

---

## Etude des différentes estimations d'erreur

Pour un problème réel initial, on obtient différents modèles mécaniques dépendant du choix des caractéristiques du matériau, de la charge et de la géométrie de la structure. Excepté dans des cas académiques, il est impossible de déterminer analytiquement la solution exacte des problèmes. Pratiquement on remplace alors le modèle mécanique par un modèle approché, généralement basé sur une méthode par éléments finis, dont on est capable de déterminer la solution, approximation plus ou moins précise de la solution exacte. Au cours de la simulation numérique d'un problème physique on peut distinguer plusieurs origines à l'erreur qui font que la solution obtenue est différente de la solution exacte du problème étudié. Les principales sources d'erreur pour un problème statique sont :

- la modélisation mathématique du problème physique. La qualité de la solution dépend du choix du modèle (choix de la loi de comportement, choix des caractéristiques du matériau) qui peut négliger des phénomènes physiques particuliers.
- la discrétisation spatiale du problème : dans la méthode des éléments finis, les calculs s'appuient sur un maillage (discrétisation spatiale) associé à la géométrie du domaine dans lequel on désire effectuer la simulation. Leur précision dépend de la taille  $h$  des éléments que l'on appelle le pas de discrétisation spatiale. Plus ces derniers sont petits, plus les calculs sont précis et plus la simulation est fiable.
- la discrétisation fonctionnelle : on approche la forme de la solution en fixant une forme paramétrique simple de la solution à l'aide de fonctions de base.
- la résolution numérique : erreurs d'intégration numérique liées au choix du schéma d'intégration, erreurs d'arrondi...

Dans la suite, on ne s'intéressera qu'à l'erreur de discrétisation spatiale, qu'on notera  $\mathbf{e}_h$  et définie comme la différence entre la solution exacte  $\mathbf{u}$  du problème mathématique et la solution éléments finis  $\mathbf{u}_h$  du problème discret. On cherchera à estimer au mieux l'erreur commise dans la triangulation de notre domaine. Pour cela, deux grandes méthodes d'estimation d'erreur *a priori* et *a posteriori* ont été développées.

### 1.1.1 Estimation d'erreur a priori

L'estimation d'erreur *a priori* permet d'obtenir une borne supérieure de l'erreur à partir des informations a priori sur la solution éléments finis (degré des fonctions d'interpolation, régularité de la solution), la géométrie du domaine (les éventuelles singularités) et le maillage associé (la taille des éléments). L'objectif principal de cette estimation est la prédiction du **taux de convergence asymptotique** de l'erreur éléments finis ([66, 225]) à une constante près :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| \leq Ch^\alpha \|\mathbf{u}\| + C(h, \mathbf{f})$$

Le premier terme dépend de  $\mathbf{u}$  et  $C(h, \mathbf{f})$  dépend de la différence entre la donnée  $\mathbf{f}$  et son approximation  $\mathbf{f}_h$  et d'une puissance de  $h$  de degré supérieurs à la précédente.  $\alpha$  apparaît ainsi comme la pente de la droite  $\log \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|$  en fonction de  $\log h$ . Ces estimations ne permettent pas de quantifier les erreurs sur la solution éléments finis car ils font intervenir la solution exacte qui n'est généralement pas connue. On a alors défini un autre type d'estimateur.

## 1.1.2 Estimation d'erreur a posteriori

### Définition et critère

On doit déterminer l'ordre d'erreur sans pour autant connaître la solution exacte de notre problème. Il s'agit alors d'estimer l'erreur exacte  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|$  à l'aide d'une quantité  $\eta(\mathbf{u}_h, d)$  calculable explicitement, dépendant de la solution éléments finis  $\mathbf{u}_h$  et de données  $d$ , que l'on appelle estimateur d'erreur *a posteriori*. En vue d'améliorer la discrétisation dans les zones qui génèrent le plus d'erreur, il paraît indispensable d'avoir une idée des contributions à l'erreur globale de chaque élément  $T$ , triangle de la triangulation (voir Définition 2.2.1). Ainsi, l'estimateur *a posteriori* s'exprime comme somme d'estimateurs locaux :

$$\eta(\mathbf{u}_h, d) = \left( \sum_T \eta_T(\mathbf{u}_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On détermine ainsi les éléments avec une erreur importante. Si l'estimateur local est grand, on a donc beaucoup d'erreur autour de ce point donc on utilisera des petites mailles. Au contraire si l'estimateur local est petit, on pourra utiliser des grandes mailles. Ainsi les estimations *a posteriori* servent à effectuer des procédures d'adaptation de maillage que l'on décrira par la suite afin d'optimiser le temps de calcul sur ordinateur.

Lorsqu'un estimateur est défini, il faut s'interroger sur les critères et les moyens permettant de juger des performances de cet estimateur. Le but de ces estimateurs est d'obtenir des quantités globales et locales qui représentent au mieux la vraie erreur commise lors de l'approximation par éléments finis.

### Propriétés 1.1.1

- P1 : L'estimateur doit avoir une **borne supérieure globale** qui soit entièrement calculable à partir de la solution éléments finis :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\Omega}^2 \leq C \sum_T \eta_T(\mathbf{u}_h)^2$$

en norme  $L^2$ ,  $H^1$  ou norme en énergie du déplacement (choix de normes imposé par la forme bilinéaire). La constante  $C$  est une inconnue, différente pour chaque problème. Généralement, on ne la calcule pas en pratique.

- P2 : Il vérifie une **borne inférieure locale** :

$$\eta_T(\mathbf{u}_h)^2 \leq C_T^2 \sum_{T' \text{ proche de } T} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{T'}^2$$

- P3 : On regarde le rapport entre l'erreur estimée et l'erreur vraie : **exactitude asymptotique** développée juste après.
- P4 : Lorsque  $C_T$  ne dépend pas des données, du maillage ou de la solution, l'estimateur est dit **robuste**.

## Différents types d'estimateurs a posteriori

Les premiers travaux dans ce domaine datent de la fin des années 70. Ils ont fait l'objet d'intenses efforts de recherche dans tous les domaines où l'on fait appel à la méthode des éléments finis pour la simulation numérique des différents types de problèmes. Les premiers travaux de recherche sur ce sujet ont été consacrés principalement aux problèmes linéaires unidimensionnel et bidimensionnel. Depuis les estimations se sont enrichies grâce au développement de nouvelles approches, parmi lesquelles on peut distinguer principalement les travaux de Babuška et Rheinboldt [17], qui utilisent les résidus des équations d'équilibre pour construire les estimateurs d'erreur, ceux de Ladevèze [156, 157] qui ont introduit la notion d'erreur en relation de comportement aussi appelée "flux équilibrés" et utilisant des techniques de construction de champs statiquement admissibles, et les travaux de Zienkiewicz et Zhu [242] qui ont proposé un estimateur d'erreur pour un problème d'élasticité linéaire basé sur le calcul de l'écart entre la contrainte éléments finis et une contrainte continue obtenue par une technique de lissage de type moindres carrés. De nos jours, ces trois principales approches ont été largement étudiées et des améliorations ont été proposées. Une revue des différents estimateurs d'erreur a posteriori peut être trouvée dans [4, 18, 106, 231, 232]. Détaillons ces classes d'estimateurs d'erreur dans le cas linéaire  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v})$  et l'idée générale de construction, chacun ayant ses spécificités et ses avantages.

### 1. Estimateurs d'erreur en relation de comportement introduits par Ladevèze en 1975 :

On construit un couple admissible déplacement-contrainte  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}})$  vérifiant les équations d'équilibre et les équations de liaison (conditions de Dirichlet et de Neumann). Seule la relation de comportement n'est pas vérifiée (si elle est vérifiée, il s'agit de la solution exacte). Ainsi la qualité de la solution est évaluée en mesurant la non vérification de cette loi et l'erreur en relation de comportement est définie par  $\eta_{RC} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}})$ . On choisit en général  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_h$  puisque le déplacement éléments finis est admissible. En revanche  $\boldsymbol{\sigma}_h$  ne l'est pas donc on construit un champ de contraintes vérifiant les équations d'équilibre et recherché comme un prolongement de la solution éléments finis. L'estimateur d'erreur donne en théorie une surestimation de l'erreur exacte du problème notamment en élasticité.

Il a été mis en œuvre en élasticité bidimensionnelle dans [157] et tridimensionnelle dans [83]. Dans [155], l'estimateur d'erreur a été obtenu pour le problème d'élastoplasticité et de dynamique vibratoire en dimension 2. Des améliorations ont été apportées par la résolution de problèmes locaux dans [158].

### 2. Estimateurs en résidus d'équilibre introduits par Babuška et Rheinboldt en 1978 :

Le champ des contraintes éléments finis ne vérifie pas les équations d'équilibre. On construit alors des résidus d'équilibre :  $R_h^u(\mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v})$ .

On calcule une estimation d'erreur associée à chaque élément du maillage à partir du calcul des résidus élémentaires des équations d'équilibre et du saut des contraintes aux interfaces des éléments. Les résidus d'équilibre mesurent ainsi la non-vérification des équations d'équilibre intérieure et la non vérification des conditions d'équilibre

sur le bord ainsi que la discontinuité du vecteur contrainte au travers de l'interface. Pour une interpolation linéaire, le terme décrivant le saut de contraintes est prépondérant par rapport au terme du résidu d'équilibre [59].

Les premiers travaux réalisés dans ce domaine ont conduit à des estimateurs explicites car on obtient une estimation de la norme de l'erreur globale ou locale à partir de la solution éléments finis et des données du problème. En effet, Babuška et Rheinboldt ont proposé un encadrement de l'erreur dans le cas d'un problème linéaire avec des maillages quasi-uniformes (voir Définition 2.2.2). Ils ont démontré l'existence de deux constantes  $C_1$  et  $C_2$  indépendantes du maillage et de la solution éléments finis et  $C_2 \geq C_1 > 0$  telles que :

$$C_1 \eta \leq \|\mathbf{e}_h\| \leq C_2 \eta$$

Dans [16], les constantes dépendant de la nature du problème étudié ont été calculées. Les auteurs de [144] l'ont calculé dans le cadre de l'élasticité linéaire en contraintes planes :  $C = \sqrt{\frac{1-\nu}{24Ep}}$  où  $E$  le module de Young,  $\nu$  le coefficient de Poisson et  $p \geq 1$  le degré d'interpolation de l'élément fini. Ces estimateurs sont mathématiquement rigoureux. Ils vérifient les propriétés P1-P2. Mais en général la propriété P1 n'est pas satisfaite au sens strict car on trouve la borne supérieure à une constante inconnue près.

Des méthodes dites implicites [4] par patch d'éléments ou par éléments ont alors été développées et l'approximation de l'erreur est obtenue cette fois-ci après résolution de problèmes locaux liés à l'erreur. Sous la condition que des problèmes locaux de dimension infinie peuvent être résolus exactement, ils satisfont théoriquement P1-P2-P3. Malheureusement l'approximation de ces problèmes locaux a pour conséquence la perte de la propriété P1 et un coût de calcul élevé.

Ainsworth et Oden [4] ont amélioré l'estimateur résiduel par une technique dite de résidu équilibré. Son principe consiste à calculer des forces de traction sur les faces de chaque élément du maillage et qui sont en équilibre avec le résidu intérieur local. Cette technique est théoriquement indépendante de la dimension de l'espace et de la nature de l'interpolation.

### 3. Estimateurs d'erreur en contrainte introduits par Zienkiewicz et Zhu en 1987 :

Un des principaux défauts de la solution éléments finis est que le champ des contraintes est discontinu à la traversée des interfaces entre les éléments. Dans l'expression de l'estimateur résiduel, le terme décrivant le saut des contraintes est prépondérant par rapport au terme du résidu d'équilibre pour une interpolation linéaire. L'erreur pouvant être estimée uniquement par ces discontinuités, Zienkiewicz et Zhu choisissent de construire une solution d'ordre supérieur à celui de la solution éléments finis, espérant ainsi une meilleure approximation de la solution exacte du problème. Ainsi ils ont construit un champ de contraintes  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_h$  lissé à partir de la solution éléments finis et continu aux interfaces entre éléments. Pour construire le champ de contraintes continu, il faut connaître les contraintes nodales. La valeur

des contraintes aux nœuds est obtenue en minimisant au sens des moindres carrés la distance entre le champ continu  $\tilde{\sigma}_h$  et le champ éléments finis  $\sigma_h$ . L'estimateur global est défini par  $(\int_{\Omega} tr((\tilde{\sigma}_h - \sigma_h)^t K^{-1}(\tilde{\sigma}_h - \sigma_h)))^{1/2}$ . Il satisfait la propriété P3 mais viole systématiquement la propriété P1 au sens strict.

Zienkiewicz et Zhu ont proposé plus récemment une méthode de recouvrement global et une méthode SPR [240, 243] (Superconvergent Patch Recovery) utilisant la propriété de super-convergence aux points de Gauss mise en évidence par Barlow. Cette méthode plus précise et moins coûteuse calcule une expansion polynômiale des composantes du tenseur des contraintes éléments finis sur des patchs topologiques, sous domaines du maillage centrés sur un nœud et contenant un ensemble de points d'intégration. Zienkiewicz [241] et Oden [193] ont proposé d'autres techniques d'amélioration dans le cadre des raffinements hiérarchiques  $p$  et  $h$ - $p$ .

### Remarque 1.1.1

Avec des modèles analytiques 1D et 2D et des éléments triangulaires linéaires et quadratiques [239], les estimateurs résiduels et en contrainte sont équivalents.

On vient de présenter les grandes familles d'estimateurs couramment utilisées dans le cadre de la méthode des éléments finis. De nombreux auteurs ont donné des estimations pour les méthodes des éléments finis mixtes, volumes finis, Galerkin discontinu...

### Efficacité d'un estimateur

Quand la solution exacte d'un problème étudié est connue, la fiabilité des estimateurs d'erreur est évaluée au moyen de son indice d'efficacité défini par :  $\xi = \frac{\eta}{\|\mathbf{e}_h\|_{1,\Omega}}$  où  $\eta$  est un estimateur de l'erreur exacte globale  $\|\mathbf{e}_h\|_{1,\Omega}$ .

Au niveau de chaque élément  $T$  du maillage, l'indice d'efficacité local est donné par :  $\xi_T = \frac{\eta_T}{\|\mathbf{e}_h\|_{1,T}}$  où  $\eta_T$  et  $\|\mathbf{e}_h\|_{1,T}$  sont ses contributions aux erreurs globales  $\eta$  et  $\|\mathbf{e}_h\|_{1,\Omega}$  :

$$\|\mathbf{e}_h\|_{1,\Omega}^2 = \sum_T \|\mathbf{e}_h\|_{1,T}^2, \quad \eta^2 = \sum_T \eta_T^2$$

Un estimateur est dit efficace lorsque son indice d'efficacité et son inverse sont bornés pour toute taille de maillage. Un estimateur est dit asymptotiquement exact lorsque son indice d'efficacité tend vers 1 quand la taille  $h$  des éléments tend vers 0. Lorsque l'indice est plus grand que 1, il y a surestimation et si l'indice est plus petit que 1, il y a sous-estimation. Pour évaluer l'indice, la méthode la plus sûre consiste à utiliser des problèmes test où la solution exacte est connue analytiquement. Une autre technique largement répandue consiste à prendre comme solution "exacte" une solution éléments finis obtenue sur un maillage très fin. Pour obtenir des résultats fiables, il est indispensable que ce maillage soit nettement plus fin que le maillage sur lequel l'erreur est estimée. Dans les résultats numériques, on compare souvent le taux de convergence de l'estimateur avec celui de l'erreur vraie. L'égalité des taux de convergence est une condition nécessaire mais pas suffisante pour obtenir un indice d'efficacité égal à 1.

Dans une étude numérique, Babuška et al [15] ont montré que l'efficacité de leur type d'estimateur dépend fortement de la régularité de la solution, de la régularité des éléments et de la topologie du maillage. L'exactitude asymptotique est en général basée sur une super-convergence et n'a lieu que pour certaines topologies de maillage. Pour des problèmes d'élasticité avec des éléments triangulaires linéaires, les résultats montrent que l'estimateur est moins performant et sous-estime considérablement l'erreur lorsque l'angle minimal des triangles devient trop petit ou bien lorsque la solution présente des singularités. Il est souhaitable de surestimer l'erreur afin de l'utiliser comme critère d'arrêt dans un processus adaptatif que nous allons décrire maintenant.

## Adaptation et raffinement de maillage

On couple souvent les estimateurs d'erreur *a posteriori* avec une procédure d'adaptation de maillage [204] qui vise, par des modifications des paramètres de discrétisation, à améliorer la précision de la solution éléments finis pour un moindre coût de calcul. En pratique, il n'est pas possible de raffiner uniformément la taille des éléments autant que nécessaire, pour des raisons évidentes de coûts de calculs. Toutefois il est possible d'optimiser le maillage en raffinant seulement dans des zones prédéfinies (où l'erreur est susceptible d'être plus importante qu'ailleurs) et en déraffinant en dehors de celle-ci : on parle ainsi d'adaptation de maillage. Ce processus est dicté par des considérations liées, d'une part, à la géométrie du domaine et d'autre part, à la physique du problème étudié.

Les techniques d'adaptation de maillage reposent sur trois méthodes principales :

1. *h*-adaptation :

- méthode locale de *h*-raffinement [79, 144] : le maillage initial est raffiné en augmentant le nombre de degrés de liberté. On subdivise (par exemple au milieu) les éléments dans les zones où la valeur locale de l'erreur est importante. On peut également regrouper ceux où l'erreur est la plus faible (diminution du degré de liberté). Elle est bien adaptée pour capter les singularités.
- méthode globale de *h* remaillage : cette fois ci, on regénère complètement le maillage. Elle permet ainsi d'uniformiser efficacement la distribution de l'erreur. Coffignal l'a initialisé pour les problèmes d'élasticité et de plasticité en dimension deux.

2. *r*-adaptation :

Apparue en 1973, elle est fondée sur l'amélioration de la solution en optimisant la position des nœuds dans le maillage sans en ajouter de nouveaux et sans en modifier les connectivités. L'inconvénient majeur est que la précision de la solution calculée est limitée par rapport au nombre de degrés de liberté disponibles.

3. *p*-adaptation [20, 223] :

On augmente le degré d'interpolation des éléments en conservant la topologie du maillage. Ainsi le maillage modifié contient autant d'éléments mais plus de degrés de liberté. Un des avantages est que le maillage utilisé comporte peu d'éléments. Par contre il est difficile de l'introduire avec des formulations mixtes ainsi que de prévoir le degré d'interpolation à utiliser pour respecter une qualité donnée tout en minimisant le coût de calcul.

Les méthodes  $h$  et  $p$  peuvent être combinées dans l'adaptation de maillage. Il s'agit alors de la  $hp$ -adaptation [19, 224].

Le critère d'adaptation le plus simple est le raffinement uniforme. Tous les éléments du maillage sont traités de la même manière. Mais on aboutit alors à un nombre de degrés de liberté important. On l'utilisera donc principalement pour obtenir la solution de référence sur un maillage très fin.

Les autres critères de raffinement sont les suivants :

- une valeur seuil absolue : tous les éléments dont l'erreur est supérieure à la valeur seuil seront modifiés. On l'adopte dans le Chapitre 2 comme suit :
  - ◊ construction d'un maillage initial et calcul de la solution approchée
  - ◊ calcul des estimateurs locaux afin d'obtenir une carte locale de l'erreur
  - ◊ on fixe une tolérance  $\delta$  et on raffine tous les éléments  $T$  tels que  $\eta_T \geq \delta$
 On recommence à partir d'un nouveau maillage tant qu'il reste des estimateurs locaux supérieurs à  $\delta$ .
- une valeur seuil relative : tous les éléments dont l'erreur est supérieure à un pourcentage de la valeur maximale sont raffinés.
- une fraction d'éléments : un certain pourcentage dont l'erreur est la plus importante seront modifiés.

Dans le but d'améliorer la qualité d'une solution approchée obtenue avec un maillage relativement grossier, on décide d'appliquer dans le Chapitre 3 les techniques d'adaptation de maillages développées en élasticité dans [73, 157]. Le but des procédures d'adaptation est de garantir à l'utilisateur un niveau de précision noté  $\eta_0$  avec un moindre coût de calcul. On utilise la  $h$ -adaptation dans laquelle la taille et la topologie des éléments sont modifiées alors que le degré d'interpolation est conservé.

**Définition 1.1.1**

Un maillage  $T^*$  est dit optimal par rapport à la mesure de l'erreur  $\eta^*$  si (voir [155]) :

$$\begin{cases} \eta^* = \eta_0 \\ N \text{ minimal } (N : \text{nombre d'éléments (ou de degrés de liberté) dans } T^*) \end{cases} \quad (1.1)$$

Pour résoudre le problème (1.1), la procédure suivante (voir Figure 1.1) est appliquée :

1. une première analyse est effectuée sur un maillage régulier uniforme  $T_h$ ,
2. l'erreur globale correspondante  $\eta$  et les contributions locales  $\eta_T$  sont calculées,
3. les caractéristiques du maillage optimal  $T_h^*$  sont déterminées afin de minimaliser le coût de calcul par rapport à l'erreur globale,
4. on recommence l'analyse sur le nouveau maillage  $T_h^*$ .

Le maillage optimal  $T_h^*$  est déterminé par le calcul du coefficient de modification de taille  $r_T$  sur chaque élément  $T$  du maillage  $T_h$  :  $r_T = h_T^*/h_T$ , où  $h_T$  est la taille actuelle de l'élément et  $h_T^*$  représente la taille qui doit être imposée aux éléments de  $T_h^*$  situés dans la zone de  $T$  afin d'assurer l'optimalité. Le calcul des coefficients  $r_T$  est basé sur la vitesse

de convergence de l'erreur qui dépend du type d'élément utilisé mais aussi de la régularité de la solution [73]. Ainsi pour calculer les coefficients  $r_T$ , on utilise la technique détaillée dans [74] qui prend automatiquement en compte les régions à fort gradient de contraintes. Le maillage  $T_h^*$  est généré à l'aide d'un mailleur capable de respecter la précision de la carte de taille. Pour obtenir plus de précision, on répète l'algorithme autant de fois qu'il le faut pour atteindre une précision proche de la précision désirée  $\eta_0$  (voir [73]).

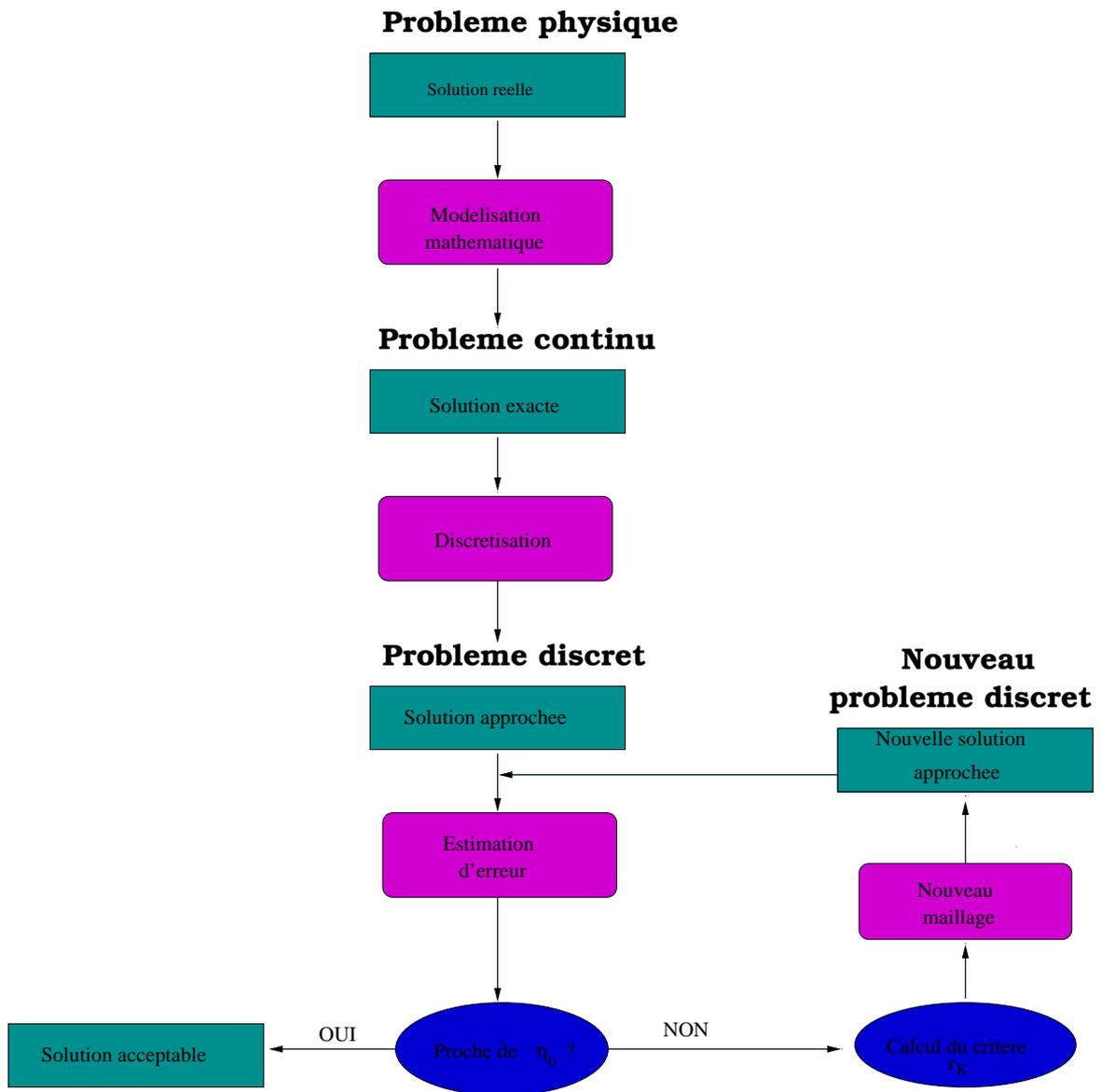


FIG. 1.1 – Algorithme d'adaptation

## 1.2 Méthode des éléments finis étendus : XFEM

La mécanique de la rupture suppose l'existence d'une ou plusieurs macro-fissures présentes dans le matériau de part et d'autre desquelles les déplacements, les déformations et contraintes sont discontinus. Les fissures sont de nouvelles frontières internes. On appelle lèvres de la fissure les deux surfaces qui forment la nouvelle frontière d'une fissure. Les équations à résoudre pour obtenir les déplacements, déformations et contraintes en tout point du solide fissuré sont les mêmes que celles pour le solide non fissuré mais une condition aux limites supplémentaires sur les nouvelles frontières internes est imposée. La présence de fissures dans un corps est associée à :

- un champ de déplacement discontinu le long de la fissure
- un champ de contraintes présentant une singularité en  $\frac{1}{\sqrt{r}}$  en pointe de fissure,  $r$  désignant la distance à la pointe de fissure.

La simulation numérique des problèmes de fissuration est essentiellement basée sur l'utilisation de la méthode des éléments finis. Malgré son cadre mathématique bien établi et maîtrisé, son efficacité et sa puissance pour résoudre de nombreux problèmes en mécanique des solides, l'un des défauts de la méthode des éléments finis classique pour les problèmes de fissuration est la gestion des maillages. En effet celui-ci doit respecter scrupuleusement la géométrie de la fissure : la fissure doit être localisée sur les faces des éléments du maillage et la pointe de fissure doit se situer sur un nœud du maillage afin de modéliser la discontinuité. De plus, l'approximation du champ de déplacement solution est formulée à l'aide de fonctions polynômiales. Mais ces fonctions polynômiales ne permettent pas d'obtenir la singularité en  $\frac{1}{\sqrt{r}}$  du champ des contraintes en pointe de fissure. La pointe de fissure doit être maillée très finement à cause du fort gradient de contraintes ce qui augmente le nombre d'éléments et donc le temps de calcul de la solution. En effet, les éventuelles irrégularités de la géométrie de la structure aboutissent à une solution analytique singulière (qui a une valeur infinie des contraintes). Dans ce cas, le maillage doit être suffisamment raffiné près des surfaces irrégulières afin d'obtenir une approximation acceptable. Comme les frontières internes changent d'une analyse à l'autre, cette opération de maillage doit être recommencée à chaque étape, au moins dans une zone entourant la formation de nouvelles frontières. Cette opération peut être coûteuse en temps de calcul. Finalement, la disparité de la géométrie des éléments finis sur l'interface peut poser problème pour l'application des lois de contact et de frottement.

Hormis la méthode des éléments finis, il y a d'autres approches possibles : la première, initiée par Ortiz, Leroy et Needleman [194], consiste à introduire des fonctions d'approximation discontinues au sein des éléments, la seconde basée sur une discrétisation nodale consiste à bâtir l'approximation sur un ensemble de points (méthode "meshless" [32]). Celle-ci peut incorporer des modes discontinus afin de modéliser la présence de fissures et la propagation des fissures sans remaillage est alors possible. Mais elles requièrent un effort numérique plus important (au niveau du temps CPU) que les méthodes basées sur un maillage. L'imposition de condition aux limites reste aussi problématique. Une troisième approche est la méthode XFEM (méthode des éléments finis étendus) apparue récemment et que l'on a choisi d'analyser.

Cette dernière a été introduite en 1999 dans [182, 183] (dans le contexte de l'élasticité linéaire) afin d'éviter de remailler les domaines avec des fissures qui se propagent. Elle propose une simple extension de la méthode classique en autorisant un maillage indépendant de la géométrie du problème.

Elle se base sur la méthode des éléments finis avec un maillage normal sans tenir compte de la géométrie de la fissure. Puis on remplace les éléments qui sont coupés par une fissure par des éléments spéciaux possédant quelques degrés de liberté supplémentaires qui permettent de représenter un champ de déplacement discontinu de part et d'autre de la fissure (fonctions escaliers de type Heaviside) et de prendre en compte l'aspect asymptotique du champ des contraintes en pointe de fissure (comme dans la méthode d'enrichissement singulier introduite dans [218]). Cette stratégie permet d'utiliser un maillage indépendant de la géométrie de la fissure et l'ajout des champs asymptotiques en bout de fissure améliore la précision en mécanique de la rupture élastique. L'enrichissement reste valable quelle que soit la dimension du problème et quel que soit le type des éléments utilisés.

Moës, Dolbow et Belytschko présentent la méthode à 2 dimensions en 1999 et Moës, Belytschko, Moran, Sukumar [219] celle en 3 dimensions en 2000 pour les fissures statiques. La thèse de Dolbow [81] a mené à de nombreuses publications : Gravouil, Sukumar, Moran, Béchet, Minnebo, Burgardt ont continué par la suite, améliorant les performances de la méthode XFEM et explorant ses capacités. Elle a été développée sur une grande variété de problèmes : fissuration, plaques, plasticité, mécanique quantique, mécanique stochastique, fluide...

### 1.2.1 Description de la méthode

Les premières méthodes d'approximation de problèmes faisant intervenir des fonctions singulières (Singular Function Method) ont été introduites pour les problèmes où le bord du domaine contient des points singuliers [218]. Amara, Destuynder et Djaoua [7, 80] ont considéré le problème d'élasticité linéaire en dimension 2 avec une fissure et ont étudié l'ajout de deux singularités en fond de fissure. Belytschko et Black [31] ont commencé à incorporer les champs asymptotiques dans l'approximation du déplacement. Puis Moës et al ont introduit la fonction Heaviside dans l'approximation enrichie du déplacement et la méthode XFEM est née. L'idée principale de la méthode des éléments finis étendus consiste à enrichir la base de la méthode classique des éléments finis par :

- des fonctions singulières sur la pointe de fissure afin de représenter l'aspect asymptotique du champ des contraintes en bout de fissure. Cela permet une représentation fidèle des phénomènes physiques ayant lieu en fond de fissure.
- des fonctions discontinues localisées le long de la fissure pour prendre en compte la discontinuité du champ de déplacement autour de la fissure. Elle prend en compte la géométrie de la fissure.

L'approximation éléments finis classiques est rappelée :  $\mathbf{v}_h = \sum_{x \in \mathcal{N}_h} a_x \psi_x$  où  $a_x$  sont les degrés de liberté de déplacement au nœud  $x$  et  $\mathcal{N}_h$  est l'ensemble des nœuds du maillage. On note par  $\psi_x$  les fonctions de base d'élément fini classique  $P_1$  au nœud  $x \in \mathcal{N}_h$  satisfaisant  $\psi_x(x') = \delta_{x,x'}$ , pour tout  $x' \in \mathcal{N}_h$ .

L'approximation enrichie s'écrit :

$$\mathbf{V}_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in (C(\Omega))^2 : \mathbf{v}_h = \sum_{x \in \mathcal{N}_h} a_x \psi_x + \sum_{x \in \mathcal{N}_h^H} b_x H \psi_x + \sum_{x \in \mathcal{N}_h^F} \sum_{i=1}^4 c_{xi} F_i \psi_x \quad a_x, b_x, c_{xi} \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Le premier terme est le terme classique continu. Le second terme correspond à l'enrichissement avec la fonction Heaviside.  $\mathcal{N}_h^H$  est l'ensemble des nœuds enrichis par la fonction  $H$  (voir Définition 2.2.3, ces nœuds sont encerclés sur la Figure 1.2). Les  $b_x$  sont les degrés de liberté enrichis. D'une part, les fonctions discontinues le long de la fissure sont construites en utilisant une fonction de type Heaviside  $H$  qui est égale à 1 d'un côté de la fissure (que l'on a prolongé par une extension plane : voir Figure 2.4) et  $-1$  de l'autre côté. Les nœuds dont le support de la fonction de base est entièrement traversé par la fissure sont enrichis par une fonction de type Heaviside :

$$H(x) = +1 \quad \text{si } (x - x^*) \cdot n \geq 0, \quad \text{et } -1 \quad \text{ailleurs,}$$

où  $x^*$  désigne la pointe de la fissure et  $n$  est une normale à la fissure.

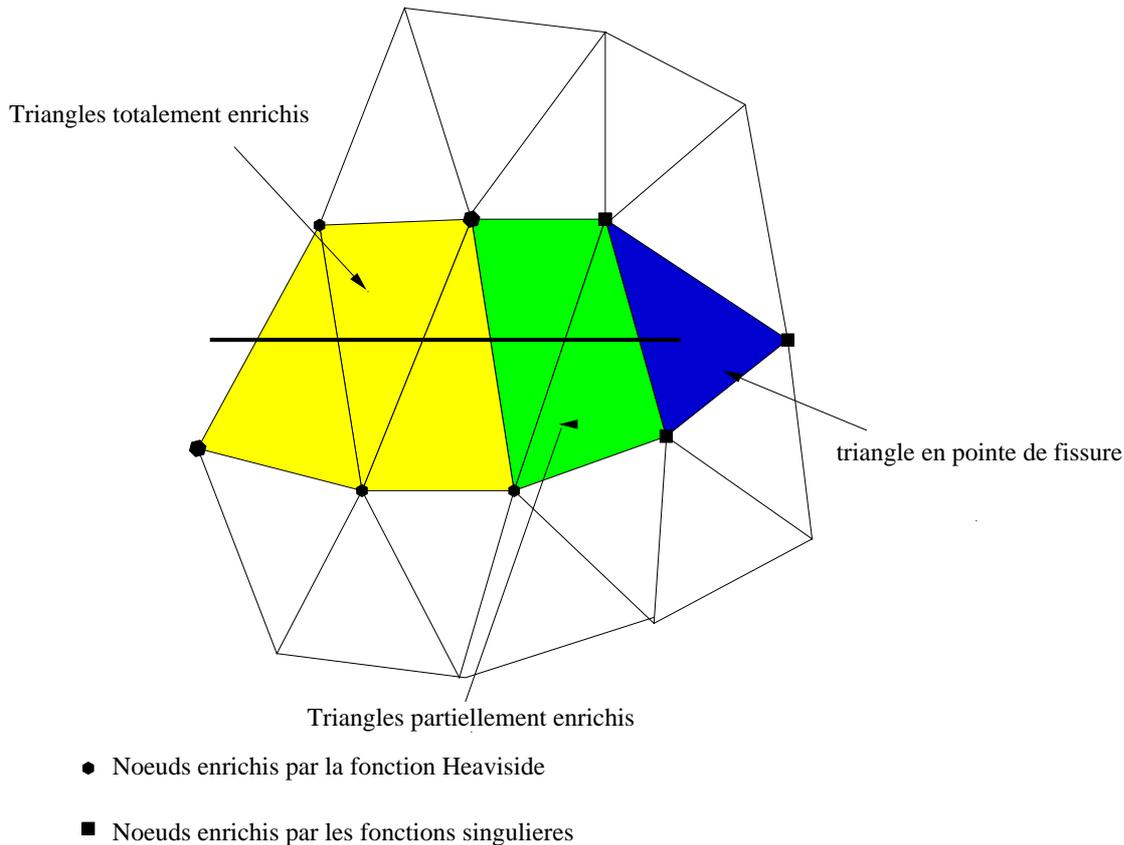


FIG. 1.2 – Nœuds enrichis par la fonction Heaviside et par les fonctions singulières

D'autre part, l'approximation du champ de déplacement est enrichie avec des fonctions basées sur les développements asymptotiques du champ de déplacement en mécanique de la rupture élastique linéaire. Pour un matériau homogène isotrope, les solutions sont :

- mode I dit mode d'ouverture traduisant la discontinuité normale

$$u_I = \frac{1}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} (\delta - \cos \theta) \\ \sin \frac{\theta}{2} (\delta - \cos \theta) \end{pmatrix},$$

- mode II dit mode de cisaillement plan traduisant la discontinuité tangentielle ou glissement plan

$$u_{II} = \frac{1}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} (\delta + 2 + \cos \theta) \\ \cos \frac{\theta}{2} (2 - \delta - \cos \theta) \end{pmatrix}.$$

où  $\nu$  désigne le coefficient de Poisson,  $E$  le module de Young, la constante de Kolosov  $\delta = 3 - 4\nu$  dans le problème d'élasticité plane et  $(r, \theta)$  correspond aux coordonnées polaires par rapport à la pointe de fissure (voir Figure 1.3 et [163]).

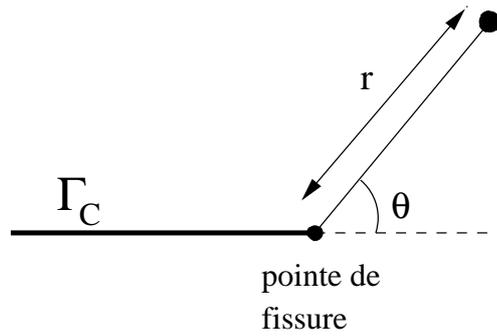


FIG. 1.3 – Coordonnées polaires par rapport à la pointe de fissure

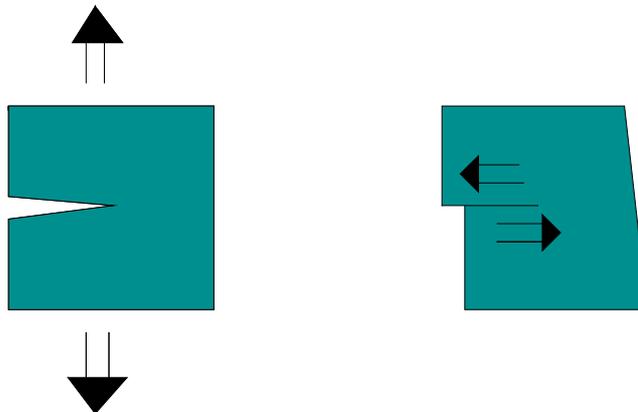


FIG. 1.4 – A gauche : mode I. A droite : mode II.

La base permettant de décrire ces champs comporte quatre fonctions en coordonnées polaires :  $\sqrt{r} \cos(\theta/2)$ ,  $\sqrt{r} \cos(\theta/2) \cos \theta$ ,  $\sqrt{r} \sin(\theta/2)$ ,  $\sqrt{r} \sin(\theta/2) \cos \theta$ . On choisit la base équivalente et les fonctions singulières sont alors construites en utilisant les quatre fonctions singulières de base :

$$\begin{aligned} F_1 &= \sqrt{r} \sin(\theta/2), \\ F_2 &= \sqrt{r} \cos(\theta/2), \\ F_3 &= \sqrt{r} \sin \theta \sin(\theta/2), \\ F_4 &= \sqrt{r} \sin \theta \cos(\theta/2). \end{aligned}$$

Ces fonctions sont les solutions de Westergaard. Seule la première fonction est discontinue au travers de la fissure entre  $-\pi$  et  $\pi$ . Ces fonctions sont dites singulières car leurs dérivées sont singulières en  $r = 0$ .  $\mathcal{N}_h^F$  est l'ensemble des nœuds enrichis par les fonctions singulières, c'est-à-dire l'ensemble des éléments contenant la pointe de fissure (ces nœuds sont entourés d'un carré dans la Figure 1.2) et  $F_j \in C^2(\Omega - x^*)$ .

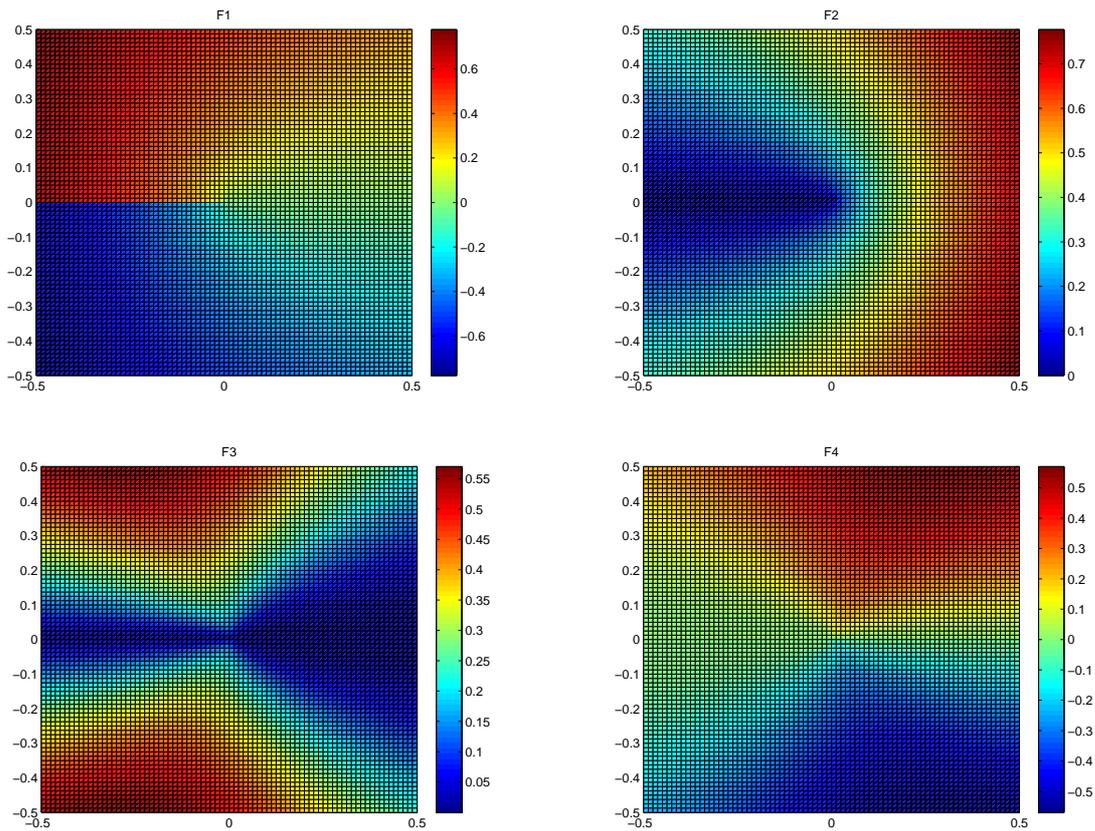


FIG. 1.5 – Graphique des fonctions singulières

Pour chaque composante du déplacement, on a donc ajouté un degré de liberté pour chaque nœud de  $\mathcal{N}_h^H$  et quatre degrés pour chaque nœud de  $\mathcal{N}_h^F$ . Bien que réduisant l'erreur et bien qu'on utilise un espace enrichi, le taux de convergence est le même que celui de la méthode classique des éléments finis. Il est égal à 0.5 pour des éléments  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  (voir [154]). Une des raisons est que la surface enrichie par les fonctions singulières devient de plus en plus petite lorsque le paramètre  $h$  tend vers 0. On va décrire maintenant une variante permettant d'améliorer la vitesse de convergence.

### 1.2.2 Méthode XFEM avec une surface d'enrichissement fixe

Dans cette variante, on ne limite plus la zone d'enrichissement par les fonctions singulières à une seule couche d'éléments et on l'élargit à une zone de taille fixe, indépendante du raffinement de maillage (i.e. le paramètre  $h$ ). Les auteurs de [25] montrent qu'une zone d'enrichissement fixe permet d'obtenir une vitesse de convergence presque optimale et [154] teste les taux de convergence pour les formulations polynômiales d'ordre supérieur. L'espace enrichi introduit par [25, 154] est défini par :

$$\mathbf{V}_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in (C(\Omega))^2 : \mathbf{v}_h = \sum_{x \in \mathcal{N}_h} a_x \psi_x + \sum_{x \in \mathcal{N}_h^H} b_x H \psi_x + \sum_{x \in \mathcal{N}^R} \sum_{i=1}^4 c_{xi} F_i \psi_x \quad a_x, b_x, c_{xi} \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

où  $\mathcal{N}^R$  est l'ensemble des nœuds contenus dans la boule  $B(x^*, R)$  (voir Figure 1.6). Cette variante réduit l'erreur par rapport à XFEM classique et améliore la vitesse de convergence d'ordre  $h$  pour la norme  $H^1$  (voir Figure 1.8). Mais XFEM avec une surface d'enrichissement fixe est une stratégie coûteuse car un nombre important de degrés de liberté est enrichi par les fonctions singulières. Le conditionnement du système linéaire associé est dégradé par rapport à la méthode XFEM.

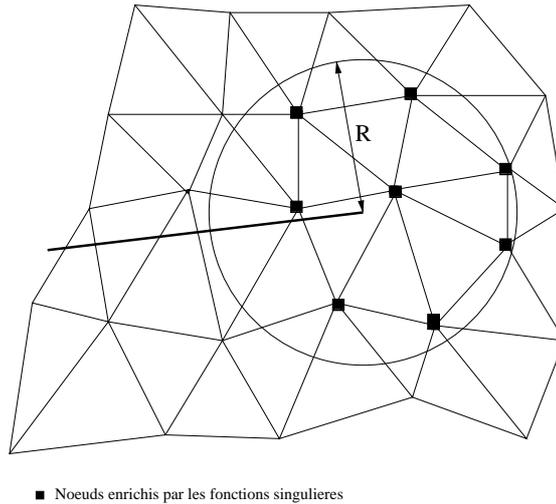


FIG. 1.6 – Zone d'enrichissement fixe

On présente alors une variante avec un meilleur conditionnement.

### 1.2.3 Méthode XFEM avec une fonction cut-off

La méthode XFEM avec une fonction cut-off consiste à introduire un enrichissement singulier globalisé au voisinage du fond de la fissure via une fonction de localisation. En 1973, Strang et Fix [218] ont introduit une méthode d'enrichissement non régulier en utilisant une fonction cut-off pour un maillage dépendant de la géométrie du domaine. L'espace des éléments finis est défini par :

$$\mathbf{V}_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in (C(\Omega))^2 : \mathbf{v}_h = \sum_{x \in \mathcal{N}_h} a_x \psi_x + \sum_{x \in \mathcal{N}_h^H} b_x H \psi_x + \chi \sum_{i=1}^4 c_i F_i \right. \\ \left. = \mathbf{v}_{h,r} + \chi \mathbf{v}_{h,s}, \quad a_x, b_x, c_i \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

où  $\chi \in C^2(\bar{\Omega})$  est une fonction cut-off définie comme suit. On se donne  $0 < r_0 < r_1$  et en notant  $r$  la distance jusqu'à la pointe de fissure, on a :

$$\chi(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \leq r_0, \\ \rho \in (0, 1) & \text{si } r_0 < r < r_1, \\ 0 & \text{si } r \geq r_1. \end{cases} \quad (1.2)$$

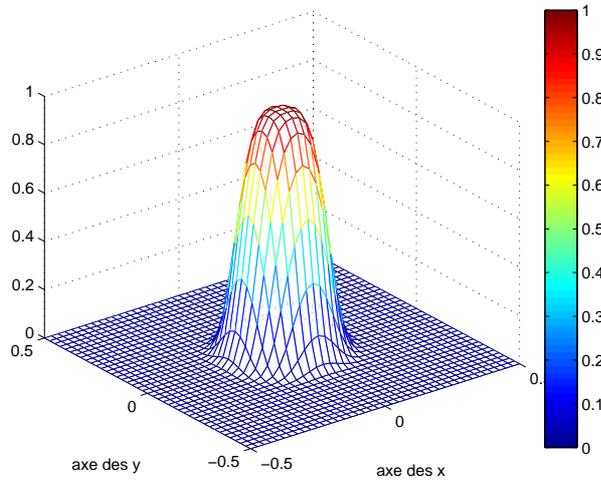


FIG. 1.7 – Exemple de fonction cut-off exponentielle pour  $r_0 = 0.01$  et  $r_1 = 0.49$

La fonction cut-off  $\chi$  a été introduite dans [61, 63] afin d'améliorer les performances en terme de convergence de la méthode originale introduite dans [183]. La méthode avec fonction cut-off réduit le coût de calcul et conserve la convergence optimale. De plus, le conditionnement du système est grandement amélioré. La Figure 1.8 montre les vitesses de convergence pour la méthode classique des éléments finis, pour la méthode XFEM avec surface d'enrichissement fixe et pour XFEM avec fonction cut-off pour la norme  $H^1$ . La méthode avec cut-off et la méthode avec surface d'enrichissement fixe ont des

taux de convergence très proches mais les valeurs de l'erreur sont plus importantes pour la fonction cut-off. Cependant la fonction cut-off réduit significativement les coûts de calcul (voir Tableau 1.1). Le Tableau 1.1 et la Figure 1.8 ont été obtenus pour une fissure rectiligne sur un carré en mode I d'ouverture.

Nombre d'éléments sur $[0,1]$	40	60	80
FEM	3402	7502	13202
XFEM avec surface d'enrichissement	4962	11014	19578
XFEM avec cut-off	3410	7510	13210

TAB. 1.1 – Nombre de degrés de liberté en fonction des méthodes

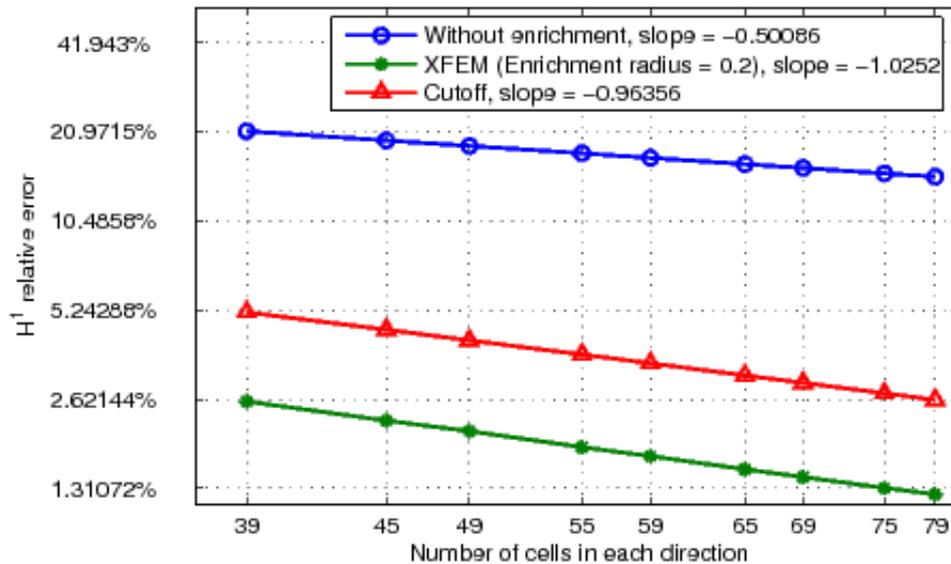


FIG. 1.8 – Norme  $H^1$  de l'erreur en fonction du nombre d'éléments sur le bord du carré en mode I [60]

D'autres variantes de la méthode XFEM (raccord intégral, spider XFEM, base réduite) ont été développées dans [60].



# Chapitre 2

## Estimateurs a posteriori pour la méthode XFEM

DANS ce chapitre, on propose, analyse et implémente un estimateur a posteriori par résidu pour le problème de Laplace et pour le système de l'élasticité en dimension deux d'espace approximés par la méthode des éléments finis étendus (XFEM). La méthode XFEM permet d'améliorer les calculs éléments finis sur les domaines fissurés en utilisant des maillages sur le domaine non fissuré et en ajoutant des fonctions de base de type Heaviside et des fonctions singulières afin de prendre en compte la géométrie de la fissure et la singularité en pointe de fissure. Les résultats numériques sont réalisés sous la librairie éléments finis Getfem++.

Ce travail a abouti à un article paru dans *ESAIM proceedings* intitulé **A posteriori error analysis for Poisson's equation approximated by XFEM** [125] et un article soumis intitulé **A residual error estimator for the XFEM approximation of the elasticity problem**[126].

### Sommaire

---

2.1	Les problèmes de Laplace et de l'élasticité sur un domaine fissuré . . . . .	61
2.2	Discrétisation des problèmes de Laplace et de l'élasticité avec la méthode XFEM . . . . .	64
2.3	Opérateur de quasi-interpolation . . . . .	67
2.3.1	Définition . . . . .	67
2.3.2	Stabilité . . . . .	70
2.3.3	Estimations d'erreur . . . . .	74
2.4	Estimations d'erreur . . . . .	77