# Etude des formes quadratiques

On s'intéresse dans ce chapitre aux formes quadratiques d'un champ $X$ définies par

$$J_n(g) = \sum_{k \in A_n} \sum_{l \in A_n} g_{k-l} X_k X_l,$$

où $A_n = \{1, \dots, n\}^d$ et où $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ est une suite sommable. Dans le cas particulier où $g_k = \delta_{-h}(k)$, $J_n(g)$ est l'estimateur de la fonction de covariance de $X$ au point $h$. Plus généralement, $J_n(g)$ est une statistique que l'on retrouve dans de nombreux problèmes comme par exemple dans la démonstration de la convergence de l'estimateur de Whittle du paramètre de longue mémoire d'une série temporelle.

En posant $g(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} g_j e^{-i<j,x>}$, on peut réécrire la forme quadratique $J_n(g)$ sous forme d'une intégrale faisant intervenir la fonction $g$ et le périodogramme de $X$.

Le périodogramme d'un champ aléatoire $X$ est en effet défini sur $E = [-\pi, \pi]^d$ par

$$I_n(x) = \frac{1}{n^d} \left| \sum_{k \in A_n} X_k e^{i<k,x>} \right|^2 = \frac{1}{n^d} \sum_{k,l \in A_n^2} X_k X_l e^{-i<k-l,x>}$$

et on vérifie facilement que

$$J_n(g) = \int_E g(t) I_n(t) dt. \tag{7.0.1}$$

En dimension $d = 1$, l'étude de (7.0.1) lorsque $X$ est gaussien à longue mémoire a été réalisée par Fox et Taqqu (1985, 1987). Lorsque $X$ est linéaire à longue mémoire, la même étude a été conduite par Giraitis et Surgailis (1990) qui appliquent leur résultat à la convergence de l'estimateur de Whittle. Ces auteurs ont montré que $J_n(g) - E(J_n(g))$ ne suivait pas nécessairement un théorème central limite. Plus précisement, on peut distinguer deux situations selon que $g(0) = 0$ ou $g(0) \neq 0$. Dans le premier cas, on retrouve un théorème central limite (Fox et Taqqu (1987) et Giraitis et Surgailis (1990)) et dans le second, on obtient un théorème non central (Fox et Taqqu (1985) et Terrin et Taqqu (1990)).

En dimension $d \geq 1$, Doukhan et al. (1996) montrent le même type de résultats lorsque le champ $X$ est gaussien à longue mémoire isotrope.

Notre objectif est de généraliser ces résultats aux champs linéaires, non nécessairement gaussiens et à longue mémoire non isotrope. Pour cela nous adoptons une démarche spectrale en réécrivant (7.0.1) sous forme d'une intégrale stochastique double.

Dans la partie 7.1, nous reprenons la construction de l'intégrale doubles de Major (1981) dans un contexte non gaussien. On rappelle ensuite la formule d'Ito pour ces intégrales.

Nous présentons dans la partie 7.2.1 un théorème de convergence de mesures spectrales doubles, généralisation du Théorème 6 du chapitre 3. L'étude de l'asymptotique de (7.0.1), écrit sous forme d'une intégrale stochastique double, se base sur ce théorème.

Enfin, dans la section 7.3, nous montrons un théorème non central pour $J_n(g)$ lorsque $g(0) \neq 0$. Nous obtenons en application la loi limite de l'estimateur de la fonction de covariance d'un champ fortement dépendant.

La partie 7.4 contient les preuves de lemmes techniques.

*Remarque* 28. Ce travail sur les formes quadratiques est en cours. Un de nos objectifs était de sortir du cadre gaussien. Mais un point reste encore insatisfaisant : il s'agit de la définition de l'intégrale double par rapport à des mesures aléatoires à accroissements orthogonaux non gaussiennes. Lorsque les cumulants d'ordre 4 de la mesure sont supposés nuls, la définition de l'intégrale s'adapte directement du cas gaussien et c'est l'hypothèse que nous ferons tout au long du chapitre. Cette hypothèse reste à alléger car elle induit des hypothèses difficilement interprétables dans les Théorèmes 20 et 21.

Si on suppose que les champs aléatoires sont gaussiens, les hypothèses effectuées dans le Théorème 21 (le résultat principal du chapitre) deviennent naturelles. Dans cette situation, le Théorème 21 étend au cadre de forte dépendance non-isotrope le résultat de convergence de type non central des formes quadratiques d'un champ aléatoire montré dans Doukhan et al. (1996).

## 7.1 Intégrales doubles non gaussiennes

Soit $Z$ une mesure aléatoire à accroissements orthogonaux. Lorsque $Z$ est gaussienne, l'intégrale multiple par rapport à $Z$ est définie dans Major (1981). La construction de l'intégrale double par rapport à $Z$ telle qu'elle est présentée dans Major (1981) reste valable en dehors du cadre gaussien si les cumulants d'ordre 4 de $Z$ sont supposés nuls. Pour nous en convaincre, nous rappellons dans cette partie la définition de cette intégrale.

Nous commençons par rappeller une définition des cumulants (cf par exemple Brillinger (1981) ou Kendall et Stuart (1958)).

**Définition 7.** Les cumulants de $k$ variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_k$ sont définis par

$$cum(Y_1, \ldots, Y_k) = \sum_{\nu} (-1)^{p-1}(p-1)! E\left(\prod_{j \in \nu_1} Y_j\right) \ldots E\left(\prod_{j \in \nu_p} Y_j\right), \qquad (7.1.1)$$

où $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_p)$ est une partition de $\{1, \ldots, k\}$ et où la somme se fait sur toutes ces partitions.

Dans le cas particulier où $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}^d}$ est un champ aléatoire strictement stationnaire, ses cumulants d'ordre $k$, lorsqu'ils existent, sont définis grâce à la stationnarité par

$$cum(Y_{t_1},\dots,Y_{t_k}) = cum(Y_0, Y_{t_2-t_1},\dots,Y_{t_k-t_{k-1}}) = c_k(h_1,\dots,h_{k-1}),$$

en notant $h_j = t_{j+1} - t_j$ pour $j = 1\dots k-1$.

Nous supposons que $Z$ est une mesure aléatoire à accroissements orthogonaux dont les cumulants d'ordre 4 sont nuls. Nous supposons de plus que la mesure de contrôle $\mu$ de $Z$ est non atomique.

L'intégrale double par rapport à $Z$ est définie sur $H_\mu$ où $H_\mu$ est l'espace des fonctions complexes $f$ dépendant de deux variables telles que

(i) $f(-x,-y) = \overline{f(x,y)}$

(ii) $\int |f(x,y)|^2 d\mu(x)d\mu(y) < \infty$.

On définit dans un premier temps l'intégrale double pour les fonctions simples de $H_\mu$ (définies ci-après) puis on l'étend à toute fonction de $H_\mu$ par le théorème de Hahn-Banach.

**Définition 8.** Soit un système de rectangles $\Delta_j$, $j = \pm1,\dots,\pm N$ de $\mathbb{R}^d$ où $\Delta_{-j} = -\Delta_j$.

- On dit qu'une fonction est adaptée au système de rectangles précédent si elle est constante sur les ensembles du type $\Delta_i \times \Delta_j$ pour $i \neq \pm j$, nulle à l'exterieur de $\mathcal{A} = \cup_{i,j}\ \Delta_i \times \Delta_j$ et nulle sur les ensembles du type $\Delta_j \times \Delta_{\pm j}$.
- Une fonction de $H_\mu$ est dite simple s'il existe un système de rectangles auquel elle est adaptée, c'est donc une fonction en escalier à support compact. Nous notons $\hat{H}_\mu$ l'ensemble des fonctions simples.

Pour toute fonction simple $f \in \hat{H}_\mu$ on définit l'intégrale double par rapport à $Z$ par

$$\iint f(x,y)dZ(x)dZ(y) = \sum_{\substack{i,j=\pm1,\dots,\pm N \\ i\neq\pm j}} f(x_i,y_j)Z(\Delta_i)Z(\Delta_j), \tag{7.1.2}$$

où $f(x_i,y_j)$ représente la valeur de $f$ sur $\Delta_i \times \Delta_j$ ($f$ étant constante sur ces ensembles).

Il est facile de voir que pour une fonction simple donnée, cette définition est indépendante du système de rectangles choisi.

Pour toute fonction $f \in \hat{H}_\mu$, on a les propriétés immédiates suivantes :

$$E\left(\iint f(x,y)dZ(x)dZ(y)\right) = 0, \tag{7.1.3}$$

$$\iint f(x,y)dZ(x)dZ(y) \in \mathbb{R}, \tag{7.1.4}$$

car $f$ vérifie $(i)$ et pour tout ensemble $A$, $Z(A) = \overline{Z(-A)}$, et enfin

$$\iint f(x,y)dZ(x)dZ(y) = \iint sym(f)(x,y)dZ(x)dZ(y), \tag{7.1.5}$$

où $sym(f)(x,y) = \frac{1}{2}(f(x,y) + f(y,x))$.

Afin d'étendre la définition de l'intégrale sur $H_\mu$ par le théorème de Hahn Banach, il nous faut évaluer sa norme.

**Lemme 23.** *Si $Z$ est une mesure aléatoire à accroissements orthogonaux dont les cumulants d'ordre 4 sont nuls alors, pour toute fonction $f \in \hat{H}_\mu$,*

$$E\left(\iint f(x,y)dZ(x)dZ(y)\right)^2 \leq 2\int_{\mathbb{R}^{2d}} |f(x,y)|^2 d\mu(x)d\mu(y). \tag{7.1.6}$$

*Si $f$ est symétrique i.e. $f(x,y) = f(y,x)$, (7.1.6) est une égalité.*

*Démonstration.* D'après (7.1.5) et l'inégalité

$$\int |sym(f)|^2 d\mu d\mu \leq \int |f|^2 d\mu d\mu,$$

il suffit de ne prouver le résultat que pour les fonctions symétriques de $\hat{H}_\mu$. Montrons que

$$E\left(\iint f(x,y)dZ(x)dZ(y)\right)^2 = 2\int_{\mathbb{R}^{2d}} |f(x,y)|^2 d\mu(x)d\mu(y).$$

On note $f(x_i, y_j)$ les valeurs constantes de $f$ sur $\Delta_i \times \Delta_j$ lorsque $i \neq \pm j$.

D'après la définition (7.1.2) de l'intégrale, il suffit de prouver

$$\sum_{i\neq\pm j}\sum_{k\neq\pm l} f(x_i,y_j)\overline{f(x_k,y_l)}E\left(Z(\Delta_i)Z(\Delta_j)\overline{Z(\Delta_k)Z(\Delta_l)}\right) = \sum_{i\neq\pm j} f(x_i,y_j)\overline{f(x_i,y_j)}\mu(\Delta_i)\mu(\Delta_j).$$

Puisque, pour tout $i$, $\overline{Z(\Delta_i)} = Z(-\Delta_i) = Z(\Delta_{-i})$, et compte tenu de la définition 7 des cumulants,

$$\begin{aligned}&E\left(Z(\Delta_i)Z(\Delta_j)\overline{Z(\Delta_k)Z(\Delta_l)}\right)\\ &\quad = cum\left(Z(\Delta_i), Z(\Delta_j), Z(\Delta_{-k}), Z(\Delta_{-l})\right) + E\left(Z(\Delta_i)Z(\Delta_j)\right)E\left(Z(\Delta_{-k})Z(\Delta_{-l})\right)\\ &\qquad + E\left(Z(\Delta_i)Z(\Delta_{-k})\right)E\left(Z(\Delta_j)Z(\Delta_{-l})\right) + E\left(Z(\Delta_i)Z(\Delta_{-l})\right)E\left(Z(\Delta_j)Z(\Delta_{-k})\right).\end{aligned}$$

Nous avons supposé que les cumulants d'ordre 4 de $Z$ sont nuls. En s'appuyant sur l'orthogonalité des accroissements de $Z$, i.e. $E[Z(\Delta_i)Z(\Delta_j)] = \delta_{\{i=-j\}}\mu(\Delta_i)$, on obtient

$$\begin{aligned}&E\left(Z(\Delta_i)Z(\Delta_j)\overline{Z(\Delta_k)Z(\Delta_l)}\right)\\ &\quad = \delta_{\{i=-j\}}\mu(\Delta_i)\delta_{\{k=-l\}}\mu(\Delta_k) + \delta_{\{i=k\}}\mu(\Delta_i)\delta_{\{j=l\}}\mu(\Delta_k) + \delta_{\{i=l\}}\mu(\Delta_i)\delta_{\{j=k\}}\mu(\Delta_j)\end{aligned}$$

de telle sorte que

$$\sum_{i\neq\pm j}\sum_{k\neq\pm l} f(x_i,y_j)\overline{f(x_k,y_l)}E\left(Z(\Delta_i)Z(\Delta_j)\overline{Z(\Delta_k)Z(\Delta_l)}\right)$$
$$= \sum_{i\neq\pm j}\left(f(x_i,y_j)\overline{f(x_i,y_j)} + f(x_i,y_j)\overline{f(x_j,y_i)}\right)\mu(\Delta_i)\mu(\Delta_j).$$

Par symétrie de $f$, on obtient le résultat recherché.

□

Comme $\mu$ est non-atomique, l'ensemble $\hat{H}_\mu$ est dense dans $H_\mu$ (voir à ce propos Major (1981), pages 28 et 29). L'application qui à $f \in \hat{H}_\mu$ associe $\iint f dZdZ$ est de plus linéaire et contractante d'après le lemme précédent. Nous pouvons donc prolonger sur $H_\mu$ l'intégrale définie par (7.1.2) grâce au Théorème de Hahn-Banach.

Ainsi pour toute fonction $f \in H_\mu$, l'intégrale

$$\iint_{\mathbb{R}^{2d}} f(x,y)dZ(x)dZ(y)$$

a un sens et les propriétés (7.1.3), (7.1.4), (7.1.5) et (7.1.6) restent vraies.

Nous rappellons enfin la formule d'Ito pour ces intégrales.

**Théorème 19.** *Soit $Z$ une mesure aléatoire à accroissements orthogonaux, de mesure de contrôle $\mu$, dont les cumulants d'ordre 4 sont nuls.*

*Alors, pour toutes $f$ et $g$ dans $H_\mu$,*

$$\iint f(x)g(y)dZ(x)dZ(y) = \int f(x)dZ(x)\int g(y)dZ(y) - \int f(x)\overline{g(x)}d\mu(x). \tag{7.1.7}$$

La démonstration de ce théorème est donnée dans Major (1981) dans le cas gaussien. Elle ne s'appuie que sur les propriétés d'orthogonalité des accroissements de $Z$ et sur le fait que les cumulants d'ordre 4 de $Z$ sont nuls.

## 7.2 Convergence de mesures spectrales doubles

Nous montrons un théorème de convergence de mesures spectrales doubles. Comme dans le chapitre 3, ce théorème est utile pour étudier le comportement asymptotique de toute statistique pouvant s'écrire sous forme d'une intégrale double par rapport à une mesure spectrale.

Nous l'appliquons aux formes quadratiques d'un champ fortement dépendant. En adoptant une démarche spectrale, nous écrivons en effet les formes quadratiques sous forme d'une intégrale stochastique double par rapport à des mesures spectrales dilatées.

### 7.2.1 Théorème de convergence de mesures spectrales doubles

Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$ un bruit blanc fort admettant des moments d'ordre 4 finis.

Soit $W$ la mesure spectrale aléatoire de $\varepsilon$ et $W_n$ la mesure aléatoire sur $[-n\pi, n\pi]^d$, définie pour tout borélien $A$ par

$$W_n(A) = n^{d/2} W(n^{-1}A).$$

**Théorème 20.** *Soit $\varepsilon$ un bruit blanc fort admettant des moments d'ordre 4 finis et dont la mesure spectrale $W$ admet des cumulants d'ordre 4 nuls.*

*Si $\Phi_n$ est une suite de fonctions de $H_\lambda$, où $\lambda$ représente la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, qui converge en moyenne quadratique vers $\Phi$ alors*

$$\iint \Phi_n(x,y)dW_n(x)dW_n(y) \xrightarrow{\mathcal{L}} \iint \Phi(x,y)dW_0(x)dW_0(y), \tag{7.2.1}$$

*où $W_0$ représente la mesure spectrale aléatoire du bruit blanc gaussien et où $\mathcal{L}$ symbolise la convergence en loi.*

*Remarque* 29. L'hypothèse portant sur le bruit $\varepsilon$ dans le Théorème 20 est difficilement interprétable car elle fait intervenir les cumulants de sa mesure spectrale aléatoire. Cette hypothèse provient de la difficulté de définir l'intégrale double par rapport à des mesures aléatoires à accroissements orthogonaux non gaussiennes (voir la Remarque 28). Dans le cas gaussien, l'hypothèse sur le bruit est trivialement vérifiée mais dans ce cas, le résultat de convergence établi dans le théorème devient évident.

*Démonstration.* La démonstration suit le même schéma que celle du Théorème 6. Il faut juste effectuer au préalable quelques manipulations grâce à la formule d'Ito (7.1.7).

Soit

$$B_n(s,t) = \iint_{\mathbb{R}^{2d}} \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{is_jx_j}-1}{ix_j}\frac{e^{it_jy_j}-1}{iy_j} dW_n(x)dW_n(y).$$

L'intégrale existe bien car la fonction intégrée est dans $H_{\lambda_n}$. D'après le théorème 19,

$$B_n(s,t) = B_n^*(s)B_n^*(t) - \int_{[-n\pi,n\pi]^d} \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{is_jx_j}-1}{ix_j}\frac{e^{-it_jx_j}-1}{-ix_j} dx,$$

où $B_n^*(s) = \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^d \frac{e^{is_jx_j}-1}{ix_j} dW_n(x)$. D'après la démonstration du Théorème 6 donnée dans le chapitre 3, les lois fini-dimensionnelles de $B_n^*$ convergent vers celles du drap brownien $B$ car $\varepsilon$ est un bruit blanc fort, donc

$$B_n(s,t) \xrightarrow{fidi} B(s)B(t) - \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{is_jx_j}-1}{ix_j}\frac{e^{-it_jx_j}-1}{-ix_j} dx.$$

La fonction $x \mapsto \prod \frac{e^{is_jx_j}-1}{ix_j}$ est la transformée de Fourier de $I_{[0,s_1]\times\cdots\times[0,s_d]}$, l'intégrale ci-dessus vaut donc

$$\int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{is_jx_j}-1}{ix_j} \frac{e^{-it_jx_j}-1}{-ix_j} dx =< I_{[0,s_1]\times\cdots\times[0,s_d]}, I_{[0,t_1]\times\cdots\times[0,t_d]} >= \prod_{j=1}^{d} s_j \wedge t_j,$$

en notant $< >$ le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Ainsi

$$B_n(s,t) \xrightarrow{fidi} B(s)B(t) - \prod_{j=1}^{d} s_j \wedge t_j.$$

En utilisant la représentation harmonisable du drap brownien,

$$B(s) = \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{is_jx_j}-1}{ix_j} dW_0(x),$$

où $W_0$ est la mesure du bruit blanc gaussien, et par application, une nouvelle fois, de la formule d'Ito, on en déduit une répresentation sous forme d'intégrale double :

$$B_n(s,t) \xrightarrow{fidi} \iint_{\mathbb{R}^{2d}} \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{is_jx_j}-1}{ix_j} \frac{e^{it_jy_j}-1}{iy_j} dW_0(x)dW_0(y).$$

La suite de la preuve est la même que dans la démonstration du Théorème 6. Nous en donnons les grandes lignes.

On définit l'application linéaire sur $H_\lambda$

$$F_n(\Phi) = \iint_{\mathbb{R}^{2d}} \hat{\Phi}(x,y) dW_n(x)dW_n(y).$$

Elle se réécrit pour les fonctions $\Phi$ différentiables à support compact, après des intégrations par parties successives et grâce à Fubini,

$$F_n(\Phi) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \frac{\partial\Phi(s,t)}{\partial s_1 \ldots \partial s_d \partial t_1 \ldots \partial t_d} B_n(s,t) ds dt. \tag{7.2.2}$$

Nous pouvons appliquer le lemme 13 du chapitre 3, généralisation du théorème de Grinblatt (1976) à la dimension $d$ car, à $s$ et $t$ fixés, $E\left(B_n(s,t)\right)^2$ est uniformément bornée. En effet, d'après (7.1.6),

$$E\left(B_n(s,t)\right)^2 \leq 2\frac{\sigma^2}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \left( \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{is_jx_j}-1}{ix_j} \frac{e^{it_jy_j}-1}{iy_j} \right)^2 dx dy \leq 2\frac{\sigma^2}{(2\pi)^d} \prod_{j=1}^{d} |t_j||s_j|.$$

Ainsi $F_n(\Phi)$ converge en loi vers

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} \frac{\partial\Phi(s,t)}{\partial s_1 \ldots \partial s_d \partial t_1 \ldots \partial t_d} B(s,t) ds dt,$$

où
$$B(s,t)=\iint_{\mathbb{R}^{2d}}\prod_{j=1}^{d}\frac{e^{is_jx_j}-1}{ix_j}\frac{e^{it_jy_j}-1}{iy_j}dW_0(x)dW_0(y).$$

En procédant par intégration par parties comme pour obtenir (7.2.2), la limite se réécrit
$$F_n(\Phi)\xrightarrow{\mathcal{L}}\iint_{\mathbb{R}^{2d}}\hat{\Phi}(x,y)dW_0(x)dW_0(y).$$

Notons $F(\Phi)$ cette limite. C'est une application linéaire sur l'ensemble des fonctions différentiables à support compact. Elle est contractante :
$$E\left(F(\Phi)\right)^2\leq 2\frac{\sigma^2}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^{2d}}\left|\Phi(x,y)\right|^2dxdy.$$

On peut donc étendre $F$ à $H_\lambda$. La convergence de $F_n$ vers $F$ sur $H_\lambda$ découle du Théorème 4.2 de Billingsley (1968). Pour finir, si $\Phi_n$ est une suite d'éléments de $H_\lambda$ qui converge en moyenne quadratique vers $\Phi$, on a directement que $F_n(\Phi_n)$ converge en loi vers $F(\Phi)$ en utilisant l'inégalité triangulaire. □

### 7.2.2 Etude des formes quadratiques : approche spectrale

Soit un bruit blanc fort $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$ de mesure spectrale $W$. Nous supposons que $\varepsilon$ admet des moments d'ordre 4 finis et que les cumulants d'ordre 4 de $W$ sont nuls. Nous noterons dans toute la suite $E=[-\pi,\pi]^d$.

Soit $X$ le champ aléatoire construit à partir du filtrage de $\varepsilon$ à travers un filtre $a\in L^2(E)$ :
$$X_n=\int_E a(x)e^{i<n,x>}dW(x).$$

Soit enfin $g$ une fonction définie sur $E$. Nous étudions la convergence en loi de $J_n(g)$ défini par (7.0.1) lorsque $X$ est fortement dépendant. Pour cela nous utilisons une écriture sous forme d'intégrale double. On a
$$J_n(g)=\frac{1}{n^d}\sum_{k,l\in A_n^2}\left(\int_E g(t)e^{-i<k-l,t>}dt\right)X_kX_l,$$

d'où
$$J_n(g)-EJ_n(g)=\int_E g(t)\left[\frac{1}{n^d}\sum e^{-i<k-l,t>}(X_kX_l-r(l-k))\right]dt, \tag{7.2.3}$$

où $r$ représente la fonction de covariance de $X$. Or, d'après la formule d'Ito (7.1.7),
$$\begin{aligned}X_kX_l-r(l-k)&=\int_E a(x)e^{i<n,x>}dW(x)\int_E a(y)e^{i<l,y>}dW(y)-\int_E e^{i<k-l,x>}a^2(x)d\mu(x)\\&=\iint_{E^2}a(x)a(y)e^{i(<k,x>+<l,y>)}dW(x)dW(y),\end{aligned}$$

où $\mu$ est la mesure spectrale de $\varepsilon$, proportionnelle à la mesure de Lebesgue.

Si par ailleurs $g$ vérifie $g(-t) = \overline{g(t)}$ et si le filtre $a$ vérifie $a(-x) = \overline{a(x)}$, la fonction

$$a(x)a(y)\left[\frac{1}{n^d}\int_E g(t)\sum e^{i<k,x-t>}\sum e^{i<l,y+t>}dt\right]$$

appartient à $H_{\lambda_n}$ et on peut donc écrire

$$J_n(g) - EJ_n(g) = \iint_{E^2} a(x)a(y)\left[\frac{1}{n^d}\int_E g(t)\sum e^{i<k,x-t>}\sum e^{i<l,y+t>}dt\right]dW(x)dW(y).$$

En notant $H_n(t) = \sum_{k\in A_n} e^{i<k,t>}$,

$$J_n(g) - EJ_n(g) = \iint_{E^2} a(x)a(y)\left[\frac{1}{n^d}\int_E g(t)H_n(x-t)H_n(y+t)dt\right]dW(x)dW(y).$$

Enfin, en notant $W_n$ la mesure dilatée de $W$ définie pour tout borélien $A$ de $E$ par $W_n(A) = n^{d/2}W(n^{-1}A)$,

$$J_n(g) - EJ_n(g) = \\ n^{-d}\iint_{(nE)^2} a\left(\frac{x}{n}\right)a\left(\frac{y}{n}\right)\left[\frac{1}{n^d}\int_E g(t)H_n\left(\frac{x}{n}-t\right)H_n\left(\frac{y}{n}+t\right)dt\right]dW_n(x)dW_n(y). \tag{7.2.4}$$

A l'aide de cette dernière écriture, nous pouvons utiliser le Théorème 20 pour étudier la convergence en loi de $J_n(g) - EJ_n(g)$. Elle se ramène à l'étude d'une convergence $L^2$.

## 7.3 Théorème limite non-central

Nous donnons le comportement asymptotique de $J_n(g) - EJ_n(g)$, défini en fonction du bruit blanc $\varepsilon$ et du filtre $a$ comme dans la section 7.2.2, dans le cas particulier où $g$ est continue et non nul en l'origine. Ce résultat sera appliqué dans le corollaire 7 pour obtenir la convergence en loi de l'estimateur de la fonction de covariance d'un champ fortement dépendant.

**Théorème 21.** *Soit $\varepsilon$ un bruit blanc fort admettant des moments d'ordre 4 finis et dont la mesure spectrale aléatoire admet des cumulants d'ordre 4 nuls.*

*Soit $X$ le champ aléatoire obtenu par le filtrage de $\varepsilon$ à travers un filtre $a$ homogène de degré $\alpha < 0$ vérifiant $a(-x) = \overline{a(x)}$ et*

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} |a|^2(x)|a|^2(y)\prod_{i=1}^{d} 1\wedge(x_j+y_j)^{-2}dxdy < \infty. \tag{7.3.1}$$

*Soit $g$ une fonction définie sur $[-\pi,\pi]^d$ à valeurs complexes. Si $g$ vérifie $g(-t)=\overline{g(t)}$, si $g$ est de module borné et est continue en 0 tel que $g(0)\neq 0$ et si de plus la suite de ses coefficients de Fourier est sommable, alors*

$$n^{d+2\alpha}(J_n(g)-EJ_n(g)) \xrightarrow{\mathcal{L}} g(0)\iint_{\mathbb{R}^{2d}} a(x)a(y)\prod_{j=1}^{d}\frac{e^{i(x_j+y_j)}-1}{i(x_j+y_j)}dW_0(x)dW_0(y), \quad (7.3.2)$$

*où $W_0$ est la mesure spectrale associée au bruit blanc gaussien.*

*Remarque* 30. . La condition (7.3.1) portant sur le filtre $a$ n'est pas évidente à vérifier pour un filtre quelconque. Nous donnons trois exemples de filtres pour lesquels les conditions du Théorème 21 sont vérifiées :

(i) le filtre

$$a(x)=|x|^{\alpha},$$

où $-d/2<\alpha<-d/4$. Ce filtre conduit à un champ à longue mémoire isotrope et la convergence (7.3.2) correspond dans ce cas au résultat du Théorème 5.1 de Doukhan et al. (1996). Le fait que ce filtre vérifie (7.3.1) est montré dans Major (1981), page 63.

(ii) le filtre produit

$$a(x)=\prod_{j=1}^{d}|x_j|^{\alpha_j}$$

où, pour tout $j$, $-1/2<\alpha_j<-1/4$. Ce filtre conduit à un champ dont la forte dépendance est de type produit.

(iii) en dimension $d=2$, le filtre

$$a(x_1,x_2)=|x_1+\theta x_2|^{\alpha},$$

où $-1/2<\alpha<-1/4$, conduisant à un champ à longue mémoire non-isotrope. La propriété (7.3.1) de ce filtre est établie dans le lemme 26 donné en section 7.4.

*Remarque* 31. La condition portant sur $\varepsilon$ n'est pas interprétable facilement car elle s'appuie sur les moments de sa mesure spectrale aléatoire. Lorsque $\varepsilon$ est un bruit blanc gaussien, les conditions portant sur $\varepsilon$ sont trivialement vérifiées. Le Théorème 21 étend alors au cas non-isotrope le Théorème 5.1 de Doukhan et al. (1996) établissant le comportement limite de type non-central des formes quadratiques d'un champ à longue mémoire.

**Corollaire 7.** *Soit $X$ un champ aléatoire vérifiant les hypothèses du Théorème 21 et soit $\hat{r}_n(h)$ sa fonction de covariance empirique définie, pour $h\in\mathbb{N}^d$, par*

$$\hat{r}_n(h)=\frac{1}{n^d}\sum_{k_1=1}^{n-h_1}\cdots\sum_{k_d=1}^{n-h_d}X_kX_{k+h}.$$

*Alors*

$$n^{d+2\alpha}[\hat{r}_n(h) - E(\hat{r}_n(h))] \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{(2\pi)^d} \iint_{\mathbb{R}^{2d}} a(x)a(y) \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{i(x_j+y_j)} - 1}{i(x_j + y_j)} dW_0(x)dW_0(y),$$

*où $W_0$ est la mesure spectrale associée au bruit blanc gaussien.*

*Remarque* 32. En prenant $a(x) = |x|^\alpha$ où $-1/2 < \alpha < -1/4$, on retrouve le résultat de Hosking (1996) en dimension $d = 1$ : la loi limite de l'estimateur de la fonction de covariance n'est pas asymptotiquement normal. Lorsque, dans le cas particulier précédent, $-1/4 < \alpha < 0$, la loi limite obtenue par Hosking (1996) en dimension $d = 1$ est gaussienne ; c'est une situation qui sort du cadre du Corollaire 7 et qui est en cours d'étude.

*Démonstration du corollaire 7.* La preuve est une conséquence du Théorème 21 en prenant $g(t) = (2\pi)^{-d} e^{i<h,t>}$. On vérifie alors facilement que $J_n(g) = \hat{r}_n(h)$. □

*Démonstration du Théorème 21.* D'après l'écriture (7.2.4),

$$\begin{aligned} &n^{d+2\alpha}(J_n(g) - EJ_n(g)) \\ &\quad = \iint_{nE^2} n^{2\alpha} a\left(\frac{x}{n}\right) a\left(\frac{y}{n}\right) \left[\frac{1}{n^d} \int_E g(t) H_n\left(\frac{x}{n} - t\right) H_n\left(\frac{y}{n} + t\right) dt\right] dW_n(x)dW_n(y). \end{aligned}$$

D'après le théorème 20, pour montrer la convergence (7.3.2), il suffit de montrer que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_{nE^2} \Bigg( & n^{2\alpha} a\left(\frac{x}{n}\right) a\left(\frac{y}{n}\right) \left[\frac{1}{n^d} \int_E g(t) H_n\left(\frac{x}{n} - t\right) H_n\left(\frac{y}{n} + t\right) dt\right] \\ & - g(0)a(x)a(y)H(x+y)\Bigg)^2 dxdy = 0, \end{aligned} \tag{7.3.3}$$

où $H(x+y) = \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{i(x_j+y_j)}-1}{i(x_j+y_j)}$.

On ramène dans un premier temps l'ensemble d'intégration à $nD^2 = \cap_{i=1}^{d}\{|x_i + y_i| < n\pi\} \cap nE^2$. Sur l'ensemble d'intégration $nE^2 - nD^2$, il existe au moins un indice $j$ tel que $|x_j + y_j| > n\pi$. Traitons sans perte de généralité le cas où $x_1 + y_1 > n\pi$ et où pour tout $j \geq 2$, $|x_j + y_j| < n\pi$, ensemble que nous notons $nA_1$. Dans l'intégrale

$$\begin{aligned} \int_{nA_1} \Bigg( & n^{2\alpha} a\left(\frac{x}{n}\right) a\left(\frac{y}{n}\right) \left[\frac{1}{n^d} \int_E g(t) H_n\left(\frac{x}{n} - t\right) H_n\left(\frac{y}{n} + t\right) dt\right] \\ & - g(0)a(x)a(y)H(x+y)\Bigg)^2 dxdy, \end{aligned} \tag{7.3.4}$$

on effectue le changement de variable $u_1 = x_1 + y_1 - 2n\pi$ et, pour $j \geq 2$, $u_j = x_j + y_j$.

La fonction $a(x)\mathbf{I}_E(x)$ est le filtre à partir duquel le champ $X$ est construit, elle est donc $2\pi$-périodique. En utilisant cette périodicité et celle de $H_n$ et $H$, l'intégrale (7.3.4) s'écrit après le changement de variables précédent

$$\int_{nV_1} \left( n^{2\alpha} a\left(\frac{u-y}{n}\right) a\left(\frac{y}{n}\right) \left[\frac{1}{n^d}\int_E g(t) H_n\left(\frac{u-y}{n} - t\right) H_n\left(\frac{y}{n}+t\right) dt\right] \right.$$
$$\left. - g(0)a(u-y)a(y)H(u)\right)^2 dudy,$$

où $nV_1$ est le nouveau domaine d'intégration qui est contenu dans $nE^2$. Le changement de variable $x = u - y$ et $y = y$ nous donne à présent

$$\int_{nA_1} \left( n^{2\alpha} a\left(\frac{x}{n}\right) a\left(\frac{y}{n}\right) \left[\frac{1}{n^d}\int_E g(t) H_n\left(\frac{x}{n} - t\right) H_n\left(\frac{y}{n}+t\right) dt\right] \right.$$
$$\left. - g(0)a(x)a(y)H(x+y)\right)^2 dxdy$$
$$= \int_{nD_1^2} \left( n^{2\alpha} a\left(\frac{x}{n}\right) a\left(\frac{y}{n}\right) \left[\frac{1}{n^d}\int_E g(t) H_n\left(\frac{x}{n} - t\right) H_n\left(\frac{y}{n}+t\right) dt\right] \right.$$
$$\left. - g(0)a(x)a(y)H(x+y)\right)^2 dxdy,$$

où $nD_1^2 = \{-n\pi < x_1 + y_1 < 0\} \cap_{j=2}^d \{|x_j + y_j| < n\pi\} \cap nE^2$ est un ensemble inclu dans $nD^2$.

Ainsi montrer (7.3.3) se ramène à montrer

$$\lim_{n\to\infty} \int_{nD^2} \left( n^{2\alpha} a\left(\frac{x}{n}\right) a\left(\frac{y}{n}\right) \left[\frac{1}{n^d}\int_E g(t) H_n\left(\frac{x}{n} - t\right) H_n\left(\frac{y}{n}+t\right) dt\right] \right.$$
$$\left. - g(0)a(x)a(y)H(x+y)\right)^2 dxdy = 0.$$

En utilisant l'homogénéité de $a$, l'intégrale ci-dessus s'écrit

$$\int_{nD^2} |a|^2(x)|a|^2(y) \left[\frac{1}{n^d}\int_E g(t) H_n\left(\frac{x}{n} - t\right) H_n\left(\frac{y}{n}+t\right) dt - g(0)H(x+y)\right]^2 dxdy$$

et elle est majorée par

$$2\int_{nD^2} |a|^2(x)|a|^2(y) \left[\frac{1}{n^d}\int_E (g(t)-g(0)) H_n\left(\frac{x}{n} - t\right) H_n\left(\frac{y}{n}+t\right) dt\right]^2 dxdy$$
$$+ 2g^2(0)\int_{nD^2} |a|^2(x)|a|^2(y) \left[\frac{1}{n^d}\int_E H_n\left(\frac{x}{n} - t\right) H_n\left(\frac{y}{n}+t\right) dt - H(x+y)\right]^2 dxdy.$$

On vérifie facilement que $\int_E H_n\left(\frac{x}{n}-t\right)H_n\left(\frac{y}{n}+t\right)dt = H_n\left(\frac{x+y}{n}\right)$, il nous reste donc à montrer

$$\lim_{n\to\infty}\int_{nD^2}|a|^2(x)|a|^2(y)\left[\frac{1}{n^d}\int_E(g(t)-g(0))H_n\left(\frac{x}{n}-t\right)H_n\left(\frac{y}{n}+t\right)dt\right]^2 dxdy = 0, \tag{7.3.5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{nD^2}|a|^2(x)|a|^2(y)\left[\frac{1}{n^d}H_n\left(\frac{x+y}{n}\right)-H(x+y)\right]^2 = 0. \tag{7.3.6}$$

Commençons par prouver (7.3.6). Il est clair que l'intégrand tend vers 0 pour presque tout $x$ et $y$ dans $\mathbb{R}^d$. Par ailleurs,

$$\frac{1}{n^d}H_n\left(\frac{x+y}{n}\right)-H(x+y) = \prod_{j=1}^d \frac{1}{n}e^{i\frac{x_j+y_j}{n}}\frac{e^{i(x_j+y_j)}-1}{e^{i\frac{x_j+y_j}{n}}-1} - \prod_{j=1}^d \frac{e^{i(x_j+y_j)}-1}{i(x_j+y_j)}. \tag{7.3.7}$$

Pour $d=1$

$$\left|\frac{1}{n}e^{i\frac{x+y}{n}}\frac{e^{i(x+y)}-1}{e^{i\frac{x+y}{n}}-1} - \frac{e^{i(x+y)}-1}{i(x+y)}\right|^2 \leq \frac{2}{(x+y)^2}\left|\frac{e^{i\frac{x+y}{n}}i(x+y)}{n(e^{i\frac{x+y}{n}}-1}-1\right|^2.$$

Le module du terme de droite est uniformément borné sur $\{|x+y|<n\pi\}$ car

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^{i\frac{x+y}{n}}i(x+y)}{n(e^{i\frac{x+y}{n}}-1}-1\right|^2 &= \frac{\left(\frac{x+y}{2n}\right)^2}{\sin^2\left(\frac{x+y}{2n}\right)} - \frac{x+y}{n}\frac{\cos\left(\frac{x+y}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{x+y}{2n}\right)}+1\\ &\leq \frac{\left(\frac{x+y}{2n}\right)^2}{\sin^2\left(\frac{x+y}{2n}\right)} + 2\left|\frac{\frac{x+y}{2n}}{\sin\left(\frac{x+y}{2n}\right)}\right|+1.\end{aligned}$$

En dimension $d$ quelconque, on obtient de même

$$\left|\frac{1}{n^d}H_n\left(\frac{x+y}{n}\right)-H(x+y)\right|^2 \leq c\prod_{j=1}^d\frac{1}{(x_j+y_j)^2},$$

où $c$ est une constante strictement positive. Le résultat se montre à l'aide d'une récurrence sur la dimension en utilisant la décomposition $AB-CD=(A-C)D+(B-D)C+(A-C)(B-D)$.

De plus, d'après (7.3.7), $|n^{-d}H_n\left(\frac{x+y}{n}\right)-H(x+y)|$ reste toujours bornée et l'on a donc la majoration uniforme

$$|a|^2(x)|a|^2(y)\left[\frac{1}{n^d}H_n\left(\frac{x+y}{n}\right)-H(x+y)\right]^2\mathbf{I}_{nD^2}(x,y) \leq c|a|^2(x)|a|^2(y)\prod_{j=1}^d 1\wedge\frac{1}{(x_j+y_j)^2}.$$

Le majorant est par hypothèse intégrable sur $\mathbb{R}^{2d}$ et par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, (7.3.6) est prouvée.

Intéressons nous maintenant à (7.3.5). Le lemme 5.1 de Doukhan et al. (1996) montre que comme $g$ est continue en 0 et bornée sur $[-\pi,\pi]^d$, le terme entre crochets dans (7.3.5) converge vers 0 pour presque tout $x$ et $y$ fixés dans $\mathbb{R}^d$. Nous allons maintenant majorer l'intégrand dans (7.3.5) uniformément en $n$. En notant $\varphi(t) = g(t) - g(0)$,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{n^d}\int_E (g(t)-g(0))H_n\left(\frac{x}{n}-t\right)H_n\left(\frac{y}{n}+t\right)dt\right|^2 \\
&\qquad = \left|\frac{1}{n^d}\int_E \varphi(t)\sum_{k\in A_n} e^{i<k,\frac{x}{n}-t>}\sum_{j\in A_n} e^{i<j,\frac{y}{n}+t>}dt\right|^2 \\
&\qquad = \frac{1}{n^{2d}}\left|\sum_{k\in A_n}\sum_{j\in A_n} e^{i<k,\frac{x}{n}>+i<j,\frac{y}{n}>}\int_E \varphi(t)e^{i<t,j-k>}dt\right|^2 \\
&\qquad = \frac{1}{n^{2d}}\left|\sum_{k\in A_n}\sum_{j\in A_n} e^{i<k,\frac{x}{n}>+i<j,\frac{y}{n}>}\hat{\varphi}_{k-j}\right|^2,
\end{aligned}$$

où $(\hat{\varphi}_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ est la suite des coefficients de Fourier de $\varphi$. En posant $l = k - j$ dans l'expression précédente, on obtient

$$\left|\frac{1}{n^d}\int_E (g(t)-g(0))H_n\left(\frac{x}{n}-t\right)H_n\left(\frac{y}{n}+t\right)dt\right|^2 = \frac{1}{n^{2d}}\left|\sum_{k\in A_n} e^{i<k,\frac{x+y}{n}>}\sum_{k-l\in A_n} e^{-i<l,\frac{y}{n}>}\hat{\varphi}_l\right|^2. \tag{7.3.8}$$

On utilise à présent une généralisation de la transformation d'Abel pour les sommes à plusieurs indices établie dans le lemme 24 ci-dessous. Nous introduisons quelques notations.

Pour $j$ entier non nul fixé entre 1 et $d$, nous noterons $C^d_{(k_1,\ldots,k_j,n)}$ l'ensemble des $d$-uplets ayant $j$ termes égaux respectivement à $k_1$, $k_2,\ldots,$ $k_j$, les $d-j$ autres termes valant $n$ et tels que, si $p<q$, le rang du terme égal à $k_p$ soit inférieur au rang du terme égal à $k_q$. Nous noterons $\{k,n\}_d$ les éléments de cet ensemble. Par exemple le $d$-uplet $\{k,n\}_d = (n,k_1,n,\ldots,n,k_2,n,k_3,k_4,\ldots,k_j)$ contenant $d-j$ termes égaux à $n$ appartient à $C^d_{(k_1,\ldots,k_j,n)}$ mais pas $(n,k_2,k_1,n,\ldots,n,k_3,\ldots,k_j)$. Lorsque $j=d$, $C^d_{(k_1,\ldots,k_d,n)}$ est réduit à l'élément $(k_1,\ldots,k_d)$.

Soit la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}^d}$ et la suite marginale $\tilde{a}$ de $a$ dépendant des $j$ indices $k_1,\ldots,k_j$ définie par $\tilde{a}_{k_1,\ldots,k_j} = a_{\{k,n\}_d}$. Nous définissons les accroissements $\Delta_j$ de $a_{\{k,n\}_d}$ au point $k$ comme suit :

$$\Delta_j\left(a_{\{k,n\}_d}\right) = \Delta_j\left(\tilde{a}_{k_1,\ldots,k_j}\right) = \sum_{\varepsilon_1=0}^{1}\cdots\sum_{\varepsilon_j=0}^{1}(-1)^{(\sum\varepsilon_i)}\ \tilde{a}_{k_1+\varepsilon_1,\ldots,k_d+\varepsilon_d}.$$

**Lemme 24** (Transformation d'Abel)**.**

$$\sum_{i\in A_n^d} a_i b_i = a_n B_n + \sum_{j=1}^{d}\sum_{k_1=1}^{n-1}\cdots\sum_{k_j=1}^{n-1}\sum_{\{k,n\}_d\in C^d_{(k_1,\ldots,k_j,n)}}\Delta_j\left(a_{\{k,n\}_d}\right)B_{\{k,n\}_d}, \tag{7.3.9}$$

*où* $A_n^d = \{1, \dots, n\}^d$ *et où* $B_{p_1,\dots,p_d} = \sum_{i_1=1}^{p_1} \cdots \sum_{i_d=1}^{p_d} b_{i_1,\dots,i_d}$.

*Dans le cas* $d = 1$ *cette formule correspond à la transformation d'Abel classique :*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) B_k,$$

*où* $B_k = \sum_{i=1}^{k} b_i$.

*Dans le* $d = 2$, *elle s'écrit*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{i,j} = a_{n,n} B_{n,n} &+ \sum_{k_1=1}^{n-1} (a_{k_1,n} - a_{k_1+1,n}) B_{k_1,n} + \sum_{k_2=1}^{n-1} (a_{n,k_2} - a_{n,k_2+1}) B_{n,k_2} \\ &+ \sum_{k_1=1}^{n-1} \sum_{k_2=1}^{n-1} (a_{k_1,k_2} - a_{k_1+1,k_2} - a_{k_1,k_2+1} + a_{k_1+1,k_2+1}) B_{k_1,k_2},\end{aligned}$$

*où* $B_{k_1,k_2} = \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} b_{i,j}$.

La démonstration de ce lemme est donnée dans la partie 7.4.

On applique la transformation d'Abel à l'expression (7.3.8) avec $b_k = e^{i<k, \frac{x+y}{n}>}$ et

$$a_k = \sum_{k-l \in A_n} e^{-i<l, \frac{y}{n}>} \hat{\varphi}_l.$$

Cela donne

$$\begin{aligned}&\left| \sum_{k \in A_n} e^{i<k, \frac{x+y}{n}>} \sum_{k-l \in A_n} e^{-i<l, \frac{y}{n}>} \hat{\varphi}_l \right|^2 \\ &\quad = \left| a_n B_n + \sum_{j=1}^{d} \sum_{k_1=1}^{n-1} \cdots \sum_{k_j=1}^{n-1} \sum_{\{k,n\}_d \in C^d_{(k_1,\dots,k_j,n)}} \Delta_j \left( a_{\{k,n\}_d} \right) B_{\{k,n\}_d} \right|^2 \\ &\quad \leq 2 \left| a_n B_n \right|^2 + 2 \left( \sum_{j=1}^{d} \sum_{k_1=1}^{n-1} \cdots \sum_{k_j=1}^{n-1} \sum_{\{k,n\}_d \in C^d_{(k_1,\dots,k_j,n)}} \left| \Delta_j \left( a_{\{k,n\}_d} \right) \right| \left| B_{\{k,n\}_d} \right| \right)^2 .\end{aligned}$$

Dans l'expression ci-dessus, pour tous $p_1, \dots, p_d$ dans $\{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned}\left| B_{p_1,\dots,p_d} \right| &= \left| \sum_{k_1=1}^{p_1} \cdots \sum_{k_d=1}^{p_d} b_{k_1,\dots,k_d} \right| = \prod_{j=1}^{d} \left| \sum_{k_j=1}^{p_j} e^{i<k_j, \frac{x_j+y_j}{n}>} \right| = \prod_{j=1}^{d} \left| \frac{\sin\left(p_j \frac{x_j+y_j}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{x_j+y_j}{2n}\right)} \right| \\ &\leq c \prod_{j=1}^{d} p_j \left[ 1 \wedge \left( \frac{n}{p_j} \frac{1}{|x_j + y_j|} \right) \right] \leq c \prod_{j=1}^{d} n \left[ 1 \wedge \frac{1}{|x_j + y_j|} \right],\end{aligned}$$

où $c$ est une constante strictement positive. Par ailleurs $|a_n| \le |\hat{\varphi}|_1$ avec $|\hat{\varphi}|_1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\hat{\varphi}_k|$. Ainsi

$$\left| \sum_{k\in A_n} e^{i<k,\frac{x+y}{n}>} \sum_{k-l\in A_n} e^{-i<l,\frac{y}{n}>}\hat{\varphi}_l \right|^2$$
$$\le cn^{2d}\prod_{j=1}^{d}\left[1\wedge \frac{1}{(x_j+y_j)^2}\right]\left\{|\hat{\varphi}|_1^2+\left(\sum_{j=1}^{d}\sum_{k_1=1}^{n-1}\cdots\sum_{k_j=1}^{n-1}\sum_{\{k,n\}_d\in C^d_{(k_1,\ldots,k_j,n)}}\left|\Delta_j\left(a_{\{k,n\}_d}\right)\right|\right)^2\right\}. \tag{7.3.10}$$

Nous allons montrer pour finir que le terme entre parenthèses reste borné. Pour cela nous utilisons le lemme suivant.

**Lemme 25.** *Soit $j$ entier naturel non nul et soit une suite $(u(l))_{l\in\mathbb{Z}^d}$.*

$$\Delta_j\left(\sum_{l_1=k_1-1}^{k_1-n}\cdots\sum_{l_j=k_j-1}^{k_j-n} u(l_1,\ldots,l_j)\right)$$
$$=\sum_{\varepsilon_1=0}^{1}\cdots\sum_{\varepsilon_j=0}^{1}(-1)^{(\sum\varepsilon_i)}u(k_1-1+\varepsilon_1(2-n),\ldots,k_j-1+\varepsilon_j(2-n)). \tag{7.3.11}$$

La démonstration de ce lemme est donnée dans la partie 7.4.

On a
$$\Delta_j\left(a_{\{k,n\}_d}\right)=\Delta_j\left(\sum_{l_1=k_1-1}^{k_1-n}\cdots\sum_{l_j=k_j-1}^{k_j-n} u(l_1,\ldots,l_j)\right),$$
où $u(l_1,\ldots,l_j) = \sum_{l_{j+1}=0}^{n-1}\cdots\sum_{l_d=0}^{n-1} e^{-i<l,\frac{y}{n}>}\hat{\varphi}_l$ dans le cas où $a_{\{k,n\}_d} = a_{k_1,\ldots,k_j,n,\ldots,n}$. Lorsque l'indice $\{k,n\}_d$ est quelconque, $u(l_1,\ldots,l_j)$ s'écrit de la même manière mais en permutant les indices $l_i$ dans $e^{-i<l,\frac{y}{n}>}\hat{\varphi}_l$. La permutation des indices ne change rien au raisonnement qui suit et nous écrirons abusivement par la suite $\{k,n\}_d = (k_1,\ldots,k_j,n,\ldots,n)$.

Appliquons à présent (7.3.11)

$$\sum_{j=1}^{d}\sum_{k_1=1}^{n-1}\cdots\sum_{k_j=1}^{n-1}\sum_{\{k,n\}_d\in C^d_{(k_1,\ldots,k_j,n)}}\left|\Delta_j\left(a_{\{k,n\}_d}\right)\right|$$
$$=\sum_{j=1}^{d}\sum_{k_1=1}^{n-1}\cdots\sum_{k_j=1}^{n-1}\sum_{\{k,n\}_d\in C^d_{(k_1,\ldots,k_j,n)}}\left|\sum_{\varepsilon_1=0}^{1}\cdots\right.$$
$$\left.\cdots\sum_{\varepsilon_j=0}^{1}(-1)^{(\sum\varepsilon_i)}u(k_1-1+\varepsilon_1(2-n),\ldots,k_j-1+\varepsilon_j(2-n))\right|.$$

D'où la majoration

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{d}\sum_{k_1=1}^{n-1}\cdots\sum_{k_j=1}^{n-1}\sum_{\{k,n\}_d\in C^d_{(k_1,\dots,k_j,n)}}\left|\Delta_j\left(a_{\{k,n\}_d}\right)\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{d}\sum_{k_1=1}^{n-1}\cdots\sum_{k_j=1}^{n-1}\sum_{\{k,n\}_d\in C^d_{(k_1,\dots,k_j,n)}}\sum_{\varepsilon_1=0}^{1}\cdots \\
&\qquad \cdots\sum_{\varepsilon_j=0}^{1}\sum_{l_{j+1}=0}^{n-1}\cdots\sum_{l_d=0}^{n-1}\left|\hat{\varphi}(k_1-1+\varepsilon_1(2-n),\dots,k_j-1+\varepsilon_j(2-n),l_{j+1},\dots,l_d)\right| \\
&\leq c|\hat{\varphi}|_1, \qquad (7.3.12)
\end{aligned}
$$

où $c$ est une constante dépendant de $d$.

D'après (7.3.8), (7.3.10) et (7.3.12),

$$
\begin{aligned}
&|a|^2(x)|a|^2(y)\left|\frac{1}{n^d}\int_E (g(t)-g(0))H_n\left(\frac{x}{n}-t\right)H_n\left(\frac{y}{n}+t\right)dt\right|^2 \mathbf{I}_{nD^2}(x,y) \\
&\qquad\qquad \leq c|\hat{\varphi}|_1^2|a|^2(x)|a|^2(y)\prod_{j=1}^{d}\left[1\wedge\frac{1}{(x_j+y_j)^2}\right]
\end{aligned}
$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}^{2d}$ et par le théorème de convergence dominée, (7.3.5) est montrée. □

## 7.4 Preuves des lemmes

*Démonstration du lemme 24.* La preuve se fait par récurrence sur $d$. Le cas $d=1$ est évident. Nous supposons que (7.3.9) est vérifiée au rang $d$ et nous allons la montrer au rang $d+1$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i\in A_n^{d+1}} a_i b_i &= \sum_{i_{d+1}=1}^{n}\left[\sum_{i\in A_n^d} a_i b_i\right] = \sum_{i_{d+1}=1}^{n} a_{n,\dots,n,i_{d+1}}B'_{n,\dots,n,i_{d+1}} \\
&+\sum_{j=1}^{d}\sum_{k_1=1}^{n-1}\cdots\sum_{k_j=1}^{n-1}\sum_{\{k,n\}_d\in C^d_{(k_1,\dots,k_j,n)}}\sum_{i_{d+1}=1}^{n}\Delta_j\left(a_{(\{k,n\}_d,i_{d+1})}\right)B'_{(\{k,n\}_d,i_{d+1})}
\end{aligned}
$$

où $B'_{p_1,\dots,p_d,p_{d+1}}=\sum_{i_1=1}^{p_1}\cdots\sum_{i_d=1}^{p_d}b_{i_1,\dots,i_d,i_{d+1}}$ et où le vecteur des $d+1$ indices $(\{k,n\}_d,i_{d+1})$ est composé du vecteur de $d$ indices $\{k,n\}_d$ complété en dernière position par l'indice $i_{d+1}$. En utilisant la transformation d'Abel classique aux sommes indicées par $i_{d+1}$ dans la dernière expression, on obtient

$$\sum_{i\in A_n^{d+1}} a_i b_i = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{n,\ldots,n,k} - a_{n,\ldots,n,k+1}) B_{n,\ldots,n,k}$$
$$+ \sum_{j=1}^{d} \sum_{k_1=1}^{n-1} \cdots \sum_{k_j=1}^{n-1} \sum_{\{k,n\}_d \in C^d_{(k_1,\ldots,k_j,n)}} \Delta_j \left(a_{(\{k,n\}_d,n)}\right) B_{(\{k,n\}_d,n)}$$
$$+ \sum_{j=1}^{d} \sum_{k_1=1}^{n-1} \cdots \sum_{k_j=1}^{n-1} \sum_{\{k,n\}_d \in C^d_{(k_1,\ldots,k_j,n)}} \sum_{k_{d+1}=1}^{n-1} \left[\Delta_j \left(a_{(\{k,n\}_d,k_{d+1})}\right) - \Delta_j \left(a_{(\{k,n\}_d,k_{d+1}+1)}\right)\right] B_{(\{k,n\}_d,k_{d+1})}.$$

Il est clair que

$$\Delta_j \left(a_{(\{k,n\}_d,k_{d+1})}\right) - \Delta_j \left(a_{(\{k,n\}_d,k_{d+1}+1)}\right) = \Delta_{j+1} \left(a_{(\{k,n\}_d,k_{d+1})}\right).$$

Ainsi

$$\sum_{i\in A_n^{d+1}} a_i b_i = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} \Delta_1 \left(a_{n,\ldots,n,k}\right) B_{n,\ldots,n,k}$$
$$+ \sum_{j_2=1}^{d} \sum_{k_1=1}^{n-1} \cdots \sum_{k_{j_2}=1}^{n-1} \sum_{\{k,n\}_d \in C^d_{(k_1,\ldots,k_{j_2})}} \Delta_{j_2} \left(a_{(\{k,n\}_d,n)}\right) B_{(\{k,n\}_d,n)}$$
$$+ \sum_{j_3=1}^{d} \sum_{k_1=1}^{n-1} \cdots \sum_{k_{j_3}=1}^{n-1} \sum_{\{k,n\}_d \in C^d_{(k_1,\ldots,k_{j_3})}} \sum_{k_{d+1}=1}^{n-1} \Delta_{j_3+1} \left(a_{(\{k,n\}_d,k_{d+1})}\right) B_{(\{k,n\}_d,k_{d+1})}. \qquad (7.4.1)$$

Comparons cette expression au résultat recherché :

$$a_n B_n + \sum_{j=1}^{d+1} \sum_{k_1=1}^{n-1} \cdots \sum_{k_j=1}^{n-1} \sum_{\{k,n\}_{d+1} \in C^{d+1}_{(k_1,\ldots,k_j,n)}} \Delta_j \left(a_{\{k,n\}_{d+1}}\right) B_{\{k,n\}_{d+1}}. \qquad (7.4.2)$$

La question est de savoir si l'ensemble des indices $\{k,n\}_{d+1}$ dans (7.4.2) décrit le même ensemble que dans les sommes de (7.4.1).

Lorsque $j = d+1$ dans la somme de (7.4.2), l'ensemble $C^{d+1}_{(k_1,\ldots,k_{d+1})}$ est réduit à l'élément $(k_1,\ldots,k_{d+1})$ et les termes associés à $j = d+1$ dans (7.4.2) se retrouvent dans la dernière somme de (7.4.1) en y prenant $j_3 = d$.

En prenant $j_2 = 1$ dans la seconde somme de (7.4.1), on retrouve presque tous les termes associés à $j = 1$ dans (7.4.2). Il ne manque que les indices $\{k,n\}_{d+1}$ pour lesquels le terme $k_1$ est placé en dernière position du $(d+1)$-uplet : il s'agit de la première somme de (7.4.1).

Enfin, lorsque $j = 2,\ldots,d$ dans (7.4.2), il est facile de se convaincre que tous les termes se retrouvent d'une part dans la seconde somme de (7.4.1) (on y retrouve pour