

---

## Etudes bibliographiques et position du problème

### 2.1 Principaux phénomènes physiques mis en jeu pour les problèmes de planéité en laminage

La déformation des cylindres en laminage (aplatissement, flexion, bombé thermique) induit une hétérogénéité de l'élongation en sortie d'emprise dans le sens de la largeur de la bande. Cette hétérogénéité engendre l'apparition de contraintes résiduelles pouvant dépasser un niveau critique pour entraîner le flambage. Dans le contexte de laminage, ce flambage est aussi désigné sous le nom de défaut de planéité (cf. figure 2-1). Ces défauts apparaissent alors sous forme d'ondulations de topologie et d'orientation diverses et parfois complexes. Par ailleurs, le flambage conduit à la réorganisation du champ de contraintes dans la tôle laminée et peut influencer l'emprise. Par conséquent, le problème mécanique du laminage inclut un couplage de plusieurs phénomènes :

- la déformation élastique des cylindres de travail ;
- la déformation élasto-(visco)plastique de la bande dans l'emprise ;
- le flambage hors emprise.

La température lors du laminage peut intervenir par :

- l'expansion thermo-élastique des cylindres de la cage, qui modifie leur géométrie (bombé thermique) (cf. § 1.3.4) ;
- l'apparition des contraintes d'origine thermique qui sont parfois non négligeables ;
- la dilatation de la bande et son adoucissement thermique suite à une élévation de la température.

La dilatation est un phénomène secondaire en laminage à froid ; quant à l'adoucissement, il est surtout présent en laminage à chaud, ou alors dans des cas particuliers (aluminium, acier inoxydable, etc.) pour des raisons métallurgiques diverses.

La figure 2-2 donne une illustration des différents types de couplage qui doivent être pris en compte pour une modélisation complète du laminage. C'est en se basant sur cette analyse préliminaire que nous allons axer notre étude bibliographique.

**Remarque 6 :**

Les températures atteintes en laminage à froid sont dans la gamme 100 - 150°C, ce qui n'est pas négligeable. En fait, ce qui engendre les contraintes d'origine thermique, c'est l'hétérogénéité de la température. Supposant celle-ci relativement faible, nous ne ferons que des analyses isothermes dans ce document. Bien évidemment, il serait utile de tester ultérieurement l'impact de cette simplification, sachant que dans l'état actuel, le logiciel qu'on développe le permet a priori.

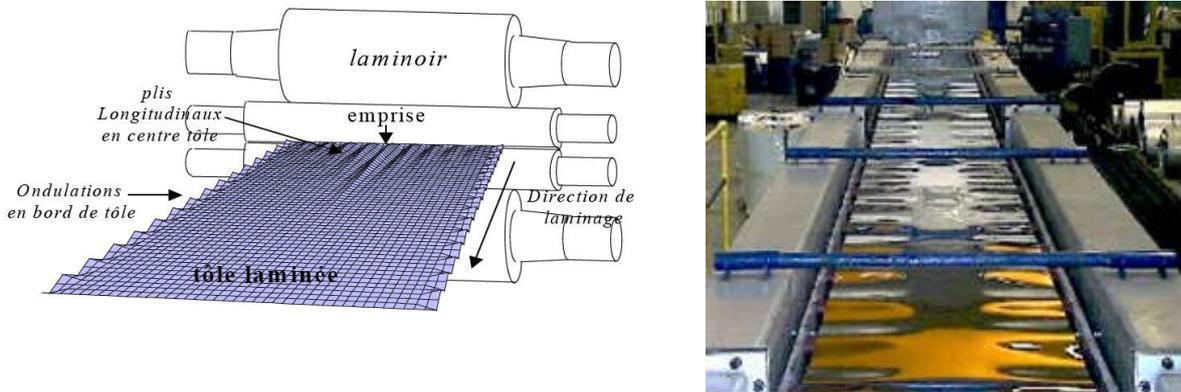


Figure 2-1. Défauts de planéité en laminage.

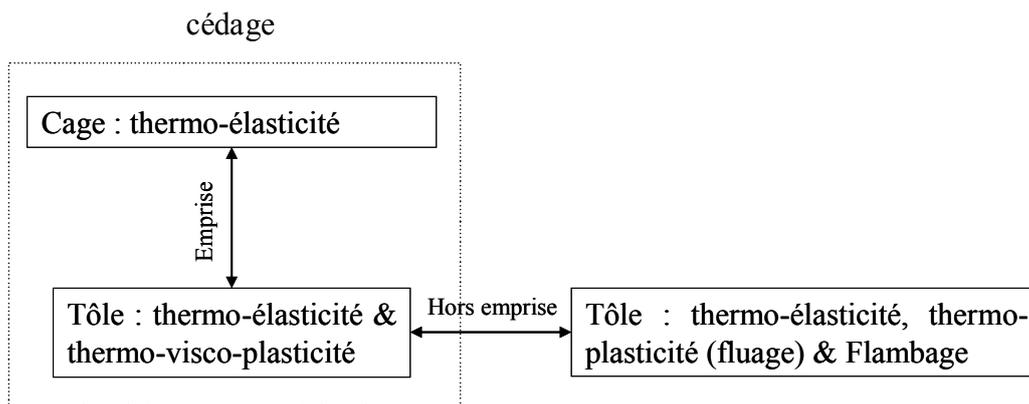


Figure 2-2. Les différents phénomènes à coupler afin de modéliser le laminage.

## 2.2 Axes de l'étude bibliographique

La bibliographie du laminage est considérable et très diversifiée ; elle couvre les différents aspects de ce procédé (mécaniques, chimiques, métallurgiques, tribologiques, productiques...). Ces domaines assez variés interviennent, de manière directe ou indirecte, dans la qualité des tôles laminées, en particulier dans la planéité. Or, compte tenu de notre objectif, nous avons plutôt orienté cette étude bibliographique sur la planéité en laminage et les phénomènes mécaniques qui lui sont directement liés, comme expliqué dans le paragraphe précédent. Citons en particulier :

- la déformation élastique de la cage et la déformation élastique-viscoplastique de la tôle (cédage),
- le flambage sous contraintes résiduelles.

Nous nous sommes aussi limités particulièrement au laminage à froid, étant donné que c'est à ce stade qu'on lamine des tôles très fines qui sont les plus susceptibles de flamber. De plus, nous négligeons les effets thermiques en laminage à froid, qui sont dus au frottement et à la déformation plastique dans l'emprise. Ainsi, la présente étude bibliographique ne met pas l'accent sur les

aspects thermiques en laminage, sachant qu'un couplage thermique a été précédemment introduit dans Lam3/Tec3 par Haquin et al. [2, 3, 4].

## 2.3 Analyse bibliographique sur la modélisation du laminage

### 2.3.1 Classification des modèles de laminage

Développer un modèle complet de laminage qui prend en compte tous les couplages détaillés dans la figure 2-2 est une tâche difficile et complexe. Ainsi, cette modélisation présente un défi qui reste difficile à relever, ce qui fait qu'aucun modèle complet n'a été réalisé à ce jour. En revanche, certains modèles de la littérature, conçus sur des bases plus ou moins simplificatrices, sont capables de reproduire quelques phénomènes rencontrés au cours du laminage (déformations de la cage et de la bande, phénomènes thermiques, répartitions des contraintes résiduelles hors emprise, flambage etc.). Mais ces modèles diffèrent par leurs complexité, précision, domaine de validité, et par les fondements physiques pris en compte. Or, les modèles les plus précis sont souvent les plus complexes et les plus coûteux. Les besoins de l'industrie permettent de dégager trois types de modèles :

- Les modèles « on-line » doivent répondre en temps réel aux besoins des préréglages et régulations des laminoirs. Ils ne peuvent être fondés que sur des formules très simples comportant quelques coefficients ajustés soit par référence à une base de données de cas, soit par régression de résultats de modèles plus complexes.
- Les modèles « off-line », plus élaborés, que leur temps de réponse plus long ne permet pas d'utiliser comme les modèles « on-line ». On peut ici distinguer :
  - des modèles complets, généralement sur la base de la Méthode des Eléments Finis, qui servent de modèles de référence pour la compréhension fine des phénomènes.
  - Des modèles plus simples utilisant souvent, pour le laminage des tôles minces, la méthode des tranches (cf. § 2.3.2.i). Validés par comparaison avec les précédents, ils servent à des études sous forme de campagnes de calcul, utiles pour concevoir des cages de laminoir, des gammes de laminage, des dispositifs annexes divers.

L'analyse bibliographique du paragraphe n'aborde que les modèles off-line, en commençant par les modèles simples.

### 2.3.2 État de l'art sur la modélisation du laminage

Ce thème forme le soubassement du modèle dont nous partons, pour lequel nous renvoyons à la référence [4]. Nous avons considéré que les modèles de déformation de cage qui y sont intégrés sont suffisants et que la priorité est de développer des méthodes permettant d'enrichir le calcul de bande, pour en déduire de façon fiable les défauts de planéité. C'est pourquoi nous réduisons l'analyse de la bibliographie de ce thème à un rapide survol historique, en insistant sur la prise en compte de l'hétérogénéité dans le sens transverse dans l'emprise.

#### 2.3.2.i Modèles de calcul de bande

Les modèles les plus anciens de calcul de la déformation de bande ont été depuis longtemps fondés sur la méthode des tranches en 2D [23,24]. Généralement, dans ce formalisme assez simple, la zone sous l'emprise est considérée totalement plastifiée, le matériau est supposé rigide - plastique et la résolution du problème se restreint à l'intégration de l'amont vers l'aval de l'équation de von Karman (équation d'équilibre horizontal dans laquelle on a tenu compte du critère de plasticité). Les modèles ultérieurs sont relativement plus généraux ; lorsqu'une bande rentre avec un bombé, les champs de contrainte vont dépendre de la coordonnée transverse  $y$ , ce qui conditionne la déformation des cylindres : les auteurs optent pour des approches pseudo-3D,

fondées sur la juxtaposition dans le sens travers de calculs 2D longitudinaux par la méthode des tranches [11,25]. Le modèle plastique, fondamentalement 2D, néglige tout écoulement transverse, ce qui est valide pour le centre de la bande. Mais la déformation plastique de la bande présente un caractère 3D en particulier au voisinage des rives (élargissement, relaxation des contraintes). Pour les prendre en compte, Wiklund et al. [25] diminuent la contrainte d'écoulement de 15% en rive, sur une zone de largeur supposée égale à l'épaisseur de la tôle.

Tozawa [26] préfère inclure une déformation transverse  $\varepsilon_{yy}$ , qu'il suppose proportionnelle à  $\varepsilon_{xx}$ . Or, afin de respecter l'équilibre des contraintes dans l'emprise par rapport aux tractions amont et aval de laminage (cf. figure 1-22), l'hétérogénéité transverse de la déformation de la bande est compensée par une déformation élastique longitudinale en entrée et en sortie de l'emprise. C'est une des premières analyses de la complexité du champ de contrainte au voisinage immédiat de l'emprise, bien démontrée par les analyses par éléments finis. Matsumoto [27,28] adopte une démarche similaire, mais enrichit cette dernière par l'intégration de l'équation d'équilibre dans la direction transverse. Ceci revient à introduire la moyenne suivant  $x$ , à une position donnée en  $y$ , de la composante de la déformation plastique transversale  $\varepsilon_{yy}$  dans l'emprise. Cette dernière s'exprime en considérant l'incompressibilité de la déformation plastique, pour un problème de déformation plane, comme suit :

$$\varepsilon_{yy}^{moy}(y) = \frac{2}{9} \frac{r_h}{1 - \frac{2}{3}r_h} \frac{l^2}{\frac{2\bar{\sigma}_0}{\sqrt{3}}} \frac{d^2\sigma_{yy}^{moy}}{dy^2} \quad (2.1)$$

$$r_h = \frac{h_e - h_s}{h_e}$$

$h_e$  : épaisseur à l'entrée de l'emprise ;  $h_s$  : épaisseur en sortie de l'emprise.

Le différentiel d'allongement est ensuite déterminé par (2.2) dans laquelle  $\varepsilon_{yy}^{moy}$  intervient.

$$\Delta\varepsilon_{yy}^{moy}(y) = -(1-\nu)\Delta\varepsilon_{xx}(y) - \Delta\varepsilon_{zz}(y) \quad (2.2)$$

où  $\Delta$  signifie le différentiel des variables suivant la largeur des cylindres (valeur locale en  $y$  - valeur moyenne).

La compensation élastique permet d'observer l'influence des tractions amont et aval de laminage sur l'emprise. En revanche, dans [26-28] les auteurs supposent la bande rigide hors emprise, ce qui paraît incorrect au vu des modèles plus récents [2, 3, 4]. En réalité le retour élastique redistribue les champs de contraintes, ainsi que de vitesse, surtout au voisinage de l'emprise. Ces auteurs supposent aussi que la longueur de contact est invariable suivant la largeur, autre hypothèse non confirmée, qui revient à dire que l'hétérogénéité du profil de contrainte à l'entrée et à la sortie de l'emprise reste identique.

Pour caractériser le problème de cépage en prenant en compte plus rigoureusement l'élargissement de la bande lors de son écrasement sous l'emprise, Dixon et al. [29] ont développé un modèle dans lequel ils utilisent une méthode asymptotique. Elle consiste à développer l'épaisseur – donc la réduction – et le champ de déplacement longitudinal en série entière.

$$\begin{aligned} u(x,y) &= u_0(x) + au_1(x,y) + \dots \\ h(x,y) &= h_0(x) + ah_1(x,y) + \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

$u$  : déplacement longitudinal ;

$h$  : épaisseur de la tôle.

Après avoir injecté ces variables dans les équations d'équilibre et la loi de comportement, les auteurs négligent les termes d'ordre supérieur ou égal à 1. Ainsi, la résolution du problème devient assez simple, et aboutit à une expression analytique de la solution du problème, en particulier l'expression de la déformation latérale due à l'élargissement. Cette expression analytique fournit assez rapidement des résultats pour des conditions de laminage données. Mais elle fait apparaître un terme qui lie l'élargissement à la composante latérale de la contrainte de frottement, qui ne peut être identifiée qu'à partir de données expérimentales, et encore difficilement [30,31].

Les modèles de calcul de bande qu'on vient de décrire se limitent à l'emprise, en considérant que cette dernière est totalement plastifiée lors du laminage. Ceci n'est pas tout à fait exact, étant donné l'existence dans l'emprise de zones élastiques en contact, qui peuvent prendre une importance notable dans certains cas (double réduction, skin pass...). De plus, la prédiction des défauts de planéité se limite à l'observation des profils des contraintes en sortie de l'emprise, en particulier de la contrainte longitudinale. Par exemple, ils prévoient un centre long si cette contrainte est compressive au centre de la bande et des bords longs si elle est compressive en rives. Pour lever ces limites, et pour prendre en compte de façon plus naturelle et fiable le caractère 3D des écoulements, la méthode des éléments finis (MEF) paraît plus appropriée. Plus généralement, elle offre une opportunité d'analyser de manière globale et consistante le procédé de laminage.

L'utilisation de la méthode des éléments finis dans le calcul de bande en laminage date des années 1970, d'abord en 2D [32]. L'avantage essentiel de la méthode, par rapport à celles qui ont été décrites précédemment, est sa capacité à traiter exactement des problèmes 3D. C'est donc très rapidement vers le 3D que les modèles éléments finis se sont dirigés. Par ailleurs, les modèles itératifs stationnaires utilisant une topologie de maillage structuré de la bande paraissent les mieux adaptés au laminage, offrant une certaine rapidité jointe à une bonne précision. Le maillage structuré utilisé par ce type de modèles est constitué d'éléments hexaédriques tridimensionnels à huit nœuds ; il est construit par alignement dans la direction de laminage d'une série de sections transversales bidimensionnelles, de topologies identiques et composées de mailles à quatre nœuds (cf. figure 2-3). Ainsi, les nœuds du maillage forment des lignes de courant suivant lesquelles les variables d'état peuvent être intégrées dans le cadre d'une formulation quasi-eulérienne (méthode d'intégration des lignes de courant), qui élimine toute discrétisation temporelle. Comme la forme initiale du domaine quasi-eulérien diffère de la forme réelle, ne serait-ce que du fait de l'élargissement, une correction itérative est nécessaire. Partant de la détermination de la composante transverse du champ de vitesse, on réactualise les positions  $x$  des nœuds d'une itération à une autre et de proche en proche par intégration de l'équation (2.4) le long d'une même rangée longitudinale de nœuds :

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z} \tag{2.4}$$

$$\vec{V} = V_x \vec{x} + V_y \vec{y} + V_z \vec{z}$$

où  $\vec{V}$  est le champ de vitesse calculé par éléments finis à l'itération précédente.

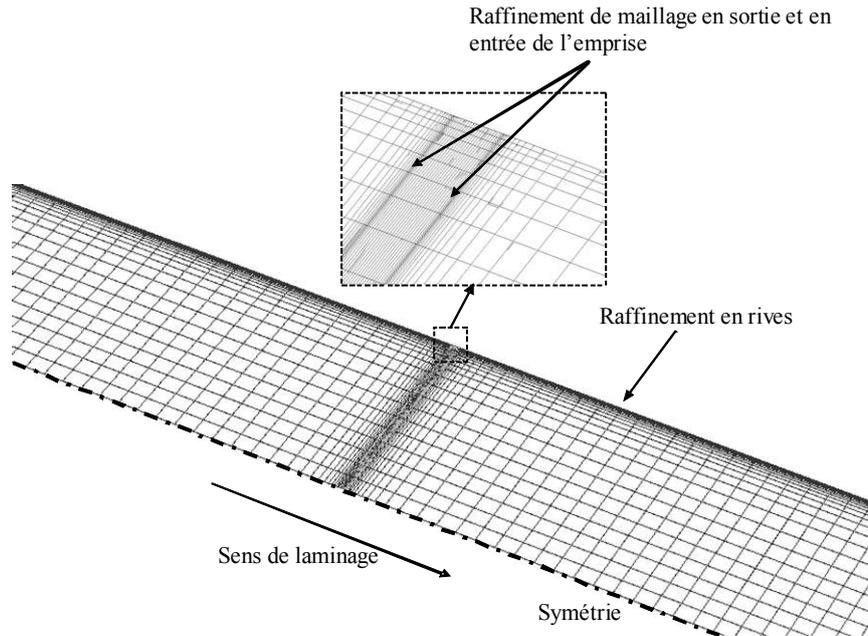


Figure 2-3. Maillage structuré d'une tôle utilisé par le modèle de laminage Lam3/Tec3.

### 2.3.2.ii Modèles de cépage des cylindres

Comme pour les modèles de bande, les premiers modèles de cage ont été basés sur des relations analytiques plus ou moins simples. Dans ce cas, la description de l'aplatissement des cylindres est celle proposée par Hitchcock [33]. Celui-ci suppose que la circonférence de la section longitudinale du cylindre de travail, dans et au voisinage de la zone de contact avec la bande, reste circulaire (cf. figure 2-4). Le rayon déformé  $R'$  est approché par la relation suivante :

$$R' = R \left( 1 + 16 \frac{1-\nu^2}{\pi \times E} \frac{F^{lam}}{h_e - h_s} \right) \quad (2.5)$$

$F^{lam}$  est la force de laminage appliquée par unité de largeur (N/mm);

$R$  est le rayon initial du cylindre de travail (mm);

$E$  et  $\nu$  sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du cylindre de travail.

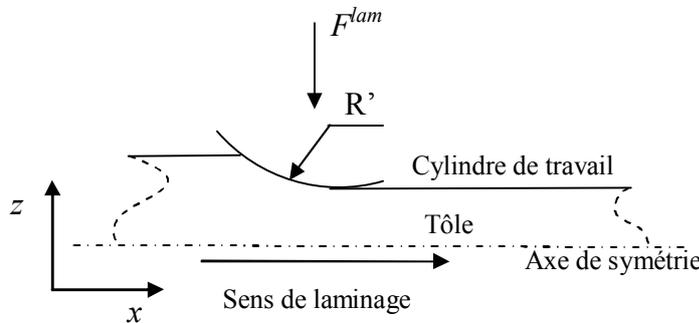


Figure 2-4. Approche analytique simplifiée de la déformation du cylindre de travail lors du laminage.

Dans un tel modèle analytique 2D, comme l'effort de laminage  $F^{lam}$  dépend du rayon  $R'$  et  $R'$  dépend de  $F^{lam}$ , il faut, pour calculer  $F^{lam}$  et  $R'$ , un couplage itératif d'un calcul de la géométrie des cylindres de travail (calcul de  $R'$ ) et d'une résolution de l'équation différentielle de von Karman (« méthode des tranches ») dans la bande [23,24].

L'insuffisance de la formule de Hitchcock est rapidement apparue : le profil des cylindres déformés est en réalité loin d'être circulaire. Une autre méthode de calcul de la déformation des cylindres, basée sur la méthode des fonctions d'influence 2D, a été proposée pour la première fois par Jortner [34]. Les fonctions d'influence sont définies comme une réponse en déplacement en un point quelconque d'un disque soumis à un effort ponctuel radial sur sa périphérie. Cela signifie qu'il existe une solution analytique, décrivant la déformation élastique du disque engendrée par cet effort ponctuel qui lui est appliqué. Sur une longueur de contact, le disque est soumis à une répartition de contraintes normales. Le champ de déplacement total est obtenu par superposition des solutions obtenues pour chacune des contraintes normales appliquée sur la zone de contact. Cela repose sur la linéarité du problème supposé purement élastique. De nombreux modèles de laminage ont dès lors utilisé cette technique.

Un autre point d'évolution marquant est l'extension au 3D. Les approches modernes partent d'un modèle analytique de flexion d'une poutre sous chargement homogène, décrite en 3D [35]. Il montre que l'on a le droit de décomposer le champ de déplacement en composantes de flexion, d'aplatissement, d'effet Poisson... et que chacune de ces composantes peut être généralisée à des chargements plus complexes. De ce fait, Counhaye [5] et Hacquin et al. [4] utilisent des modèles de déformation élastique tridimensionnelle des cylindres comme superposition de théorie des poutres pour la flexion, de modèle de Boussinesq pour l'aplatissement et de théorie de Hertz pour le contact cylindre de travail / cylindre d'appui. Le tout est discrétisé par une méthode de fonctions d'influence, ce qui, une fois ajoutées les conditions aux limites, fournit un modèle matriciel bien posé [4]. Il donne les profils du cylindre en contact dans un certain nombre de sections longitudinales, qui ont servi de base au couplage avec des calculs 2D par la méthode des tranches (cf. 2.3.2.i).

Notons que la méthode des éléments finis a aussi été utilisée pour décrire correctement la déformation des cylindres, d'abord en 2D [36]. Elle permet d'étendre l'analyse des cylindres aux contraintes et aux températures, mais pour le profil de contact, nécessaire pour le couplage cage - bande, le gain n'est pas évident. Un peu plus tard a été utilisée – rarement – la méthode des éléments frontières, supposée plus rapide [37]. Des modèles éléments finis élastiques 3D ont été proposés plus récemment [38,39] ; la comparaison faite par [40] montre que le modèle semi-analytique proposé par Hacquin et al. [4], bien corrigé des effets de bord, est au moins aussi précis, et à un bien moindre coût, que ses concurrents, y compris les modèles EF.

La synthèse des paragraphes 2.3.2.i et 2.3.2.ii montre que les modèles de laminage les plus pertinents actuellement sont fondés sur la MEF, au moins pour le calcul de la bande dans le cas où des modèles de cages semi-analytiques rapides et précis sont utilisés [4,40]. De ce fait, l'utilisation de la MEF pour le laminage mérite d'être analysée plus en détails (cf. § ci-dessous).

### **2.3.2.iii La méthode des éléments finis pour la modélisation du laminage**

Là encore, il ne saurait être question d'analyser toute la littérature sur l'application des éléments finis au laminage, mais seulement de donner un aperçu diachronique des grandes évolutions.

Au début des années 1980, la limitation des moyens de calcul a fait que ce sont des formulations stationnaires qui ont été développées les premières [41,32]. Par la suite, le développement des grands logiciels éléments finis, par nature écrits dans un formalisme instationnaire, incrémental, a conduit à diversifier les approches. Dès lors, on disposait d'approches stationnaires (« flow formulation »), avec une démarche quasi-eulérienne, et de modèles incrémentaux, essentiellement lagrangiens. Mais très rapidement sont apparus les modèles Arbitrairement Lagran-

giens / Eulériens (ALE) [42], qui cherchaient à regrouper les avantages des deux autres formulations en contournant leurs défauts.

**a) Modèles EF stationnaires et instationnaires, quasi-eulériens et lagrangiens**

La phase d'engagement de la bande dans le laminoir possède un caractère instationnaire, transitoire. De plus, le flambage, s'il se manifeste, est par nature instationnaire. Ainsi, un modèle EF construit à l'aide d'une formulation instationnaire est certainement plus général. En revanche, ce type de formulation est généralement coûteux en temps de calcul et parfois inefficace pour les cas de laminage des tôles très fines [43], parce que la gestion des contacts évolutifs (arrivées et départs) provoque des instabilités. Dès lors, une formulation stationnaire peut être plus adéquate, à condition de renoncer à modéliser les phénomènes à caractère instationnaire. Le régime permanent représente souvent une fraction très dominante du procédé en laminage, à l'exception notable de la thermique des cylindres ; c'est ce qui rend l'approche stationnaire attractive.

La modélisation instationnaire se fait généralement à l'aide des logiciels commerciaux, fondés sur une formulation lagrangienne réactualisée (Abaqus<sup>®</sup> [44,45], Forge<sup>®</sup> [43], Marc<sup>®</sup> [46]). Il a fallu longtemps pour que ces logiciels deviennent suffisamment généraux pour traiter toutes les spécificités du laminage (cinématique, actionneurs). Dans l'intervalle, des modèles stationnaires ont été développés, pour la plupart fondés sur des approches itératives quasi-eulériennes (avec des mouvements de maillage autorisés de manière très restrictive), d'autres exceptionnellement en eulérien pur (maillage parfaitement fixe englobant l'ensemble du système à modéliser [47]). Du fait de leur efficacité en temps de calcul, et du fait que les aspects « métier » ont pu y être développés depuis longtemps, ils représentent encore aujourd'hui une majorité des applications.

**b) Modèles EF utilisant la formulation ALE**

Du fait que le procédé de laminage possède simultanément des aspects stationnaires et instationnaires, la synthèse des avantages et des limitations des deux formulations lagrangienne et eulérienne conduit à une formulation ALE (Arbitraire Lagrangien Eulérien) [43,2]. Dans cette formulation, le mouvement du maillage est découplé de celui de la matière. D'un point de vue technique, les déplacements des nœuds du maillage peuvent être alors imposés nuls dans la direction du laminage, suivant laquelle le maillage est supposé eulérien, tout en suivant le mouvement de la matière dans les deux directions transverses. La formulation ALE permet ainsi d'adapter le maillage à chaque incrément de calcul afin de :

- conserver une meilleure qualité de maillage et décrire de manière optimale les frontières du domaine ;
- conserver le raffinement du maillage dans les zones critiques, présentant de fortes variations spatiales des variables d'état (contraintes, vitesse, déformation) ;
- minimiser la déformation du maillage, ce qui empêche la dégénérescence des éléments qui conduit souvent à des problèmes de convergence.

Ainsi, les deux principaux apports avantageux de l'ALE sont :

- une bonne gestion du contact ;
- une taille optimale du problème ;
- un gain considérable en temps de calcul, étant donné que le maillage est adapté en conservant un nombre constant de degrés de liberté durant le calcul.

Bien que la formulation ALE, implantée dans Forge<sup>®</sup>, ait été adoptée dans [43,48], aucune application au laminage en présence de flambage n'a été effectuée. Ceci n'est pas une limitation de la formulation ALE en elle-même, mais c'est dû au maillage isotrope non structuré utilisé, composé d'éléments tétraédriques. En effet, étant donné que les éléments tétraédriques ne per-

mettent pas une grande disproportion spatiale, la taille des éléments est choisie principalement en fonction de l'épaisseur de la tôle : elle est au plus égale à l'épaisseur de la tôle. Ce caractère d'un maillage isotrope, exige alors un nombre de degrés de liberté assez élevé quand le rapport épaisseur/largeur est très faible, ce qui alourdit considérablement le calcul. Il faut en effet se rendre compte que pour modéliser le laminage d'une tôle fine, on doit intégrer des échelles spatiales très différentes :

- le dixième de millimètre dans l'épaisseur,
- le millimètre ou le centimètre pour la longueur de contact,
- le mètre pour la largeur (modèles 3D), pour le diamètre des cylindres,
- et jusqu'à la dizaine de mètres pour la longueur, dans la mesure où les champs de contraintes évoluent avant et après l'emprise sur de longues distances.

### c) Synthèse

- Le maillage structuré de la tôle dans les modèles quasi-eulériens [2, 3, 4, 49-53] est le plus adapté pour modéliser le laminage. Sur un exemple de maillage du modèle développé par Hacquin et al. [2] (baptisé Lam3/Tec3 : § 3.1), on observe la capacité de le raffiner d'une part localement, et d'autre part davantage dans une direction que dans une autre (cf. figure 2-3). C'est essentiel pour traiter les différentes échelles spatiales mentionnées plus haut.
- La formulation quasi-eulérienne utilisant un modèle EF pour le calcul de bande (cf. § 2.3.2.i) et la méthode des fonctions d'influence [2, 3, 4, 49-53] pour le calcul de la déformation de la cage, sont les caractéristiques optimales pour un couplage itératif cage - bande rapide et précis.
- Néanmoins, l'approche quasi-eulérienne n'est pas capable de prendre en compte les phénomènes à caractère instationnaire, tels que le flambage.

## 2.4 Modélisation directe des défauts de planéité manifestes

Une modélisation du procédé du laminage est confrontée à plusieurs types de verrous scientifiques, parmi lesquels on trouve les différents types de couplage évoqués dans la figure 2-2. Par ailleurs, la déformation élastique de la cage est l'une des causes principales de la différence d'affinité entre le bombé tôle à l'entrée et à la sortie de l'emprise, origine du différentiel d'allongement des fibres matérielles qui engendre le flambage. Le flambage apparaissant comme une conséquence de ce qui se passe dans l'emprise, dans la logique d'une modélisation du laminage, le flambage se place dans une position de dépendance par rapport au couplage cage-bande (ou cédage). Très longtemps, on s'est contenté de calculer le différentiel local de réduction, donc d'allongement, donné par des modèles de cédage (sans prise en compte du flambement) et de l'exprimer en « Unités I » ou UI [11-19]. C'est l'expérience qui est mise à profit pour savoir si à un nombre donné d'UI correspond un défaut de planéité manifeste, ou juger de la gravité d'un défaut latent. Mais un calcul précis des défauts de planéité manifestes en laminage nécessite en fait un modèle 3D permettant une description de la bande dans l'emprise et hors emprise. Cela signifie que ce sont les modèles utilisant la méthode des éléments finis, en particulier pour le calcul de bande, qui sont les plus adéquats.

Par rapport au flambage (défauts de planéité manifestes), un modèle EF utilisant un maillage structuré et une formulation quasi-eulérienne [54] paraît limité pour plusieurs raisons :

- à cause du caractère instationnaire du flambage.

- du fait que les éléments hexaédriques linéaires sont inadaptés pour décrire le flambage : ils présentent une rigidité excessive à la flexion, surtout lorsque des considérations de coût de calcul conduisent à mettre peu de couches de mailles dans l'épaisseur.

Par contre, les modèles utilisant une formulation lagrangienne ou ALE sont a priori capables de décrire certains types de flambage, comme le montre l'exemple de la figure 2-5. Mais l'instabilité de flambement peut être un phénomène de forte singularité, qui nécessite une diminution considérable du pas de temps à l'origine d'une augmentation importante du temps de calcul, et parfois de problèmes de convergence [54]. D'autre part, un maillage constitué d'éléments tétraédriques n'est pas toujours le plus convenable pour un problème de flambage.

Les limitations des modèles EF 3D vis-à-vis de la caractérisation des défauts de planéité manifestes, incitent certains auteurs [54,56-60] à utiliser des modèles de coques qui ont une grande capacité pour bien décrire le flambage des plaques. Or, il n'existe pas à ce jour une formulation de coque qui ait prouvé sa capacité à rendre compte de l'écrasement de la pièce sous l'emprise ; à cet égard, seule une formulation 3D semble convenable. Cela rend assez difficile la tâche de concevoir un modèle capable de bien décrire simultanément l'écrasement de la tôle sous l'emprise et le flambage hors emprise. C'est pour cette raison que certains auteurs [54,56-60] tentent de traiter le flambage de la tôle en deux étapes successives, c'est-à-dire par chaînage de deux modèles distincts :

- un calcul de laminage en 3D sans flambage,
- un calcul de flambage de coques utilisant le champ de contrainte en aval de l'emprise issu du premier modèle.

La première étape peut utiliser les modèles de cédage simplifiés décrits au § 2.3.2, où seule la partie sous emprise est considérée. On ne dispose dans ce cas que des profils transverses de la contrainte obtenus aux extrémités amont et aval de l'emprise. Ceux-ci sont alors propagés uniformément le long de la tôle dans le modèle de coques. Si on commence par un calcul EF 3D, on a alors un champ complet des six composantes de contraintes, dans les trois directions spatiales. Pourtant, même dans ce cas, tous les auteurs transfèrent seulement la contrainte axiale  $\sigma_{xx}$ , supposant de plus que son profil transverse est uniforme le long de la tôle, dans le sens du laminage [54-60]. Approximation supplémentaire, ils remplacent ces distributions par des profils transverses relativement simples ou analytiques. Nous verrons à la fin de ce mémoire les limites de telles simplifications.

Notons que la méthode de chaînage est basée sur l'absence du couplage emprise - flambage. Counhaye [5] est le seul à avoir introduit un traitement de flambage dans l'algorithme de son modèle de laminage, de manière à prendre en compte le couplage emprise - flambage (cf. figure 2-2). Néanmoins, le modèle de flambage adopté est très simplifié (cf. § 2.6).

Dans ce qui suit, on introduit l'approche découplée par chaînage, en citant avant tout les modèles de flambage de coques sous contraintes résiduelles mis à profit, et l'approche couplée de Counhaye [5] basée sur un modèle simple de flambage.

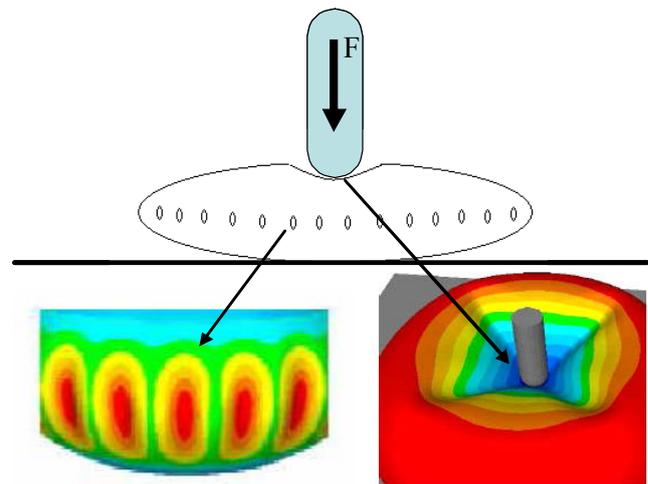


Figure 2-5. Calcul à l'aide de Forge3® du plissement d'une membrane d'un coussin d'air gonflable écrasé par un pion [55].

## 2.5 Approche découplée (chaînage) pour la modélisation des défauts de planéité manifestes

### 2.5.1 Modèles de flambage de coques sous contraintes résiduelles pour modéliser les défauts de planéité manifestes en laminage

#### 2.5.1.i Modèles semi-analytiques

Le calcul du flambage sous contraintes résiduelles d'une plaque revient à trouver la solution non triviale de l'équation différentielle (2.6).

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{N_x}{\mathbb{D}} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.6)$$

Ici,  $w$  est le déplacement hors plan d'un point de la plaque.  $N_x = -h \cdot \sigma_{xx}(y)$ , où  $h$  désigne l'épaisseur de la tôle, et  $\sigma_{xx}(y)$  est la contrainte longitudinale qui varie suivant la largeur de la tôle,  $|y| \leq b$ . Enfin,  $\mathbb{D} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ .

Afin de résoudre le problème de flambage partant de cette équation, Bush et al. [59] introduisent un paramètre de chargement  $\lambda$  et la distribution de chargement adimensionnel  $K(y) = \frac{N_x(y)b^2}{\pi^2 \mathbb{D}}$ ; (2.6) devient :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\lambda \frac{K(y)\pi^2}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.7)$$

Timoshenko et al. [61] proposent une solution de l'équation (2.7) de la forme suivante

$$w(x, y) = f(y) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (2.8)$$

où  $l$  est la longueur de la plaque et  $f$  la flèche suivant la largeur. En injectant (2.8) dans (2.7), les termes suivant la direction  $x$  s'éliminent et on obtient :

$$\frac{d^4 f}{dy^4} - 2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \frac{d^2 f}{dy^2} + \left[ \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 - \lambda K(y) \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \right] f = 0 \quad (2.9)$$

L'équation (2.9) peut être facilement résolue analytiquement pour une distribution  $K(y)$  uniforme, ce qui se ramène à  $\sigma_{xx}$  homogène dans la plaque. De ce fait, pour une contrainte résiduelle variable dans la largeur, Bush et al. discrétisent le profil transverse de celle-ci en contraintes longitudinales homogènes par sous-domaines, en forme de « bandelettes » (cf. figure 2-6). La relation (2.9) peut être ainsi facilement résolue par sous-domaines  $i$  ( $i=1..m$ ) de largeur  $\Delta y$  chacun, dans lesquels la solution élémentaire obtenue correspond à la solution analytique donnée par (2.10). Chaque solution élémentaire admet quatre constantes d'intégration inconnues (équation différentielle de degré quatre) qui sont à identifier.

$$f_i(y) = \sum_{j=1}^4 C_{ij} e^{\tau_j y} \quad (2.10)$$

avec :

$$\tau_1 = \left( -\frac{\pi y_i \sqrt{bn(bn - l\sqrt{\lambda K_i})}}{bl} \right), \quad \tau_3 = \left( \frac{\pi y_i \sqrt{bn(bn - l\sqrt{\lambda K_i})}}{bl} \right),$$

$$\tau_2 = \left( -\frac{\pi y_i \sqrt{bn(l\sqrt{\lambda K_i} + bn)}}{bl} \right), \quad \tau_4 = \left( \frac{\pi y_i \sqrt{bn(bn + l\sqrt{\lambda K_i})}}{bl} \right).$$

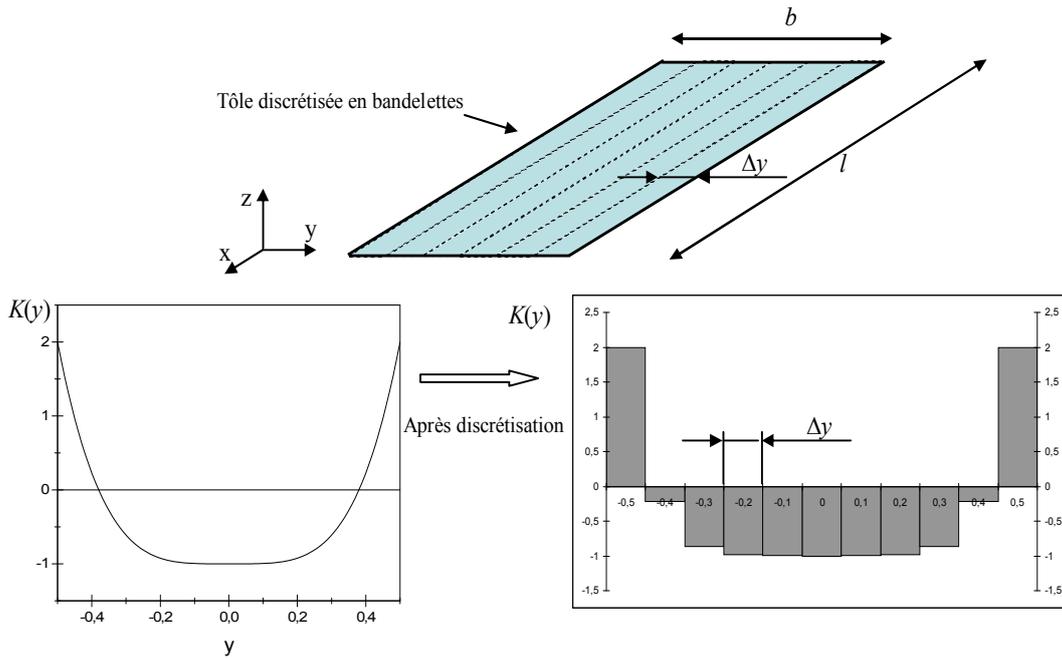


Figure 2-6. Discretisation du profil de la contrainte résiduelle  $\sigma_{xx}$ .

L'identification des constantes d'intégration  $C_{ij}$  est réalisée suite à l'assemblage des solutions élémentaires pour aboutir à la solution globale du problème, en se basant sur la continuité de la solution. Cette condition de continuité permet d'éliminer  $4(2m-1)$  inconnues. Les quatre inconnues restantes sont déterminées à partir des conditions aux limites en déplacement du problème. On obtient alors un système linéaire pouvant s'écrire sous la forme suivante :

$$\sum_{j=1}^{8m} M_{ij} C_j = 0 \quad (2.11)$$

$(i = 1, 2, \dots, 8m)$

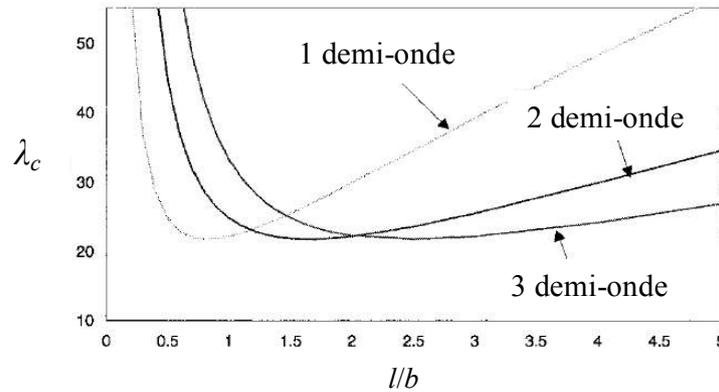
Ce système admet une solution non triviale si et seulement si le déterminant de la matrice  $[M]$ , fonction du multiplicateur  $\lambda$ , est nul. Ainsi, le problème se ramène à chercher la valeur critique  $\lambda_c$  de  $\lambda$  qui annule ce déterminant. Enfin, le mode de flambage (défini par  $n$  : le nombre d'ondes suivant  $x$ ) est celui qui donne une valeur minimale de  $\lambda$  pour une géométrie de plaque donnée (longueur/largeur). Par exemple, pour un profil de chargement décrit par (2.12) et pour un rapport longueur/largeur ( $l/b$ ) égal à 3, on identifie, d'après la figure 2-7, le mode de flambage qui correspond à  $n = 3$ .

$$K(y) = 22 \left( -1 + 2.4 \left( \frac{2y}{b} \right)^4 \right) \quad (2.12)$$

Dans le laminage, le chargement hors emprise de la tôle est composé de deux contributions : la traction de laminage et les contraintes résiduelles. Afin d'approcher les conditions de laminage dans un modèle de flambage de coques, ces deux contributions doivent être reproduites. Dans le modèle de Bush et al. [59], ces deux types de chargement se superposent pour donner le profil de contrainte  $\sigma_{xx}$  qui se décompose donc de la manière suivante :

$$\sigma_{xx}(y) = \bar{\sigma}_{xx} + \tilde{\sigma}_{xx}(y) \quad (2.13)$$

- $\bar{\sigma}_{xx}$  est la moyenne non nulle de ce profil (résultante) qui représente la traction de laminage ;
- $\tilde{\sigma}_{xx}(y)$  est une distribution hétérogène d'un chargement en contrainte résiduelle à moyenne nulle. Ce chargement représente les contraintes résiduelles.



**Figure 2-7. Evolution du paramètre de chargement critique  $\lambda_c$  en fonction du rapport longueur/largeur ( $l/b$ ) de la tôle pour différents modes correspondant aux différentes valeurs de  $n$ .**

Si on revient sur l'équation (2.7), on remarque que le paramètre  $\lambda$  multiplie la totalité du chargement en contrainte qui comprend la résultante - la traction imposée. Par ailleurs, ce paramètre  $\lambda$  représente l'amplitude de contrainte ayant une distribution  $K(y)$ . Cette amplitude admet une valeur critique  $\lambda_c$  quand le flambage a lieu (charge critique). Cela semble incohérent puisque  $\lambda$  ne doit pas multiplier la résultante ( $\bar{\sigma}_{xx}$ ) qui représente la traction qui est une donnée fixe du problème à résoudre. Ainsi, ce modèle traite un problème de flambage mais les résultats obtenus ne sont pas représentatifs d'un problème de modélisation des défauts de planéité en laminage.

Dans le modèle de Fisher et al. [56,58] ce problème ne se pose pas et le mode ainsi trouvé correspond à la traction de laminage imposée. Pour une expression d'un chargement imposé (2.14), on reconnaît la distribution transverse de la contrainte résiduelle  $\sigma_{xx}$  ( $\sigma_{xx} = N_K K(y)$ ) et  $N_0$  qui représente la résultante en traction de laminage.

$$N_x(\rho) = N_K K(\rho) + N_0 \quad (2.14)$$

Avec :

$$\rho = \frac{y}{b}$$

$N_K$ : amplitude du chargement.

$N_0$  : résultante du chargement appliqué qui représente l'effort de traction appliqué.

Dans ce modèle, Fisher et al. [56,58] optent pour la minimisation de l'énergie de déformation élastique causée par le flambage, suivant des paramètres caractérisant la géométrie des défauts. Le potentiel de l'énergie de déformation élastique vaut :

$$\phi = \underbrace{\frac{\mathbb{D}}{2} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \times \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]}_{\phi_B} d\Omega + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} (N_x + N_0) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 d\Omega}_{\phi_M} + \underbrace{\frac{N_0^2 l b}{2 E h}}_{\phi_{N_0}} \quad (2.15)$$

L'expression paramétrée de la forme de la flèche adoptée est donnée par (2.16).

$$w(x, \rho) = q |2\rho|^\kappa (\text{sign}(\rho))^\varphi \cos\left(\frac{\pi x}{\tilde{l}}\right) \quad (2.16)$$

$\tilde{l}$  est la longueur d'onde de la solution. Le mode est symétrique si  $\varphi$  est paire, antisymétrique sinon.  $\kappa$  est un paramètre (puissance en  $\rho$ ) qui décrit la forme du mode de flambage en largeur et  $q$  représente l'amplitude du défaut qui doit minimiser le potentiel, d'où :

$$\frac{\partial \phi}{\partial q} \delta q = 0 \quad (2.17)$$

Ce qui donne :

$$\phi_M(w) + \phi_B(w) = 0 \quad (2.18)$$

(2.18) peut s'écrire aussi sous la forme :

$$\begin{cases} \tilde{N} \frac{\partial \phi_M(w)}{\partial \tilde{N}} + \tilde{N}_0 \frac{\partial \phi_M(w)}{\partial \tilde{N}_0} + \phi_B(w) = 0 \\ \tilde{N} = \frac{N_K b^2}{D \pi^2}, \quad \tilde{N}_0 = \frac{N_0 b^2}{D \pi^2} \end{cases} \quad (2.19)$$

On déduit alors :

$$\tilde{N} = - \frac{\tilde{N}_0 \frac{\partial \phi_M(w)}{\partial \tilde{N}_0} + \phi_B(w)}{\frac{\partial \phi_M(w)}{\partial \tilde{N}}} \quad (2.20)$$

On injectant l'expression de la solution (2.16) dans (2.15), (2.20) devient :

$$\tilde{N} = - \frac{\tilde{N}_0 \frac{1}{2\kappa+1} + \frac{\left(\frac{b}{l}\right)^2}{2\kappa+1} - \frac{8\kappa(\kappa-1)}{\pi^2(2\kappa-1)} + \frac{16\left(\frac{l}{b}\right)^2 \kappa^2(\kappa-1)^2}{\pi^4(2\kappa-3)} + \frac{8(1-\nu)\kappa}{\pi^2}}{2 \int_0^{\frac{1}{2}} K(\rho)(2\rho)^{2\kappa} d\rho} \quad (2.21)$$

La longueur d'onde  $\tilde{l}$  et l'exposant  $\varphi$ , traduisant le mode de flambage, doivent minimiser (2.21) afin d'obtenir la plus petite valeur possible de  $\tilde{N}$ . Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{N}}{\partial \left(\frac{\tilde{l}}{b}\right)} &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{N}}{\partial \kappa} &= 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Finalement, on parvient à un système à deux équations et à deux inconnues  $\frac{\tilde{l}}{b}(\tilde{N}_0)$  et  $\kappa(\tilde{N}_0)$ .

Dans ces modèles semi-analytiques, les modes en centre long ou en bords longs ne sont pas obtenus directement comme solutions des modèles décrits dans les références [56-59] : ils font l'objet d'une analyse a priori du profil de contrainte résiduelle. Suite à cette analyse, des conditions aux limites particulières sont imposées, différentes des conditions aux limites réelles de laminage, pour pouvoir aboutir au résultat souhaité. Ce dernier doit être compatible avec le profil de contrainte imposé. Par exemple, on a vu que pour le modèle de Bush et al. [59], il est indispensable d'introduire des conditions aux limites complémentaires permettant de calculer les constantes d'intégrations  $C_{ij}$ . Il en va de même pour le modèle de Fisher et al. [56,58], où, quelles que soient les valeurs de  $\kappa$  décrivant le mode de flambage, la solution obtenue donnera toujours un bord long (puisque  $w(x, 0) = 0$ ). Ces conditions sont choisies de sorte que, si les auteurs s'attendent à un centre long (contrainte en compression au centre), ils imposent des bords fixes comme condition aux limites et inversement.

Marchand [54] utilise lui aussi une méthode qui consiste à minimiser l'énergie de déformation élastique pour une distribution de contraintes résiduelles donnée. Ces champs de contraintes planes<sup>3</sup> sont récupérés d'un calcul effectué à l'aide de Lam3/Tec3 (cf § 3.1) sans flambage. Soit une expression paramétrée du champ de déplacement  $\xi$  exprimée par (2.23).

$$\begin{aligned} \xi &= u\vec{x} + v\vec{y} + w\vec{z} \\ u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w(x, y) &= q \sin(\omega_x x + \varphi_x) \sin(\omega_y y + \varphi_y) \end{aligned} \quad (2.23)$$

La méthode consiste donc à trouver les valeurs de  $q$ ,  $\omega_x$  et  $\omega_y$  qui minimisent l'énergie de déformation élastique. Les déphasages  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$ , quant à eux, sont donnés par les conditions aux li-

<sup>3</sup> Pour les problèmes de tôles fines, qui font souvent l'objet de nos travaux, les contraintes hors emprise sont considérées planes.

mites. Ainsi, on retrouve encore la nécessité de choisir des conditions aux limites adéquates, de manière à fournir des résultats prévus au préalable d'après l'analyse de la distribution des contraintes résiduelles. Par exemple, si le profil de la contrainte  $\sigma_{xx}$  est tel qu'il est représenté sur la figure 2-6, un défaut en centre long est estimé ( $w(x,0) = 0$ ), donc  $\varphi_x$  doit être choisie nulle.

### 2.5.1.ii Modèles de flambement par éléments finis coques

Ce type de modèle est certainement plus adapté pour les chargements complexes. Cependant, pour un problème donné, l'énergie peut présenter une multitude de minima, donc plusieurs solutions possibles correspondant aux différents modes (longueurs d'ondes  $\omega_x$  et  $\omega_y$ ). Ainsi, la recherche de la solution du problème qui donne un minimum absolu de l'énergie est délicate. De plus, dans les modèles de flambage de coques ci-dessus, le mode de flambage respecte une expression analytique choisie par l'utilisateur. Cela exclut un certain nombre de solutions possibles qui ne coïncident pas avec cette forme analytique imposée. Par conséquent, de tels modèles risquent de mal estimer le mode de flambement, si la forme analytique choisie n'est pas assez riche au regard de la complexité des modes possibles. Cette limitation ne se présente pas pour les modèles numériques, en particulier dans les modèles EF coques pour la modélisation du flambage. Toutefois, les modèles commerciaux, tel que Abaqus<sup>®</sup>, ne permettent pas d'injecter dans une plaque des chargements sous forme de contraintes résiduelles. Pour lever cette difficulté, certains auteurs comme Marchand [54] passent par l'intermédiaire d'un champ thermique, utilisant la thermo-élasticité pour injecter un champ de contraintes résiduelles. Ainsi, faire croître le chargement mécanique en contraintes, revient à faire croître la température ( $\sigma = \alpha_i \Delta\Theta$ ,  $\alpha_i$ : matrice des coefficients thermomécaniques,  $\Delta\Theta$ : élévation de la température  $\Theta$  dans la plaque). Cette méthode semble quand même limitée, puisqu'elle ne donne pas la possibilité d'une modélisation riche et générale de contraintes complexes comme on peut en rencontrer dans le problème de planéité en laminage. Ainsi, on se limite toujours à des profils relativement simples de la contrainte longitudinale  $\sigma_{xx}$  supposée uniforme le long de la tôle.

D'autre part, aucun des modèles de flambage de coques que l'on vient de citer ne peut faire un calcul de post-flambage. Ils sont restreints au flambage linéaire, c'est-à-dire à la détection du mode et de la charge critique de flambage pour une distribution de contrainte résiduelle donnée. Le calcul de post-flambage, qui fournit des résultats plus complets et concluants, nécessite un algorithme numérique sophistiqué. De tels modèles sont rarement rencontrés dans la littérature.

Le seul que nous avons trouvé est celui de Tozawa et al. [60]. Il fait partie d'une famille d'algorithmes itératifs permettant de résoudre le problème de flambage d'une plaque sous l'effet des contraintes résiduelles. Suivant le chemin de chargement, ces algorithmes permettent de rechercher une branche de solutions d'un problème non linéaire (souvent de non linéarité géométrique), qui minimise un potentiel élastique.

Il s'agit alors de résoudre un problème de minimisation de l'énergie potentielle totale :

$$\phi = \phi_{\text{int}} + \phi_{\text{ext}} \quad (2.24)$$

$\phi_{\text{int}}$  est l'énergie interne de déformation et  $\phi_{\text{ext}}$  l'énergie potentielle des forces extérieures. Un problème non linéaire est généralement résolu par des méthodes incrémentales. Pour un pas d'incrément infinitésimal de  $\phi$  on a :

$$\Delta\phi = \delta\phi + \frac{1}{2!}\delta^2\phi + \dots \quad (2.25)$$

Dans la position d'équilibre stable, la composante linéaire  $\delta\phi$  est nulle et le terme quadratique  $\delta^2\phi$  doit être défini positif. La charge critique est la plus petite pour laquelle ce dernier n'est plus défini positif.

L'énergie potentielle totale s'écrit :

$$\phi = \int_{\Omega} \{\gamma_{VK}\}^t \{S\} d\Omega - \{\xi\}^t \{P\} \quad (2.26)$$

où  $S$  et  $\gamma_{VK}$  sont respectivement le tenseur de Piola-Kirchhoff et le tenseur de déformation de Green-Lagrange dans le cadre de l'approximation de von Karman.

On note le vecteur champ de déplacement :

$$\{\xi\} = \{u, v, w\}^t \quad (2.27)$$

Le tenseur de déformation pour une plaque se décompose comme suit :

$$\gamma_{VK} = \gamma_{VK}^l + \gamma_{VK}^{nl} \quad (2.28)$$

$$\gamma_{VK}^l = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}^t \quad (2.29)$$

$$\gamma_{VK}^{nl} = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad 2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right\}^t \quad (2.30)$$

Le problème est discrétisé par la méthode des éléments finis. La forme discrète de la déformation est :

$$\{\gamma_{VK}\} = [B] \{\hat{\xi}\} \quad (2.31)$$

Tel que  $[B]$  est la matrice qui contient les dérivées des fonctions de formes qui peut être décomposée comme suit :

$$[B] = [B_0] + [B_L] \quad (2.32)$$

Relation dans laquelle  $[B_0]$  est une matrice à termes constants correspondant aux petites déformations et  $[B_L]$  est une matrice à termes non constants correspondant à la partie non linéaire de la déformation.

Supposons que l'on peut écrire la relation de comportement sous la forme :

$$\{S\} = [C] \{\gamma_{VK}^{nl}\} \quad (2.33)$$

$C$  : matrice des constantes élastiques.

On a alors le terme quadratique de variation d'énergie :

$$\delta^2\phi = \left( \int_{\Omega} [B]^T \{S\} d\Omega + \int_{\Omega} [B]^T [C][B] d\Omega \right) \{\delta\hat{\xi}\} \quad (2.34)$$

On pose :

$$[K_0] = \int_{\Omega} [B_0]^T [C][B_0] d\Omega \quad (2.35)$$

$$[K_L] = \int_{\Omega} \left( [B_L]^T [C][B_0] + [B_0]^T [C][B_L] + [B_L]^T [C][B_L] \right) d\Omega \quad (2.36)$$

$$[K_{\sigma}] = \int_{\Omega} [B]^T \{S\} d\Omega \quad (2.37)$$

$$[K_T] = [K_0] + [K_L] + [K_{\sigma}] \quad (2.38)$$

Cela conduit à :

$$\delta^2\phi = [K_T] \{\delta\hat{\xi}\} \quad (2.39)$$

Le calcul du point de bifurcation permet de déterminer le seuil critique du flambage avant lequel la plaque est supposée plate ( $w(x,y)=0$ ), donc  $[K_L] = 0$ . L'algorithme de Tozawa et al. est détaillé dans la figure 2-8 ; la plaque est supposée initialement plane. L'algorithme commence par calculer la matrice constante  $[K_0]$ , la matrice  $[K_{\sigma}]$  et le déplacement initial  $\{\hat{\xi}_0\}$  pour une valeur du paramètre de charge initialement nulle :

$$\{\hat{\xi}_0\} = [K_0]^{-1} \{P\}, [K_L] = 0 \quad (2.40)$$

$\{P\}$  est le vecteur second membre qui représente la traction appliqué à la plaque.

La valeur critique du paramètre de charge  $\lambda_c$  vérifie :

$$\delta^2\phi = 0 \Rightarrow ([K_0] + \lambda_c [K_{\sigma}]) = 0 \quad (2.41)$$

Le déplacement  $\{\hat{\xi}^*\}$  qui décrit le mode de flambage est donné par :

$$\{\hat{\xi}^*\} = [K_T]^{-1} \{P\}, [K_L] \neq 0 \quad (2.42)$$

Ensuite, un algorithme de prédiction - correction à l'aide de la méthode de Newton-Raphson est utilisé afin d'effectuer un suivi de courbe, au cours duquel la bifurcation commence dès que le paramètre  $\lambda$  atteint la valeur  $\lambda_c$ ; le calcul de post-flambage est ainsi effectué.

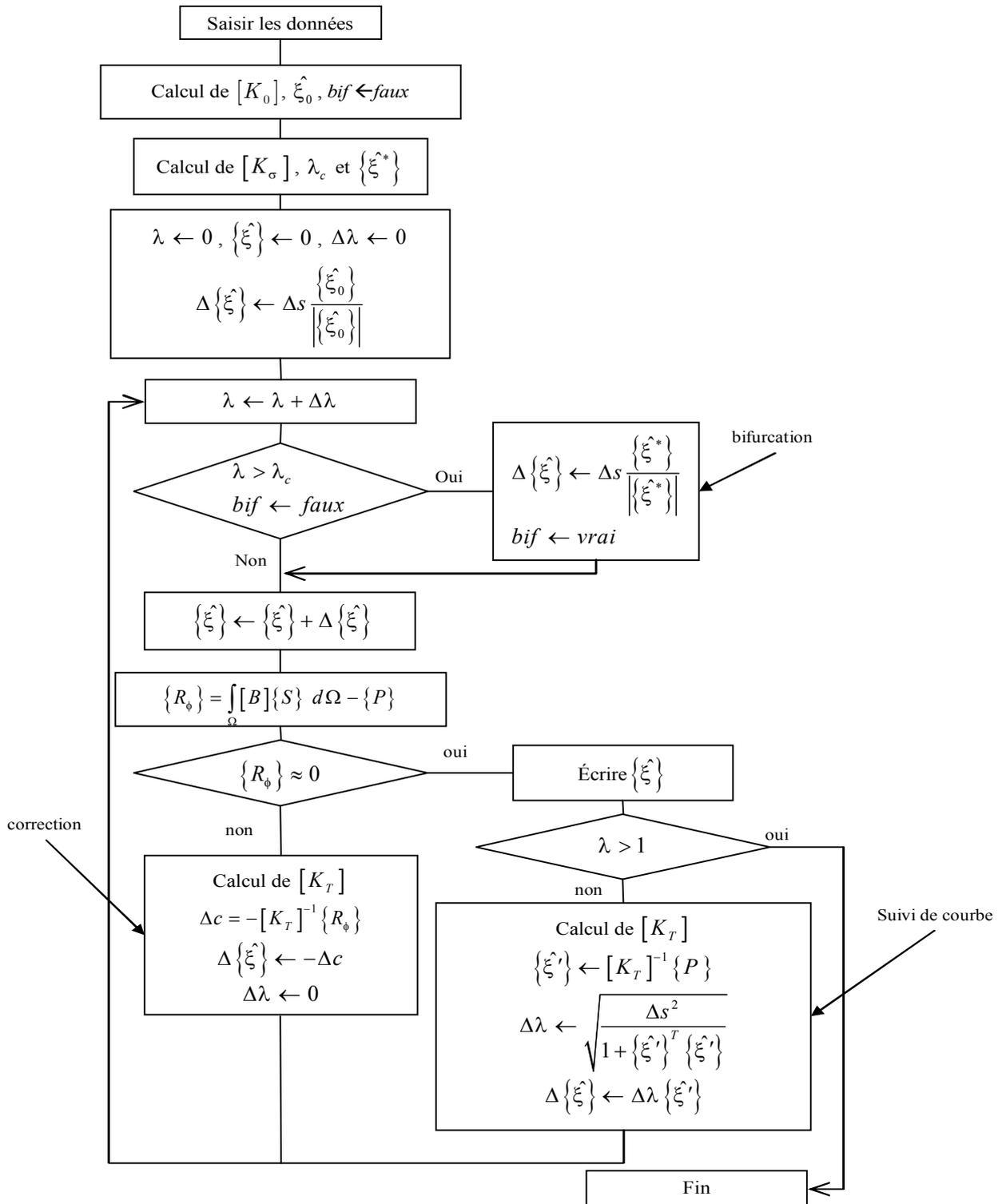


Figure 2-8. Algorithme du calcul du modèle de flambage de Tozawa et al. [60].

Si on analyse les fondements de ce modèle, on constate que rien n'empêche de l'utiliser pour un calcul de flambage pour des chargements complexes, en prenant en compte les composantes du tenseur de contrainte plane ( $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ ). Néanmoins, dans [60], rien n'est précisé sur les amplitudes des défauts obtenus, c'est-à-dire sur l'état post-flambé de la tôle. Les auteurs ne disent pas non plus s'ils ont considéré la totalité des composantes du tenseur de contrainte plane, ou s'ils traitent de façon particulière la « zone 1 » (cf. figure 2-9), sur laquelle Tozawa est pourtant un des premiers à avoir attiré l'attention [26]. De plus, même si ce modèle s'avère relativement avancé par rapport aux modèles de flambage de coques précédemment décrits, il semble tout de même que des conditions aux limites supplémentaires ont été aussi utilisées pour obtenir une solution cohérente par rapport au profil de la contrainte résiduelle imposée<sup>4</sup>. En outre, dans les applications présentées dans cet article, les distributions des contraintes résiduelles utilisées sont relativement simples (profils analytiques) par rapport à celles obtenues en laminage des tôles.

Il est donc temps d'en venir à une analyse de ces simplifications des champs transférés du modèle de laminage au modèle de flambage.

### 2.5.2 Analyse bibliographique de l'approche découplée basée sur le chaînage

Revenons au principe du calcul des défauts de planéité en laminage, couramment utilisé dans la littérature [54,56-60], qui repose sur un chaînage entre un calcul 3D de cédage et un calcul de flambement de coques, tel que détaillé dans le paragraphe 2.4. Dans une telle méthode, les auteurs supposent que les composantes de contraintes résiduelles autres que  $\sigma_{xx}$ , plus faibles, n'interviennent pas de manière significative pour entraîner les défauts de planéité. Mais on peut penser que cette hypothèse est faite avant tout parce qu'il est difficile d'entrer comme donnée d'un calcul de flambage utilisant des coques, ces champs de contraintes complexes (voir le passage par la thermo-élasticité chez Marchand [54]).

Peut-on justifier cette simplification ? Nous savons que cette hypothèse n'est pas tout à fait correcte, puisque les champs des vitesses se redistribuent dès la sortie de l'emprise pour se stabiliser un peu plus vers l'aval, là où la bande retrouve un mouvement de corps rigide (cf. figure 2-9). Ceci induit de fortes perturbations sur les champs de contraintes. Ainsi, dans la zone transitoire (zone 1 de la figure 2-9) qui est voisine de la sortie de l'emprise, les distributions des champs de contraintes résiduelles sont vraiment complexes. Plus loin, dans la zone où la redistribution de ces champs est établie (zone 2 de la figure 2-9), les composantes autres que la contrainte longitudinale  $\sigma_{xx}$  s'atténuent et deviennent assez faibles comparées à celle-ci, particulièrement dans le cas des tôles fines. Cela peut justifier les simplifications mentionnées plus haut, sous réserve que les fortes contraintes hétérogènes et multiaxiales de la zone 1 ne puissent pas déclencher le flambement. Ce n'est pas impossible si cette zone est de faible longueur, le flambement demandant une certaine surface pour se développer, de l'ordre de la longueur d'onde du mode sélectionné. Mais cela demande pour le moins d'être vérifié.

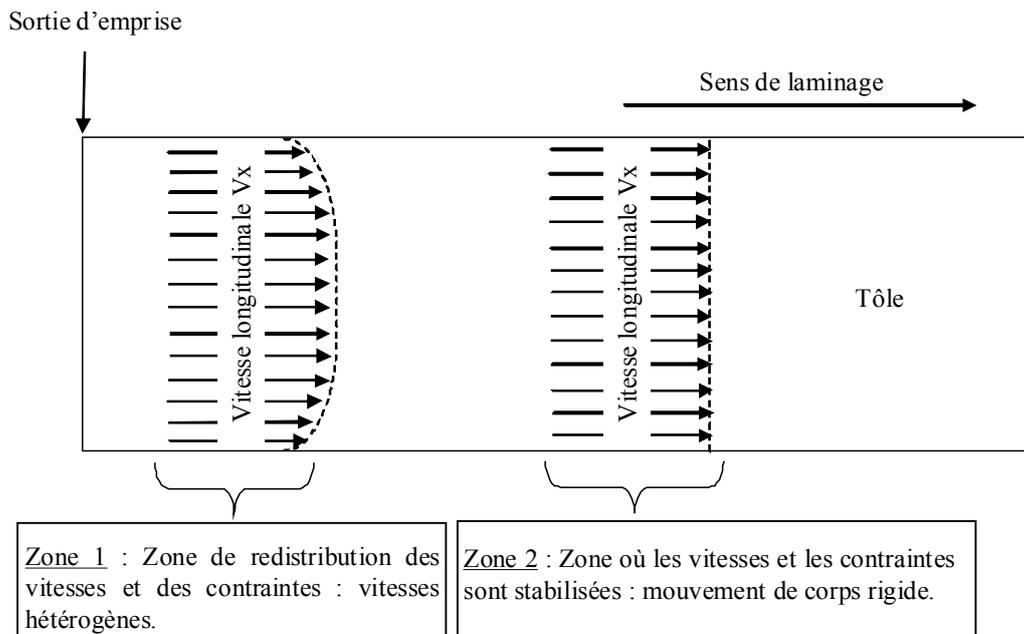
D'ailleurs, on sait qu'il existe des défauts de planéité non transverses (« herringbones » obliques, plis longitudinaux) qui ne sauraient être expliqués par la seule composante  $\sigma_{xx}$ . La sélection exclusivement restreint donc le champ d'application des modèles.

#### Conclusion 1 :

Les modèles de flambage de coques existants semblent donc limités par rapport à la complexité des champs de contraintes résiduelles rencontrées en laminage.

---

<sup>4</sup> Ces conditions aux limites correspondent à une fixation du centre dans le but d'obtenir des bords ondulés et une fixation des bords afin d'obtenir un centre ondulé.



**Figure 2-9. Schématisation de l'évolution de la vitesse longitudinale  $V_x$  dans le sens du laminage d'une tôle.**

Une combinaison fortement couplée entre un modèle 3D de cédage (couplage cage - pièce) et un modèle de flambage de plaque serait le moyen idéal pour une modélisation complète du laminage. Un tel modèle serait capable de fournir une caractérisation assez complète du laminage, y compris les défauts de planéité manifestes qu'il engendre.

**Conclusion 2** : une analyse fortement couplée entre modèle d'emprise et modèle de flambement est souhaitable, au minimum pour fournir une solution de référence qui permette de critiquer, confirmer ou infirmer les approximations vues tout au long de cette analyse bibliographique.

Une autre limitation de l'approche découplée est que toute rétroaction du flambement sur l'état de contrainte et de déformation dans l'emprise est impossible. Or un défaut de planéité *manifeste* pourrait modifier considérablement la *tension de bande* (contrainte axiale) aux deux bouts de l'emprise, facteur clé de la mécanique de l'emprise. Négliger ces phénomènes suppose que la zone 1 ne soit pas atteinte par la relaxation des contraintes par flambement, c'est-à-dire qu'aucun flambement ne s'y produit. Cette zone 1 découplerait alors l'emprise de la zone 2 où les contraintes sont modifiées. Quoique pas impossible, ce schéma demande à être analysé.

## 2.6 Un modèle de flambage complètement couplé mais simple

Les modèles de flambage de coques sont donc les plus précis à l'heure actuelle pour le traitement des problèmes de flambage des tôles laminées. En revanche, ils négligent jusqu'ici le couplage flambage / emprise, supposant que la seconde n'est pas influencée par le premier. Les auteurs découplent ainsi les deux phénomènes en traitant séparément le laminage (sans prise en compte du flambage) et le flambage. En fait, dans la littérature, il existe une exception notable à ce schéma : le modèle de Counhaye [5]. Ce dernier est le seul à avoir développé un modèle de laminage intégrant le flambage dans le calcul. Ce modèle de laminage permet la résolution numérique du problème par la méthode des différences finies le long des lignes de courant, en régime stationnaire (cf. figure 2-10). Il est également doté d'un traitement du flambage basé sur des hy-

pothèses simplistes, mais d'une efficacité satisfaisante. En effet, le modèle repose sur le fait que le flambage d'une structure, causé par les contraintes internes compressives, induit une saturation de celle-ci. Ces contraintes de compression restent alors voisines d'une valeur critique de flambage  $\sigma_c$ . Counhaye [5] estime cette dernière de la manière suivante :

$$\sigma_c = \frac{\pi E h^2}{3 \tilde{l}^2} \quad (2.43)$$

$E$  : module d'Young.

$h$  : épaisseur de la tôle.

$\tilde{l}$  : longueur d'onde des ondulations (supposée de même ordre de grandeur que la largeur de la zone comprimée).

Ainsi, la prise en compte du flambage dans ce modèle revient à relaxer les contraintes de compression aux points d'intégration hors emprise chaque fois qu'elles dépassent  $\sigma_c$ . Cette opération se ramène à ajouter une déformation additionnelle et non compatible avec la contrainte locale, jouant le rôle d'une déformation reprise par le flambage nommée  $\varepsilon^f$ . L'expression de la déformation totale est alors :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p + \varepsilon^f \quad (2.44)$$

où  $\varepsilon^e$ ,  $\varepsilon^p$ ,  $\varepsilon^f$  désignent respectivement les déformations élastique, plastique et celle reprise par le flambage.

Même si ce traitement du flambage repose sur des hypothèses simples, la prise en compte du flambage dans ce modèle - couplant la déformation de la cage, la déformation de la tôle et le flambage - rend les résultats plus cohérents par rapport aux mesures expérimentales. La pertinence de ce modèle peut être vue à partir des profils transverses de la contrainte longitudinale  $\sigma_{xx}$  à mi-intercage pour un cas donné (figure 2-11), où on note une claire amélioration des résultats quand le flambage est pris en compte dans le calcul. De plus, les zones de défauts de planéité sont correctement détectées dans ce modèle, elles correspondent aux endroits de la tôle où les  $\varepsilon^f$  sont non nulles. Pourtant, la géométrie de ces défauts de planéité ne peut pas être représentée comme dans les modèles de flambage de coques.

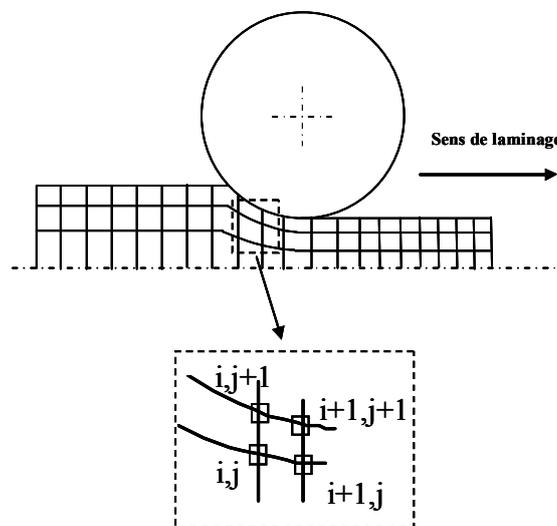


Figure 2-10. Discrétisation spatiale et lignes de courants pour le modèle de Counhaye [5].

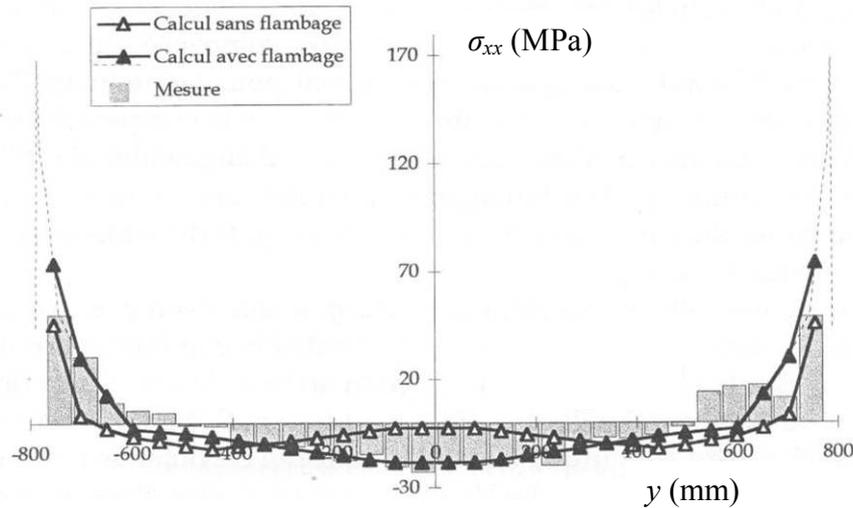


Figure 2-11. Profil de la contrainte longitudinale à mi-intercage en aval de l'emprise : la prise en compte du flambage donne des résultats plus réalistes [5].

## 2.7 Synthèse de l'étude bibliographique

Cette analyse bibliographique a permis d'évaluer les travaux antérieurs sur la modélisation des défauts de planéité en laminage. Ces défauts sont des facteurs déterminants de la qualité du produit. Or l'exigence d'une productivité toujours croissante risque toujours d'entraîner une baisse de qualité, une augmentation des défauts, sauf à multiplier les moyens de contrôle et de régulation. Pour ce faire, il faut améliorer la connaissance du procédé et de sa réponse aux actions des systèmes de pilotage, par la modélisation comme par l'expérience. Dans ce contexte, la modélisation du laminage ayant atteint une grande partie de ses objectifs scientifiques et techniques, ce sont les défauts de planéité qui représentent aujourd'hui une des motivations principales pour poursuivre les efforts de développement de modèles plus sophistiqués. Dans ce chapitre bibliographique, on constate que plusieurs types de modèles ont été développés dans ce but.

La prédiction des défauts de planéité doit impérativement partir d'une modélisation du cépage, i.e. le couplage entre la déformation de la tôle et celle de la cage. Dans les modèles simples, qui sont généralement analytiques ou semi-analytiques, le flambage n'est pas pris en compte. La plupart du temps, il fait l'objet d'une analyse a posteriori des profils de contraintes en sortie d'emprise, en particulier le profil de la contrainte longitudinale. Suivant le profil transverse de cette contrainte, le défaut de planéité est estimé : il est prédit là où les contraintes résiduelles demeurent compressives. En revanche, cette approche assez « simpliste » néglige l'interaction emprise/flambage évoquée au début de ce chapitre. De ce fait, les modèles plus complets, tels que les modèles EF et généralement les modèles numériques [54-60], offrent une meilleure capacité et des résultats plus précis. Néanmoins, on a vu que le flambage est un phénomène qui n'est pas facile à reproduire en laminage à l'aide de ces modèles.

L'examen des travaux précédents nous permet aussi d'estimer les difficultés que l'on peut rencontrer quand on cherche à modéliser les défauts de planéité en laminage. Elle donne également quelques guides pour une modélisation plus performante. Nous avons tiré deux conclusions :

- le modèle doit intégrer dans l'approche du flambement toutes les composantes de contraintes, si l'on veut pouvoir modéliser tous les types de défauts de planéité avec précision ;

- le modèle doit réaliser d'une façon ou d'une autre un couplage entre le calcul d'emprise et le calcul de flambement, de manière à prendre en compte si elle existe l'influence, sur les contraintes sous emprise, de la relaxation des contraintes hors emprise par le flambement.

Dans la littérature, seul le modèle complètement couplé de Counhaye [5] respecte ces deux impératifs. Il aboutit à des contraintes « loin de l'emprise » qui se comparent très bien aux mesures. Mais nous avons vu d'une part que son critère de flambement, très simple, est critiquable, et que d'autre part, ne pouvant faire de calcul post-flambement, il ne peut nous renseigner sur l'amplitude des défauts, donc sur leur caractère pénalisant, voire dangereux. C'est à ces deux limitations que nous allons nous attaquer dans la suite de ce document.

L'examen de la littérature ne nous a pas permis de découvrir de modèle 3D plus complet, précis et rapide que le logiciel dont nous disposons au Cemef et chez ArcelorMittal, Lam3 / Tec3. Nous partirons donc de cette base. Mais, dépourvu de capacités pour reproduire les défauts de planéité manifestes (voir l'expérience de Marchand [54]), ce logiciel doit être complété par un modèle de flambage. L'idéal serait de réaliser un couplage fort entre ce modèle EF de laminage et un modèle EF de flambage de coques. Des méthodes de couplage de modèles de dimensionnalités différentes comme la méthode Arlequin [62-64] pourraient être utilisées pour relier nos éléments 3D et des éléments coques, mais elles nous semblent très difficiles à mettre en œuvre avec d'un côté une formulation en vitesse (le laminage, l'emprise), de l'autre une formulation statique, en déplacement (le flambement). Avant d'envisager une telle solution, nous avons préféré, dans cette thèse, utiliser des méthodes plus « douces » pour analyser les questions fondamentales posées dans cette étude : influence des autres composantes, influence de la « zone 1 », rétroaction post-emprise – emprise. La démarche suivante a donc structuré nos travaux.

Nous partons de la version standard du modèle Lam3/Tec3 [2] (Lam3/Tec3-Standard), que nous avons complété en couplage fort par un modèle simplifié de flambage, mais tenant compte du couplage emprise / flambage, en nous inspirant des travaux de Counhaye [5], pour aboutir à une version qui sera nommée (Lam3/Tec3-Counhaye). Sur quelques cas industriels de laminage, nous allons comparer les résultats obtenus à l'aide de Lam3/Tec3-Standard et de Lam3/Tec3-Counhaye pour analyser ce que la prise en compte du flambage provoque au niveau de l'emprise. Si le flambage, qui modifie la distribution des contraintes hors emprise, n'a aucun effet sur cette dernière, la méthode découplée chaînant Lam3/Tec3-Standard et un modèle de flambage de coque sera suffisante (cf. chapitre 5). Cet enchaînement consiste à :

- effectuer un premier calcul de laminage à l'aide de Lam3/Tec3-Standard, sans tenir compte du flambage, fournissant des champs de contraintes résiduelles, y compris hors emprise.
- Utiliser ces champs de contraintes résiduelles comme entrées du calcul de flambage de coques qui permet d'obtenir la charge critique, le mode de flambage et l'état post-flambé, ainsi que la nouvelle (et réelle) répartition des contraintes dans la tôle. C'est le modèle fondé sur la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) qui sera utilisé (cf. chapitre 4)

Dans le cas contraire, c'est-à-dire si le modèle couplé Lam3/Tec3-Counhaye montre une interaction entre le flambage et l'emprise, un couplage plus poussé entre Lam3/Tec3-standard et un modèle de flambage de coque sera proposé. Sans aller jusqu'au couplage fort suggéré plus haut, nous montrerons sa mise en œuvre sous la forme d'un couplage itératif généralisant le calcul en deux étapes décrit ci-dessus (cf. chapitre 6).