

CHAPITRE II

ETUDE COMPARATIVE DE LA FLEXION DE PANNEAUX SANDWICHS

Dans ce chapitre, nous nous proposons de montrer la pertinence des modèles multiparticulaires et du modèle sandwich issu de la théorie de Sab, pour le dimensionnement en flexion de panneaux sandwichs.

La première partie fera l'objet d'une comparaison entre les modèles à trois particules, la théorie sandwich classique (de Reissner-Mindlin), la théorie classique modifiée de Sab, et une solution analytique tridimensionnelle exacte développée par Pagano, dans le cas classique d'une flexion cylindrique sur des panneaux sandwichs.

La seconde partie consistera à vérifier la pertinence de la maille élément-fini développée à partir de la modélisation multiparticulaire des matériaux multicouches (maille M4) (*Smaoui 1996*). Nous confronterons les résultats de la maille M4 avec des modélisations sandwichs réalisées avec le code de calcul par éléments finis SAMCEF.

II.1 ETUDES DE PANNEAUX SANDWICHS EN FLEXION CYLINDRIQUE: COMPARAISON AVEC UNE SOLUTION ANALYTIQUE EXACTE

Cette partie est consacrée à l'étude de panneaux sandwichs en flexion cylindrique, dont l'objectif est de comparer les solutions données par les différentes théories classiques de Reissner et de Sab et les théories multiparticulaires du chapitre I, avec la solution exacte de Pagano (*1969*) issue d'une analyse tridimensionnelle du problème.

Nous confronterons cinq solutions analytiques sur trois exemples de panneaux sandwichs,

- La solution exacte de Pagano prise comme la référence des résultats que nous déterminerons,
- La solution de la théorie sandwich classique (TC),
- La solution de la théorie sandwich déduite de la théorie multicouche de Sab (TS),
- La solution du modèle triparticulaire complet (Tri),
- La solution du modèle triparticulaire simplifié (TriS),

Nous traiterons le cas de plaques en appuis simples aux extrémités, soumises à un chargement en flexion sinusoïdale.

Nous nous intéresserons aux déflexions maximales au centre de chaque plaque sandwich, et à la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur aux bords, pour chacune des différentes modélisations sandwichs citées précédemment.

Dans un premier paragraphe, nous présenterons le problème de flexion cylindrique avec les hypothèses de comportement qui en découlent. Nous donnerons les expressions des déflexions et des contraintes de cisaillement de la théorie classique de sandwich, de la théorie de Sab et des théories multiparticulaires. On trouvera en annexe 2 les expressions de la solution de Pagano et quelques calculs qui ont conduit aux expressions des modèles multiparticulaires.

Dans un second paragraphe, nous étudierons des exemples de panneaux sandwichs en flexion cylindrique pour lesquels nous déterminerons numériquement, pour les différentes modélisations, les déflexions maximales au centre de la plaque et les contraintes de cisaillement à une extrémité, à partir de leurs expressions analytiques.

II.1.1 Formulation du problème de flexion cylindrique pour les différentes théories

La flexion cylindrique désigne un problème de flexion unidimensionnelle de panneaux. Elle englobe en fait deux types de problèmes possibles selon que l'on puisse négliger la largeur b du panneau devant la longueur L , ou l'inverse (cf. figure 2.1).

Cette distinction sur la géométrie du panneau sous-tend l'utilisation de deux types d'hypothèses de comportements différents. Dans le premier cas on utilise l'hypothèse de contraintes planes, et dans le second cas l'hypothèse de déformations planes.

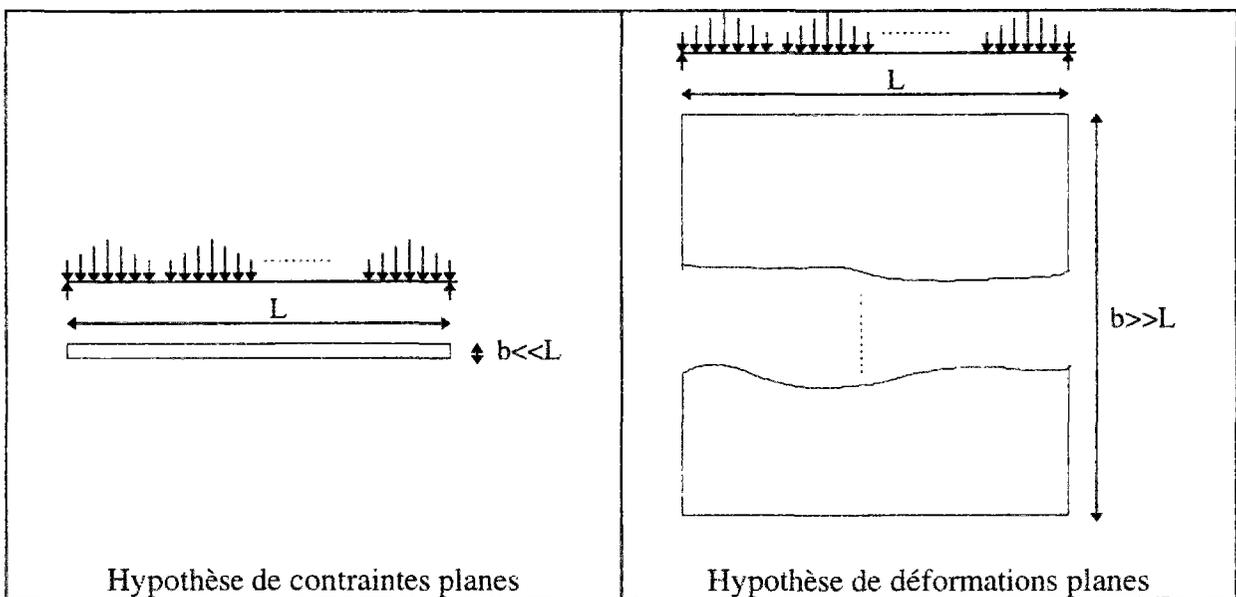


Figure 2.1: Hypothèses de flexion cylindrique

Pagano a résolu les problèmes de flexion cylindrique pour des panneaux de très grandes largeurs. Nous introduirons donc l'hypothèse de déformations planes dans l'étude de la flexion cylindrique avec le modèle classique de Reissner-Mindlin, celui de Sab et les théories multiparticulaires. Ainsi, les composantes du champ de déplacement pourront être approchées par l'écriture suivante, si la direction de sollicitation est l'axe \underline{e}_1 ,

Pour la théorie classique et la théorie de Sab,

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \tilde{u}(x, y) &= \tilde{u}(x) \\ w(x, y) &= w(x) \end{aligned}$$

Pour les théories multiparticulaires,

$$(2.2) \quad \forall j = 1, 2, 3 \quad \begin{aligned} \tilde{u}^j(x, y) &= \tilde{u}^j(x) \\ w^j(x, y) &= w^j(x) \quad \text{ou} \quad w(x, y) = w(x) \end{aligned}$$

On considérera une plaque sandwich de longueur L , de largeur b et d'épaisseur totale h , constituée de deux peaux identiques et homogènes d'épaisseur e , d'une âme d'épaisseur d , soumise à un chargement en pression sinusoïdale $p(x) = q_0 \sin \frac{\pi x}{L}$. Le repère $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ sera confondu avec les repères d'orthotropie des peaux et de l'âme.

Nous considérerons la direction de sollicitation \underline{e}_1 . Les extrémités de la plaque seront repérées par les abscisses $x = 0$ et $x = L$, le centre de la plaque par l'abscisse $x = \frac{L}{2}$ (figure 2.2).

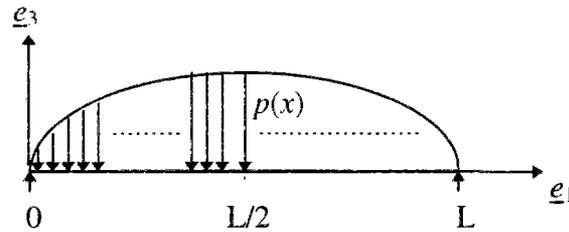


Figure 2.2: Flexion cylindrique étudiée

Remarque: Puisque l'on considère que les peaux sont constituées par un matériau homogène, le sandwich est donc constitué d'un empilement de trois couches homogènes dont les constantes de souplesses se déterminent classiquement en fonction des propriétés des matériaux d'âme et des peaux.

Nous adopterons les notations suivantes: Les exposants 1 et 3 feront références aux peaux, l'exposant 2 à l'âme.

Pour les modélisations multiparticulaires, les constantes de souplesses dans la direction de sollicitation s'exprimeront de la façon suivante,

$$\begin{aligned} S_{1111}^j &= \frac{1}{Q_{11}^j} & \text{avec} & & Q_{11}^j &= \frac{E_1^j}{1 - \frac{E_2^j}{E_1^j} (v_{12}^j)^2} \\ S_{1313}^j &= \frac{1}{4G_{13}^j} & & & S_{3333}^j &= \frac{1}{E_3^j} \end{aligned}$$

où $E_1^j, E_2^j, E_3^j, G_{13}^j, v_{12}^j$ sont respectivement le module d'Young dans la direction \underline{e}_1 , le module d'Young dans la direction \underline{e}_2 , le module d'Young dans la direction \underline{e}_3 , le module de cisaillement dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_3)$ et le coefficient de Poisson dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$, de la couche j ($j = 1, 2, 3$).

II.1.1.1 Solution exacte de Pagano

Pagano a publié à la fin des années 60 les solutions exactes des champs de déplacements et des champs de contraintes des milieux composites multicouches dans le cas général d'une plaque de grande largeur sous un chargement sinusoïdal (*Pagano 1969*),

$$(2.3) \quad W^j = \sin \frac{\pi x}{L} \sum_{i=1}^4 A_{ij} \left[R_{13}^j r_{ij} - \frac{R_{33}^j}{r_{ij}} \frac{\pi^2}{L^2} \right] \exp(r_{ij} z)$$

$$(2.4) \quad \sigma_{xz}^j = -\frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L} \sum_{i=1}^4 A_{ij} r_{ij} \exp(r_{ij} z)$$

où les constantes R_{13}^j , R_{33}^j , r_{ij} , s'expriment en fonction des constantes de souplesse de chaque couche j (cf. annexe 2.1), et les constantes A_{ij} sont des inconnues déterminées en écrivant les conditions de continuité des déplacements et des contraintes entre chaque couche et les conditions aux limites des contraintes sur les faces supérieure et inférieure du sandwich.

II.1.1.2 Théorie sandwich classique et théorie de Sab

L'analyse d'un problème de flexion cylindrique, avec la théorie classique de sandwich, a fait l'objet de nombreux développements dans la littérature des composites multicouches et sandwichs (*Berthelot 1992*). Nous ne ferons donc que rappeler les expressions utiles à notre étude.

Pour la théorie classique de sandwich, la déflexion a pour expression,

$$(2.5) \quad w_{TC} \left(\frac{L}{2} \right) = \left(1 + \frac{\pi^2 D_{11}^1}{F_{55} L^2} \right) \frac{q_0 L^4}{\pi^4 D_{11}^1}$$

où D_{11}^1 est la raideur en flexion/torsion des peaux dans la direction de sollicitation \underline{e}_1 ,

$$D_{11}^1 = \frac{2}{3} \left(\left(e + \frac{d}{2} \right)^3 - \left(\frac{d}{2} \right)^3 \right) Q_{11}^1$$

$$\text{avec } Q_{11}^1 = \frac{E_1^1}{1 - \frac{E_2^1}{E_1^1} (\nu_{12}^1)^2}$$

F_{55} la raideur en cisaillement de l'âme dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$,

$$F_{55} = dG_{13}^2$$

Les contraintes de cisaillement au bord ont pour expression,

$$(2.6) \quad \sigma_{xz}(0, y, z) = \begin{cases} -\frac{Q_{11}^1 q_0 L}{D_{11}^1 \pi} \left(-\frac{z^2}{2} + \frac{h^2}{8} \right) & \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq -\frac{d}{2} \\ \frac{Q_{11}^1 q_0 L (d^2 - h^2)}{D_{11}^1 \pi \cdot 8} & \text{pour } -\frac{d}{2} \leq z \leq \frac{d}{2} \\ \frac{Q_{11}^1 q_0 L}{D_{11}^1 \pi} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) & \text{pour } \frac{d}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \end{cases}$$

La théorie de Sab fait intervenir un coefficient de rigidité en cisaillement transverse qui diffère de celui de la théorie classique. Nous l'avons noté P_{55}^{-1} (cf. I.1.1).

L'expression de la déflexion (2.5) de la théorie classique devient donc,

$$(2.7) \quad w_{TS} \left(\frac{L}{2} \right) = \left(1 + \frac{\pi^2 D_{11}^1}{P_{55}^{-1} L^2} \right) \frac{q_0 L^4}{\pi^4 D_{11}^1}$$

où
$$P_{55}^{-1} = \frac{1}{2 \frac{e}{h^2 G_{13}^1} + \frac{d}{h^2 G_{13}^2}}$$

L'expression (2.6) donnant les contraintes au bord $\sigma_{xz}(0, y, z)$, est identique dans le cas du modèle de sandwich de Sab.

Remarque: Le rapport $\frac{q_0 L^4}{\pi^4 D_{11}^1}$ intervenant dans l'expression de la déflexion w_{TC} et de la

déflexion w_{TS} n'est rien d'autre que l'expression de la déflexion maximale au centre d'un panneau composite multicouche symétrique en flexion cylindrique, déterminée dans le cadre de la théorie de Love-Kirchhoff. Cette expression de la flèche n'est bien sûr valable que pour des plaques de faibles épaisseurs où le cisaillement transverse peut être négligé. Elle n'est donc pas appropriée à la détermination des déflexions de panneaux sandwichs.

Néanmoins, nous l'utiliserons dans la présentation des résultats de déflexions maximales de façon à conserver celle de Pagano, où nous la noterons w_0 .

II.1.1.3 Théories sandwichs multiparticulaires

Pour déterminer les solutions d'un problème de flexion cylindrique d'une plaque sandwich en pression sinusoïdale, nous utilisons les équations d'équilibre, les conditions aux limites, et les lois de comportement des différentes théories multiparticulaires, dont le développement a fait l'objet du chapitre I.

Nous détaillons les calculs pour la théorie triparticulaire simplifiée, correspondant au problème de flexion cylindrique présenté figure (2.2), pour un sandwich présentant des peaux

identiques et constituées d'un matériau homogène. Les calculs pour le modèle triparticulaire complet sont présentés en annexe (2.2).

Les relations d'équilibre du modèle triparticulaire simplifié (1.113) et (1.114) ainsi que les conditions aux limites (1.115) et (1.116) s'écrivent dans la direction de sollicitation.

$$(2.8) \quad \begin{cases} N_{11,x}^1 + \tau_1^{1,2} = 0 \\ N_{11,x}^2 + \tau_1^{2,3} - \tau_1^{1,2} = 0 \\ N_{11,x}^3 - \tau_1^{2,3} = 0 \\ \frac{e+d}{2} (\tau_1^{2,3} + \tau_1^{1,2})_{,x} = q_0 \sin \frac{\pi x}{L} \end{cases}$$

$$(2.9) \quad \begin{cases} N_{11}^1(0) = N_{11}^2(0) = N_{11}^3(0) = 0 \\ N_{11}^1(L) = N_{11}^2(L) = N_{11}^3(L) = 0 \\ w(0) = w(L) = 0 \end{cases}$$

Le champ de contraintes σ_{xz} s'écrit,

$$\sigma_{xz}(x, y, z) = \frac{\tau_1^{j,j+1} + \tau_1^{j-1,j}}{2} + \frac{z - \bar{h}_j}{e^j} (\tau_1^{j,j+1} - \tau_1^{j-1,j}) \quad \forall z \in [h_j, h_j^+]$$

La loi de comportement s'écrit,

$$\textcircled{2.10} \quad \varepsilon_{11}^j = \frac{1}{e^j} S_{1111}^j N_{11}^j \quad \Leftrightarrow \quad N_{11}^j = e^j Q_{11}^j \varepsilon_{11}^j = A_{11}^j \varepsilon_{11}^j$$

$$\text{avec} \quad \varepsilon_{11}^j = \frac{du_1^j}{dx} \quad \text{et} \quad A_{11}^1 = A_{11}^3$$

$$\textcircled{\quad} \quad \begin{cases} D_1^{1,2} = \frac{4}{3} (eS_{1313}^1 + dS_{1313}^2) \tau_1^{1,2} + \frac{2}{3} dS_{1313}^2 \tau_1^{2,3} \\ D_1^{2,3} = \frac{2}{3} dS_{1313}^2 \tau_1^{1,2} + \frac{4}{3} (eS_{1313}^1 + dS_{1313}^2) \tau_1^{2,3} \end{cases}$$

$$\text{avec} \quad S_{1313}^j = \frac{1}{4G_{13}^j} \quad \text{et} \quad S_{1313}^1 = S_{1313}^3$$

Soit,

$$(2.11) \quad \begin{cases} \tau_1^{1,2} = \eta_1 D_1^{1,2} + \xi_1 D_1^{2,3} \\ \tau_1^{2,3} = \xi_1 D_1^{1,2} + \eta_1 D_1^{2,3} \end{cases}$$

avec,

$$(2.12) \quad \begin{cases} D_1^{1,2} = u_1^2 - u_1^1 + \frac{e+d}{2} \frac{dw}{dx} \\ D_1^{2,3} = u_1^3 - u_1^2 + \frac{e+d}{2} \frac{dw}{dx} \end{cases}$$

$$(2.13) \quad \eta_1 = \frac{12}{4 \left(\frac{e}{G_{13}^1} + \frac{d}{G_{13}^2} \right)^2 - \frac{d^2}{(G_{13}^2)^2}} \left(\frac{e}{G_{13}^1} + \frac{d}{G_{13}^2} \right)$$

$$(2.14) \quad \xi_1 = - \frac{6}{4 \left(\frac{e}{G_{13}^1} + \frac{d}{G_{13}^2} \right)^2 - \frac{d^2}{(G_{13}^2)^2}} \frac{d}{G_{13}^2}$$

Déterminons les déplacements u_1^1, u_1^2, u_1^3 et w en introduisant les relations (2.10), (2.11) et (2.12) dans les relations d'équilibre (2.8),

$$(2.15) \quad A_{11}^1 \frac{d^2 u_1^1}{dx^2} + \eta_1 \left(u_1^2 - u_1^1 + \frac{e+d}{2} \frac{dw}{dx} \right) + \xi_1 \left(u_1^3 - u_1^2 + \frac{e+d}{2} \frac{dw}{dx} \right) = 0$$

$$(2.16) \quad A_{11}^2 \frac{d^2 u_1^2}{dx^2} - (\eta_1 - \xi_1) \left(u_1^2 - u_1^1 + \frac{e+d}{2} \frac{dw}{dx} \right) + (\eta_1 - \xi_1) \left(u_1^3 - u_1^2 + \frac{e+d}{2} \frac{dw}{dx} \right) = 0$$

$$(2.17) \quad A_{11}^3 \frac{d^2 u_1^3}{dx^2} - \xi_1 \left(u_1^2 - u_1^1 + \frac{e+d}{2} \frac{dw}{dx} \right) - \eta_1 \left(u_1^3 - u_1^2 + \frac{e+d}{2} \frac{dw}{dx} \right) = 0$$

$$(2.18) \quad \frac{d}{dx} (u_1^3 - u_1^1) + (e+d) \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{2q_0}{(e+d)(\eta_1 + \xi_1)} \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$\text{où} \quad \eta_1 + \xi_1 = 6 \left[2 \frac{e}{G_{13}^1} + 3 \frac{d}{G_{13}^2} \right]^{-1}$$

L'intégration de (2.18) avec les conditions de symétrie (2.14) donne,

$$(2.19) \quad u_1^3 - u_1^1 + (e+d) \frac{dw}{dx} = - \frac{2q_0 L}{\pi(e+d)(\eta_1 + \xi_1)} \cos \frac{\pi x}{L}$$

En retranchant la relation (2.17) à la relation (2.15), on obtient,

$$(2.20) \quad A_{11}^1 \frac{d^2}{dx^2} (u_1^3 - u_1^1) - (\eta_1 + \xi_1) \left(u_1^3 - u_1^1 + (e+d) \frac{dw}{dx} \right) = 0$$

En intégrant (2.20) en tenant compte des conditions (2.9), on en déduit,

$$(2.21) \quad u_1^3 - u_1^1 = \frac{2q_0 L^3}{\pi^3 (e+d) A_{11}^1} \cos \frac{\pi x}{L}$$

On en déduit alors l'expression de $w(x)$ avec les conditions aux limites (2.9),

$$(2.22) \quad w(x) = -\frac{2q_0 L^2}{\pi^2 (e+d)^2 (\eta_1 + \xi_1)} \sin \frac{\pi x}{L} - \frac{2q_0 L^4}{A_{11}^1 \pi^4 (e+d)^2} \sin \frac{\pi x}{L}$$

De plus, en additionnant les relations (2.15) (2.16) et (2.17), on obtient,

$$u_1^2 = -\frac{A_{11}^1}{A_{11}^2} (u_1^1 + u_1^3)$$

qui permet avec la relation (2.21) de trouver des relations qui lient u_1^2 et u_1^3 à u_1^1 .

$$(2.23) \quad u_1^2 = -2 \frac{A_{11}^1}{A_{11}^2} u_1^1 - \frac{2q_0 L^3}{\pi^3 (e+d) A_{11}^2} \cos \frac{\pi x}{L}$$

$$(2.24) \quad u_1^3 = u_1^1 + \frac{2q_0 L^3}{\pi^3 (e+d) A_{11}^1} \cos \frac{\pi x}{L}$$

En introduisant les expressions de w , u_1^2 et u_1^3 (relations 2.22, 2.23 et 2.24) dans l'équation (2.15), on trouve une équation différentielle du second ordre en u_1^1 qui peut s'écrire sous la forme suivante,

$$(2.25) \quad \frac{d^2 u_1^1}{dx^2} - \omega^2 u_1^1 = B \cos \frac{\pi x}{L}$$

$$\text{avec } \omega = \sqrt{(\eta_1 - \xi_1) \left(\frac{1}{A_{11}^1} + \frac{2}{A_{11}^2} \right)}$$

$$B = \left(\omega^2 + \frac{\pi^2}{L^2} \right) \frac{q_0 L^3}{\pi^3 (e+d) A_{11}^1}$$

L'équation (2.25) a pour solution,

$$u_1^1 = A \operatorname{sh}(\omega x) - \frac{B}{\omega^2 + \frac{\pi^2}{L^2}} \cos \frac{\pi x}{L} \quad (A, B, \omega) \in \mathbb{R}^3$$

Or en tenant compte des conditions de symétrie (2.9) la constante A est nulle. On en déduit l'expression de u_1^1 , puis celles de u_1^2 et u_1^3 à l'aide des expressions (2.23) et (2.24),

$$(2.26) \quad \begin{cases} u_1^1 = -\frac{q_0 L^3}{\pi^3 (e+d) A_{11}^1} \cos \frac{\pi x}{L} \\ u_1^2 = 0 \\ u_1^3 = -u_1^1 \end{cases}$$

A partir des relations (2.26) on peut alors déterminer les expressions de $D_1^{1,2}$ et $D_1^{2,3}$ puis celles de $\tau_1^{1,2}$ et $\tau_1^{2,3}$,

$$D_1^{1,2} = D_1^{2,3} = -\frac{q_0 L}{\pi(e+d)(\eta_1 + \xi_1)} \cos \frac{\pi x}{L}$$

$$\tau_1^{1,2} = \tau_1^{2,3} = -\frac{q_0 L}{\pi(e+d)} \cos \frac{\pi x}{L}$$

Pour le modèle triparticulaire simplifié, la flèche au centre $w\left(\frac{L}{2}\right)$ s'écrit,

$$w_{\text{Tris}}\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{2q_0 L^4}{A_{11}^1 \pi^4 (e+d)^2} \left(1 + \frac{\pi^2}{L^2} \frac{A_{11}^1}{(\eta_1 + \xi_1)}\right)$$

Soit, en introduisant dans la relation précédente les expressions de A_{11}^1 et $\eta_1 + \xi_1$,

$$(2.27) \quad w_{\text{Tris}}\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{2q_0 L^4}{\pi^4 e(e+d)^2 Q_{11}^1} \left(1 + \frac{\pi^2}{L^2} e Q_{11}^1 \left(\frac{e}{3G_{13}^1} + \frac{d}{2G_{13}^2}\right)\right)$$

Pour le modèle triparticulaire simplifié, la contrainte au bord $\sigma_{xz}(0, y, z)$ s'écrit,

$$\sigma_{xz}(0, y, z) = \begin{cases} \frac{z + \frac{h}{2}}{e} \frac{q_0 L}{\pi(e+d)} & \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq -\frac{d}{2} \\ \frac{q_0 L}{\pi(e+d)} & \text{pour } -\frac{d}{2} \leq z \leq \frac{d}{2} \\ \frac{-z + \frac{h}{2}}{e} \frac{q_0 L}{\pi(e+d)} & \text{pour } \frac{d}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \end{cases}$$

On peut déterminer par une démarche analogue les expressions du déplacement maximal et des contraintes de cisaillement du modèle triparticulaire complet (cf. annexe 2.2).

Pour le modèle complet, la déflexion s'exprime de manières différentes selon la couche du sandwich que l'on considère. Pagano a calculé les déflexions au milieu de l'épaisseur du sandwich. Nous utiliserons donc l'expression de la déflexion de l'âme pour effectuer les comparaisons des déflexions. Elle s'écrit,

$$(2.28) \quad w_{Tri}^2\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{2q_0 L^4}{\pi^4 e(e+d)^2 Q_{11}^1} \left(1 + \frac{\pi^2}{L^2} e Q_{11}^1 \left(\frac{e}{3G_{13}^1} + \frac{d}{2G_{13}^2} \right) \right) - \frac{q_0 e d}{2(e+d)^2} \left(\frac{e}{3E_3^1} + \frac{d}{6E_3^2} \right)$$

Voyons à présent les expressions des contraintes de cisaillement $\sigma_{xz}(0, y, z)$ dans l'épaisseur du sandwich, pour le modèle complet.

L'expression des contraintes de cisaillement se déduit du calcul des champs de déplacement comme pour le modèle simplifié (cf. annexe 2.2). On constate qu'elle est identique pour les deux théories multiparticulaires sandwichs,

$$(2.29) \quad \sigma_{xz}(0, y, z) = \begin{cases} \frac{z + \frac{h}{2}}{e} \frac{q_0 L}{\pi(e+d)} & \text{pour } -\frac{h}{2} \leq z \leq -\frac{d}{2} \\ \frac{q_0 L}{\pi(e+d)} & \text{pour } -\frac{d}{2} \leq z \leq \frac{d}{2} \\ \frac{-z + \frac{h}{2}}{e} \frac{q_0 L}{\pi(e+d)} & \text{pour } \frac{d}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \end{cases}$$

Nous verrons par ailleurs dans les exemples qui suivent, que les valeurs numériques de $w\left(\frac{L}{2}\right)$ pour le modèle complet sont très voisines de celles du modèle simplifié. Ceci nous permettra de considérer que les deux théories multiparticulaires sont équivalentes pour le problème traité.

II.1.2 Exemples d'application

II.1.2.1 Présentation de l'étude

Nous nous intéressons à l'étude de panneaux sandwichs constitués d'une mousse isotrope Rohacell 71 et de peaux multicouches en matériau composite T300/174, à fibres en carbone préimprégnées dans une matrice époxyde. Les caractéristiques mécaniques sont données tableau (2.1) pour l'âme du sandwich et tableau (2.2) pour les peaux.

$E_x = E_y = E_z$	$G_{xy} = G_{yz} = G_{xz}$	$\nu_{xy} = \nu_{yz} = \nu_{xz}$
92 MPA	30 MPA	0,53

Tableau 2.1: Caractéristiques mécaniques de l'âme

E_x	$E_y = E_z$	$G_{xy} = G_{xz}$	ν_{xy}	$\nu_{yz} = \nu_{xz}$
119 GPA	9,25 GPA	5,1 GPA	0,32	0,49

Tableau 2.2: Caractéristiques mécaniques des peaux

Pour simplifier, nous avons supposé que les fibres de carbone avaient la même orientation dans toutes les couches du sandwich, correspondant à la direction de sollicitation \underline{e}_1 . Nous avons ainsi donné les propriétés mécaniques des peaux dans le repère structural $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ qui coïncide dans notre cas avec le repère d'orthotropie local de chacune des couches qui composent les peaux (cf. tableau 2.2).

Nous étudierons trois exemples de panneaux sandwichs en flexion cylindrique, en changeant le rapport de l'épaisseur de l'âme sur l'épaisseur des peaux $\alpha = \frac{d}{e}$, mais en gardant les mêmes propriétés mécaniques.

Le premier cas correspondra à un rapport classique de sandwich $\alpha = 20$. Le deuxième correspondra au rapport minimum $\alpha = 10$ défini par Gay (1989), pour lequel un sandwich doit être, selon lui, défini. Enfin, puisqu'il arrive de rencontrer dans la littérature des panneaux sandwichs qui ne respectent pas tout à fait cette règle, nous regarderons également un cas où le rapport α est inférieur à 10. Nous étudierons le cas limite $\alpha = 5$.

II.1.2.2 Résultats

Dans ce paragraphe, nous présentons les résultats des déflexions maximales et les répartitions de contraintes de cisaillement dans l'épaisseur des panneaux sandwichs définis au paragraphe précédent, pour les trois rapports α , et obtenus pour les cinq théories, classiques et multiparticulaires, sous forme de graphiques.

L'ensemble des résultats numériques a été regroupé dans les tableaux (A2.1) à (A2.3) en annexe (2.3). Notez que les valeurs numériques des déflexions obtenues avec les expressions (2.8) et (2.10) pour les différentes modélisations multiparticulaires sont comparables. Le modèle triparticulaire complet fournit des valeurs très légèrement inférieures au modèle simplifié. Nous avons donc représenté sur les graphes des déflexions, qu'une seule courbe pour les modélisations multiparticulaires.

Sur les figures (2.3) à (2.8), nous avons représenté l'évolution des déflexions maximales au centre du panneau rapportées à $w_0 = \frac{q_0 L^4}{\pi^4 D_{11}^*}$, en fonction du rapport $\lambda = \frac{L}{h}$ de la longueur du panneau sur l'épaisseur, qui représente l'élancement de la structure.

Les contraintes de cisaillement sont présentées sur les figures (2.9) à (2.11). Les répartitions de ces contraintes sont données dans l'épaisseur du panneau $\frac{z}{h}$ pour une valeur du rapport λ égale à 20. Les valeurs des contraintes figurent en abscisse, les valeurs de $\frac{z}{h}$ en ordonnée.

Nous indiquerons l'erreur commise avec la solution exacte de Pagano pour toutes les modélisations étudiées. Pour une grandeur G , l'erreur commise sera définie par la relation suivante,

$$(2.30) \quad Erreur = \frac{G_t - G_p}{G_p}$$

en notant G_p la valeur de G obtenue par Pagano,
et G_t la valeur de G obtenue par une des modélisations 2D (théorie de Reissner, théorie de Sab, théories multiparticulaires).

Nous nous intéressons d'abord aux résultats de déflexions des panneaux sandwichs. puis nous présentons les résultats concernant la répartition de contraintes de cisaillement transverse dans l'épaisseur des plaques.

II.1.2.2a Comparaison des déflexions au centre

Exemple 1: $\alpha = 20$

Pour $\alpha = 20$, la figure (2.3a) montrent que l'allure générale des courbes de déflexions obtenues par la théorie classique de Reissner-Mindlin, celle de Sab, et les modèles multiparticulaires coïncident avec celle de Pagano sauf pour les toutes premières valeurs du rapport d'élancement λ . La figure (2.3b) qui propose un zoom de ces courbes pour λ supérieurs à 20, montre la parfaite adéquation entre les courbes de Pagano et celles des modèles multiparticulaires. Les courbes des modèles de Reissner-Mindlin et de Sab sont légèrement décalées par rapport à la solution exacte, mais la prédiction des déflexions reste satisfaisante.

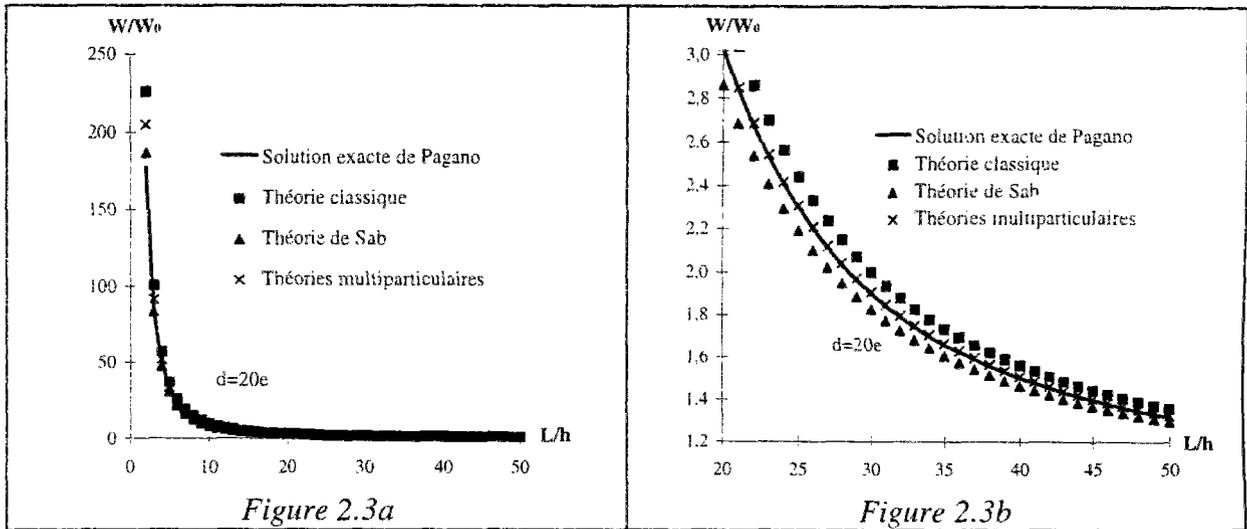


Figure 2.3a et b: Evolution des déflexions maximales en fonction de $\lambda=L/h$ pour $d=20e$

Vu la figure (2.4) et les valeurs numériques regroupées dans le tableau (A2.1) de l'annexe (2.3), les écarts varient rapidement pour les valeurs de λ comprise entre 2 et 10, pour les différents modèles par rapport à la solution de Pagano. Les modèles multiparticulaires qui donnent des résultats de déflexions pratiquement identiques, présentent des écarts qui varient entre une vingtaine de % pour $\lambda = 2$ et environ 1% pour $\lambda = 10$, écarts qui descendent en dessous de 10% dès $\lambda = 3$. Pour le modèle de Sab, les écarts avec la solution exacte varient de 5,2% pour $\lambda = 2$ à 7,2% pour $\lambda = 10$ et diminuent progressivement pour arriver à moins de 2% pour $\lambda = 50$. Cette théorie est donc excellente dans ce cas puisqu'elle est capable de prédire des déflexions avec une bonne précision dès les premières valeurs de λ . Pour la théorie sandwich classique, les écarts passent de 31% pour $\lambda = 2$ à 10% pour $\lambda = 10$ pour atteindre 5% pour $\lambda = 31$ et passer en dessous des 3% pour $\lambda = 50$.

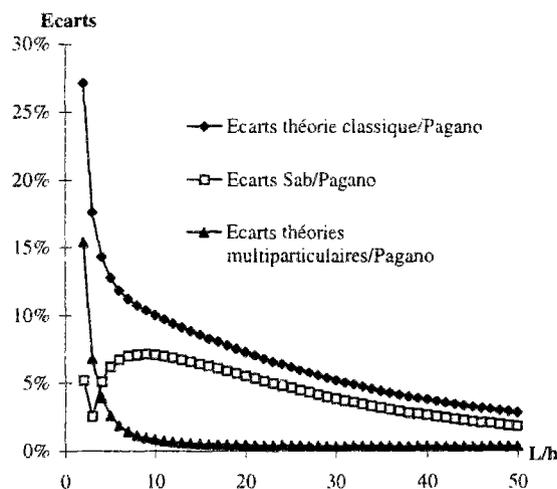
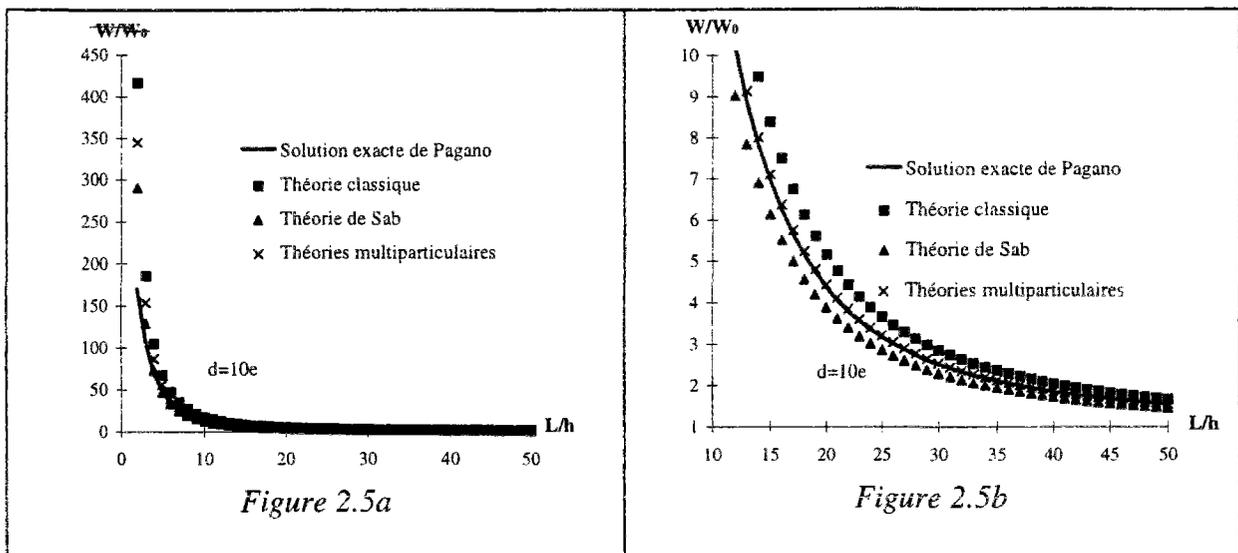


Figure 2.4: Erreur commise avec la solution de Pagano en fonction de $\lambda=L/h$ pour $d=20e$

Les modèles multiparticulaires et le modèle de Sab prédisent donc des déflexions avec une très grande précision, pour toutes les valeurs de λ sauf $\lambda = 2$ pour les théories multiparticulaires, pour toutes les valeurs de λ pour le modèle de Sab. Les modèles multiparticulaires s'avèrent être néanmoins plus précis que la théorie de Sab dès que le rapport λ dépasse 5. Le modèle sandwich quant à lui, donne des résultats satisfaisants à partir du rapport $\lambda = 10$.

Exemple 2: $\alpha = 10$

Pour $\alpha = 10$, on remarque que le phénomène observé précédemment s'amplifie: si les courbes de déflexions des modèles classiques et multiparticulaires épousent de façon satisfaisante celle de Pagano, elles démarrent toutefois beaucoup plus haut que la solution exacte (cf. figure 2.5).



Figures 2.5a et b: Evolution des déflexions maximales en fonction du rapport $\lambda=L/h$ pour $d=10e$

La figure (2.6) et le tableau (A2.2) en annexe (2.3) mettent en évidence les faiblesses des théories classiques et multiparticulaires pour la prédiction des déflexions maximales au centre des panneaux sandwichs pour les valeurs de λ inférieures à 6. Les écarts sont supérieurs à 100% pour $\lambda = 2$ pour toutes ces théories, et pour $\lambda = 3$ ils atteignent environ 45% pour les modèles multiparticulaires et 74% pour la théorie classique. La théorie de Sab se comporte mieux pour ces premières valeurs puisque les écarts sont de 70% et de 21%, respectivement pour $\lambda = 2$ et $\lambda = 3$. Cependant pour la théorie de Sab dès que $\lambda \geq 5$, les écarts augmentent et dépassent même 10% pour $\lambda = 9$. L'écart le plus important est atteint pour $\lambda = 13$ et vaut à peu près 12%. A partir de cette valeur, les écarts baissent de nouveau pour atteindre 5 % pour $\lambda = 50$.

Les théories multiparticulaires, quant à elles, présentent des écarts inférieurs à 10% avec la solution exacte de Pagano lorsque $\lambda > 6$, de moins de 5% pour $\lambda \geq 10$ et ces écarts tombent en dessous de 1% pour $\lambda \geq 25$. La théorie sandwich classique, quant à elle, est satisfaisante pour des valeurs de $\lambda > 40$ où les écarts avec la solution exacte deviennent inférieurs à 10%.

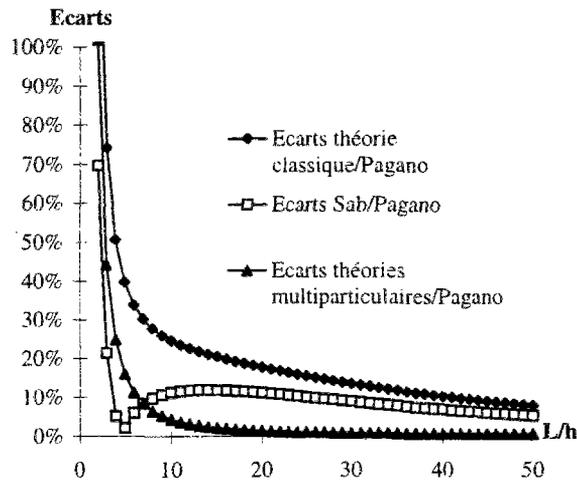


Figure 2.6: Erreur commise avec la solution exacte de Pagano en fonction du rapport $\lambda=L/h$, pour $d=10e$

La théorie de Sab est donc également très intéressante dans ce cas pour toutes les valeurs de λ . Les théories multiparticulaires prédisent mal les déflexions pour de très faibles rapports λ , mais deviennent très rapidement les plus pertinentes pour des élancements de plaques classiques. La théorie sandwich classique n'est satisfaisante que pour de très grandes valeurs de λ .

Exemple 3: $\alpha = 5$

Pour le dernier cas $\alpha = 5$, les observations effectuées dans le cas précédent, sont encore plus évidentes (cf. figure 2.7). Le modèle classique, celui de Sab et les théories multiparticulaires prédisent des valeurs de déflexions maximales très élevées par rapport à celles de Pagano.

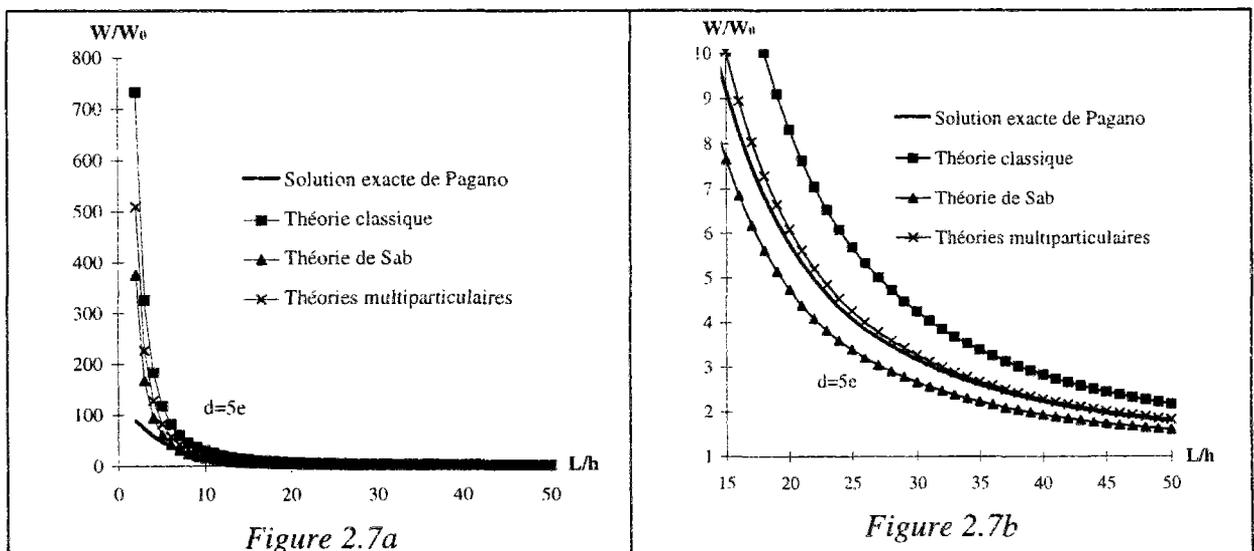


Figure 2.7a et b: Evolution des déflexions maximales en fonction du rapport L/h pour $d=5e$

Ce phénomène se propage jusque pour des valeurs de λ égales à 15 pour les modèles multiparticulaires, où les écarts avec Pagano décroissent de 480% à 10% pour $2 < \lambda < 15$. Pour $\lambda > 15$ les déflexions prédites par les modèles multiparticulaires sont en accord avec celles de la solution exacte. Les écarts du modèle de Sab avec Pagano diminuent rapidement pour $2 < \lambda < 8$ où ils passent de 320% à 3%. Cependant ils augmentent pour $9 < \lambda < 22$ où ils atteignent 18% pour $\lambda = 22$. Ils diminuent ensuite progressivement jusqu'à 10% pour $\lambda = 50$ (cf. figure 2.8 et tableau A2.3 de l'annexe 2.3).

La théorie classique de sandwich présente des écarts variant entre 722% à 21% pour $2 < \lambda < 50$.

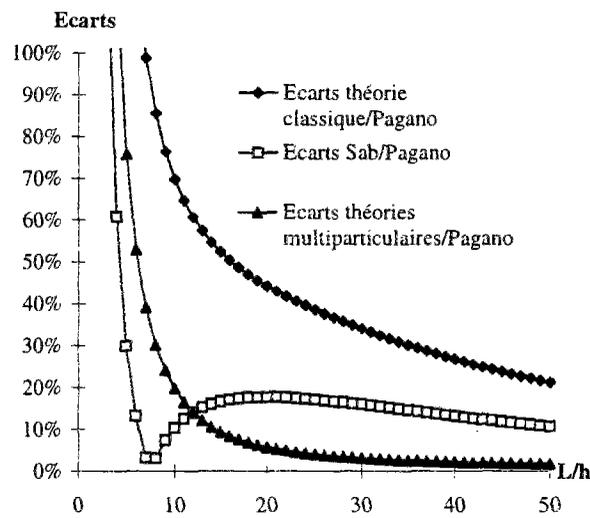


Figure 2.8: Erreur commise avec la solution exacte de Pagano en fonction du rapport $\lambda=L/h$, pour $d=5e$

La théorie sandwich n'est donc pas satisfaisante dans ce cas. La théorie de Sab n'est plus aussi performante que dans les deux cas précédents. Seules les théories multiparticulaires fournissent des résultats qui restent pertinents, pour des valeurs de $\lambda \geq 15$.

Synthèse des résultats

Faisons tout d'abord quelques remarques sur l'ensemble des courbes de déflexions avant de proposer une synthèse des résultats par théorie.

Nous constatons en premier lieu qu'en augmentant l'épaisseur de peaux vis à vis de celle de l'âme (soit en diminuant le rapport α) les solutions de déflexions obtenues par les modèles classiques de Reissner, de Sab et multiparticulaires s'écartent de plus en plus des solutions exactes de Pagano. Ceci est surtout vrai pour les premières valeurs du rapport λ où les écarts augmentent très vite lorsque α diminue. Il est intéressant de noter que cette inflation des écarts en début de courbes est liée d'un côté à une prévision de déflexions de plus en plus élevées pour les théories classiques et multiparticulaires, et de l'autre d'une diminution de la prévision des déflexions par Pagano, au fur et à mesure que α diminue.

La théorie sandwich donne des résultats inférieurs à 10% pour les deux premiers cas, pour $\lambda \geq 10$ dans le premier cas mais seulement pour $\lambda > 40$ dans le deuxième cas. Pour le troisième cas la théorie classique ne convient plus puisque les écarts sont tous supérieurs à 20%.

La théorie sandwich classique fait donc les preuves de ses limites dès qu'on avoisine des rapports α de 10 ou que l'on se situe en dessous. Cependant la théorie sandwich reste performante pour des rapports α élevés dépassant 20.

La théorie de Sab, qui propose une autre expression de la raideur en cisaillement transverse de la théorie classique, se montre d'une très grande précision pour des rapports α supérieurs à 10, quelque soit l'élanement du panneau. Par contre pour des cas limites tels que $\alpha = 5$ cette théorie n'est plus aussi pertinente.

Les théories multiparticulaires, quant à elles semblent s'adapter à toutes les situations de panneaux sandwichs, même dans les cas limites où les rapports α sont très faibles, si toutefois les panneaux sandwichs ne présentent pas des élanements trop petits.

Pour $\alpha = 20$, les prévisions des modèles multiparticulaires sont pratiquement les mêmes que celles de la théorie de Pagano. Pour $\alpha = 10$, les écarts sont inférieurs à 10% pour $\lambda \geq 7$ et inférieurs à 5% pour $\lambda \geq 10$. Les résultats des modèles multiparticulaires sont donc encore une fois très satisfaisants. Enfin dans le dernier cas, les écarts sont inférieurs à 10% pour $\lambda \geq 15$. Là encore les théories triparticulaires se comportent correctement pour la prévision des déflexions.

En conclusion de ces constatations sur les déflexions, il est clair que les théories de Sab et multiparticulaires sont plus précises dans leurs prévisions que la théorie sandwich classique, issue de la théorie des stratifiés de Reissner-Mindlin, vu les résultats présentés dans cette partie.

Voyons à présent, si les résultats obtenus pour les contraintes de cisaillement des modèles triparticulaires sont aussi pertinents vis à vis de la solution exacte donnée par Pagano.

II.1.2.2b Comparaison des contraintes de cisaillement

Nous avons représenté sur les figures (2.9) à (2.11) les contraintes de cisaillement, au bord dans l'épaisseur du sandwich, fournies par le modèle de Pagano, la théorie classique, la théorie de Sab et les modèles multiparticulaires. Nous constatons que ces répartitions de contraintes $\sigma_{xz}(0, y, z)$ sont quasiment identiques.

Dans les cas où $\alpha = 20$ et $\alpha = 10$, les modèles multiparticulaires prévoient la même répartition de contraintes $\sigma_{xz}(0, y, z)$ au bord pour $\lambda = 20$ que la solution exacte. Les écarts sont inférieurs à 1‰ dans le premier cas et inférieur à 1% dans le second cas. Pour le dernier cas où $\alpha = 5$, la courbe des contraintes du modèle triparticulaire se différencie un peu de celle de Pagano. Mais les écarts restent inférieurs à 6%. Les résultats obtenus avec les modèles multiparticulaires sont donc excellents vis à vis de la solution exacte de Pagano.

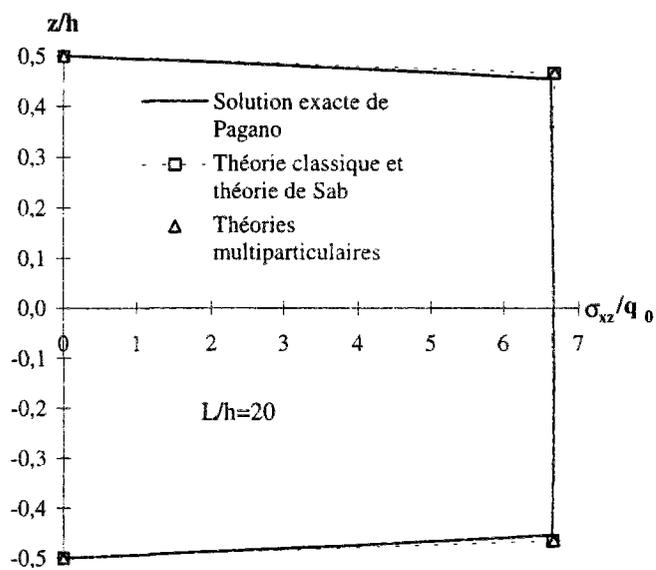


Figure 2.9 : Evolution des contraintes de cisaillement pour $d=20e$

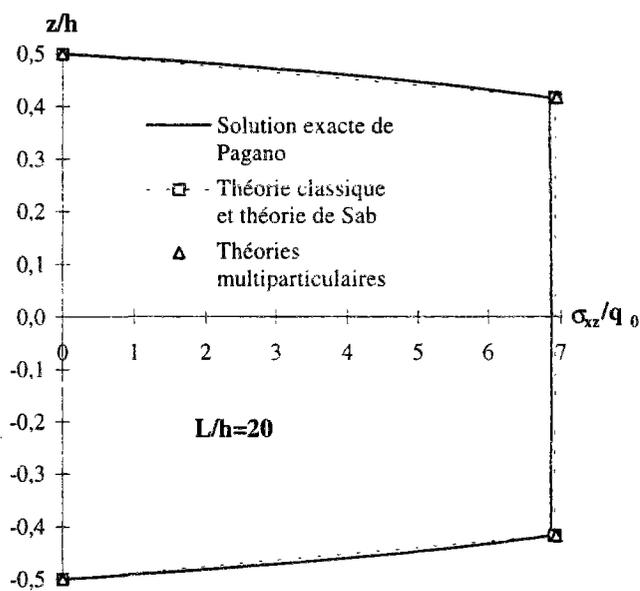


Figure 2.10 : Evolution des contraintes de cisaillement pour $d=10e$

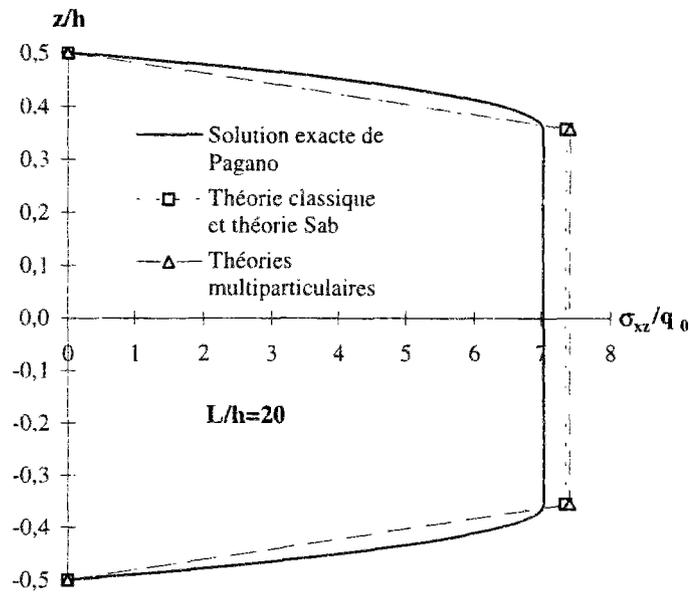


Figure 2.11 : Evolution des contraintes de cisaillement pour $d=5e$

Pour conclure, nous avons vu que les modélisations multiparticulaires étaient très pertinentes, ainsi que la théorie de Sab lorsque les peaux ne sont pas trop épaisses par rapport à l'âme. La pertinence des modèles multiparticulaires nous a conduit à développer une maille éléments-finis M4 pour les multicouches et pour les sandwichs (Smaoui 1996). Nous avons effectué les calculs dans le cas du modèle simplifié.

La maille élément-fini de la théorie de Sab n'a malheureusement pas été développée. Dans la partie suivante, nous nous contenterons de valider uniquement la maille multiparticulaire vis à vis de modélisations sandwichs éléments-finis.

II.2 COMPARAISON NUMERIQUE AVEC LE CODE DE CALCUL PAR ELEMENTS-FINIS SAMCEF

Dans cette partie, nous confrontons la maille élément-fini triparticulaire en version simplifiée (maille M4S), avec des modèles numériques éléments-finis réalisés avec le code de calcul SAMCEF.

En premier lieu, nous indiquons les différentes techniques de modélisations possibles pour les structures sandwichs SAMCEF, puis nous présentons les exemples d'application.

II.2.1 Modélisation de structures sandwichs par éléments-finis avec le logiciel SAMCEF

Le logiciel de calcul de structures par éléments finis SAMCEF a été développé conjointement par la société SAMTECH et l'université de Liège. Il possède des modules de simulation et d'analyse de structures, utilisables pour les composites multicouches. Il présente de nombreuses possibilités de contrôle par assistance graphique, au niveau de la définition du stratifié (visualisation des plis, visualisation des laminés, visualisation des épaisseurs, visualisation des matériaux...) ainsi qu'au niveau de l'analyse des résultats (contraintes et déformations par pli, critères de dégradation). Il dispose également d'éléments « classiques » en version multicouche pour lesquels les caractéristiques de chaque couche sont des données d'entrée (matériau, orientation, épaisseur du pli). Enfin ce logiciel permet de réaliser la plupart des analyses thermomécaniques de structures composites: analyse statique linéaire et non linéaire, analyse dynamique (modes propres, réponse transitoire et harmonique), flambement et post-flambement (cf. manuels utilisateurs).

II.2.1.1 Les éléments quadrangles multicouches de SAMCEF pour les composites stratifiés

Il existe deux types d'éléments finis quadrangulaires dans la bibliothèque d'éléments de SAMCEF destinés à modéliser des objets composites 3D multicouches:

- Les éléments T11 de volume isoparamétrique
- Les éléments T56 de coque hybride de Marguerre

Le premier type d'éléments est utilisé pour la modélisation de coques épaisses ou de volumes. Le deuxième type d'élément est plutôt dédié à la modélisation de coques minces stratifiées en version multicouche.

■ Description de l'élément T11

L'élément se présente sous la forme d'un parallélépipède curviligne à 8 sommets. Le nombre de degrés de libertés de l'élément est fixé par le degré général de l'élément, choisi par l'utilisateur. Les éléments peuvent être du 1^{er} degré, du 2^{ème} degré, ou du 3^{ème} degré. Il existe deux formulations de l'élément: une version volumique et une version coque. Pour l'élément de volume, le nombre de degrés de libertés est de 24, 60 et 96 pour le degré général 1, le degré 2 et le degré 3, respectivement. Pour l'élément de coque, quelque soit le degré considéré, les arêtes suivant l'épaisseur de l'élément sont toujours de degré 1. Le nombre de degré de libertés est donc égal à 24, 48, et 72 en degré 1, 2 et 3 respectivement. De plus les contraintes dans l'épaisseur σ_{zz} sont nulles. Notons qu'il est également possible de définir explicitement des noeuds d'interface sur les arêtes des éléments de SAMCEF. L'élément T11 peut ainsi compter jusqu'à 32 noeuds en degré 3 (deux noeuds d'interface par arêtes). Par cette méthode, on peut imposer le degré 2 dans l'épaisseur de l'élément en version coque, en définissant un noeud supplémentaire sur les arêtes correspondantes.

■ Description de l'élément T56

L'élément T56 est constitué par la superposition d'une membrane isoparamétrique de Marguerre et d'une plaque hybride de Love/Kirchhoff. Il est défini par 4 ou 8 noeuds selon qu'il soit du 1^{er} ou du 2^{ème} degré. Dans ce dernier cas les 4 noeuds supplémentaires sont les noeuds d'interfaces situés au milieu des arêtes.

II.2.1.2 Techniques de modélisation des plaques sandwichs en composite

Il existe différentes techniques de modélisations de matériaux sandwichs utilisant les éléments T11 ou/et T56 en version mono ou multicouches (*Maréchal 1989*), (*Craveur 1996*). Toutes ces techniques visent à obtenir des résultats d'une bonne précision pour un temps de calcul minimal.

La première technique consiste à n'employer que des éléments T56 multicouches de degré 2 (cf. figure 2.12). Cette technique permet de simuler une structure sandwich de faible épaisseur dont le comportement est peu différent de celui d'une plaque mince stratifiée. On peut en effet négliger dans ce cas, les déformations dues aux effets du cisaillement transverse et considérer que les sections droites du panneau restent droites et normales à la déformée moyenne après déformation. Les hypothèses de Love/Kirchhoff utilisées dans la formulation de l'élément T56 sont bien vérifiées.

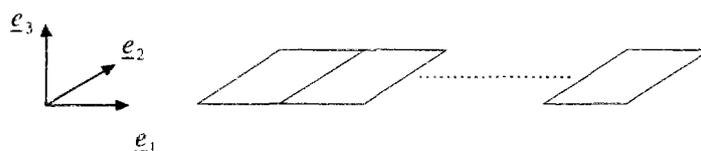


Figure 2.12: *Éléments multicouches de type 56*

Une structure sandwich sera donc modélisée de façon satisfaisante par les éléments T56 lorsqu'on pourra approcher son champ de déformation par celui de Love/Kirchhoff, c'est à dire si elle est peu sensible aux efforts tranchants.

La deuxième technique consiste à n'utiliser que des éléments volumiques multicouches T11 qui semblent a priori mieux adaptés que les éléments bidimensionnels T56 à la modélisation des sandwichs (cf. figure 2.13). Chaque section du sandwich peut se déformer en une courbe linéaire, quadratique ou cubique selon le degré général du champ de déplacement choisi par l'utilisateur. Les éléments T11 ne sont plus limités par l'hypothèse de conservation des sections droites.

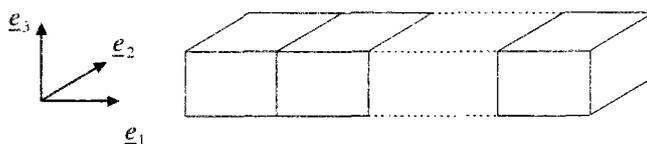


Figure 2.13: *Éléments multicouches de type 11*

Pour des structures sandwichs très déformables à l'effort tranchant, l'utilisation d'éléments T11 du 1^{er} ou du 2^{ème} degré peut s'avérer insuffisante pour modéliser correctement les déformations dans l'épaisseur du sandwich. On leur préférera l'utilisation d'éléments de degré 3 dont le champ de déplacement représente une déformée de section droite plus conforme à la réalité.

Une variante de cette technique consiste à négliger les effets du cisaillement transverse dans les peaux en fixant leurs modules de cisaillement à zéro.

La troisième et dernière technique de modélisation est un compromis entre la première et la deuxième technique. Son objectif est de modéliser chacun des constituants du sandwich (peaux et âme) par un élément différent de façon à mieux tenir compte des écarts importants entre les propriétés matérielles de l'âme et des peaux. La modélisation du sandwich est effectuée en superposant dans l'épaisseur un élément monocouche T11 pour l'âme et deux éléments multicouches T56 pour les peaux (cf. figure 2.14). De cette façon les propriétés matérielles ne varient plus de façon importante au sein d'un même élément.

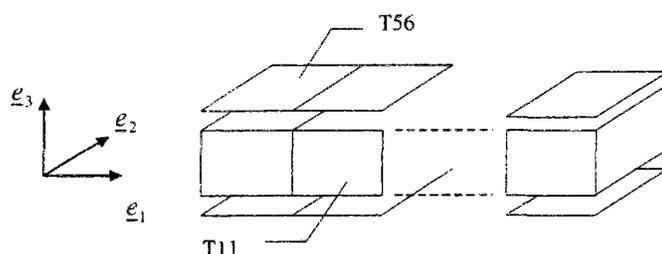


Figure 2.14: Superposition d'éléments T11 et T56 - Vue éclatée suivant e_3 .

Pour reprendre correctement la rigidité flexionnelle des peaux, on modifie l'épaisseur du coeur de manière à ramener le plan moyen des peaux à leur position réelle (cf. figure 2.15).

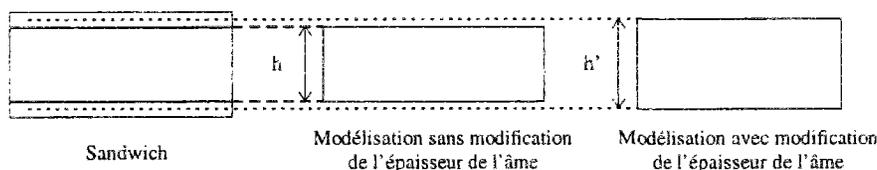


Figure 2.15: Position des plans moyens

L'augmentation de l'épaisseur du coeur s'accompagne d'une diminution de ses modules élastiques proportionnellement au rapport $\frac{h'}{h}$.

Dans les exemples d'application qui suivent nous modéliserons les structures sandwichs par ces trois techniques de modélisation, en choisissant pour les éléments, différentes hypothèses concernant le degré du champ de déplacement et le nombre de points d'intégration (ou points de Gauss) (cf. tableau 2.3).

Maillages	Type d'éléments	Degré général	Nombre de points de Gauss (e_1, e_2, e_3)
Maillage n°1	T56	degré 2	2×2
Maillage n°2	T11	degré 2	2×2×2
Maillage n°3	T11	degré 3	2×2×2
Maillage n°4	T11 + G_{xz} et G_{yz} nuls dans les peaux	degré 2	3×2×2
Maillage n°5	T11+T56	degré 2	2×2×2

Tableau 2.3: Modélisations retenues pour l'étude

A toutes ces modélisations, nous rajouterons une modélisation éléments finis réalisée avec une très grande finesse de maillage, que nous pourrons considérer comme la référence des calculs de simulation (cf. figure 2.16). Cette modélisation est constituée uniquement d'éléments T11 en hypothèse de volume, en version monocouche pour l'âme et multicouche pour les peaux.

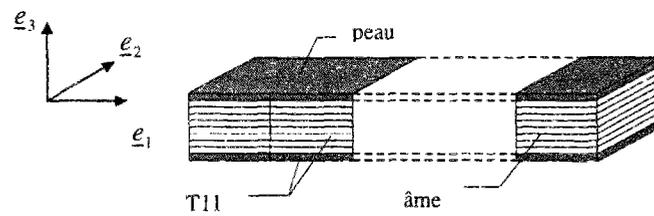


Figure 2.16: Maillage fin en T11

La discrétisation est effectuée dans les 3 directions de l'espace. Les éléments sont de degré 2 dans toutes les directions. Des noeuds d'interfaces ont été explicitement définis dans les deux directions du plan e_1 et e_2 . Ce maillage fin comporte ainsi beaucoup de degrés de liberté. Ce maillage tridimensionnel fournit des résultats d'une très grande précision. Cependant il est très coûteux pour un calcul de structures de plaque (cf. tableaux 2.5, 2.9 et 2.11).

II.2.2 Exemples d'application

Les exemples que nous traitons dans ce paragraphe sont issus d'études sur la modélisation numérique des sandwichs, réalisées par la société SAMTECH qui est chargée de développer et de maintenir le logiciel SAMCEF.

La grandeur qui nous intéresse est la déflexion maximale au centre de la structure.

Nous indiquerons les temps de calcul obtenus sur station de travail SUN SS10. Vous noterez que les temps de calcul de la maille M4S n'étant pas optimisés, ces valeurs ne sont données qu'à titre indicatif. Cependant, nous indiquons le nombre de degré de liberté pour avoir un ordre d'idée des temps de calculs du modèle multiparticulaire par rapport aux autres modélisations éléments-finis.

II.2.2.1 Exemple 1: Flexion 3 points de plaque sandwich

Ce premier exemple provient d'un rapport SAMTECH sur la modélisation de sandwich par éléments-finis (Maréchal 1989).

On considère une plaque, soumise à un chargement en flexion 3 points, constituée d'une âme en nid d'abeille de 10mm d'épaisseur et de deux peaux composées de 6 plis d'épaisseur 0,125 mm et d'empilement $[90^\circ, 0^\circ]_3$ pour la peau inférieure et $[0^\circ, 90^\circ]_3$ pour la peau supérieure. Le repère (e_1, e_2, e_3) est un repère d'orthotropie pour les peaux et l'âme.

Les caractéristiques mécaniques du nid d'abeille et du préimprégné sont données tableau (2.4).

Les dimensions ainsi que les propriétés matérielles sont indiquées figures (2.17).

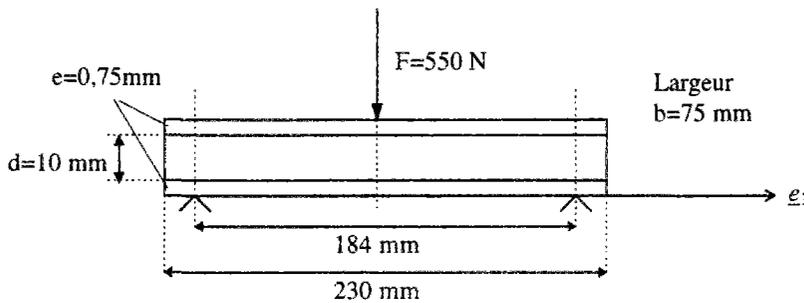


Figure 2.17: Dimensions de la poutre

	E_1 (MPa)	E_2	E_3	G_{12}	G_{13}	G_{23}	$\nu_{12}=\nu_{23}=\nu_{13}$
nida	5	5	67	30	24	35	0,35
préimprégné	47000	3000	3000	1600	1600	1600	0,35

Tableau 2.4: Propriétés matérielles

Pour des raisons de symétrie, nous n'avons modélisé qu'un quart de plaque. Les maillages n°1,2,3,4 et multiparticulaire sont constitués de 10 éléments dans la longueur et de 5 éléments dans la largeur, soit en tout, de 10×5 éléments. Le maillage 5 qui possède trois rangées d'éléments dans l'épaisseur, comprend $10 \times 5 \times 3$ éléments.

Le nombre de degré de liberté des maillages est indiqué tableau (2.5). On y trouvera également les résultats des déflexions maximales (au centre) obtenues pour les différentes modélisations du sandwich, ainsi que les temps de calcul CPU.

Maillages	Nombre de degrés de liberté	Déflexion au centre en (mm)	Temps CPU
Maillage fin de référence	6802	2,15	3mn16s
Maillage n°1 (T56 de degré 2)	710	0,89	5,9s
Maillage n°2 (T11 de degré 2)	1187	1,03	19,6s
Maillage n°3 (T11 de degré 3)	1368	2,10	23,4s
Maillage n°4 (T11 + $G_{ij}=0$ dans les peaux)	1187	2,57	24,5s
Maillage n°5 (T11+T56)	1617	2,54	16,6s
Maillage Multiparticulaire (TriS)	1267	2,14	45,4s

Tableau 2.5: Exemple 1 - Nombre de degrés de liberté, résultats de déflexions et temps de calcul machine

Remarques: ☞ Le nombre de degré de liberté d'un maillage éléments-finis est classiquement le nombre de degré de liberté en un noeud multiplié par le nombre de noeuds du maillage. Pour le modèle multiparticulaire, nous avons défini une cinématique à 7 champs scalaires. Le nombre de degrés de liberté du maillage est donc 7 que multiplie le nombre de noeuds.

☞ La finesse des maillages assure la convergence des solutions.

On constate que les maillages n°1, 2 donnent des résultats très éloignés de ceux de référence, et dans une moindre mesure les maillages 4 et 5. Seul le maillage n°3 est satisfaisant.

Le meilleur résultat est obtenu par la maille élément-fini multiparticulaire qui prévoit une déflexion pratiquement identique à celle du maillage fin de référence. La modélisation multiparticulaire éléments-finis est donc extrêmement pertinente pour cet exemple.

II.2.2.2 Exemple 2: Flexion 4 points de poutres sandwichs

Dans cette partie, nous reprenons l'étude réalisée par E. Maréchal sur la comparaison de différents modèles éléments finis de poutres sandwichs en flexion 4 points (Maréchal 1990).

Nous nous intéressons à 3 exemples de poutres sandwichs, plus ou moins déformables à l'effort tranchant.

Test n°1: la poutre est peu déformable à l'effort tranchant ($\rho = 0,04$).

Test n°2: La poutre est moyennement déformable à l'effort tranchant ($\rho = 1,7$).

Test n°3: la poutre est très déformable à l'effort tranchant ($\rho = 3,1$).

où $\rho = \frac{E_{peaux}}{G_{âme}} \left(\frac{h}{L} \right)^2$ permet d'estimer l'influence du cisaillement transverse du sandwich.

h est l'épaisseur du sandwich et L la distance entre appuis.

La géométrie et les dimensions des panneaux sont indiquées figures (2.18) à (2.20), respectivement pour les trois cas. Les caractéristiques des matériaux sont données dans le repère structural de la poutre, tableaux (2.6) à (2.8).

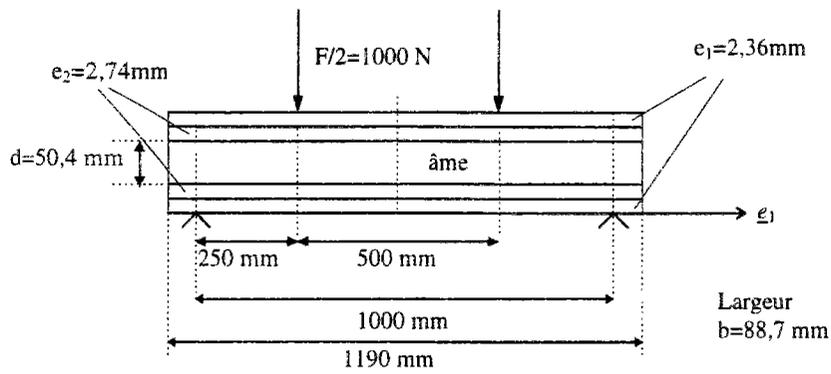


Figure 2.18: Test n°1 - dimensions de la structure

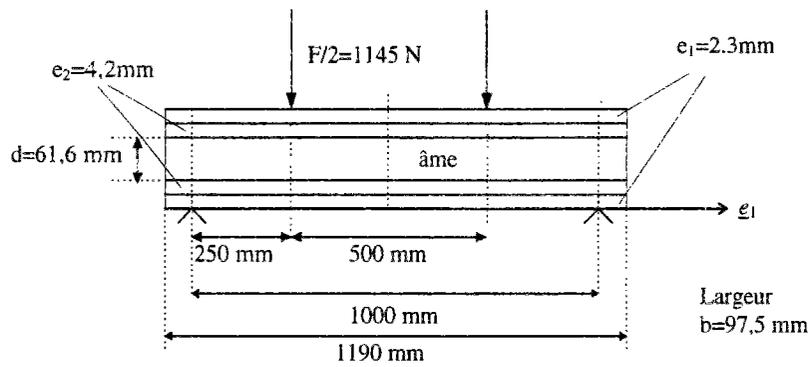


Figure 2.19: Test n°2 - Dimensions de la structure.

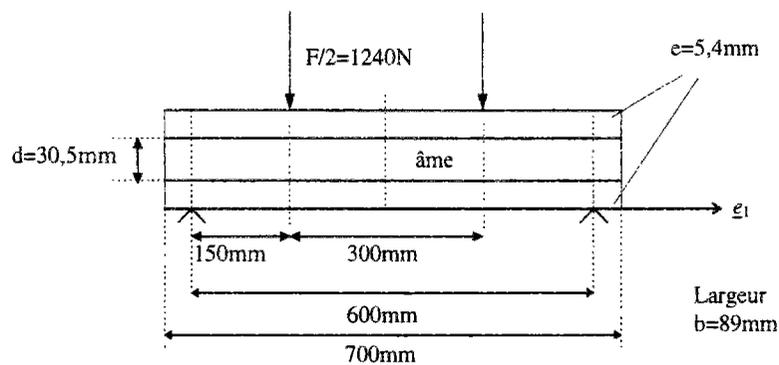


Figure 2.20: Test n°3 - Dimensions de la structure

	<i>Epaisseur (mm)</i>	E_1 (MPa)	E_2	E_3	G_{12}	$G_{13}=G_{23}$	ν_{12}	$\nu_{23}=\nu_{13}$
<i>Ame</i>	50,4	380	380	3000	140	1400	0,30	0,30
<i>Pli n°1</i>	2,36	15480	15480	5600	2450	4000	0,13	0,30
<i>Pli n°2</i>	2,74	16690	16690	6270	2650	4000	0,13	0,30

Tableau 2.6: Test n°1 - Propriétés matérielles

	<i>Epaisseur (mm)</i>	$E_1=E_2$ (MPa)	E_3	G_{12}	$G_{13}=G_{23}$	ν_{12}	$\nu_{23}=\nu_{13}$
<i>Ame</i>	61,6	150	150	57,7	57,7	0,30	0,30
<i>Pli n°1</i>	2,3	17970	6740	2820	4000	0,15	0,30
<i>Pli n°2</i>	4,2	16690	6270	2640	4000	0,13	0,30

Tableau 2.7: Test n°2 - Propriétés matérielles

	<i>Epaisseur (mm)</i>	$E_1=E_2$ (MPa)	E_3	G_{12}	$G_{13}=G_{23}$	ν_{12}	$\nu_{23}=\nu_{13}$
<i>Ame</i>	30,5	60	60	23	23	0,30	0,30
<i>Pli</i>	5,4	15000	5000	2450	4000	0,13	0,30

Tableau 2.8: Test n°3 - Propriétés matérielles

La symétrie du problème permet de ne modéliser qu'une moitié de structure.

Pour les tests 1 et 2,

- 20×1 éléments (maillages n°1,2,3,4 et multiparticulaire)
- 20×1×3 éléments (maillage n°5)

Pour le test 3,

- 17×1 éléments (maillages n°1,2,3,4 et multiparticulaire)
- 17×1×3 éléments (maillage n°5)

Le tableau (2.9) indique le nombre de degrés de liberté des différents maillages.

<i>Maillages</i>	<i>Test 1</i>	<i>Test 2</i>	<i>Test 3</i>
<i>Maillage fin de référence</i>	6347	6319	5392
<i>Maillage n°1 (T56 de degré 1)</i>	421	421	358
<i>Maillage n°2 (T11 de degré 2)</i>	732	732	622
<i>Maillage n°3 (T11 de degré 3)</i>	854	854	728
<i>Maillage n°4 (T11 + $G_{ij}=0$ dans les peaux)</i>	729	729	621
<i>Maillage n°5 (T11+T56)</i>	729	729	621
<i>Maillage Multiparticulaire (TriS)</i>	721	721	616

Tableau 2.9: Exemple 2 - Nombres de degré de liberté

Les résultats des déflexions sont regroupés au tableau (2.10) et les temps de calculs au tableau (2.11).

<i>Maillages</i>	<i>Test 1</i>	<i>Test 2</i>	<i>Test 3</i>
<i>Maillage fin de référence</i>	2,53	1,97	3,69
<i>Maillage n°1 (T56 de degré 2)</i>	2,47	1,28	1,64
<i>Maillage n°2 (T11 de degré 2)</i>	2,50	1,34	1,70
<i>Maillage n°3 (T11 de degré 3)</i>	2,51	1,76	2,19
<i>Maillage n°4 (T11 + $G_{ij}=0$ dans les peaux)</i>	2,50	2,12	4,63
<i>Maillage n°5 (T11+T56)</i>	2,48	2,17	4,83
<i>Maillage Multiparticulaire (TriS)</i>	2,58	1,98	3,80

Tableau 2.10: Exemple 2 - Résultats de déflexions (en mm)

<i>Maillages</i>	<i>Test 1</i>	<i>Test 2</i>	<i>Test 3</i>
<i>Maillage fin de référence</i>	46,0s	48,0s	45,1s
<i>Maillage n°1 (T56 de degré 1)</i>	2,76s	3,89s	2,93s
<i>Maillage n°2 (T11 de degré 2)</i>	8,91s	5,03s	3,62s
<i>Maillage n°3 (T11 de degré 3)</i>	7,30s	7,29s	5,03s
<i>Maillage n°4 (T11 + $G_{ij}=0$ dans les peaux)</i>	6,27s	5,94s	3,93s
<i>Maillage n°5 (T11+T56)</i>	6,47s	6,36s	5,55s
<i>Maillage Multiparticulaire (TriS)</i>	15,0s	14,3s	13,8s

Tableau 2.11: Exemple 2 - Temps de calculs CPU

Ces résultats montrent que globalement la précision des modélisations numériques SAMCEF diminue lorsque l'influence du cisaillement transverse sur les déformations augmente. Pour une poutre très sensible à l'effort tranchant, on constate même qu'aucune modélisation éléments-finis classique n'est adaptée pour ce type de problème.

Le modèle multiparticulaire quant à lui donne des résultats très satisfaisants pour les trois tests puisque les écarts n'excèdent pas 4% avec les déflexions maximales de référence.

II.2.2.3 Synthèse des résultats

Les exemples de cette partie ont abordé plusieurs comportements de poutres sandwichs plus ou moins sensibles aux déformations dues au cisaillement transverse.

Ils ont permis ainsi, d'évaluer pour différents problèmes la précision de la maille multiparticulaire par rapport à d'autres modèles sandwichs classiquement utilisés en éléments finis, comme la superposition d'éléments T56/T11 de SAMCEF.

Nous avons regroupé dans un tableau récapitulatif, les erreurs de précision obtenues entre les résultats du maillage de référence et les autres mailles éléments-finis (cf. tableau 2.12). L'erreur est définie de la même manière que dans la partie II.2.2 (cf. relation 2.12). Nous avons également indiqué les valeurs de deux paramètres mesurant l'importance de l'effort

tranchant dans le comportement de la poutre sandwich: l'épaisseur relative des peaux $\frac{d}{e}$ et le critère ρ aussi bien pour le premier exemple que pour le second exemple.

	<i>Exemple 1</i>	<i>Exemple 2: Test n°1</i>	<i>Exemple 2 Test n°2</i>	<i>Exemple 2 Test n°3</i>
$\frac{d}{e}$	13,33	9,88	9,48	5,65
ρ	7,7	0,04	1,7	3,1
<i>Maillage n°1 (T56 de degré 2)</i>	58%	2%	35%	55%
<i>Maillage n°2 (T11 de degré 2)</i>	52%	1%	32%	54%
<i>Maillage n°3 (T11 de degré 3)</i>	2%	1%	11%	41%
<i>Maillage n°4 (T11 + $G_{ij}=0$ dans les peaux)</i>	19%	1%	8%	25%
<i>Maillage n°5 (T11+T56)</i>	18%	2%	10%	31%
<i>Maillage Multiparticulaire (TriS)</i>	<1%	2%	<1%	3%

Tableau 2.12: Erreurs par rapport aux modèles éléments-finis de référence

Ce tableau (2.12) montre que les modélisations SAMCEF donne des résultats très inégaux selon les types de problème considérés.

Pour l'exemple 1, seul le maillage 3 et dans une moindre mesure les maillages 4 et 5, décrivent correctement le comportement de la plaque. Les autres maillages de SAMCEF sont inadaptés. Il est vrai que l'influence du cisaillement transverse, qui est très importante dans la poutre sandwich, explique l'inefficacité des modèles en éléments T56 et T11 multicouches de degré 2 destinés plutôt à la description de sandwichs peu ou moyennement déformables à l'effort tranchant.

Pour le test 1 de l'exemple 2, l'influence du cisaillement transverse est très faible et la cinématique peut être décrite par des champs de Love-Kirchhoff. Toutes les modélisations de SAMCEF donnent dans ce cas des résultats extrêmement pertinents.

Pour le test 2 de l'exemple 2, l'influence du cisaillement augmente dans le sandwich. Les maillages 1 et 2 sont cette fois inadaptés à la modélisation des sandwichs. Les maillages 3, 4 et 5 quant à eux, sont satisfaisants. Ces résultats sont qualitativement comparables à ceux de l'exemple 1.

Enfin pour le dernier test de l'exemple 2, aucune des modélisations de SAMCEF n'est satisfaisante. Le paramètre ρ est pourtant moins élevé que dans le premier cas. Il semble que ce soit l'importance de l'épaisseur des peaux relativement à celle de l'âme (paramètre d/e) qui soit à l'origine des mauvais résultats de ces modèles. Même les modélisations 3, 4 et 5 de SAMCEF qui semblent les mieux adaptées pour la modélisation des sandwichs atteignent leur limite dans ce cas de figure.

Le modèle multiparticulaire semble au contraire s'adapter à tous les types de problème de panneaux sandwichs. Récapitulons les résultats. Il se situe à moins de 1% du résultat de référence pour l'exemple 1 et le test n°2 de l'exemple 2, à 2% pour le test n°1 et à 3% pour le test n°3.