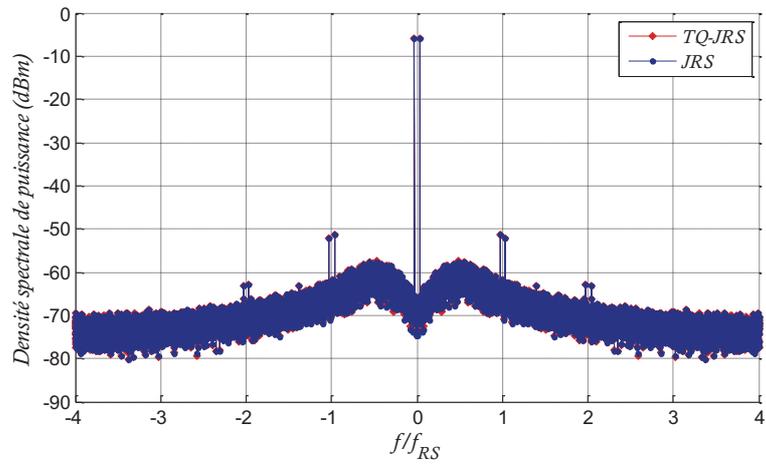


(b)

Figure II-9. Comparaison de l'atténuation de la première réplique par l'échantillonnage TQ-JRS avec et sans S&H.

La simulation indique une atténuation de la première réplique à des valeurs proches des valeurs indiquées par la théorie. Toutefois, la théorie présente de meilleurs résultats grâce à un plancher de bruit réduit qui ne contribue presque pas au calcul de l'atténuation. Par cette comparaison au niveau des spectres théoriques et de simulation et au niveau de l'atténuation calculée, nous pouvons affirmer la validation de la théorie proposée.

Un autre niveau de validation concerne le facteur de la quantification temporelle. Ce facteur a été discuté dans la section II.1.1.3 et choisi supérieur à 8. Afin de confirmer que cette valeur de facteur de quantification temporelle donne un résultat très proche du résultat à temps continu, nous présentons dans cette partie, une comparaison entre le spectre en sortie de l'échantillonnage aléatoire à temps quantifié et l'échantillonnage aléatoire à temps continu JRS. Les deux spectres sont présentés par la Figure II-10 (a). Le pouvoir d'atténuation de chaque échantillonnage est illustré par Figure II-10 (b).



(a)

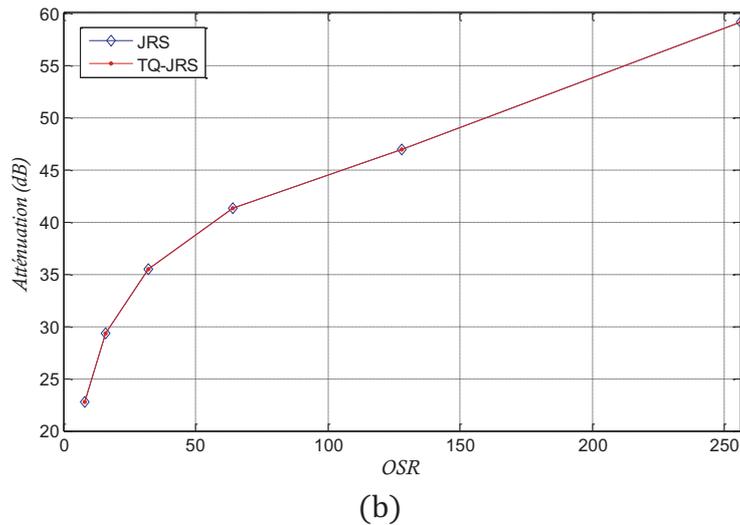


Figure II-10. Comparaison du résultat de simulation des échantillonnages JRS et TQ-JRS en terme de densité spectrale de puissance (a) et atténuation (b).

La Figure II-10(a) montre une très légère différence entre le JRS et le TQ-JRS. En termes d'atténuation, Figure II-10 (b), les deux échantillonnages permettent d'avoir les mêmes valeurs à une différence de quelques centièmes de dB. Ainsi, il est clair que le facteur de quantification choisi égal à 8 permet d'avoir une sortie très proche du résultat d'échantillonnage aléatoire à temps quantifié.

## II.2 Démonstration de la réduction des répliques par l'échantillonnage pseudo- aléatoire à temps quantifié

Le TQ-JRS est favorable à l'implémentation matérielle grâce à la considération d'un axe temporel quantifié. Cependant, une telle implémentation nécessite impérativement un générateur d'horloge dont la période varie aléatoirement en prenant des valeurs égales à  $n\Delta, n \in \mathbb{N}$ . Ainsi, un générateur de nombres aléatoires devrait faire partie du générateur de l'horloge à TQ-JRS. Les générateurs de nombres totalement aléatoires portent une certaine complexité lors de leurs implémentations. Ils peuvent être basés sur l'utilisation des phénomènes physiques, comme l'échantillonnage d'un bruit thermique (22) ou la mesure de la période du claquage de l'oxyde de grille d'un résistor MOSFET (125) ; ou bien l'utilisation des oscillateurs comme les oscillateurs chaotiques. (126). Un état de l'art en (125) montre bien qu'un générateur de nombre aléatoire a généralement une consommation entre 1 et 7 mW et peut occuper jusqu'à  $1.5\text{mm}^2$  de surface. Ce genre de générateur est énorme comparé à un simple générateur de nombre pseudo-aléatoire tel un LFSR composé simplement de quelques bascules et portes logiques. L'utilisation d'un générateur de nombres pseudo-aléatoires dans un générateur d'horloge mène à avoir une horloge pseudo-aléatoire dont les phases se répètent de façon cyclique après un certain temps. Cette horloge conduit à un échantillonnage pseudo-aléatoire à temps quantifié basé sur la construction JRS (TQ-JPRS, Time Quantized Jittered Pseudo-Random Sampling). Il est donc intéressant

d'étudier de près le TQ-JPRS afin de justifier son pouvoir de réduction du repliement spectral et par suite son implémentation matérielle au sein d'un récepteur radio SDR multistandard.

### II.2.1 Présentation du TQ-JPRS

L'échantillonnage pseudo-aléatoire à temps quantifié basé sur la construction JRS est simplement une variante du TQ-JRS où la distance entre les instants d'échantillonnage pseudo-aléatoires est connue au préalable. Cette distance suit les valeurs d'une séquence de nombre pseudo-aléatoire tel que par exemple la séquence que génère un LFSR. Nous conservons alors les paramètres de la quantification temporelle à savoir  $\Delta$  et  $q$ . Le facteur de quantification représente le nombre de valeurs possibles que l'instant quantifié peut prendre. Cependant, dans le cas de l'utilisation d'un LFSR seules  $q - 1$  valeurs possibles peuvent être générées. Chaque instant d'échantillonnage sera répété toutes les  $(q - 1)T_{RS}$  périodes. Nommons  $lfsr$  la séquence selon laquelle les instants d'échantillonnage sont choisis. Pour présenter selon le TQ-JPRS un cas de quantification à facteur  $q = 4$ , nous aurons besoin d'un  $lfsr$  contenant  $q - 1 = 3$  valeurs. L'axe temporel dans ce cas est représenté par la Figure II-11.

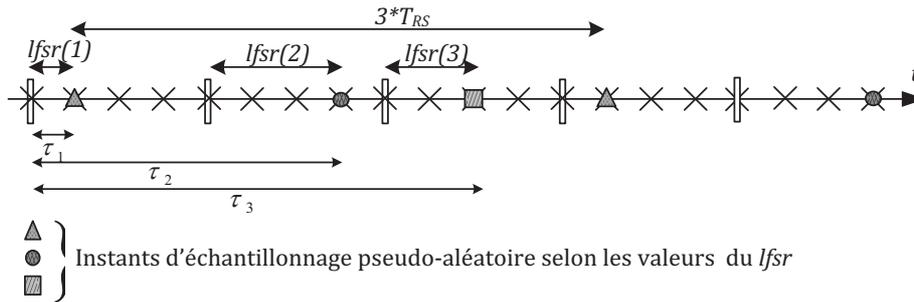


Figure II-11. Présentation de l'axe temporel en TQ-JPRS pour un facteur de quantification,  $q=4$ .

L'échantillonnage pseudo-aléatoire est assimilable à la juxtaposition de  $q - 1$  échantillonnages uniformes pris à des instants différents  $\tau_i$  mais avec une période d'échantillonnage égale  $T_{TQ-JPRS} = (q - 1)T_{RS}$ .

### II.2.2 Formulation analytique de la transformée de Fourier d'un signal échantillonné en TQ-JPRS

L'échantillonnage TQ-JPRS s'effectue aux instants  $\{k(q - 1)T_{RS} + \tau_i, k \in \mathbb{N}, i \in \llbracket 1, q - 1 \rrbracket\}$ . Afin de pouvoir comparer l'échantillonnage TQ-JPRS et l'échantillonnage TQ-JPRS en  $S\&H$  aux résultats de simulation, nous réalisons en premier temps la formulation analytique de la transformée de Fourier d'un signal échantillonné en TQ-JPRS puis nous lui appliquerons la fonction de transfert du blocage des échantillons entre deux instants consécutifs.

L'échantillonnage TQ-JPRS est comparé à une juxtaposition de  $q - 1$  échantillonnages uniformes débutant aux instants  $\tau_i$  à une période  $(q - 1)T_{RS}$ . Cette modélisation permet de calculer la transformée de Fourier d'un signal échantillonné pseudo-aléatoirement. La formule est donnée par Eq. II-17. Les détails de la démonstration sont notés à l'annexe C.

$$X_{TQ-JPRS}(f) = \frac{f_{RS}}{(q-1)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{q-1} e^{-2j\pi f \tau_n} X\left(f - k \frac{f_{RS}}{(q-1)}\right) \quad \text{Eq. II-17}$$

$$= \frac{f_{RS}}{(q-1)} e^{-j\pi f (q-1) T_{RS}} \frac{\sin(\pi f (q-1) \Delta)}{\sin(\pi f \Delta)} \frac{\sin(\pi f (q-1) T_{RS})}{\sin(\pi f T_{RS})} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - k \frac{f_{RS}}{(q-1)}\right)$$

La formule Eq. II-17 montre bien la présence des pics autour des multiples de  $f_{RS}/(q-1)$ . Ces pics sont les répliques du signal échantillonné avec les  $q-1$  échantillonnages uniformes à des instants différents. La simulation d'un échantillonnage TQ-JPRS avec un facteur de quantification  $q = 8$  d'un signal sinusoïdal situé à  $f_{in} = 100\text{kHz}$  avec une fréquence moyenne d'échantillonnage  $f_{RS} = 3.2\text{MHz}$  est réalisée. Afin de tracer cette simulation sur un large intervalle fréquentiel sans faire intervenir l'atténuation de la représentation spectrale *Sample&Hold*, nous choisissons la représentation *zero-padding*. Dans cette représentation, nous ajoutons des zéros au vecteur d'échantillons à chaque fois où la condition pour la quantification temporelle ne mène pas à une nouvelle valeur d'instant d'échantillonnage. Ainsi, la représentation en *zero-padding* de la densité spectrale de puissance de la simulation du TQ-JPRS et la superposition de la représentation théorique sont illustrés à la Figure II-12 sur l'intervalle fréquentiel  $[-f_{RS}, f_{RS}]$ .

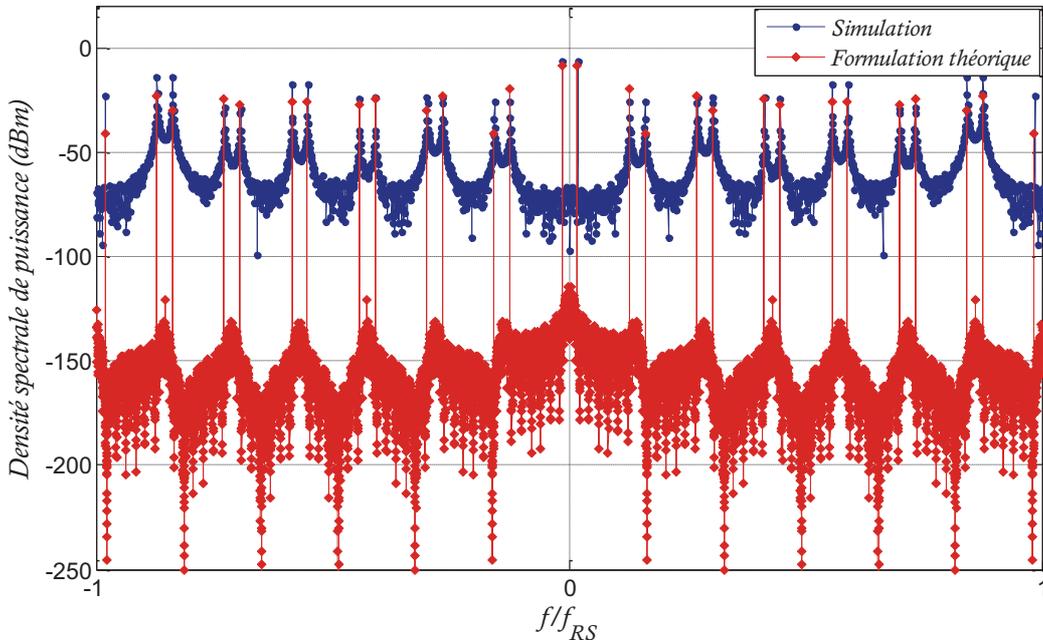


Figure II-12. Spectre de l'échantillonnage TQ-JPRS simulé et tracé en *zero-padding* comparé au traçage de la formule théorique.

Les pics autour des multiples de  $f_{RS}/(q-1)$  apparaissent également en simulation. Les valeurs de leurs puissances s'approchent des valeurs données par la théorie. En simulation, le plancher de bruit en TQ-JPRS a diminué comparé au cas de l'échantillonnage TQ-JRS. La présence des pics fait de sorte à canaliser la puissance sur ces pics et diminuer ainsi la valeur du plancher. Afin d'ajouter l'effet de la représentation spectrale *Sample&Hold*, il est impératif de calculer sa fonction de transfert dans le cas de la considération d'un échantillonnage pseudo-aléatoire. La fonction de transfert  $H_{S\&H}$  donnée par Eq. II-13 considère des instants totalement aléatoires. Si une certaine séquence de  $q-1$  valeurs différentes est suivie et répétée, l'échantillonnage TQ-JPRS en *S&H* aura la fonction de transfert  $H_{S\&HTQ-JPRS}$  donnée par Eq. II-18.

$$H_{S\&HTQ-JPRS}(f) = e^{-j\pi f(q-1)T_{RS}} \text{sinc}(\pi f(q-1)T_{RS}) \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(f - k(q-1)T_{RS}) \quad \text{Eq. II-18}$$

Avec la considération du *Sample&Hold*, une fonction porte s'applique entre les instants  $t_i$  et  $t_{i+1}$ ,  $i \in \llbracket 1, q-1 \rrbracket$  et aussi entre le dernier instant du  $k^{\text{ième}}$  intervalle de largeur  $(q-1)T_{RS}$  et le premier instant du  $(k+1)^{\text{ième}}$  intervalle. Ceci mène à avoir une fonction *sinc* dont les zéros se situent autour de  $f_{RS}/q$ . Par conséquence, l'échantillonnage TQ-JPRS en *S&H* a la formule de transformée de Fourier donnée par Eq. II-19.

$$X_{TQ-JPRS_{S\&H}} = A(f) \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} X\left(f - k \frac{f_{RS}}{(q-1)}\right) \quad \text{Eq. II-19}$$

$$A(f) = \frac{f_{RS}}{(q-1)} e^{-j\pi f q T_{RS}} \frac{\sin(\pi f(q-1)\Delta)}{\sin(\pi f \Delta)} \frac{\sin(\pi f(q-1)T_{RS})}{\sin(\pi f T_{RS})} \text{sinc}(\pi f(q-1)T_{RS})$$

La simulation du signal sinusoïdal à  $f_{in} = 100\text{kHz}$  par le TQ-JPRS à une fréquence moyenne  $f_{RS} = 3.2\text{MHz}$  avec représentation spectrale *Sample&Hold* est superposée à la représentation graphique de la formule théorique du TQ-JPRS avec considération de l'effet du *Sample&Hold*, Eq. II-19. Les deux spectres sont représentés par Figure II-13. Les pics ainsi que le plancher du bruit sont atténués. Les mêmes variations des puissances des pics sont mentionnées tant en simulation qu'en théorie.

D'après le graphe de la Figure II-13, les pics et la réplique du signal sont atténués d'environ 50 dB par rapport au signal si l'effet du *S&H* est considéré. Il est donc très intéressant de valider la théorie par la mesure des atténuations et la comparaison de l'échantillonnage aléatoire et pseudo-aléatoire à temps quantifié afin de pouvoir appliquer le TQ-JPRS à un récepteur radio.

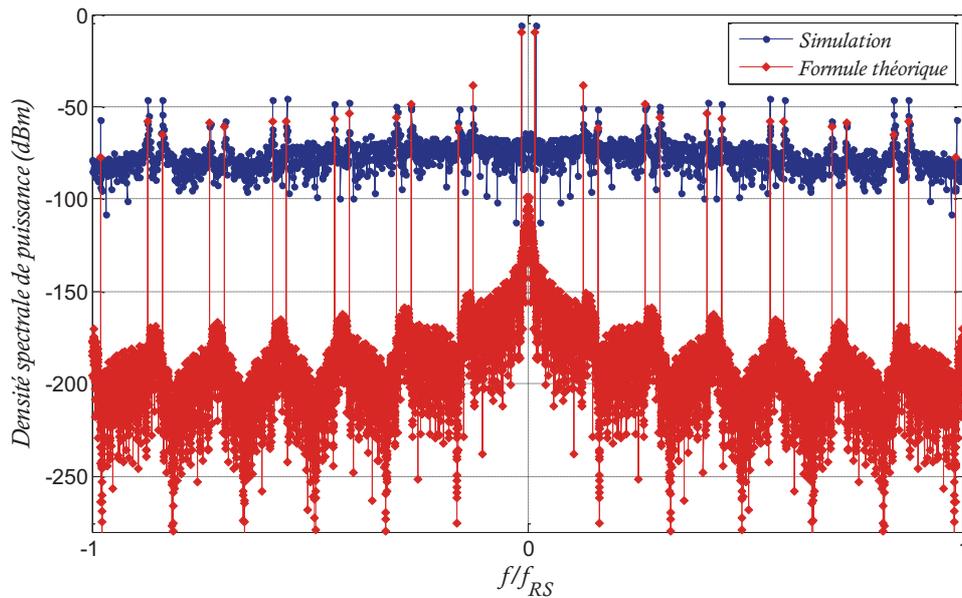


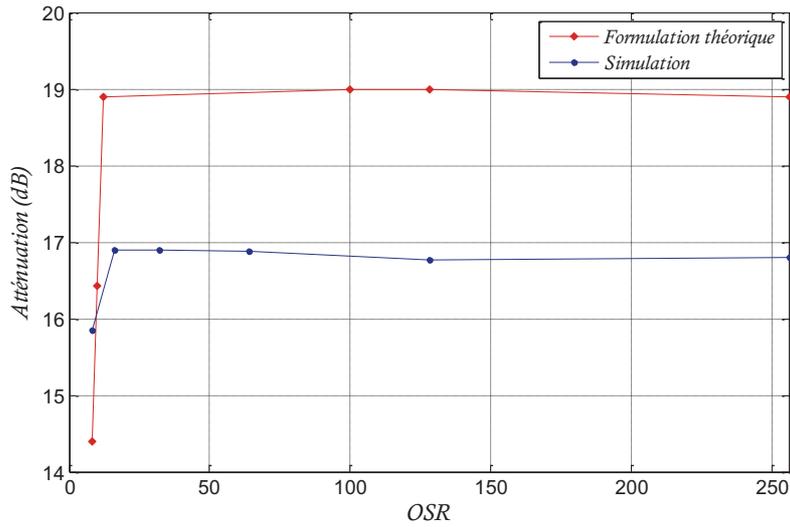
Figure II-13. Spectre de l'échantillonnage TQ-JPRS simulé et tracé en *Sample&Hold* comparé au traçage de la formule théorique.

### II.2.3 Comparaison des résultats de l'échantillonnage pseudo-aléatoire à temps quantifié

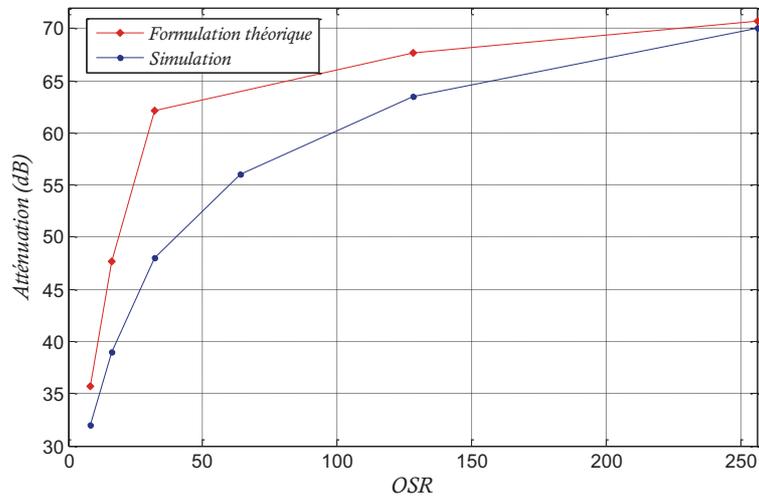
Les densités spectrales illustrées par Figure II-12 et Figure II-13 montrent une certaine concordance entre la théorie et la simulation. La mesure de l'atténuation permet de valider le pouvoir atténuateur du TQ-JPRS. La comparaison englobe en premier temps la comparaison entre la théorie et la simulation afin de valider les formulations théoriques et, en second temps, la comparaison entre l'échantillonnage aléatoire à temps quantifié et l'échantillonnage pseudo-aléatoire à temps quantifié.

#### II.2.3.1 Validation de la théorie par la simulation

La mesure de l'atténuation est réalisée selon la méthodologie décrite en II.1.2. La mesure de l'atténuation de la première réplique du signal située à  $f_{RS} - f_{in}$  est réalisée en simulation et en théorie pour différentes valeurs de l'OSR. Les valeurs des atténuations en fonction de l'OSR sont illustrées par la Figure II-1. L'atténuation est calculée selon la formule théorique Eq. II-17 et comparée à la simulation d'un signal sinusoïdal situé à  $f_{in} = 100 \text{ kHz}$  et dont le spectre est représenté en *zero-padding*. Les valeurs calculées sont représentées par la Figure II-14 (a). L'atténuation calculée avec considération de l'opération du blocage selon Eq. II-19 est comparée aux valeurs de l'atténuation mesurée sur le spectre de simulation d'un signal échantillonné en TQ-JPRS et représenté selon *Sample&Hold*. Ces valeurs sont tracées à la Figure II-14 (b).



(a)



(b)

Figure II-14. Mesures de l'atténuation du TQ-JPRS sans (a) et avec (b) considération du *Sample&Hold*,  $q=8$ .

Avec l'échantillonnage TQ-JPRS simulé, l'atténuation de la première réplique du signal reste presque constante et égale à 16.8 dB. La considération du blocage de la valeur de l'échantillons entre deux instants d'échantillonnage consécutifs amène à avoir une atténuation variable en fonction de l'OSR avec des valeurs importantes surtout pour des valeurs assez faibles de l'OSR. Cette meilleure atténuation est due à la canalisation des puissances en forme de raies et par conséquent la réduction du plancher du bruit.

Dans le cas de la représentation en *zero-padding* du spectre de simulation, nous remarquons que l'atténuation varie légèrement de l'ordre de 5 dB en théorie et de l'ordre de dixièmes de dB en simulation. A partir d'un OSR assez grand, les valeurs d'atténuation tendent vers une constante. En simulation, cette constante présente une asymptote horizontale à la courbe de l'atténuation calculée sans *Sample&Hold* et est égale à 18 dB dans le cas représenté par Figure II-14 (a).

D'après les résultats de la section précédente, l'échantillonnage TQ-JPRS canalise le bruit présent dans le spectre de l'échantillonnage TQ-JRS en des pics à  $\pm kf_{RS}/(q-1)$ . Ceci

pourrait permettre d'améliorer le rapport signal sur bruit SNR si aucun pic n'apparaît dans la bande utile du signal. Pour ce, aucune réplique ne doit apparaître dans la bande utile du signal considéré  $[0, f_{in}]$ . Rappelons que le signal sinusoïdal utilisé modélise un signal de bande  $B = [0, f_{in}]$  et que les pics autour de  $\pm kf_{RS}/(q - 1)$  prennent naissance de l'utilisation d'une juxtaposition de  $(q - 1)$  échantillonnages uniformes. La condition permettant de n'avoir aucune réplique du signal dans bande utile est traduite par Eq. II-20.

$$\frac{f_{RS}}{q - 1} - f_{in} > f_{in} \quad \text{Eq. II-20}$$

Sachant que  $OSR = f_{RS}/(2f_{in})$ , cette équation se transforme en Eq. II-21. Elle présente ainsi la condition à satisfaire afin de garantir que toutes les répliques soient en dehors de la bande utile et par conséquent garantir l'avantage de l'atténuation en utilisant le TQ-JPRS.

$$OSR > q - 1 \quad \text{Eq. II-21}$$

Cette condition est prise en compte lors du traçage des courbes d'atténuation. Par conséquent, le nombre de valeurs d'atténuation tracées décroît lorsque le facteur de quantification augmente.

Comme présenté par la Figure II-14 (a), l'atténuation calculée pour le TQ-JPRS sans considération du *S&H* reste presque invariable en fonction de l'OSR. Contrairement au TQ-JRS, le TQ-JPRS sans considération du *S&H* dépend étroitement du facteur de la quantification temporelle  $q$ . En effet, la formule du spectre en sortie d'un échantillonnage TQ-JPRS, Eq. II-18, montre bien la dépendance de l'atténuation au facteur de quantification puisqu'il figure dans le terme  $\text{sinc}(\pi f q T_{RS})$  responsable de la réduction des répliques. Les valeurs d'atténuation en TQ-JPRS varient donc selon  $q$  et atteignent des valeurs proches de  $10 \log_{10}(q^2)$ . Une représentation à la Figure II-15 faisant intervenir l'atténuation en fonction de l'OSR et de  $q$  montre bien la dépendance de l'atténuation de la réplique du facteur de la quantification temporelle  $q$ .

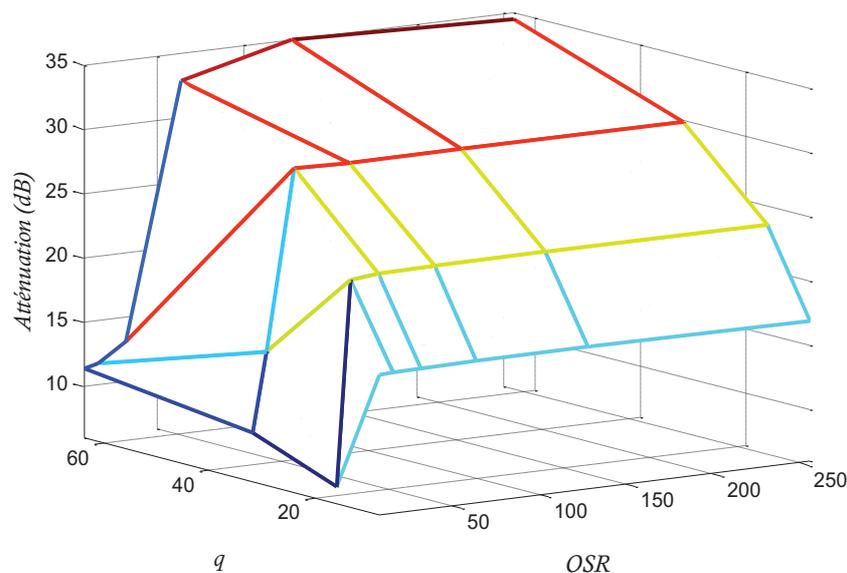


Figure II-15. Mesure de l'atténuation en fonction de l'OSR et du facteur de la quantification temporelle dans le cas TQ-JPRS sans tenir compte de l'effet du *S&H*.

La Figure II-15 montre bien que l'atténuation varie très peu en fonction de l'OSR et croit de manière logarithmique selon  $q$ . Toutefois, dans l'intervalle où les valeurs de l'OSR sont inférieures aux valeurs de  $q$ , une certaine perturbation des valeurs de l'atténuation est détectée.

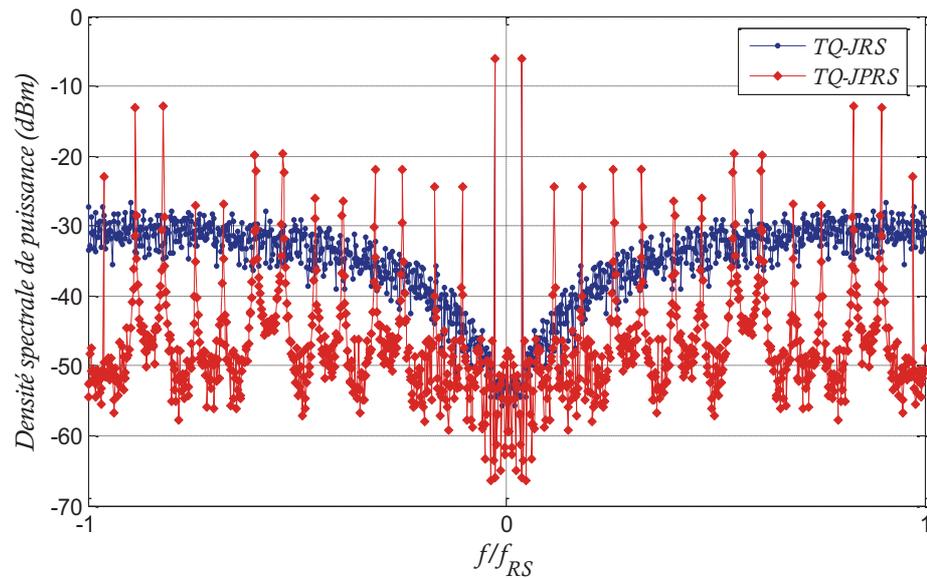
Nous pouvons conclure que grâce à l'utilisation du TQ-JPRS sous la condition de Eq. II-21, les répliques sont atténuées au fur et à mesure qu'on augmente le facteur de quantification temporelle. Afin d'échantillonner à une fréquence moyenne relativement basse, nous avons intérêt à réduire au maximum l'OSR. Ainsi, un compromis est à faire entre atténuation et OSR pour répondre aux besoins d'un récepteur radio multistandard.

Par ailleurs, pour  $q = 8$  comme le montre la Figure II-14, l'opération de l'échantillonnage TQ-JPRS en *S&H* assure une réduction qui semble être équivalente à l'atténuation calculée pour l'échantillonnage TQ-JRS illustrée par la Figure II-9. Dans la sous-section suivante, nous nous proposons de comparer le résultat des échantillonnages aléatoire et pseudo-aléatoire à temps quantifié.

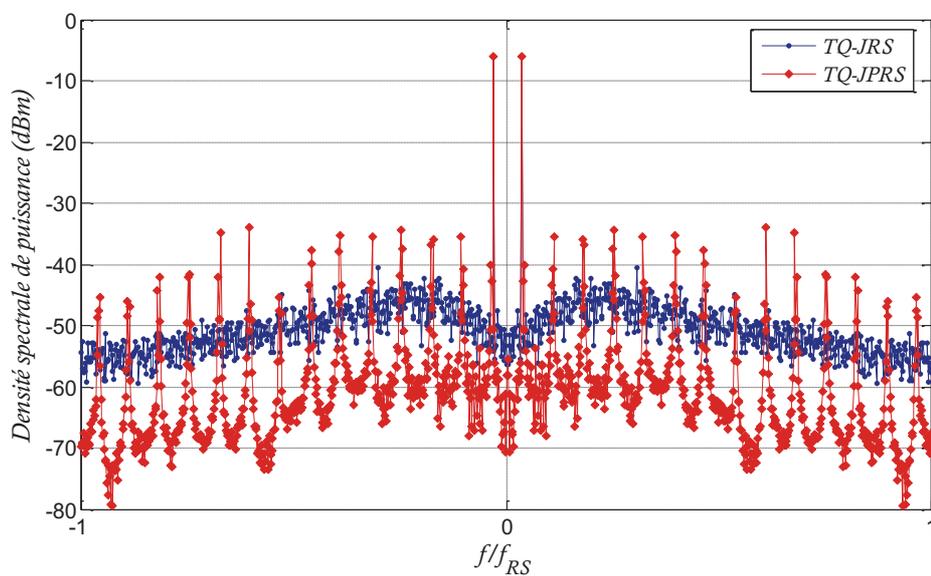
#### **II.2.4 Comparaison du pouvoir d'atténuation des échantillonnages aléatoire et pseudo-aléatoire à temps quantifié**

Dans la section II.1.1.4, il a été démontré que le TQ-JRS a un pouvoir de réduction du repliement spectral dépendant de l'OSR. Lorsque le facteur de quantification temporelle est au moins égal à 8, ce pouvoir atténuateur est égal au pouvoir de réduction des répliques par l'échantillonnage aléatoire en considérant une distribution uniforme. Afin de pouvoir justifier le choix de l'échantillonnage pseudo-aléatoire, puis par la suite pouvoir l'implémenter et enfin l'utiliser dans un récepteur radio, nous devons le comparer au TQ-JRS afin de tester son pouvoir de réduction des répliques.

Les spectres en sortie des simulations de l'échantillonnage TQ-JRS et du TQ-JPRS avec un facteur de quantification temporelle  $q = 8$  sont présentés à la Figure II-16. Les spectres en sortie de l'échantillonnage TQ-JRS et TQ-JPRS sont représentés en *zero-padding* à la Figure II-16 (a) et en *Sample&Hold* à la Figure II-16 (b).



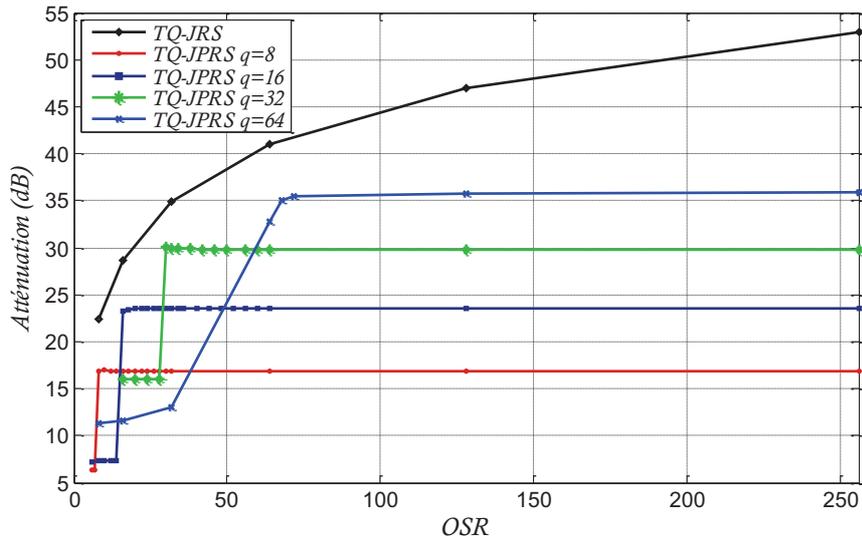
(a)



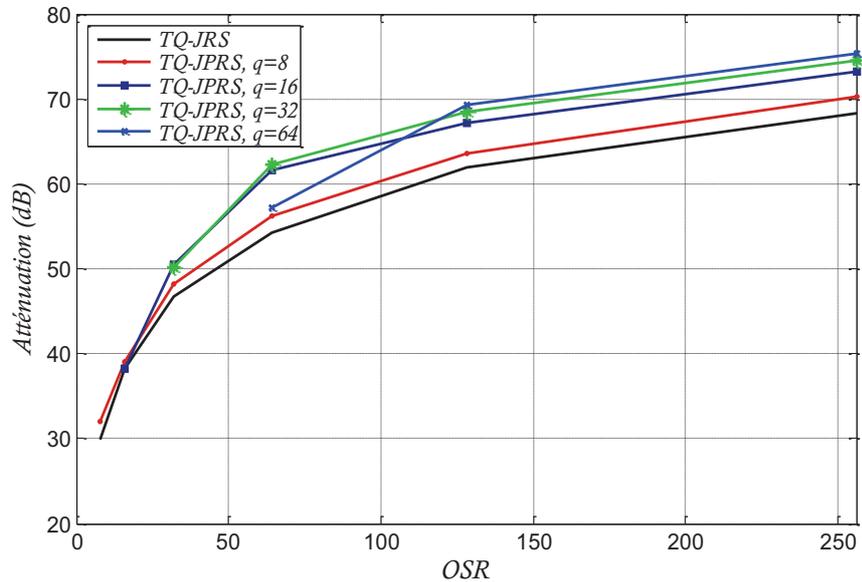
(b)

Figure II-16. Spectres de simulation du TQ-JRS et du TQ-JPRS sans (a) et avec (b) *S&H*.

La superposition des spectres en sortie des échantillonnages TQ-JRS et TQ-JPRS montrent bien l'apparition de  $(q - 2)$  paires de répliques dans le cas TQ-JPRS. Ceci est dû aux  $(q - 1)$  échantillonnages uniformes correspondant au TQ-JPRS. Cependant, le plancher de bruit présent en TQ-JRS est diminué en TQ-JPRS grâce à la canalisation de la puissance sur les répliques. En *Sample&Hold* le plancher de bruit ainsi que les raies sont largement atténuées. La mesure de l'atténuation du TQ-JPRS avec et sans considération du *S&H* dépend de  $q$  mais reste constante pour  $OSR > q - 1$ . Dans le cas du TQ-JRS, l'atténuation est invariable selon  $q$  mais augmente en fonction de l'OSR. La variation des valeurs de l'atténuation est représentée à la Figure II-17 dans les deux cas de la considération ou non de l'opération du *Sample&Hold*.



(a)



(b)

Figure II-17. Mesures de l'atténuation en TQ-JRS et TQ-JPRS avec différentes valeurs de  $q$  sans (a) et avec (b) considération du  $S\&H$ .

L'atténuation du TQ-JPRS sans considération de l'effet du  $S\&H$  présente une limite valant  $10\log_{10}(q^2)$ . La mesure de l'atténuation ne donne un bon résultat que lorsque l'OSR est plus grand que la valeur de  $q - 1$ . Comparé au TQ-JRS sans considération de l'opération  $S\&H$ , l'échantillonnage pseudo-aléatoire ne permet pas d'atteindre des valeurs importantes. Dans ce cas d'échantillonnage sans  $S\&H$ , il serait préférable de choisir le TQ-JRS afin de garantir une bonne atténuation du repliement spectral.

Dans le cas de la considération du  $S\&H$ , le TQ-JPRS permet d'atteindre des valeurs d'atténuation supérieures aux performances du TQ-JRS. L'atténuation est d'autant plus grande que le facteur de la quantification temporelle l'est. Cette amélioration de l'atténuation prend origine de l'application d'un  $\text{sinc}(\pi f q T_{RS})$  au spectre en sortie du TQ-JPRS ce qui permet surtout d'avoir une forte atténuation autour des fréquences  $f_{RS}/q$ . Pour  $q = 64$ , la différence de l'atténuation entre TQ-JRS et TQ-JPRS pour un

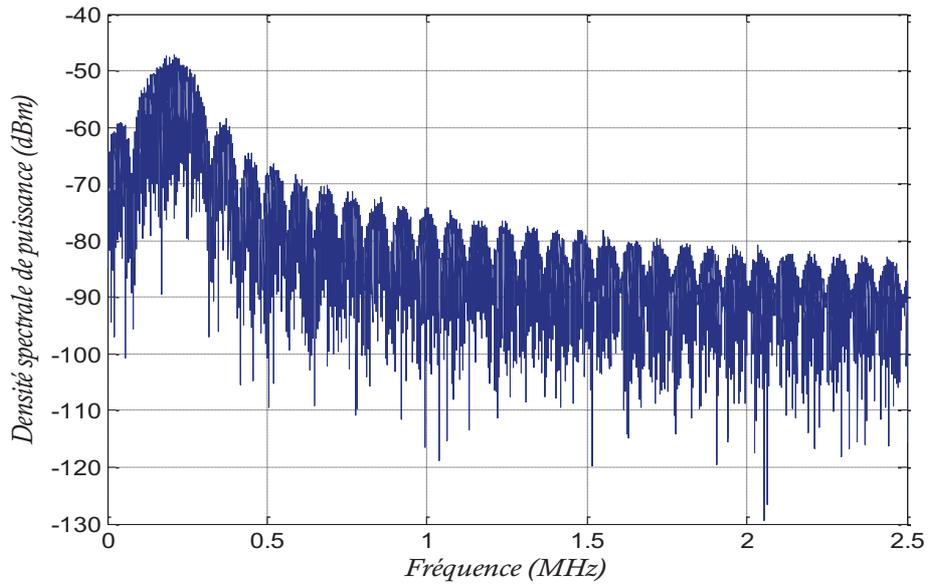
$OSR > q - 1$  est de l'ordre de 8 dB. Ceci nous mène à conclure que le TQ-JPRS est très intéressant à utiliser avec considération de l'opération du blocage. Ainsi, son application permettrait à la fois de réduire d'une manière plus efficace les répliques tout en assurant une implémentation matérielle plus facile.

## II.3 Applications de l'échantillonnage aléatoire à temps quantifié

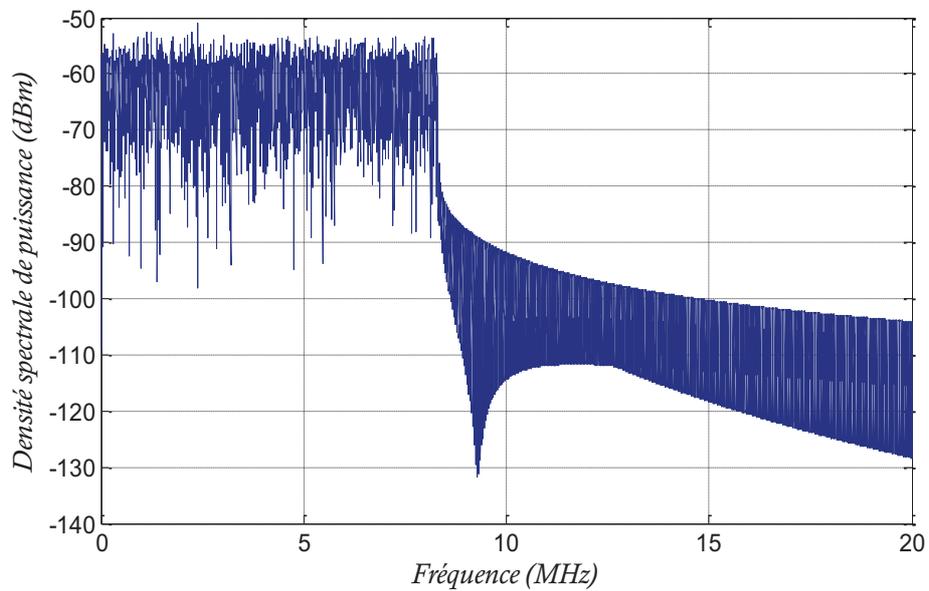
La théorie menée et validée jusqu'à présent forme un point de départ pour l'application de l'échantillonnage aléatoire ou bien pseudo-aléatoire à temps quantifié. Toute analyse spectrale faite jusque-là considère un signal sinusoïdal dont la fréquence porteuse délimite une bande virtuelle. Ainsi, nous modélisons un signal à bande  $B$ . Après la validation du pouvoir du TQ-JRS et du TQ-JPRS à réduire le repliement spectral, une validation par utilisation d'un signal modulé s'avère indispensable. Une fois que la simulation valide le pouvoir d'atténuation du repliement spectral d'un signal modulé, l'utilisation du TQ-JPRS est discutée dans le cas de la conversion de données et de la transposition de fréquences.

### II.3.1 Validation de l'échantillonnage TQ-JPRS pour un signal modulé

Afin de simuler un cas réel de signal dans un des standards de communication les plus répandus, nous avons choisi d'échantillonner en TQ-JPRS avec considération du blocage des signaux modulés GMSK et OFDM. Les signaux modulés GMSK et OFDM simulent un canal de communication des standards GSM et IEEE802.11a respectivement. Nous supposons que ces signaux sont reçus et traités par l'étage Front-end d'un récepteur radio de façon à ce que leurs fréquences soient transposées en bande de base. Nous supposons également que l'architecture du récepteur radio est l'architecture hybride zero/low IF admettant deux voies I et Q et permettant de transposer le signal IEEE802.11a en bande de base et le signal GSM à une faible fréquence intermédiaire  $f_{IF} = 100 \text{ kHz}$ . Selon les hypothèses faites, la bande du signal modulé GMSK est de  $200 \text{ kHz}$  et celle du signal modulé OFDM est de  $16.6 \text{ MHz}$ . Les spectres des signaux modulés GMSK et OFDM sont présentés aux Figure II-18 (a) et Figure II-18 (b).



(a)



(b)

Figure II-18. Spectres des signaux modulés GMSK (a) et OFDM (b).

Les signaux sont choisis différents afin de tester l'effet de l'échantillonnage pseudo-aléatoire à temps quantifié sur le repliement spectral. Pour le signal GMSK, la fréquence moyenne d'échantillonnage a été choisie égale à  $f_{RS} = 3 \text{ MHz}$  assurant ainsi un OSR égal à 8. Le facteur de quantification temporelle est choisi égal à 8. L'échantillonnage TQ-JPRS en  $S\&H$  sous ces conditions conduit au spectre présenté à la Figure II-19 Ce spectre est tracé sur l'intervalle fréquentiel  $[0, f_{RS}]$ . Il présente les  $q - 2$  répliques.

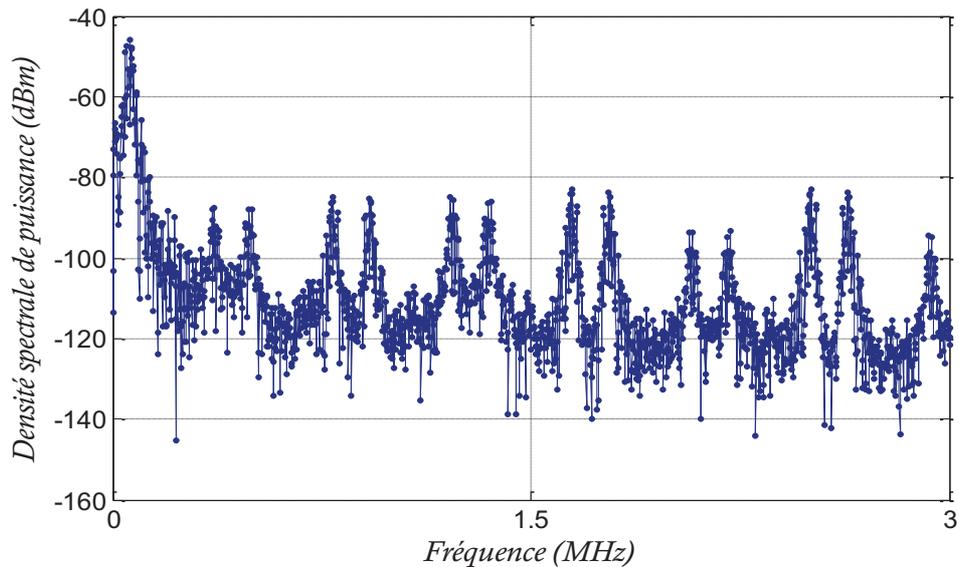


Figure II-19. Spectre en sortie d'un échantillonnage en *S&H* en TQ-JPRS d'un signal modulé GMSK.

L'effet du *S&H* est bien présent engendrant l'atténuation du plancher du bruit et du repliement spectral. Selon le calcul de l'atténuation présenté dans la sous-section II.1.1.4, la première réplique du signal est atténuée de 46 dB. D'après la courbe de la Figure II-17 (b), avec un OSR de l'ordre de 8, l'atténuation devrait être égale à 32 dB. Cependant, les courbes ont été établies pour l'atténuation d'un seul pic. L'atténuation d'un signal modulé est bien présente avec des valeurs plus grandes.

Pour le cas du signal modulé OFDM, le signal est échantillonné et bloqué avec une fréquence moyenne  $f_{RS} = 530 \text{ MHz}$ . L'OSR dans ce cas est égal à 32 et le facteur de la quantification temporelle est maintenu égal à 8. Le spectre en sortie est illustré par la Figure II-20.

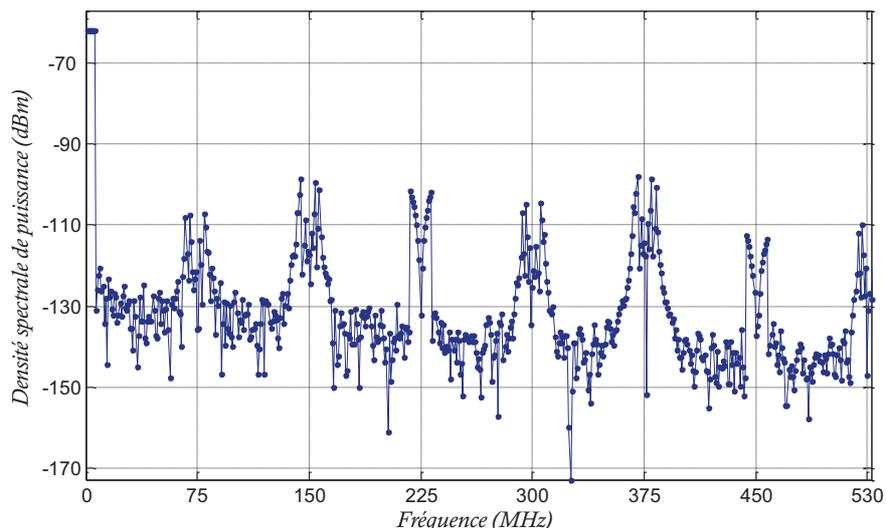


Figure II-20. Spectre en sortie d'un échantillonnage *S&H* en TQ-JPRS d'un signal modulé OFDM.

Nous remarquons également dans ce spectre, les raies parasites apparaissant à  $kf_{RS}/(q-1)$  ainsi que l'effet de la fonction *sinc* dessus. La réplique du signal est atténuée La valeur de l'atténuation dans le cas étudié est égale à 51 dB. Cette valeur est

bien supérieure à la valeur trouvée par l'échantillonnage d'une sinusoïde valant 48 dB comme présenté par la Figure II-17 (b).

Afin de conserver les étapes de traitement de signal post-numérisation, il est indispensable de réarranger les échantillons pris pseudo-aléatoirement d'une façon uniforme. Cette étape consiste à reconstruire le signal. Plusieurs algorithmes de reconstruction existent dont les plus connus sont l'interpolation par le voisin le plus proche, l'interpolation linéaire, l'interpolation cubique, etc. Dans (26) et (127), il a été prouvé que l'interpolation spline cubique fournit les meilleures performances. Après reconstruction, le signal échantillonné en TQ-JPRS redevient échantillonné uniformément à la même fréquence  $f_{RS}$ . Le spectre de la Figure II-21 (a) montre bien le signal modulé GMSK échantillonné uniformément avec la fréquence  $f_{RS} = 3 \text{ MHz}$ . La Figure II-21 (b) est celle de la reconstruction du signal modulé OFDM échantillonné uniformément avec la fréquence  $f_{RS} = 530 \text{ MHz}$ .

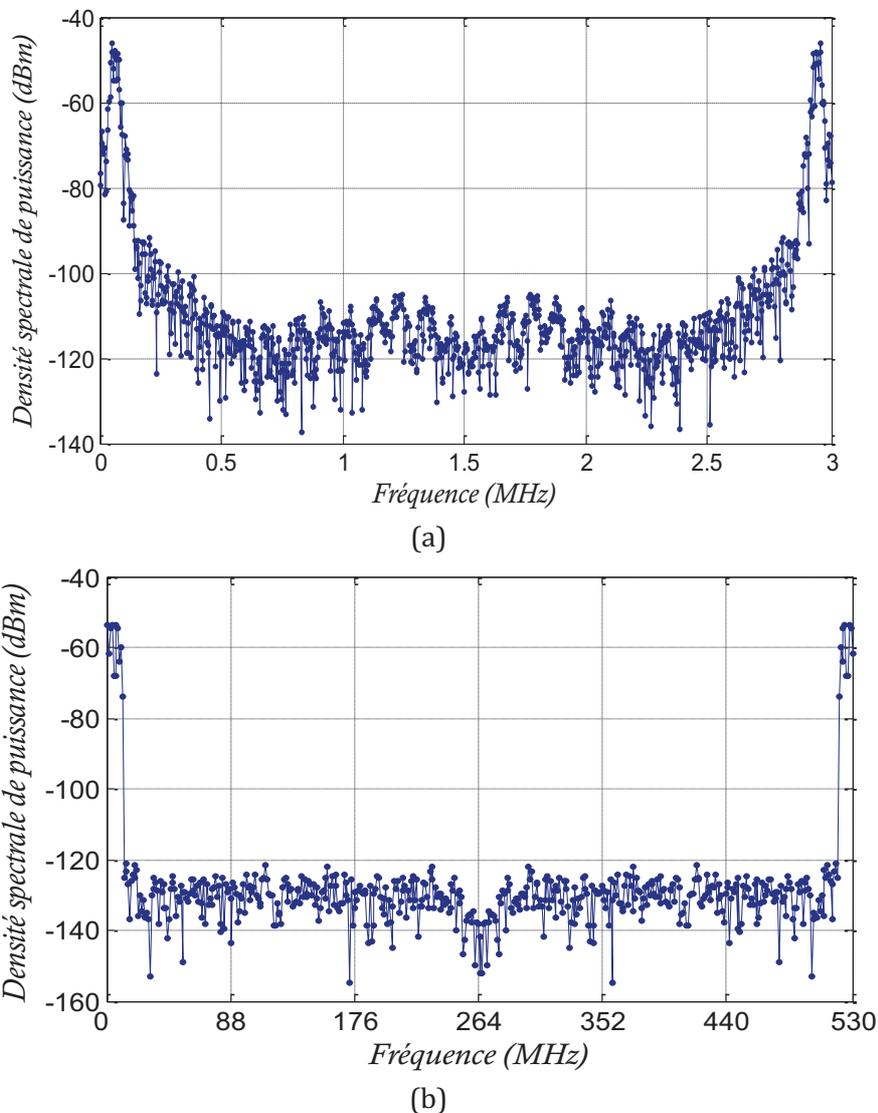


Figure II-21. Spectre reconstruit après échantillonnage en TQ-JPRS.

Nous remarquons le signal modulé GMSK présent autour de 100 kHz et sa réplique autour de 2.9 MHz avec la même puissance de 48 dBm. De même, le signal modulé OFDM et sa réplique sont représentés dans le spectre reconstruit. Selon les résultats de cette section, nous pouvons conclure que le TQ-JPRS avec considération de l'opération du blocage permet de réduire le repliement spectral dans le cas d'un signal modulé. Son pouvoir d'atténuation des répliques étant validé, le TQ-JPRS peut être utilisé au sein d'un récepteur radio logicielle afin de réduire les contraintes sur les composants de ce dernier.

Afin de bénéficier du pouvoir d'atténuation du repliement spectral de l'échantillonnage pseudo-aléatoire à temps quantifié, nous étudions la possibilité de l'utilisation du TQ-JPRS dans un contexte récepteur radio. Dans ce cas, deux contextes sont à prévoir à savoir la transposition de fréquence et la numérisation des données.

### II.3.2 Application du TQ-JPRS dans une architecture à échantillonnage

L'architecture à échantillonnage se base sur l'utilisation du sous-échantillonnage pour la transposition de fréquence. Comme dans le cas du sous échantillonnage uniforme, la transposition de fréquence avec le sous-échantillonnage aléatoire à temps quantifié (TQ-JPRSS, Time Quantized Jittered PseudoRandom SubSampling) est possible (128).

#### II.3.2.1 Rappel du sous-échantillonnage uniforme

Le TQ-JPRSS permet la réduction des répliques se trouvant entre  $[kqf_{RS}, (k+1)qf_{RS}]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . La partie du spectre entre  $[kqf_{RS}, (k+1)qf_{RS}]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  est repliée à l'infinie à raison de  $qf_{RS}$ . A cause de cette périodicité du spectre, le signal replié situé à  $kqf_{RS} + f_{in}$  n'est pas réduit. Cette caractéristique s'avère intéressante pour une transposition de la fréquence tout en bénéficiant de la réduction de la puissance des répliques voisines du signal.

Rappelons la formule de la transposition de fréquence avec une fréquence de sous-échantillonnage  $f_{RS}$  introduite par l'équation Eq. II-22.

$$f_{IF} = \begin{cases} \text{rem}(f_{in}, f_{RS}), & \text{si } \left\lfloor \frac{2f_{in}}{f_{RS}} \right\rfloor \text{ pair} \\ f_{RS} - \text{rem}(f_{in}, f_{RS}), & \text{si } \left\lfloor \frac{2f_{in}}{f_{RS}} \right\rfloor \text{ impair} \end{cases} \quad \text{Eq. II-22}$$

La fonction  $\text{rem}(x, y)$  traduit le reste de la division euclidienne de  $x$  par  $y$  et la fonction  $\lfloor x \rfloor$  retourne le plus grand entier de valeur inférieure à  $x$ .

Le signal considéré a une bande  $B = f_H - f_L$ , où  $f_H$  et  $f_L$  sont les fréquences qui délimitent la borne supérieure et la bande inférieure respectivement de la bande  $B$ . Ainsi pour éviter le chevauchement des répliques avec le signal, la fréquence d'échantillonnage doit être délimitée par les valeurs données par l'équation Eq. II-23.

$$\frac{f_H}{m} < f_{RS} < \frac{f_L}{m-1} \quad \text{Eq. II-23}$$

Avec  $m$  un entier qui peut varier selon la condition Eq. II-24.

$$1 < m < \frac{f_H}{f_H - f_L} \quad \text{Eq. II-24}$$

Ainsi, la fréquence d'échantillonnage  $f_{RS}$  doit permettre de transposer toute la bande du signal à  $f_{IF}$ . Elle doit alors satisfaire aussi la condition Eq. II-25

$$\begin{cases} f_{RS} > 2f_{IF} + B \\ f_{IF} > \frac{B}{2} \end{cases} \quad \text{Eq. II-25}$$

### II.3.2.2 Choix de la fréquence du sous-échantillonnage TQ-JPRSS

Afin de pouvoir réaliser une transposition de fréquence en TQ-JPRSS, il est nécessaire de bien choisir la valeur de la fréquence moyenne du sous-échantillonnage. Ce choix se base essentiellement sur le fait de la périodicité à raison de  $qf_{RS}$  du spectre échantillonné en TQ-JRSS. Si le signal est initialement à la fréquence  $f_{in}$ , avec une bande de largeur  $B = f_H - f_L$  et que nous désirons le transposer vers la fréquence  $f_{IF}$ , la fréquence du sous-échantillonnage TQ-JRSS doit satisfaire la condition suivante donnée par l'équation Eq. II-26.

$$f_{RS} = \frac{f_{in} - f_{IF}}{kq}, k \in \mathbb{Z} \quad \text{Eq. II-26}$$

La condition Eq. II-26 vient s'ajouter à toutes les conditions du paragraphe précédent. Notons que la valeur du facteur de quantification joue un rôle important dans le choix de la fréquence d'échantillonnage. Plus  $q$  est grand, plus la fréquence  $f_{RS}$  est petite. Grâce aux pouvoirs de réduction des répliques du TQ-JPRSS, toutes les répliques se situant sur l'intervalle  $[0, qf_{RS}]$  sont réduites comme démontré dans la section II.2.2.

### II.3.2.3 Simulation du sous-échantillonnage en TQ-JPRSS

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de simuler un cas de sous-échantillonnage en TQ-JRSS. Soit un signal centré à la fréquence  $f_{in} = 12.9 \text{ MHz}$  et à largeur de bande  $B = f_H - f_L = 200 \text{ kHz}$ . Nous choisissons une fréquence de sous-échantillonnage TQ-JPRSS moyenne égale à  $f_{RS} = (f_{in} - f_{IF})/q = 1.6 \text{ MHz}$  avec un facteur de quantification  $q = 8$ .

La formule Eq. II-22 prouve que le signal se situe après transposition à la fréquence  $f_{IF} = 100 \text{ kHz}$ . Pour un  $m = 9$ , l'équation Eq. II-23 est satisfaite tout comme la condition Eq. II-24. Le spectre du sous échantillonnage du signal est donné par la Figure II-22.

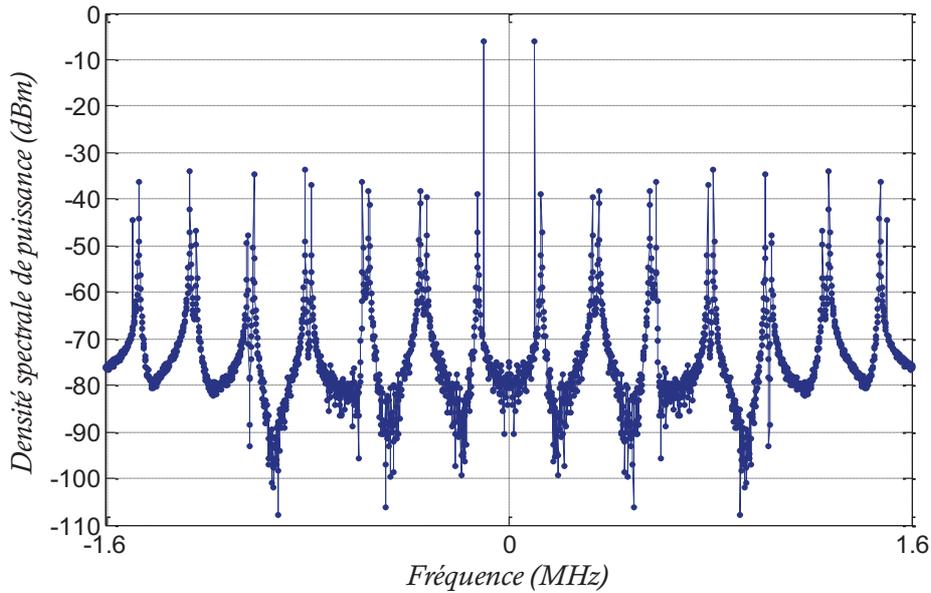


Figure II-22. Spectre du sous-échantillonnage en TQ-JPRS.

Le sous-échantillonnage peut être réalisé avec le TQ-JPRS grâce à sa périodicité intrinsèque à chaque  $qf_{RS}$ . La Figure II-22 présente le sous-échantillonnage TQ-JPRSS d'une sinusoïde à  $f_{in} = 12.9 \text{ MHz}$  et à une amplitude égale à 1. Le spectre montre bien la transposition du signal à  $f_{IF} = 0.1 \text{ MHz}$  et à une puissance de  $-6 \text{ dBm}$  et la réduction des répliques autour de  $kf_{RS}$ .

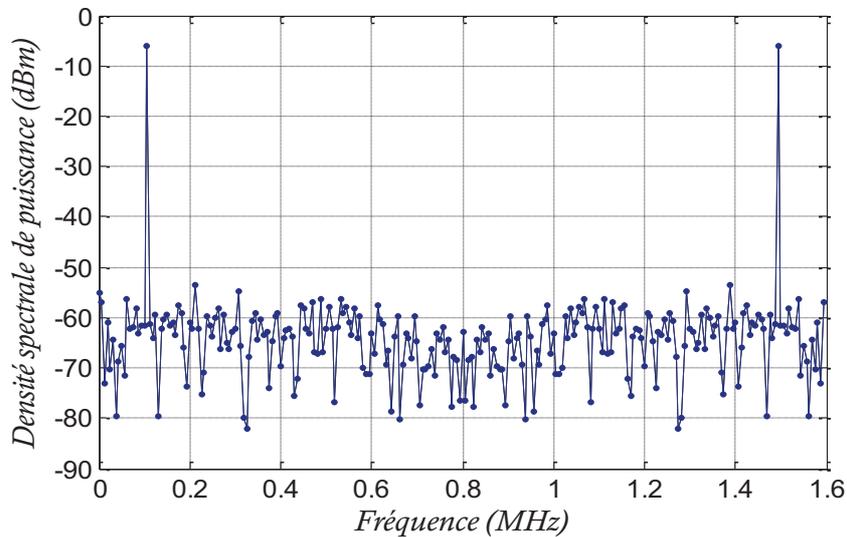


Figure II-23. Reconstruction du signal échantillonné en TQ-JPRSS.

La reconstruction spline cubique du spectre obtenu après TQ-JPRSS, Figure II-23, nous permet de retrouver un spectre en sortie similaire à un spectre après sous-échantillonnage uniforme à la fréquence  $f_{RS} = 1.6 \text{ MHz}$ . Le signal se trouve exactement à sa fréquence intermédiaire  $f_{IF} = 100 \text{ kHz}$ .

### II.3.3 Application du TQ-JPRS dans une architecture à mélangeur

Dans le cas de l'utilisation du TQ-JPRS pour une architecture à mélangeur, l'échantillonnage pseudo-aléatoire sera appliqué au niveau de l'étage en bande de base afin de bénéficier de la réduction du repliement et de réduire ainsi les contraintes sur les composants de l'étage en bande de base. Dans (25) et (129), il a été démontré que grâce à l'utilisation du TQ-JRS, les contraintes sur le filtre d'anti-repliement peuvent être relâchées. Dans (25), une discussion portée sur la suppression de l'AGC est faite et dans (129) un rétrécissement du rôle de l'AGC dans la stabilisation du gain à l'entrée de l'ADC a été démontré. Les premiers résultats d'utilisation du TQ-JRS au niveau d'une architecture de réception radio mène à réduire la fréquence moyenne de l'échantillonnage et par la suite sa consommation de puissance (26). De plus, l'ADC ne fonctionne plus à une fréquence constante mais à des fréquences variables dont plusieurs valeurs sont au dessous de la fréquence moyenne. Toutefois, les fréquences instantanées utilisées lors de la numérisation du signal doivent satisfaire la condition de Shannon et être donc supérieures à la fréquence Nyquist.

Une architecture de réception radio multistandard proposée en (25) est présentée par la Figure II-24.

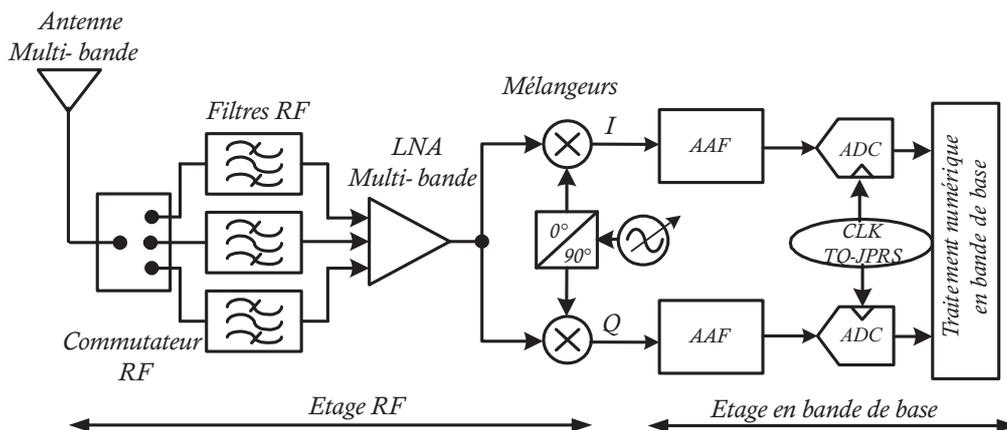


Figure II-24. Architecture d'un récepteur radio utilisant le TQ-JPRS.

Dans cette architecture, l'utilisation du TQ-JPRS a permis de réduire l'ordre du filtre anti-repliement et d'éliminer l'AGC du récepteur et ce en choisissant un ADC à 16 bits. Une comparaison entre l'échantillonnage uniforme et le TQ-JPRS a montré que grâce à l'atténuation des répliques, la fréquence de la numérisation peut être réduite. Par conséquent, la consommation du circuit est réduite. Il est nécessaire de noter que l'étage en bande de base de l'architecture proposée considère un unique filtre anti-repliement ce qui amène à fonctionner l'ADC à une fréquence élevée. De plus, ce filtre ne conduit pas à une atténuation des bloqueurs et interférants proches du signal utile. Ceci considère spécialement les standards à bande étroite dont les bloqueurs ont de forts niveaux de puissance. L'introduction d'un filtre programmable semble donc judicieuse. Quant à l'étage d'amplification, une étude en termes de puissance est nécessaire permettant de choisir un bon compromis entre le nombre de bits de l'ADC, sa plage dynamique et sa

fréquence d'échantillonnage, par la suite sa consommation de puissance, et l'utilisation de l'AGC. L'utilisation des ADCs multistandards référencés en littérature en échantillonnage uniforme puis en TQ-JPRS permettrait de faire une comparaison entre l'apport de l'échantillonnage et celui du TQ-JPRSS.

Bien que le TQ-JPRS soit utilisé réellement sur l'architecture, le dimensionnement système de l'architecture proposée en (25) est réalisé sur la base de l'utilisation du TQ-JRS. Après avoir justifié analytiquement et par simulation l'effet de réduction des répliques par l'échantillonnage TQ-JPRS en *S&H*, il serait intéressant de voir l'effet de son application au niveau d'un récepteur radio faisant intervenir des valeurs d'atténuation validés théoriquement et par simulation en tenant compte des différents paramètres de l'échantillonnage TQ-JPRS. Comparant les atténuations du TQ-JRS et du TQ-JPRS, l'application du TQ-JPRS au niveau de l'étage en bande de base serait en mesure d'apporter plus de relaxation de contraintes sur les composants surtout dans un contexte radio multistandard.

## Conclusion

Dans ce chapitre, l'étude analytique montrant le pouvoir de l'échantillonnage aléatoire et pseudo-aléatoire pour réduire le repliement spectral a été réalisée. Cette étude indique une atténuation des répliques par le TQ-JRS et le TQ-JPRS utilisés avec ou sans opération de blocage. Les formulations théoriques ont été validées par les simulations. Les valeurs relevées reflètent une atténuation de l'ordre de 35 dB pour un OSR égal à 32 réalisée par le TQ-JRS. Cette atténuation s'élève à 47 dB si l'opération de blocage vient s'ajouter à l'échantillonnage. Quant au TQ-JPRS, il assure une atténuation d'environ 16 dB et 51 dB dans le cas d'un échantillonnage et d'un échantillonnage en *S&H* respectivement. L'échantillonnage TQ-JPRS est validé aussi pour des signaux modulés GMSK et OFDM. La valeur de l'atténuation mesurée dans le cas d'un signal modulé est légèrement supérieure aux valeurs théoriques. Une autre étude a été aussi réalisée montrant le pouvoir de transposition de fréquence par l'échantillonnage TQ-JPRS.

Après la démonstration de son pouvoir atténuateur du repliement spectral et grâce à sa facilité d'implémentation, nous choisissons d'adopter l'échantillonnage TQ-JPRS en *S&H* et de l'utiliser au niveau d'un récepteur radio afin d'optimiser son coût et sa consommation de puissance. Appliqué au niveau de l'ADC, il promet de réduire les contraintes sur les composants en bande de base en termes de consommation de puissance. Pour pouvoir mettre le point sur l'effet de l'utilisation du TQ-JPRS, nous proposons de réaliser l'étude système d'une architecture de récepteur radio utilisant un ADC multistandard opérant en échantillonnage uniforme puis de suivre l'effet de l'application d'une horloge pseudo-aléatoire TQ-JPRS au niveau de l'ADC.