
ETUDE COMPARATIVE DES MÉTHODES DE CALCUL DE LA DIMENSION FRACTALE APPLICABLES AUX SURFACES DE RUPTURE

Les méthodes de calcul de la dimension fractale Δ sont nombreuses et ont été largement discutées dans la littérature [Charkaluk E. et al, 1998], [Cherepanov G.P. et al, 1995], [Katowski P., 2006], [Tricot C. et al, 1988], [Tricot C. et al, 2001].

Trois caractéristiques conditionnent la fiabilité de telles méthodes. Pour qu'en effet, une méthode de calcul de la dimension fractale soit fiable, elle doit être: robuste (peu sensible aux erreurs de mesures), convergente (apporte en moyenne les mêmes résultats sous l'invariance des conditions expérimentales), et de faible dispersion (elle permet la construction des estimateurs à faible dispersion) [Bigerelle M., 1999].

Pour déterminer la dimension fractale d'un objet plongé dans un espace euclidien de dimension d , on en définit intuitivement un recouvrement par $N(l)$ d -boules de taille linéaire l , puis l'on déduit la dimension fractale Δ , pour l tendant vers 0, via l'interpolation linéaire, à partir de la relation de proportionnalité suivante [Le Méhauté A., 1990]:

$$N(l) \sim l^{-\Delta} \quad (2.1.)$$

où $\Delta_t < \Delta < d$, avec Δ_t la dimension topologique de l'objet.

Une fois trouvée, la dimension Δ permettra de dire si l'objet considéré, possède ou non une structure fractale : en effet, pour Δ très proche de 1 ou de 2, l'objet analysé sera considéré comme étant de structure euclidienne; par contre, pour $1 < \Delta < 2$, tout en étant très éloigné de ces deux valeurs, la structure sera dite fractale, et la droite de régression introduite par la relation de proportionnalité (2,1), pourra alors se déterminer avec une erreur acceptable.

La dimension fractale est une dimension attachée à une structure analysée. Elle est une caractéristique pouvant aider à la différenciation entre deux formes, deux objets ou deux profils apparemment semblables.

2.1. La méthode de l'arpenteur (Technique de Richardson ou Méthode du compas)

La côte bretonne dont Richardson fut, en 1950, le premier à vouloir mesurer la longueur dans les moindres détails, a été la première expérience ayant, par la suite, conduit à la définition de la dimension fractale.

La méthode utilisée consistait, intuitivement, à arpenter la côte, en reportant périodiquement la jauge de mesure d'espace η , représentée par la longueur constante du pas posé au sol.

Les irrégularités de la côte n'étant véritablement perceptibles qu'à des échelles microscopiques de mesure, Richardson en vint à la conclusion que la valeur de la longueur ainsi mesurée est d'autant plus grande que la jauge est petite; et qu'en

particulier, la longueur $L(\eta)$ de la côte bretonne tend vers l'infini, pour des valeurs η de la jauge tendant vers zéro.

Plus généralement, Richardson permet ainsi de mettre en évidence, pour un objet fractal mesuré, une relation entre la longueur de la jauge, d'une part, et le nombre de ses reports d'autre part. La taille d'un objet dépend, par conséquent, de l'unité de mesure ou de la jauge utilisée: c'est la loi d'échelle.

2.1.1. Longueur d'une courbe rectifiable

Soit $f : [a, b] \rightarrow R^2$

$t \rightarrow f(t) = (x(t), y(t))$, l'expression analytique d'une courbe C . Une ligne polygonale P inscrite sur cette courbe est donnée par ses sommets $M_j = f(t_j) = (x(t_j), y(t_j))$, où : $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$, et admet pour longueur le réel $\lambda(P)$ défini par:

$$\lambda(P) = \sum_{j=0}^{n-1} M_j M_{j+1} \quad (2.2.)$$

La courbe C est dite rectifiable, s'il existe un réel λ indépendant des t_j , tel que:

$$L = \sup_{\sigma[a,b]} |\lambda(p)| \leq \lambda \quad (2.3.)$$

où $\sigma[a,b]$ représente l'ensembles des subdivisions de l'intervalle $[a,b]$. L est la longueur estimée de la courbe C .

2.1.2. Caractérisation de la rectifiabilité

a) Avec une jauge de mesure d'espace η constante, si l'on pose:

$$\begin{aligned} t_{j+1} - t_j &= \delta(t), \delta(t) = \text{const} \\ \text{ante, } \forall j &= 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (2.4.)$$

où $\delta(t)$ représente la jauge de temps. La longueur $\lambda(P)$ de la courbe C , ne dépendrait finalement, plus que du nombre q , de pas nécessaires à sa mesure, soit:

$$\lambda(P) = \lambda(q) \quad (2.5.)$$

En considérant, pour des raisons de commodités, une durée de mesure unitaire; on obtiendrait ainsi, pour le temps $t = 1$, nécessaire à la mesure de la longueur $\lambda(q)$,

$$1 = q\delta(t) \quad (2.6.)$$

puisque l'on a désormais:

$$t_0 = 0; t_j = \delta(t) = \frac{1}{q}, \forall j = 1, \dots, n-1; t_n = 1 \quad (2.7.)$$

Si l'on faisait, cette fois, varier le nombre q de pas de mesure, en posant [Le Méhauté,]:

$$q = p\alpha, \forall \alpha \in R_+^* \quad (2.8.)$$

où p est une fréquence généralisée; on pourrait ainsi écrire:

$$\begin{aligned} \lambda(q) = \lambda(p) = N(p)\eta(p), \text{ avec} \\ N(p) \sim p \end{aligned} \quad (2.9.)$$

$N(p)$ représentant le nombre de reports de la jauge $\eta(p)$ d'espace, nécessaire à la mesure de la longueur $\lambda(q)$ d'une ligne polygonale inscrite sur la courbe C .

b) On dira alors que la courbe C est rectifiable, pour exprimer que:

$$\lim_{\eta(p) \rightarrow 0} \lambda(p) \equiv \lim_{p \rightarrow +\infty} \lambda(p) \equiv \lim_{\substack{\delta(t) \rightarrow 0 \\ t \text{ fixé}}} \lambda(p) = L < +\infty, L \in R \quad (2.10.)$$

La représentation graphique de la longueur $\lambda(p)$, dans un système cartésien de coordonnées x et y , et en fonction de la fréquence généralisée p , fait ainsi apparaître, s'agissant d'une courbe rectifiable, une asymptote horizontale d'équation $y = L$.

2.1.3. Introduction intuitive des courbes fractales

Intuitivement, s'appuyant sur la remarque b) précédente, et à contrario, on dirait de la courbe C qu'elle est fractale, pour exprimer que:

$$\lim_{\eta(p) \rightarrow 0} \lambda(p) \equiv \lim_{p \rightarrow +\infty} \lambda(p) \equiv \lim_{\substack{\delta(t) \rightarrow 0 \\ t \text{ fixé}}} \lambda(p) = +\infty \quad (2.11.)$$

pour toute ligne polygonale de longueur $\lambda(p)$, inscrite sur C ; soit :

$$\lim_{Ln(\eta(p)) \rightarrow -\infty} Ln(\lambda(p)) = +\infty \quad (2.12.)$$

Cette relation est notamment vérifiée par tout graphe $(Ln(\eta(p)), Ln(\lambda(p)))$ admettant une expression analytique de la forme:

$$Ln(\lambda(p)) = (1 - \Delta)Ln(\eta(p)) + \gamma; \quad (\Delta, \gamma) \in R^* \times R \quad (2.13.)$$

D'où:

$$\lambda(p) \sim [\eta(p)]^{(1-\Delta)} \quad (2.14.)$$

Ceci permettant par la suite, de vérifier la célèbre formule introduite par Mandelbrot, en 1975 [Mandelbrot, 1975]:

$$N(p)[\eta(p)]^\Delta = L_0^\Delta \quad (2.15)$$

L_0^Δ étant une longueur caractéristique.

Remarques:

- Pour $\Delta=1$, L_0 apparaît comme étant la longueur d'une ligne polygonale dont les $N(p)$ segments constitutifs, sont de longueur uniforme $\eta(p)$;
- Pour $\Delta=2$, $L_0^2 \cdot L_0^2$ apparaît comme étant la surface d'un objet subdivisé en $N(p)$ carrés de côté $\eta(p)$;
- Toute valeur entière de Δ correspond donc ici, à la dimension, prise dans son sens mathématique traditionnel.
-

Par ailleurs, sous l'hypothèse $L_0=1$, le réel Δ peut s'écrire sous la forme:

$$\Delta = \frac{\text{Ln}(N(p))}{\text{Ln}\left(\frac{1}{\eta(p)}\right)} \quad (2.16)$$

C'est ainsi qu'un objet subdivisé en $N(p) = 4$ éléments de même longueur $\eta(p) = \frac{1}{3}$, admettrait comme valeur correspondante de Δ :

$$\Delta = \frac{\text{Ln}4}{\text{Ln}3} = 1.262 \quad (2.17)$$

Il s'agit de la courbe de Von Koch, représentée ci-dessous:

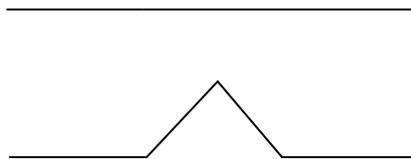


Fig. 2.1 a. Générateur de la décomposition fractale autosimilaire

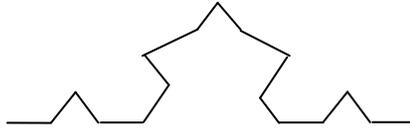


Fig. 2.1 b. Illustration de la méthode de Richardson pour $\eta = 1/3$ et $N=4$

Lorsque la valeur de Δ est non entière, elle traduit le degré d'irrégularité de l'objet considéré, et correspond par conséquent à sa dimension fractale.

2.1.4. Application de la technique de Richardson dans le cas des profils de rupture

S'inspirant de la relation de Richardson développée ci-dessus, quelques auteurs [Dlouhý I. & Strnadel B., 2008], [Underwood E.E. & Banerji K, 1992], ont pu relier la rugosité R_L d'un profil de rupture, à la longueur de la jauge d'espace ayant permis d'en mesurer la longueur approchée par approximation polygonale :

$$R_L = R_0 \cdot \eta^{(1-\Delta)} \quad (2.18.)$$

où η est la longueur de la jauge, R_0 une constante, et Δ la dimension fractal; R_L représentant la rugosité du profil, définie comme le rapport de la longueur L de la ligne polygonale approximant le profil, à sa projection L_0 sur l'axe des abscisses du repère Oxy, soit :

$$R_L = L / L_0 \quad (2.19.)$$

La détermination de la dimension fractale du profil, à partir de l'équation (2.18.), requiert une analyse par séparation de cas :

1er cas. R_0 est supposé inconnu :

Prenant le logarithme membre à membre de l'équation (2.18.), il vient :

$$\log R_L = \log R_0 + (1 - \Delta) \log \eta \quad (2.20.)$$

$$\Delta = 1 - \frac{d(\log R_L)}{d(\log \eta)} \quad (2.21)$$

2ème cas. R_0 est supposé connu:

De l'équation (2.20), la dimension fractale Δ est déterminée par régression linéaire de $\log R_L$ sur $\log \eta$, à partir de différentes mesures de la jauge d'espace η .

La longueur de cette jauge a été bien évidemment obtenue par segmentation du profil de la surface de rupture, et également à partir des dimensions morphologiques caractéristiques de la microstructure associée.

Des analyses fractographiques issues de la littérature [Dlouhý I.& Strnadel B., 2008], il découle que la longueur de la jauge d'espace est généralement choisie entre $8,6 \mu\text{m}$ et $34,3 \mu\text{m}$, et en particulier, entre $3,4 \mu\text{m}$ et $13,6 \mu\text{m}$, dans les régions à rupture ductile.

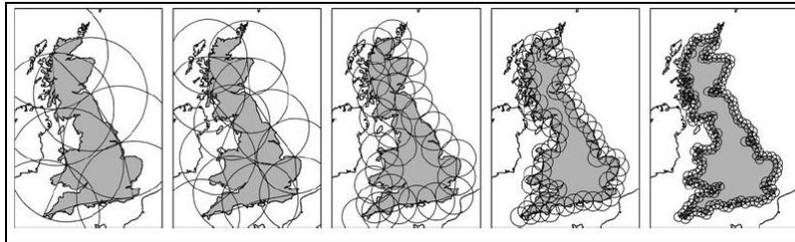


Fig. 2.2. Application de la méthode du compas pour les lignes de côte

2.1.5. Les limites de la méthode de l'arpenteur

Le profil d'une surface de rupture étant fortement irrégulière, son approximation, pas à pas, par interpolation linéaire, conduit nécessairement à des erreurs ayant un effet certain sur la détermination de la dimension fractale.

Un inconvénient d'utilisation de la méthode apparaît également, lorsqu'on est obligé de changer le pas de la jauge pour mesurer la longueur de la dernière portion de la courbe, alors que le calcul de la dimension fractale par la méthode de l'arpenteur nécessite la constance de la jauge. Cette difficulté peut cependant, être contournée, en choisissant des jauges de mesure très petites par rapport à la longueur de la ligne polygonale d'approximation.

Par ailleurs, cette méthode est complètement inadaptée aux courbes ne présentant aucune structure de similitude interne, comme l'atteste l'exemple issu des travaux de Tricot [Tricot C., 1999, page 239, paragraphe 16.1].

2.2. La méthode de Minkowski- Bouligand

Cette méthode vient pallier les insuffisances de la méthode de l'arpenteur, notamment pour le calcul de la dimension fractale des structures autoaffines, ou plus généralement anisotropes.

Cette fois, l'approximation du profil n'est plus réalisée par une ligne polygonale, mais plutôt obtenue par un recouvrement de celui-ci par des boules de même diamètre r , inférieur à un seuil η donné. L'empilement de boules ainsi obtenu, constitue ce que

l'on appelle *la saucisse de Minkowski* (voir figure 2.3.). Notons que dans le cas particulier d'une courbe Γ du plan, un tel recouvrement se fait par des disques de diamètre η , centrés en des points de Γ .

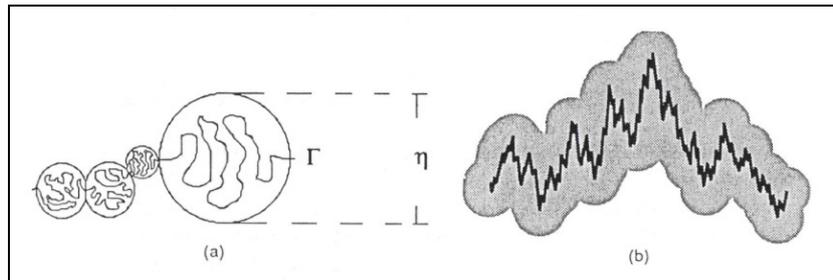


Fig. 2.3. La saucisse de Minkowski

L'introduction de cette méthode nécessite cependant un bref rappel de la dimension dite de Hausdorff.

2.2.1. La dimension de Hausdorff

On considère ici, un recouvrement minimal d'une courbe Γ par des disques de diamètre $r_j < \eta$, et de surface totale:

$$\mu_\eta(\Gamma) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\pi r_j^2}{4}, r_j < \eta \right\} \quad (2.22)$$

Pour des disques devenant infiniment petits, la mesure $\mu(\Gamma)$ de recouvrement ainsi obtenue, est dite *mesure de Lebesgue*, et est analytiquement définie par:

$$\mu(\Gamma) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \mu_\eta(\Gamma) \quad (2.23)$$

Cependant, dans le cas d'une courbe fractale, la mesure $H_{\alpha, \eta}$ adaptée est celle de Hausdorff; elle-même obtenue à partir de la mesure de *Lebesgue*, en substituant $\frac{\pi r_j^2}{4}$ à πr_j^α [Le Méhauté A., 1990], soit:

$$H_{\alpha, \eta}(\Gamma) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{+\infty} \pi r_j^\alpha, r_j < \eta \right\} \quad (2.24)$$

où α est un paramètre positif d'ajustement de la mesure, représentant plus largement, la dimension de l'espace dans lequel la mesure est effectuée; avec:

$$H_{\alpha}(\Gamma) = \lim_{\eta \rightarrow 0} H_{\alpha, \eta}(\Gamma) \quad (2.25.)$$

2.2.2. La dimension de Minkowski-Bouligand

Les boules sont désormais de diamètres identiques, et soit $N_{\eta}(\Gamma)$ leur nombre minimum, on a [Le Méhauté A., 1990]:

$$H_{\alpha, \eta}(\Gamma) \leq \eta^{\alpha} N_{\eta}(\Gamma) \quad (2.26.)$$

Ainsi, pour toutes les valeurs de α tels que:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} H_{\alpha, \eta}(\Gamma) = +\infty \quad (2.27.)$$

on a également :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \eta^{\alpha} N_{\eta}(\Gamma) = +\infty \quad (2.28.)$$

soit :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) \times \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(N_{\eta}(\Gamma))}{\ln\left(\frac{1}{\eta}\right)} - \alpha \right] = +\infty \quad (2.29.)$$

Mais comme $\lim_{\eta \rightarrow 0} \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) = +\infty$, le réel :

$$\Delta_{MB}(\Gamma) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\ln(N_{\eta}(\Gamma))}{\ln\left(\frac{1}{\eta}\right)} \quad (2.30.)$$

vérifiant nécessairement $\Delta_{MB}(\Gamma) \geq \alpha$, est dit: dimension de Minkowski-Bouligand.

Remarque:

L'expression mathématique de la dimension de Minkowski-Bouligand est, paradoxalement, analogue à celle correspondant à la dimension obtenue selon la méthode de l'arpenteur (paragraphe 2.1.3), dont elle est censée pallier les insuffisances.

En réalité, dans le cas particulier où la courbe Γ est plongée dans un espace de dimension 2, le recouvrement qui est réalisé par des disques B_η de même diamètre η , constitue une surface $A_2(\eta)$, vérifiant la relation:

$$\frac{A_2(\eta)}{\eta^2} \sim N(\eta) \quad (2.31.)$$

Aussi, peut-on écrire:

$$\Delta_{MB}(\Gamma) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[2 - \frac{\ln(A_2(\eta))}{\ln(\eta)} \right] \quad (2.32.)$$

Tout se passe intuitivement, comme si la saucisse de Minkowski- Bouligand avait été obtenue par la méthode de l'arpenteur, en ayant tout simplement épaissi, avec pour épaisseur η , une ligne polygonale d'approximation.

Plus généralement, lorsque l'objet étudié est plongé dans un espace de dimension d quelconque, la dimension de Minkowski-Bouligand peut alors se mettre sous la forme :

$$\Delta_{MB} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[d - \frac{\ln(A_d(\eta))}{\ln(\eta)} \right] \quad (2.33.)$$

où $A_d(\eta)$ désigne le volume d -dimensionnel de la saucisse correspondante.

Dans le cas particulier où l'espace de référence est de dimension 2, la dimension de Minkowski- Bouligand peut donc, par analogie avec la dimension de l'arpenteur, être estimée par régression linéaire de $\ln(A_2(\eta))$ en fonction de $\ln(\eta)$; la pente étant donnée par $(2 - \Delta_{MB})$.

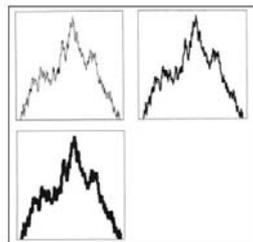


Fig.2.4. L'ensemble de Minkowski pour un profil de rupture [Russ J.C., 1994]

La dilatation d'un profil auto-affine exécutée dans la direction horizontale produit une "saucisse de Minkowski" [Russ J.C., 1994].

2.2.3. Les limites de la méthode de Minkowski- Bouligand

Bien qu'attrayante d'une certaine manière, et facile à mettre en œuvre, la méthode de Minkowski-Bouligand ne se prête pas naturellement à la régression linéaire; les points du diagramme $\left(\ln\left(\frac{1}{\eta}\right), \ln(N_\eta(\Gamma)) \right)$ pouvant présenter de fortes irrégularités locales, entraînant alors, une certaine imprécision de la méthode.

2.3. Méthode du comptage de boîtes (angl. Box Counting). Généralités

L'analyse d'image est loin de fournir la méthode la plus aisée et la plus fiable lorsqu'il nous importe d'examiner le caractère fractal d'un objet. A la condition de connaître l'ensemble qui va en déterminer la réponse, il peut être beaucoup plus pertinent de réaliser une interaction physique avec celui-ci et d'en tirer les dimensions fractales. D'une certaine manière l'ensemble de Minkowski est trop épais pour permettre de bons ajustements.

La méthode la plus connue pour déterminer alors les valeurs de Δ_{MB} est la méthode des boîtes.

La méthode peut être appliquée dans des structures manquant la propriété d'autosimilarité stricte. Cette méthode peut être aussi utilisée pour une analyse multi fractale.

Une modalité pour améliorer l'algorithme Box Counting est l'utilisation d'un programme informatique.

L'objet dont on cherche à calculer la dimension fractale est recouvert par un δ pavage où δ représente le diamètre des pavés.

Il s'agit de construire une suite δ_n décroissante ayant pour objet de recouvrir Γ par un réseau de mailles carrées de côté δ_n .

La valeur de la dimension fractale est obtenue par décompte du nombre N_δ de carrés rencontrant un point de Γ . La dimension est alors:

$$\Delta_{MB} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta}{\ln(1/\delta_n)} \quad (2.34.)$$

Pour chaque valeur de δ , soit N_δ le nombre de pavés du δ - pavage interceptés par l'objet. En considérant que N_δ suit une loi de puissance du type $\left(\frac{1}{\delta}\right)^\Delta$, ce que nous

noterons $N_\delta \propto \left(\frac{1}{\delta}\right)^\Delta$. Pour obtenir une approximation de la dimension de boîte Δ_b on effectue une régression linéaire sur le diagramme $(\log \frac{1}{\delta}, \log N_\delta)$. La pente de cette droite fournit un estimateur Δ_b de la dimension fractale Δ .

2.3.1. Limites de la méthode du comptage de boîtes

Cette méthode, classiquement utilisée en une ou deux dimensions engendre des difficultés lors de son application en trois dimensions. L'objet à analyser par la méthode Box Counting doit être digitalisé ou généré de façon à être utilisable. Les objets en trois dimensions sont en général un ensemble de formes paramétriques qui sont triangulaires.

Pour obtenir l'estimateur de la dimension de boîte Δ_b , il suffit de récupérer pour chaque échelle δ , le nombre N_δ de voxels de notre structure de grilles multi échelle interceptés par l'objet. Δ_b est la pente de la régression linéaire sur le diagramme $(\log \frac{1}{\delta}, \log N_\delta)$.

Observation: le voxel (élément de volume) représente un élément de l'espace 3D. Cet espace tridimensionnel est ainsi découpé en cubes élémentaires, et chaque objet est décrit par les cubes qui le composent.

2.4. La méthode des oscillations. Généralités

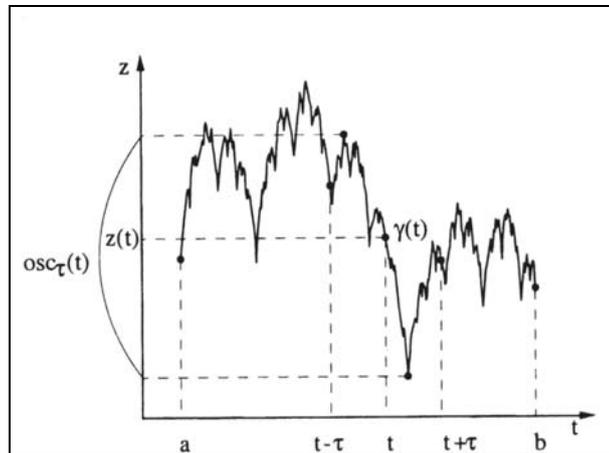
Nous avons vu dans les méthodes précédentes de détermination de la dimension de Minkowski-Bouligand Δ_{MB} que la couverture d'un ensemble Γ pouvait être effectuée de façon homogène par la réunion des "boules" de diamètre η_n .

Il pourrait en être de même en remplaçant les cercles et les carrés par des figures géométriques plus diverses, mais dont la dimension caractéristique (le diamètre) serait toujours de l'ordre de η_n .

Il est facile de comprendre qu'une mesure de type Minkowski-Bouligand est inadaptée à de tels ensembles puisqu'ils présentent des propriétés d'échelle distinctes selon les deux axes du graphe.

Il convient donc dans ce cas de trouver des méthodes plus adaptées, comme par exemple la méthode des oscillations, proposée par Tricot [Tricot. C., 1999], [Tricot. C., 2001], [Tricot. C., 2003].

La méthode des oscillations est une méthode assez fiable tant du point analytique qu'expérimental. Elle est particulièrement adaptée au calcul numérique car il n'y a plus d'erreur de discrétisation sur y .


 Fig.2.5. L'oscillation τ de la fonction z dans t [Le Méhauté A., 1990]

La courbe Γ est le graphe d'une fonction continue $z(t)$. La paramétrisation γ est la fonction qui, à tout t , fait correspondre le point $(t, z(t))$ du plan. L'arc local $\gamma(t-\tau) \cap \gamma(t+\tau)$ a pour projection sur Ot l'intervalle $[t-\tau, t+\tau]$, et pour projection sur Oz l'intervalle $\left[\inf_{|t-t'| \leq \tau} z(t'), \sup_{|t-t'| \leq \tau} z(t') \right]$.

Pour ce type particulier de courbe paramétrée, la partie $\gamma(t-\tau) \cap \gamma(t+\tau)$ correspond aux abscisses prises dans l'intervalle $[t-\tau, t+\tau]$.

Lorsque l'abscisse t représente le temps, la courbe Γ est une trajectoire. On définit l'oscillation τ de la fonction z en t :

$$OSC_{\tau}(f, x) = \left| \max_{|x-t| < \tau} (f(t)) - \min_{|x-t| < \tau} (f(t)) \right| \quad (2.35.)$$

On introduit la notion de "variation d'une fonction". La fonction de $z(t)$ sur $[a, b]$ est l'intégrale des oscillations. On la note $Var_{\tau}(z)$, ou Var_{τ} .

Ainsi :

$$Var_{\tau} = (b-a) \overline{osc_{\tau}} = \int_a^b osc_{\tau}(t) dt \quad (2.36.)$$

$$VAR_{\tau}(f, a, b) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b osc_{\tau}(f, x) dx \quad (2.37.)$$

La dimension fractale associée au graphe de la fonction f définie sur l'intervalle $[a,b]$:

$$\Delta(f,a,b) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(2 - \frac{\log \text{VAR}_{\tau}(f,a,b)}{\log \tau} \right) \quad (2.38.)$$

L'un des avantages de la méthode des oscillations est de substituer aux mesures géométriques l'intégrale d'une fonction à valeurs réelles, rendant l'estimation numérique plus précise.

La méthode peut être appliquée pour des graphes auto-affines. Par diverses simulations, [Bigerelle M. et al., 2007], [Charkaluk E. et al., 1998], [Dubuc B. et al., 1989], [Tricot C. et al., 1988], [Tricot C., 1999], [Tricot C., 2001], [Tricot C., 2003] ont montré que la méthode des oscillations est la mieux adaptée pour le calcul de la dimension fractale de graphes issues de fonctions du type $y=f(x)$.

2.4.1. L'application de la méthode des oscillations dans le cas des surfaces de rupture

L'oscillation est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur de z dans l'espace carré de centre (x,y) de côté 2τ . Il s'agit en fait du Rt local de rugosité [Bigerelle M. et al., 2007].

La τ -oscillation de la fonction bidimensionnelle f en x,y pour une surface est définie par :

$$f : [a,b] \times [c,d] \rightarrow R \quad (2.39.)$$

$$\text{OSC}_{\tau}(f,x,y) = \left| \begin{array}{c} \max_{\substack{|x-t| < \tau \\ |y-t| < \tau}} (f(t)) - \min_{\substack{|x-t| < \tau \\ |y-t| < \tau}} (f(t)) \end{array} \right| \quad (2.40.)$$

Et en prenant la moyenne des oscillations $\text{OSC}_{\tau}(f,x,y)$ définie sur la surface $[a,b] \times [c,d]$ on obtient :

$$\text{VAR}_{\tau}(f,a,b,c,d) = \frac{1}{(b-a)} \frac{1}{(d-c)} \int_a^b \int_c^d \text{OSC}_{\tau}(f,x,y) dx dy \quad (2.41.)$$

Alors, la dimension fractale de la surface s'écrit :

$$\Delta(f,a,b,c,d) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(3 - \frac{\log \text{VAR}_{\tau}(f,a,b,c,d)}{\log \tau} \right) \quad (2.42.)$$

Observation : la technique de mesure pour cette méthode est pratiquement indépendante d'un changement de l'amplification.

La dimension fractale estimée par la méthode des oscillations est généralement plus grande que celle évaluée par la méthode Box Counting [Tanaka M. et al., 2004].

2.4.2. Les limites de la méthode des oscillations

Le problème majeur de la méthode est la sensibilité aux valeurs extrêmes.

2.5. Méthode de fonction de structure

La fonction de structure S_2 est un outil bien connu pour l'analyse de l'irrégularité. Soit $a < b$ deux réels donnés, f de classe C^0 tel que :

$$\begin{aligned} f : [a - \tau, b + \tau] &\rightarrow R \\ x &\rightarrow f(x) \end{aligned} \quad (2.43.)$$

Nous pouvons définir la fonction de structure $S_2(f, \tau, a, b)$ de la manière suivante :

$$S_2(f, \tau, a, b) = \int_a^b [f(t + \tau) - f(t - \tau)]^2 dt \quad (2.44.)$$

Une modification de cette fonction qui donne des résultats plus efficaces en vue d'estimation de la dimension fractale a été proposée par le mathématicien français Claude Tricot [Tricot C., 1993] :

$$S_2(f, \tau, a, b) = \int_a^b \left[\frac{1}{\tau} \int_{t'=0}^{t'=\tau} [f(t+t') - f(t-t')]^2 dt' \right]^{\frac{1}{2}} dt \quad (2.45.)$$

La dimension fractale dans le cas des profils de rupture est calculée avec la relation:

$$\Delta(f, a, b) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(2 - \frac{\log S_2(f, \tau, a, b)}{\log \tau} \right) \quad (2.46.)$$

2.6. La méthode de l'analyse spectrale

L'analyse spectrale est un ensemble de méthodes de description de la variabilité statistique d'une série de données dans le champ fréquentiel, par le biais d'ondes sinusoïdales ou harmoniques. Elle permet, sur la base du théorème de Fourier, et pour des ondes, au demeurant, non périodiques et non sinusoïdales, une décomposition en une somme de fonctions sinusoïdales de fréquence et d'amplitude connues.

Toutefois, une analyse spectrale peut être synthétisée sous la forme d'une densité spectrale de puissance (*DSP*), définie, à partir de l'identité de Parseval, par :

$$\frac{1}{\lambda |H(f)|^2} \quad (2.47.)$$

où λ représente la longueur d'onde du signal étudié, et $H(f)$ sa Transformée de Fourier.

Par ailleurs, l'ajustement d'un modèle linéaire au spectre de puissance, dans un repère log-log, est une des méthodes les plus couramment utilisées, pour la détermination de la dimension fractale. Quelques petites difficultés relèvent cependant, de l'estimation du spectre de puissance, en raison de la forme discrétisée des données. Toutefois, une alternative mieux adaptée à la détermination de la dimension fractale peut être fournie par la méthode du maximum d'entropie (M.E.M).

En effet, lorsqu'il s'agit de l'appliquer à un ensemble de données spectrales présentant une très forte variabilité dans des régions à très basses fréquences, cette méthode apparaît comme une méthode d'analyse haute résolution, nettement plus précise que les méthodes traditionnellement basées sur la *FFT*.

2.6.1. Transformation de Fourier

La Transformation de Fourier est l'un des principaux outils de l'analyse spectrale, notamment adapté à l'étude de signaux non périodiques. Elle s'exprime sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions sinusoïdales; associant au signal analysé, et à l'image des développements en séries de Fourier, un spectre de fréquences.

Pour un signal numérisé $x(k)$, la transformée de Fourier est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j\omega k} \\ \omega = 2\pi f \end{array} \right. \quad (2.48.)$$

où X est une fonction complexe continue de la variable réelle f ; $\omega = 2\pi f$ désignant la pulsation.

Cette quantité existe, dès lors que la série (2.51.) converge. Tel est le cas, lorsque le signal $x(k)$ est absolument sommable. L'énergie que celui-ci transporte, possède alors une valeur finie, et est donnée par [Kunt M. et al., 1991] :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)|^2 \quad (2.49.)$$

Notons que pour un signal réel $x(k)$, les parties réelle et imaginaire de sa transformée de Fourier sont définies par :

$$R[X(f)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cos 2\pi fk \quad (2.50.)$$

$$I[X(f)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \sin 2\pi fk \quad (2.51.)$$

Il est important de remarquer que pour un signal réel, la partie réelle de la transformée de Fourier est une fonction paire et que la partie imaginaire est plutôt une fonction impaire.

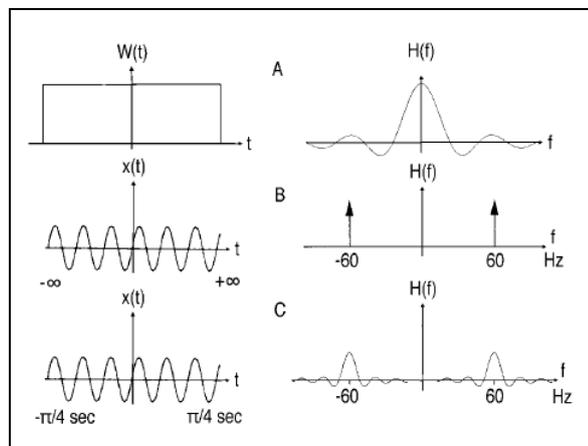


Fig. 2.6. Signaux et Transformées de Fourier correspondants [Tate J.N., 1998]:

- (A). Un signal rectangulaire dans le domaine temporel et le spectre associé.
- (B). Une sinusoïde infinie et son spectre associé.
- (C). Une sinusoïde bornée et son spectre.

2.6.2. Transformation de Fourier discrète (TFD) et Estimation de la Densité Spectrale de Puissance (DSP)

Pour un signal discret $x(k)$, la transformation de Fourier discrète est définie par :

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)e^{-j2\pi fk} \quad (2.52.)$$

La Transformée de Fourier discrète est donc 1-périodique.

Toutefois, pour son évaluation numérique, il convient dans un premier temps, de discrétiser la fréquence f et dans un second, de limiter la durée du signal [Kunt M. et al., 1991].

En effectuant, en effet, le changement de la variable f en n ($n \in Z$), sur l'intervalle $[-1/2, 1/2]$, lui-même discrétisé avec un pas $\Delta f = \frac{1}{N}$, la relation (2.55.) peut alors se mettre sous la forme :

$$X(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)e^{-j2\pi \frac{n}{N}k} \quad (2.53.)$$

Notons que $X(n)$ est N -périodique. Ainsi pour un signal de durée inférieure ou égale à N , soit pour $k = 0, 1, \dots, N-1$, k entier, on a :

$$\begin{aligned} X(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k)W_N^{nk}; \quad W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \\ x(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} X(n)e^{j\frac{2\pi nk}{N}} \end{aligned} \quad (2.54.)$$

En pratique, la *TFD* se calcule sur la base d'un échantillon d'un signal $x(t)$, se présentant sous la forme discrétisée suivante:

$$x_n = x(n\Delta t), n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.55.)$$

La *TFD* correspondante est alors définie par :

$$H(f) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{j2\pi fn\Delta t}; f = \frac{k}{N\Delta t}; N\Delta t = \lambda; \quad (2.56.)$$

$H(f)$ est ici estimée par un algorithme FFT d'ordre 2, sous l'hypothèse que N soit une puissance de 2. La DSP $I(f)$ correspondante, est ainsi définie par:

$$I(f) = \frac{1}{N\Delta t} |H(f)|^2 \quad (2.57.)$$

En pratique, cette relation engendre des biais (dispersions très fortes) pouvant être réduits en évaluant (2.60) selon les deux méthodes suivantes:

a) $I(f)$ est estimée par la moyenne $S(f)$ de ses observations dans le champ fréquentiel.

C'est l'estimation dite de Daniell, généralement utilisée pour des données dont l'effectif est supérieur à 2000 points et définie par :

$$S(f) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m I(f_j); \quad (2.58.)$$

les f_j étant symétriques par rapport à f . La transformée de Fourier Rapide (FFT) n'est, quant à elle, rien d'autre qu'une procédure de calculs rapides de la TFD.

Il existe ainsi un grand nombre d'algorithmes FFT, dont les plus couramment utilisés sont ceux de Cooley (FFT partagée dans le temps) et de Sand (FFT partagée dans les fréquences) [Egon H. et al., 2000].

Selon la FFT partagée dans le temps, on subdivise la suite $X(k)$ en deux suites de $N/2$ valeurs chacune, en supposant n pair. La TFD définie par :

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W_N^{nk} \quad (2.59.)$$

peut alors se décomposer sous la forme :

$$\begin{aligned} X(n) &= \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2i) W_N^{2ni} + \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2i+1) W_N^{n(2i+1)} \\ &= \underbrace{\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2i) W_{\frac{N}{2}}^{ni}}_{X_1(n)} + W_N^n \underbrace{\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2i+1) W_{\frac{N}{2}}^{ni}}_{X_2(n)} \end{aligned} \quad (2.60.)$$

Si l'on choisit $N = 2r$, chacune des TFD $X_1(n)$ et $X_2(n)$ peut elle-même

être subdivisée en deux TFD d'ordre 4, et ainsi de suite.

b) Après avoir réalisé une segmentation dans le champ temporel de la série de données, $I(f)$ est estimée par la moyenne des valeurs $I(f_j)$ correspondant respectivement aux valeurs de la DSP calculées sur chacun des segments ainsi obtenus. C'est l'estimation dite de Bartlett.

2.6.3. L'analyse spectrale par la Méthode du maximum d'Entropie (M.E.M.)

2.6.3.1. Le concept d'entropie

Considérons un système émettant M signaux de probabilités de transmission respectives p_i ($i=1...M$). Lorsque le système est susceptible d'émettre M fois le même signal, il est évident que la quantité d'informations éventuellement apportée par une information supplémentaire sera nulle.

Dans le cas plus large d'une émission de signaux de probabilités d'émission distinctes, lorsqu'a priori un signal est émis avec une probabilité p_j ($j = 1, 2, \dots, M$) pouvant être déterminée, une certaine quantité d'informations sur le système est alors disponible, et peut être mesurée par un indicateur dit entropie de Shannon.

D'une manière générale, l'entropie d'une variable aléatoire discrète X de loi de probabilité :

Tableau 2.1. Loi de probabilité d'une d'une variable aléatoire discrète X

x_i	x_1	x_2	x_M
$P(X = x_i)$	P_1	P_2	P_M

est définie par :

$$H_M = \sum_{i=1}^M p_i \log\left(\frac{1}{p_i}\right) \quad (2.61.)$$

2.6.3.2. La M.E.M.

La M.E.M est une méthode d'analyse spectrale haute résolution, nettement plus précise que les méthodes traditionnellement basées sur la FFT, et applicables aux données présentant une très forte variabilité dans les régions du spectre présentant de basses fréquences. Elle est particulièrement adaptée, lorsqu'on ne dispose que d'un nombre limité d'échantillons du signal, et consiste par ailleurs à choisir comme spectre associé, celui correspondant au signal d'entropie maximum. De plus, elle semble être une bonne méthode d'estimation de la DSP.

Selon Ables [Ables, 1974], pour un signal donné, le gain d'entropie ΔH , en fonction de la quantité $S(f)$ définie en (2.61), peut s'exprimer comme suit:

$$\Delta H = \int_{-f_c}^{f_c} \log S(f) df; -f_c \leq f \leq +f_c \quad (2.62.)$$

où les limites $\pm f_c$ définissent l'étendue de la fréquence critique de Nyquist [Tate J.N., 1998].

Par ailleurs, pour maximiser l'entropie, toujours selon Ables, il convient de choisir $S(f)$ maximisant ΔH , et vérifiant la relation:

$$\int_{-f_c}^{f_c} \log S(f) e^{-2\pi i f k} df = \phi(k) \quad (2.63.)$$

où $\phi(k)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ est la fonction d'auto corrélation du signal étudié.

Une formulation discrétisée de cette équation peut-être obtenue sous la forme suivante [Tate J.N., 1998] :

$$S(f) = \frac{1}{2f_c} \sum_{k=1}^L \phi(k) e^{2\pi i f k \Delta t} \quad (2.64.)$$

L'extrapolation de ce résultat au-delà des données disponibles, nécessite pour la relation (2.58.), une réécriture sous la forme suivante, toujours selon Tate :

$$S(f) = \frac{a_0}{\left| 1 + \sum_{j=1}^L a_j e^{2\pi i f j \Delta t} \right|} = \sum_{k=-L}^L \phi(k) e^{2\pi i f k \Delta t} \quad (2.65.)$$

où a_0 est un réel, et où les a_j ($j=1, 2, \dots, L$) sont les composantes estimées d'un vecteur de filtre d'erreur de prédiction. Les valeurs de L sont, en pratique, choisies plus petites que N , bien qu'elles puissent en théorie en être supérieurs.

En réalité, les coefficients a_j suggèrent pour les données $x(t) (= x_n)$, une régression suivant le modèle:

$$x_t = \sum_{j=1}^L \alpha_j x_{t-j} + Z_t \quad (2.66.)$$

où Z_t représente le bruit ou l'erreur d'estimation par le modèle. Par conséquent, une exigence de la *M.E.M.* consiste en l'estimation des coefficients a_j , et en la définition de la longueur du filtre d'erreur, sachant qu'il n'existe aucune méthode objective de détermination d'une telle longueur. Certains auteurs proposent, en effet, le choix de $N/3$

comme longueur maximale. D'autres méthodes sont cependant suggérées et détaillées par Tate [Tate J.N., 1998].

2.6.3.2.1. Définition de la fonction d'autocorrélation

Pour un processus aléatoire $x(t)$ supposé stationnaire au second ordre et de moyenne nulle, la fonction d'autocorrélation est définie comme suit [Kunt M. et al., 1991] :

$$\phi(\tau) = E[x(t) \times (t + \tau)] \quad (2.67.)$$

La DSP correspondante en est alors tout simplement la Transformée de Fourier.

2.6.3.3. Comparaison entre F.F.T. et M.E.M.

Des études antérieures [Tate J.N., 1998] ont établi, sur la base des résultats d'analyse de données simulées sur des réponses fréquentielles à la loi de puissance, que :

- L'estimation spectrale par la M.E.M est plus précise que celle obtenue sur la base du spectre F.F.T, en particulier pour des données présentant une structure à bruit rouge (diminution de la densité de puissance avec l'augmentation de la fréquence).
- L'estimation de l'exposant de la loi de puissance par le spectre FFT coïncide avec celle du spectre M.E.M.

Certaines études ont cependant recommandé un usage prudent de l'estimation spectrale par la M.E.M., préférant l'application directe de la FFT.

Toutefois, s'agissant du calcul de la dimension fractale, et sachant qu'elle dérive de l'exposant de la loi de puissance du spectre de puissance [Tate J.N., 1998], certaines études ont montré un meilleur intérêt pour la M.E.M. Le problème de la méthode basée sur la FFT est qu'elle pourrait sous-estimer cet exposant et ainsi fausser l'évaluation de la dimension fractale.

2.6.4. La détermination de la dimension fractale des surfaces fissurées par la méthode de la densité spectrale de puissance

Pour les surfaces de rupture statistiquement auto-similaires, la détermination de la dimension fractale, par la méthode de la densité spectrale de puissance, est basée sur la représentation du spectre de puissance du profil de rupture, et est fournie par l'équation suivante [Cherepanov G.P. et al., 1995]:

$$S(\bar{k}) \approx (\bar{k})^{-\beta} \quad (2.68.)$$

où \bar{k} représente le vecteur d'onde et β la pente dans un diagramme log-log.

La caractéristique d'un tel spectre de type Fourier, pour le profil de rupture d'une surface, est présentée ci-dessous, dans la figure (2.7):

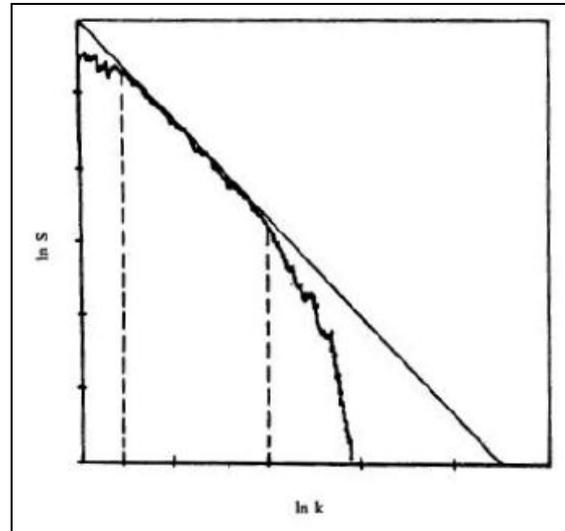


Fig. 2.7. Caractéristique d'un Spectre de type Fourier pour le profil de rupture d'une surface [Cherepanov G.P. et al., 1995]

La dimension fractale d'un ensemble bidimensionnel peut alors être déterminée par régression linéaire de $\log S(k)$ sur $\log k$ [Cherepanov G.P. et al., 1995].

La DSP , $S(f)$ peut ainsi être définie comme une fonction puissance de la fréquence f , par la relation :

$$S(f) = cf^b \quad (2.69)$$

c est une constante positive et $b \in (1,3)$

Le spectre avec $b > 0$ est un bruit rouge, et la dimension fractale Δ peut alors être déterminée comme suit, [Tate J.N., 1998]:

$$\Delta = 2 + \frac{3-b}{2} \quad (2.70)$$

Une estimation de b est évidemment obtenue par régression linéaire de $\log S(f)$ sur $\log f$, selon la méthode des moindres carrés.

D'autre part, pour une surface fissurée, la dimension fractale Δ peut-être envisagée comme une fonction périodique de la distance x évaluée à partir de la pointe d'une fissure, de la manière suivante [Dlouhý I. & Strnadel B., 2008]:

$$\Delta(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n [a_k \sin(\lambda_k x) + b_k \cos(\lambda_k x)] \quad (2.71)$$

a_k et b_k sont estimés par la méthode de moindres carrés ordinaire, et les λ_k représentent des fréquences.

L'évaluation de la dimension fractale basée sur le spectre de puissance a été ainsi utilisée, pour la caractérisation fractale des profils de rupture d'une surface.

2.7. L'effet du bruit dans une analyse fractale

Un bruit est un phénomène parasite (interférence, bruit de fond, etc.) pouvant perturber l'analyse d'un signal. Il est ainsi dénommé, par analogie aux nuisances sonores du même nom. L'analyse de ses effets sur la caractérisation fractale des surfaces, tout comme l'explication de ses origines, notamment dans le domaine de la profilométrie et de la microscopie à effet tunnel, constituent une préoccupation scientifique majeure.

Pour des images prises à l'aide d'un microscope à effet tunnel, le bruit le plus caractéristique est le bruit de la forme $1/f^\beta$, où f désigne la fréquence générée par de hautes amplifications de l'impédance d'entrée et par la forme typique de l'intégrateur des circuits de réaction.

Un bruit similaire est trouvé en profilométrie et en microscopie à force atomique, même si cela n'est encore pas répertorié dans la littérature. En même temps, l'ordre de grandeur du paramètre β demeure un sujet de discussions et une première approche d'explication semblerait le définir, non pas comme étant fonction du profil de surface du signal mesuré, mais plutôt comme étant dépendant de l'équipement.

Un bruit particulièrement caractéristique des courbes fractales, est le bruit blanc. Il est une réalisation d'un processus aléatoire, pour lequel la densité spectrale de puissance est constante à toutes les fréquences.

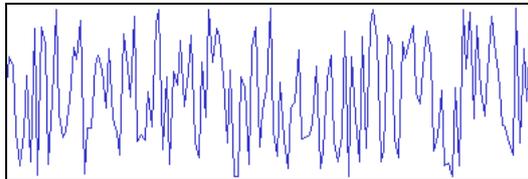


Fig. 2.8. Échantillon de bruit blanc

Il apparaît ainsi, comme une fractale "pure" de dimension 2, par le fait de son invariance à tout changement de son échelle de représentation. Il est par ailleurs, couramment observé sur les appareils de mesure.

Sa puissance spectrale étant constante à toute fréquence, sa dimension fractale est par conséquent, supérieure à la dimension de l'espace euclidien de la courbe (2,5 pour un profil).

2.8. Méthode de la transformation en ondelettes

L'analyse de Fourier est essentiellement destinée à l'analyse spectrale des signaux stationnaires, c'est-à-dire des signaux dont le contenu en fréquences est

invariable dans le temps. Elle atteint cependant ses limites d'application, lorsqu'il s'agit notamment, d'analyser des signaux transitoires ou d'événements imprévisibles.

En effet, alors que pour ces derniers, l'analyse de Fourier ne traite que de la décomposition fréquentielle sans tenir compte de la localisation temporelle, la transformation en ondelettes fournit, quant à elle, une analyse à la fois en temps et en fréquence.

S'agissant du profil de rupture, on définit un spectre de décomposition en ondelettes, dont chaque point correspond: en abscisse à la position sur le profil, et en ordonnée, à la fréquence correspondant à la dilatation de l'ondelette mère.

La transformation en ondelettes, ou représentation « temps-échelle », est la description de l'évolution d'un signal, relativement à une échelle d'observation. Elle est une technique d'analyse de signaux, introduite au début des années 80 par le géophysicien Morlet, avec comme principe, la représentation d'un signal, à des échelles différentes et autour de toutes ses positions spatiales.

Celui-ci est ainsi projeté sur une base de fonctions dites ondelettes, et caractérisées, à la fois, par leur position b dans l'espace, et leur échelle de représentation a .

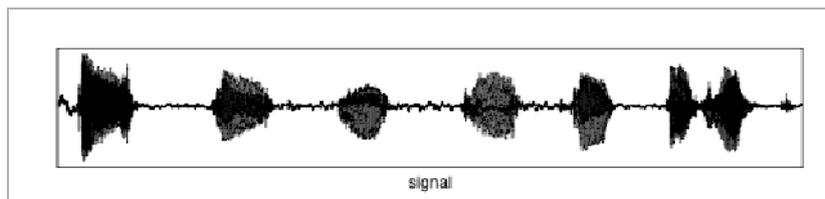


Fig.2.9. Le signal dans le cas de la méthode de la transformée en ondelettes

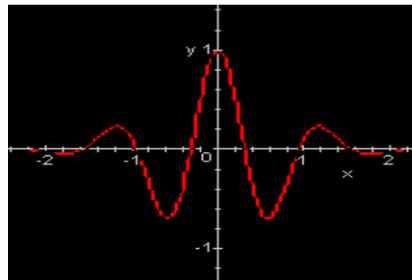


Fig.2.10. L'ondelette de base de Morlet

2.8.1. Conditions d'existence d'une ondelette

Une fonction $\psi(x)$ est dite ondelette analysante, si elle:

- continue, absolument intégrable et de carrée intégrable (c'est-à-dire, à énergie finie);

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2(x) dx < \infty \quad (2.72.)$$

- analytique : sa transformée de Fourier doit être nulle pour $f < 0$;

- admissible, soit : $\psi(0) = 0$

Cette dernière condition implique pour $\psi(x)$, une moyenne nulle; soit:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = 0 \quad (2.73.)$$

Ces conditions dans leur ensemble, suggèrent la vibration de $\psi(x)$ telle une onde, et sa décroissance rapide lorsque $|x|$ augmente.

Les transformées en ondelettes peuvent être divisées en deux catégories: les transformées en ondelettes continues et les transformées en ondelettes discrètes.

2.8.2. Transformation en ondelettes continue

La transformée en ondelettes continue est définie par:

$$W[f](a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (2.74.)$$

où ψ est dite ondelette mère; a représentant un facteur d'échelle ou de dilatation, et b un facteur de translation.

L'utilité de la famille des fonctions $\psi_{a,b}$ dites ondelettes, générées par l'ondelette mère ψ , et définies par:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (2.75.)$$

sera notifiée par la suite.

Par la transformation en ondelettes, la sinusoïde représentant généralement la Transformée de Fourier dans le champ fréquentiel est ainsi remplacée par une famille de translations et dilatations d'une même fonction dite ondelette [Egon H. et al., 2000].

Notons que La transformée en ondelettes $W[f](a,b)$ est ainsi parfaitement caractérisée par ces deux paramètres de translation et dilatation.

2.8.3. La transformée en ondelettes discrète

Sous réserve d'un choix convenable de l'ondelette mère, et à l'image des algorithmes de la Transformée de Fourier Rapide (FFT), on peut associer à la transformée en ondelettes, des algorithmes (FWT) beaucoup plus efficaces que de ceux de la FFT, et ayant comme principe, la mise en évidence pour le signal, d'une part de son allure générale décrite par les basses fréquences, et d'autre part de ses détails représentés par les hautes fréquences.

Le filtre passe-bas ou passe-haut ainsi mis en œuvre, correspond à une ondelette associée à une échelle dépendant des fréquences à récupérer.

Telle est l'idée essentielle de cette méthode.

2.8.4. Calcul de la dimension fractale par la méthode de la transformée en ondelettes

Si $\psi_{k,n}(x)$ est une base d'ondelettes de Daubechies et f une fonction continue et bornée appartenant à C^α , espace complexe continu de Hölder d'exposant α , alors les spectres $\{d_{k,n}\}$ de la transformée en ondelettes, vérifient l'inégalité suivante [Wang A.L. et al, 2003]:

$$|d_{k,n}| \leq E 2^{-k(\alpha+0.5)} \quad (2.76.)$$

où $N \in \mathbb{N}$; $k=N-1, N-2, \dots, 1$; $n=1,2,\dots,2^k$; ($0 < \alpha < 1$), avec α représentant l'exposant de Lipschitz, et E une constante.

La dimension fractale de la fonction f est ainsi définie par:

$$\Delta = 2 - \alpha \quad (2.77)$$

2.8.5. Quelques limites de la méthode de la transformation en ondelettes

Lorsque le facteur d'échelle est grand ($a > 1$), l'ondelette a une fréquence plus petite, et se trouve donc plus étalée; correspondant par conséquent, à une bonne résolution en fréquence, et à une bien mauvaise en temps. Par contre, pour de petites valeurs de a , l'ondelette est plus contractée et peut ainsi correspondre à une fréquence bien plus élevée que celle de l'ondelette mère. Par ailleurs, le calcul de la transformée en ondelettes, notamment par la FFT, peut comporter des problèmes de bords pour des signaux non périodiques.

2.9. Le calcul de la dimension fractale à l'aide de l'exposant de Hurst (exposant de rugosité)

Dans plusieurs études, l'autoaffinité de la surface de rupture a été caractérisée par un exposant, dit de Hurst (exposant de rugosité) [Balankin et al., 2000; Bouchaud et al, 2002, Schmittbuhl et al., 2003].

Si $h(x)$ est une fonction autoaffine décrivant le profil d'une surface de rupture, on a :

$$h(x) \equiv \lambda^{-H} h(\lambda x); \lambda \in R \quad (2.78.)$$

Le symbole " \equiv " peut être interprété comme étant "équivalent statistiquement à", et la fonction h est telle que: $h(x)=0$ pour $x=0$.

H représente l'exposant de Hurst, encore dit exposant de rugosité.

Il caractérise la morphologie de la surface (fig.2.11), et vérifie, lorsque celle-ci présente une homogénéité et une isotropie dans les directions latérales (X), la relation: $0 \leq H \leq 1$.

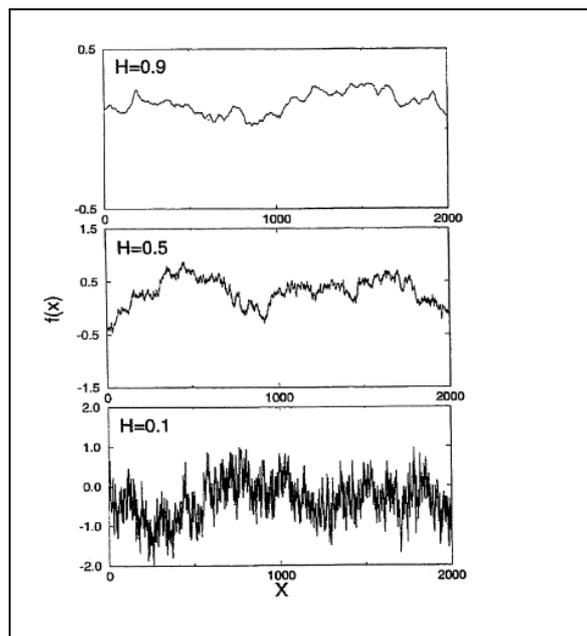


Fig.2.11. L'évolution de l'aspérité de la surface en fonction de l'exposant de Hurst

Il apparaît que la dimension fractale, et donc la rugosité d'une surface évoluent de manière inversement proportionnelle à l'exposant de Hurst.

La relation entre H , la dimension fractale Δ et l'espace euclidien E (lorsque E est de dimension 2, soit $\dim(E) = 2$), est telle que:

$$\Delta = \dim(E) - H = 2 - H \quad (2.79.)$$

L'exposant H apparaît ainsi comme une dimension complémentaire à la dimension fractale Δ . Elle est alors dite *codimension fractale*.

Toutefois, la dimension fractale estimée par la méthode du Box-Counting est plutôt liée à l'exposant de Hurst H , par la relation: $H = 3 - \Delta$. [Falconer, 1990]

2.10. Conclusions du chapitre 2

Le chapitre 2 présente quelques généralités de l'analyse fractale. Les avantages et inconvénients d'un certain nombre de méthodes d'estimation de la dimension fractale, dans le cas des surfaces de rupture, ont ainsi été mis en oeuvre:

La technique de Richardson et la méthode du compas sont très semblables comme principes de calcul, et s'utilisent exclusivement dans le cas de structures fractales auto-similaires.

La méthode de Minkowski-Bouligand et celle du Box Counting sont également basées sur des principes similaires : en effet, pour le recouvrement de l'objet (carrés ou cubes, en fonction de l'espace 2D ou 3D) analysé, la méthode du Box Counting utilise des boîtes, alors que celle de Minkowski- Bouligand utilise des cercles.

Il est apparu que la méthode de la fonction de structure de Tricot et celle des oscillations sont spécifiquement adaptées aux profils de rupture.

On a également observé que l'algorithme de la Transformée de Fourier ne s'applique exclusivement qu'aux signaux stationnaires, tandis que la technique de la transformée en ondelettes est très bien adaptée aux cas non stationnaires.

La méthode de l'exposant de Hurst, a quant à elle, une utilisation appropriée sur les surfaces de rupture auto-affines.

Par ailleurs, nous avons analysé les erreurs d'estimation de la dimension fractale en fonction des incertitudes liées au dispositif de mesure, de la longueur d'évaluation du profil de rupture, ainsi que du nombre de points de discrétisation associés.

Sur la base d'études récentes, il apparaît que les méthodes les plus fiables, pour la détermination de la dimension fractale sont le Box Counting, la méthode de la fonction de structure de Tricot, la méthode des oscillations et celle de l'exposant de Hurst.