Etude analytique

Ce chapitre a pour objectif de présenter, dans des cas particuliers, le calcul analytique de certains paramètres :

- ⋆ *le nombre critique de piétons* N_c
- ⋆ *la fréquence de synchronisation*
- ⋆ *l'amplitude stationnaire post-critique du déplacement latéral de la passerelle*

Plan du Chapitre 5

5.1 Introduction

Depuis le chapitre bibliographique 1, nous avons vu que dès que l'amplitude des mouvements d'une structure, comme une passerelle, devient perceptible, le comportement de la foule n'est plus aléatoire mais une forme de synchronisation se développe. Le passage du régime aléatoire sur support fixe, au régime synchronisé sur support mobile se produit lorsque l'on dépasse un certain seuil, caractérisé par une accélération critique. Evidemment, comme les accélérations, vitesses et déplacement sont liés, un seuil en accélération peut se traduire en seuil de déplacement.
Un autre critère, lié à l'accélération critique, est présent dans la littérature : le nombre critique de piéton N_c. L'accélération critique est l'accélération produite par le nombre critique de piétons ; ils marchent aléatoirement avant que les oscillations de la structure atteignent le seuil critique, puis sont contraints après.

Après avoir présenté quelques unes des expressions du nombre critique trouvées dans la littérature pour le cas d'oscillations latérales de la passerelle, nous calculons analytiquement ce nombre, dans des cas particuliers, à partir des équations du modèle discret d'interaction foule-passerelle proposé. Nous déterminons aussi l'amplitude stationnaire post-critique du déplacement latéral de la passerelle ainsi que la fréquence de synchronisation.

5.2 La notion de nombre critique de piétons N_c

Nous rappelons dans cette partie quelques unes des expressions du nombre critique trouvées dans la littérature pour le cas d'oscillations latérales de la passerelle. Ces expressions peuvent être classées en deux catégories : celles qui sont basées sur des équations données par Clough et Penzien [1], et celles qui ont été établies à partir d'une équation différentielle gérant la phase totale de la force latérale engendrée par un piéton.

5.2.1 Nombre critique : relation basée sur des équations données par Clough et Penzien [1] :

Des essais réalisés sur la passerelle du Millenium montrent que même si de plus en plus de personnes marchent sur la structure, aucun indice d'instabilité n'apparaît jusqu'à ce qu'un nombre critique N_c de piétons ne soit atteint [137]. Plusieurs auteurs ont essayé de relier ce nombre aux paramètres du comportement de la structure et de la foule. Certains d'entre eux se sont basés sur les équations suivantes données par Clough et Penzien [1] :

$$\begin{aligned} M_{str}\ddot{U}_y(t) + C_{str}\dot{U}_y(t) + K_{str}U_y(t) = F^y \\ M_p\ddot{u}_p^{abs,y}(t) = -F^y \end{aligned} \tag{5.1}$$

où l'indice p réfère au piéton, $u_p^{abs,y}$ étant le déplacement latéral des piétons (marchant rectilignement sur l'axe principal de la passerelle). Dallard et al. [70,78,138] ont supposé que les conditions critiques ont lieu lorsque $C_{str}\dot{U}_y(t) = F^y$.
En admettant les relations théoriques suivantes :

$$\omega_{str} = 2\pi f_{str} = \sqrt{\frac{K_{str}}{M_{str}}} \ , \tag{5.2}$$

$$\xi_{str} = \frac{C_{str}}{2M_{str}\omega_{str}} \ , \tag{5.3}$$

ξ_{str} étant le taux d'amortissement de la passerelle, et en admettant que la force induite par un groupe ou foule de piétons est $F^y = \frac{N}{2}k\dot{U}_y$ [70, 78, 138], le nombre critique de piétons selon Dallard s'écrit :

$$\boxed{N_c = \frac{8\pi\xi_{str}f_{str}M_{str}}{k}} \ . \tag{5.4}$$

Une autre définition du nombre critique a été proposée par Newland [138–140] qui a utilisé la même condition pour le passage à l'état critique, en admettant toutefois que c'est un cas particulier où $\omega_{str} = \omega_p$ et la marche des piétons est exactement à $\frac{\pi}{2}$ par rapport au déplacement de la passerelle. Il a donc supposé que

$$F^y(t) = \bar{N}\sin(\omega_p t) = \bar{N}\sin(\omega_{str} t) \ . \tag{5.5}$$

Ainsi, une solution particulière au système d'équations (5.1) est :

$$u_p^{abs,y}(t) = \frac{\bar{N}}{M_p\omega_{str}^2}\sin(\omega_{str} t) \ , \tag{5.6}$$

$$U_y(t) = \frac{\bar{N}}{2\xi_{str}M_{str}\omega_{str}^2}\sin\left(\omega_{str} t - \frac{\pi}{2}\right) \ . \tag{5.7}$$

De plus, il a considéré que les synchronisations instables ont lieu lorsqu'une proportion β de piétons est synchronisée avec la passerelle, et que l'amplitude U_y du déplacement de la structure est proportionnelle à $u_p^{abs,y}$ (on note γ le coefficient de proportionnalité). Ceci se traduit mathématiquement en remplaçant la masse des piétons M_p par βM_p, et en posant :

$$U_y = \gamma u_p^{abs,y} \ . \tag{5.8}$$

Newland a aussi utilisé la relation donnée par Clough et Penzien [1], dans le cas où les piétons sont uniformément répartis sur une portée de longueur L_{str} :

$$\frac{M_p}{M_{str}} = \frac{\int_0^{L_{str}} \frac{N\ m_p}{L_{str}}\psi_m^2(x)dx}{\int_0^{L_{str}} m_{str}\psi_m^2(x)dx} = \frac{N\ m_p}{L_{str}\ m_{str}} \ , \tag{5.9}$$

x étant la distance le long de la portée, m_p étant la masse moyenne d'un piéton, m_{str} la masse de la passerelle par unité de longueur, et $\psi_m(x)$ représentant le mode de vibration normalisé (amplitude maximale unitaire).
En prenant les valeurs particulières : $\gamma = 1.5$ et $\beta = 0.4$, il a obtenu

$$\boxed{N_c = \frac{7.5\xi_{str} m_{str} L_{str}}{m_p}} \,. \tag{5.10}$$

Roberts [138,141] a utilisé les équations (5.1), et le fait que $F^y(t) = \bar{N}\sin(\omega_p t)$. Des solutions particulières de l'équation (5.1) sont :

$$u_p^{abs,y}(t) = \frac{\bar{N}}{M_p \omega_p^2} \sin(\omega_p t) \ , \tag{5.11}$$

$$U_y(t) = \frac{\bar{N} D}{M_{str} \omega_{str}^2} \sin(\omega_p t - \Psi) \ , \tag{5.12}$$

où $\omega_r = \frac{\omega_p}{\omega_{str}}$, $\Psi = \arctan\left(\frac{2\xi_{str}\omega_r}{1-\omega_r^2}\right)$, et $D = \left(\frac{1}{(1-\omega_r)^2 - (2\xi_{str}\omega_r)^2}\right)^{1/2}$.
Il a supposé que la synchronisation instable a lieu lorsque le maximum de l'amplitude latérale de la passerelle dépasse le maximum de l'amplitude du mouvement latéral des piétons. Il a obtenu

$$\boxed{N_c = \frac{1+\alpha_{str}^2}{2} \frac{m_{str} L_{str}}{m_p \omega_r^2 D}} \,, \tag{5.13}$$

α_{str} étant la proportion de la portée sur laquelle marchent les piétons à la position la plus défavorable (ventre d'un mode).
Ces relations ont été comparées avec des mesures expérimentales réalisées sur trois passerelles : la passerelle de Toda Park au Japon (T-bridge), la passerelle de Singapore Changi Airport (C-bridge) et la passerelle du Millenium à Londres. Des différences sont apparues entre les résultats théoriques et les résultats expérimentaux. D'après Roberts [138], ceci s'explique par le fait qu'il y a deux phases de synchronisation. La première phase, stable, peut avoir lieu avec n'importe quel nombre de piétons, et l'amplitude des vibrations ne dépasse pas une valeur limite de $10 - 15\ mm$ comme c'est le cas pour le C-bridge et le T-bridge. La phase instable a lieu lorsque l'amplitude des vibrations dépasse la valeur limite, ce qui a pour conséquence d'augmenter l'amplitude de la force latérale des piétons parce qu'ils changent leur façon de marcher. C'est ce qui a eu lieu pour le Millenium Bridge. Dans cette optique, Roberts [138] déduit que l'équation (5.4) correspond à la phase stable, alors que les deux autres équations (5.10) et (5.13) correspondent à la phase instable, l'équation (5.13) étant la plus générale car elle n'impose pas des valeurs aux paramètres.

5.2.2 Nombre critique : relation établie à partir d'une équation différentielle pour la phase totale de la force latérale d'un piéton

Dans [31, 137, 142, 143], les auteurs utilisent la première équation de (5.1). En notant $\phi_i(t) = 2\pi f_i t + \phi_i^0$ la phase totale de la force engendrée par le $i^{ème}$ piéton, la force latérale totale engendrée par la foule est donnée par :

$$F^y = \sum_{i=1}^{N} \bar{N} \sin(\phi_i(t)) \tag{5.14}$$

avec $\bar{N} = 35\ N$.
Comme la synchronisation est une adaptation de la fréquence de la force engendrée par un piéton à la fréquence de la structure, une idée naturelle est d'introduire une équation différentielle gérant l'évolution de la phase ϕ_i. Cette équation devrait permettre de faire converger la pulsation instantanée du $i^{ème}$ piéton $\frac{d\phi_i}{dt}$ vers celle de la structure. L'équation différentielle choisie est appelée équation de Kuramoto [89]. Dans le cas particulier de la marche, d'après [137, 142], elle peut être écrite sous la forme discrète :

$$\frac{d\phi_i(t)}{dt} = \omega_i + \epsilon_1 A_y(t) \sin\left(\psi_{str}(t) - \phi_i(t) + \alpha\right) \tag{5.15}$$

- ω_i est la fréquence naturelle du $i^{ème}$ piéton, c'est-à-dire la fréquence qu'il aurait eue dans le cas d'une marche libre. Les ω_i sont distribuées aléatoirement avec une densité de distribution $g(\omega)$ qui reflète la diversité des fréquences naturelles des forces latérales dans une population.
- ϵ_1 quantifie la sensibilité des piétons aux déplacements latéraux de la passerelle.
- $A_y(t)$ est l'amplitude maximale des oscillations.
- $\psi_{str}(t)$ est la phase totale des oscillations de la passerelle, définie par $U_y(t) = A_y(t) \sin \psi_{str}(t)$.
- α est un paramètre de différence de phase ("phase lag") qui indique si la force des piétons se synchronise à la même phase que le déplacement, la vitesse ou l'accélération de la passerelle.

Dans le cas où $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $g(\omega)$ est une gaussienne de moyenne ω_{str}, Strogatz et al. [137] établissent, à partir de leur modèle d'interaction foule-structure discret, que l'expression du nombre critique est la suivante :

$$\boxed{N_c = \frac{4\xi_{str}}{\pi} \frac{K_{str}}{\bar{N}\epsilon_1 g(\omega_{str})}} \ . \tag{5.16}$$

$\xi_{str} = \frac{C_{str}}{2\sqrt{M_{str}K_{str}}}$ est le taux d'amortissement proportionnel. Le seul paramètre inconnu est ϵ_1. En comparant la simulation réalisée et les données obtenues par les essais sur le Millenium Bridge, ϵ_1 a été estimé à $16\ m^{-1}s^{-1}$ [137].
Dans les travaux de Eckhardt et al. [143], l'équation de Kuramoto utilisée est de la forme discrète suivante :

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i - \epsilon_2 \ddot{U}_y(t) \cos\left(\psi_{str}(t) + \phi_i(t)\right) \ . \tag{5.17}$$

ϵ_2 quantifie la sensibilité des piétons à l'accélération latérale de la passerelle. Sa valeur, obtenue par comparaison avec les essais réalisés sur le Millenium Bridge, est $\epsilon_2 = \frac{1}{\tau_0 g_0} \simeq 1.75\ s/m$, où $\tau_0 = 1.9\ s$ et $g_0 = 0.3\ m/s^2$. L'expression du nombre critique établie par Eckhardt et al. [143] est :

$$\boxed{N_c = \frac{8\sqrt{2}\xi_{str} M_{str} \omega_{str} \sigma_\omega}{\bar{N}\sqrt{pi}\epsilon_2}} \ . \tag{5.18}$$

Dans les travaux de Bodgi [31], l'équation de Kuramoto continue utilisée est de la forme suivante :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x,t) = \omega(x) + \frac{\varepsilon}{2} A_y(t) \left|\psi_1(x)\right| \left(\dot{\Psi}_{str}(t)\right)^2 \sin\left(\Psi_s(t) - \Phi(x,t) + \frac{\pi}{2}\right) \ . \tag{5.19}$$

ε quantifie aussi la sensibilité des piétons à l'accélération latérale de la passerelle. La valeur de ε trouvée pour que le modèle corresponde dans le cas du Millenium Bridge est fonction des paramètres choisis. Dans [31], la résolution de l'équation (5.20) d'ordre 3 donne le nombre critique N_c :

$$\boxed{\begin{aligned} a_3 \quad & \Gamma^3 + a_2\Gamma^2 + a_1\Gamma + a_0 = 0 \\ & \text{où} \\ \Gamma \quad & = \tfrac{N_c \bar{N}\omega_T \varepsilon}{2K_{str}} \\ a_3 \quad & = -\tfrac{n^3\pi K_{str}\omega_T^4}{2\sqrt{2\pi}\sigma_\omega} \\ a_2 \quad & = n^2\omega_T^4 C_{str} - \tfrac{4n^2\pi^2\sigma_\omega K_{str}\omega_T^2}{\sqrt{2\pi}} \\ a_1 \quad & = -\tfrac{8\pi^3 n\sigma_\omega^3 K_{str}}{\sqrt{2\pi}} + \tfrac{4\pi^3 n\sigma_\omega K_{str}(\bar{\omega}-\omega_T)^2}{\sqrt{2\pi}} + 8n\pi C_{str}\sigma_\omega^2\omega_T^2 \\ a_0 \quad & = 16\pi^2 C_{str}\sigma_\omega^4 \end{aligned}} \quad . \tag{5.20}$$

5.3 Calcul du nombre critique N_c dans le cas de vibrations latérales

Nous présentons ici le calcul du nombre critique N_c dans le cas où les piétons sont sensibles au déplacement latéral de la passerelle.

Le système d'équations différentielles pour le modèle d'interaction foule-passerelle avec forme modale est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(M_{str} + \sum\limits_{i=1}^{N} m_i \psi_1^2(q_{OC_i}^x)\right)\ddot{U}_y(t) + \left(C_{str} + \sum\limits_{i=1}^{N} m_i\psi_1\left(q_{OC_i}^x\right)\frac{\partial\psi_1(q_{OC_i}^x)}{\partial q^x}\dot{u}_i^{tr,x}(t)\right)\dot{U}_y(t) \\ \qquad +K_{str}U_y(t) = -\sum\limits_{i=1}^{N} m_i\psi_1\left(q_{OC_i}^x\right)\ddot{u}_i^{tr,y}(t) \\ \qquad + \sum\limits_{i=1}^{N}\psi_1\left(q_{OC_i}^x\right)\left(T_i\sin\left(2\phi_i(t)\right)\sin\left(\theta_i(t)\right) + N_i\sin(\phi_i(t))\cos\left(\theta_i(t)\right)\right) \\ \dot{\phi}_i(t) = \omega_i + \varepsilon_i A_y(t)\psi_1(q_{OC_i}^x)\sin\left(\psi_{str}(t) - \phi_i(t) + \alpha\right) \qquad i = 1...N \\ \text{avec} \\ A_y(t) = \sqrt{U_y^2(t) + \frac{\dot{U}_y^2(t)}{\omega_{str}^2}} \\ \psi_{str}(t) = \arctan\left(\frac{\omega_{str}U_y}{\dot{U}_y}\right) \end{array} \right. \tag{5.21}$$

Les différences entre ce modèle et celui proposé par Strogatz [137] sont que les piétons se déplacent dans le plan de la passerelle, que l'effet de la forme modale est pris en compte, et que la masse modale des piétons n'est pas négligée dans l'équation de la dynamique de la passerelle.

Lorsque le système foule-structure atteint un état stationnaire, la densité des piétons, leur fréquence, ainsi que l'amplitude et la fréquence du déplacement de la passerelle ne varient plus en fonction du temps. On commence donc par supposer que la densité est constante en temps. La conséquence est que l'on peut étudier un cas où le nombre de piétons N est constant sur la longueur de la passerelle, et que les piétons marchent sur place. Pour le calcul du nombre critique, nous simplifions le système (5.21) en posant $\theta_i(t) = 0$, les piétons

marchent rectilignement et parallèlement à l'axe principal de la passerelle.
La procédure permettant d'établir l'expression du nombre critique est la suivante [137] : (i) nous faisons un changement d'echelle temporelle et une normalisation des variables afin de mettre en évidence les termes petits et les termes dominants dans les équations du système ; (ii) ensuite, on passe aux coordonnées polaires afin d'obtenir un système d'équations nous permettant d'appliquer la méthode de la moyenne. Le système obtenu après l'application de cette méthode donne l'évolution lente de l'amplitude et de la variable d'angle de la passerelle et du piéton ; (iii) en étudiant le cas de la synchronisation partielle, l'équation de la phase permet d'obtenir la condition de synchronisation piéton-structure sous la forme d'une inégalité ; (iv) en considérant le cas où la fréquence initiale des piétons suit une loi gaussienne, la résolution du système d'équations final obtenu après les différentes étapes permet de trouver une expression du nombre critique de piétons N_c.

5.3.1 Normalisations et changement d'échelle temporelle

La normalisation des variables et le changement d'échelle temporelle vont permettre de mettre en évidence les termes petits et les termes dominants dans les équations du système. On pose :
$M_T = M_{str} + \sum_{i=1}^{N} m_i \psi_1^2(q_{OC_i}^x)$ la masse modale totale constante, où $\sum_{i=1}^{N} m_i \psi_1^2(q_{OC_i}^x)$ est la masse modale des piétons contante,
$\omega_T = \sqrt{\frac{K_{str}}{M_T}}$ la fréquence modale constante du système piétons-passerelle,
$\xi_T = \frac{C_{str}\omega_T}{2K_{str}}$,
$\langle . \rangle$ indiquant l'opérateur de la moyenne : $\langle f_i \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i$,
$\langle m_i \rangle = \bar{m}$ la masse moyenne des piétons,
$\langle N_i \rangle = \bar{N}$ l'amplitude maximale moyenne de $F_i^{osc,N}$,
$\langle \varepsilon_i \rangle = \bar{\varepsilon}$ la sensibilité moyenne des piétons aux oscillations latérales de la structure.

Afin de normaliser le système d'équations (5.21), on introduit les deux longueurs suivantes :

$$L_1 = \frac{N\bar{N}}{K_{str}} \quad \text{et} \quad L_2 = \frac{\omega_T}{\bar{\varepsilon}}. \tag{5.22}$$

On définit alors une troisième longueur caractéristique comme la moyenne géométrique entre L_1 et L_2 et le paramètre C comme la racine carrée de leur rapport :

$$L = \sqrt{L_1 L_2} = \sqrt{\frac{N\bar{N}\omega_T}{K_{str}\bar{\varepsilon}}} \quad \text{et} \quad C = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \sqrt{\frac{N\bar{N}\bar{\varepsilon}}{K_{str}\omega_T}}. \tag{5.23}$$

Ces constantes de normalisation sont inspirées de [19, 31, 137, 142]. On fait l'hypothèse :

(cas1-H9) $C << 1$, i.e. la constante C est faible. En effet, si on considère le cas de la travée Nord du pont du Millenium, et que nous cherchons la valeur de N pour avoir $C = 1$, nous trouvons $N \simeq 1511$ piétons, soit une densité d'environ $5\ p\ m^{-2}$ qui est impossible car le jour de l'inauguration du pont, la densité maximale estimée était de $1.5\ p\ m^{-2}$.

Ceci permet de normaliser le déplacement modale de la passerelle et son amplitude avec la longueur L, et à cause de la forme modale, la variable position du piéton est normalisée par rapport à la longueur de la passerelle L_{str} :

$$x = \frac{U_y}{L}, \quad a = \frac{A}{L} \quad \text{et} \quad z_i = \frac{q^x_{OC_i}}{L_{str}}. \tag{5.24}$$

En introduisant la nouvelle variable de temps “rapide”

$$\tau = \omega_T t, \tag{5.25}$$

le système (5.21) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2x}{d\tau^2} + 2\xi_T \frac{dx}{d\tau} + x = C \left\langle \frac{N_i}{N} \psi_1 (z_i) \sin(\phi_i) \right\rangle \\ \frac{d\phi_i}{d\tau} = \frac{\omega_i}{\omega_T} + C \frac{\varepsilon_i}{\bar{\varepsilon}} a \psi_1 (z_i) \sin(\psi_{str} - \phi_i + \alpha) \qquad i = 1...N \ . \end{array} \right. \tag{5.26}$$

5.3.2 Changement de repère et méthode de la moyenne

Considérons un repère en rotation horaire à une vitesse constante ω_T (fréquence circulaire modale du système foule-passerelle). Dans ce nouveau repère, la phase totale du $i^{ème}$ piéton Φ_i et celle de la structure Ψ_{str} sont définies par :

$$\begin{array}{l} \Phi_i(t) = \phi_i(t) - \omega_T t \\ \Psi_{str}(t) = \psi_{str}(t) - \omega_T t \ . \end{array} \tag{5.27}$$

On fait l'hypothèse :

(cas1-H10) On définit les variables b et Ω_i d'après les égalités suivantes :

$$\begin{array}{l} \xi_T = Cb \\ \frac{\omega_i}{\omega_T} = 1 + C\Omega_i \ , \end{array} \tag{5.28}$$

en rappelant que $C << 1$.

Ainsi, le système (5.26) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2x}{d\tau^2} + x = C \left[-2b \frac{dx}{d\tau} + \left\langle \frac{N_i}{N} \psi_1 (z_i) \sin(\Phi_i(\tau) + \tau) \right\rangle \right] \\ \frac{d\Phi_i}{d\tau} = C \left[\Omega_i + \frac{\varepsilon_i}{\bar{\varepsilon}} a \psi_1 (z_i) \sin(\Psi_{str} - \Phi_i + \alpha) \right] \qquad i = 1...N \ . \end{array} \right. \tag{5.29}$$

La présence de $C << 1$ dans les deux équations de (5.29) nous permet d'appliquer une méthode de la moyenne (averaging method) [144], qui est une technique classique en dynamique non linéaire.
Si $C = 0$, la solution de l'équation $(5.29)_1$ serait $x = a \sin(\tau + \Psi_{str})$, avec a et Ψ_{str} constants. De même, la solution de l'équation $(5.29)_2$ serait $\Phi_i(\tau) = cst$. Pour le cas qui nous intéresse ($0 < C << 1$), les variables d'amplitude et de phase ne sont pas tout à fait constantes, elles ont des dérivées temporelles d'ordre C. Cependant, on peut dire qu'elles sont presque constantes dans le sens où elles sont à variations lentes, sur une échelle de temps τ. La méthode de la moyenne est une procédure standard pour dériver les équations qui régissent ces variations lentes.
Pour appliquer cette méthode, effectuons une transformation de Van der Pol de la variable x :

$$x = a \sin(\tau + \Psi_{str}), \qquad \frac{dx}{d\tau} = a \cos(\tau + \Psi_{str}). \tag{5.30}$$

Cela correspond à définir a et Ψ_{str}, amplitude et variable d'angle instantanées de x dans un repère tournant avec vitesse angulaire ω_T.
En calculant la vitesse par dérivation du déplacement x donné dans (5.30), on obtient :

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{da}{d\tau}\sin(\tau+\Psi_{str}) + a\left(1+\frac{d\Psi_{str}}{d\tau}\right)\cos(\tau+\Psi_{str}). \tag{5.31}$$

En imposant l'égalité entre les expressions (5.30) et (5.31) pour la vitesse, nous obtenons la condition de compatibilité :

$$\frac{da}{d\tau}\sin(\tau+\Psi_{str}) = -a\frac{d\Psi_{str}}{d\tau}\cos(\tau+\Psi_{str}). \tag{5.32}$$

La compatibilité étant assurée par l'équation (5.32), l'accélération est obtenue par dérivation de la vitesse donnée par (5.30) :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{da}{d\tau}\cos(\tau+\Psi_{str}) - a\left(1+\frac{d\Psi_{str}}{d\tau}\right)\sin(\tau+\Psi_{str}). \tag{5.33}$$

En remplaçant (5.30), (5.32) et (5.33) dans (5.29), on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{da}{d\tau} = C\left[-2ab\cos^2(\tau+\Psi_{str}) + \left\langle \frac{N_i}{N}\psi_1(z_i)\sin(\Phi_i+\tau)\cos(\tau+\Psi_{str})\right\rangle\right] \\ -a\frac{d\Psi_{str}}{d\tau} = C\left[-2ab\cos(\tau+\Psi_{str})\sin(\tau+\Psi_{str}) + \left\langle \frac{N_i}{N}\psi_1(z_i)\sin(\Phi_i+\tau)\sin(\tau+\Psi_{str})\right\rangle\right] \\ \frac{d\Phi_i}{d\tau} = C\left[\Omega_i + \frac{\varepsilon_i}{\bar{\varepsilon}}a\psi_1(z_i)\sin(\Psi_{str}-\Phi_i+\alpha)\right] \qquad i=1...N. \end{array}\right. \tag{5.34}$$

En utilisant les identités trigonométriques suivantes :

$$\begin{array}{l} \sin x\sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right] \\ \cos x\cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right] \\ \sin x\cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right] \end{array} \tag{5.35}$$

les équations (5.34) deviennent

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{da}{d\tau} = C\left[-ab - \frac{1}{2}\left\langle \frac{N_i}{N}\psi_1(z_i)\sin(\Psi_{str}-\Phi_i)\right\rangle + h_1(\tau)\right] \\ -a\frac{d\Psi_{str}}{d\tau} = C\left[\frac{1}{2}\left\langle \frac{N_i}{N}\psi_1(z_i)\cos(\Psi_{str}-\Phi_i)\right\rangle + h_2(\tau)\right] \\ \frac{d\Phi_i}{d\tau} = C\left[\Omega_i + \frac{\varepsilon_i}{\bar{\varepsilon}}a\psi_1(z_i)\sin(\Psi_{str}-\Phi_i+\alpha)\right] \qquad i=1...N\ , \end{array}\right. \tag{5.36}$$

où les termes de fréquence élevée sont

$$\begin{array}{l} h_1(\tau) = -ba\cos(2\tau+2\Psi_{str}) + \frac{1}{2}\left\langle \frac{N_i}{N}\psi_1(z_i)\sin(\Psi_{str}+\Phi_i+2\tau)\right\rangle \\ h_2(\tau) = -ba\sin(2\tau+2\Psi_{str}) - \frac{1}{2}\left\langle \frac{N_i}{N}\psi_1(z_i)\cos(\Psi_{str}+\Phi_i+2\tau)\right\rangle. \end{array} \tag{5.37}$$

La méthode de la moyenne appliquée à la première équation donne :

$$\begin{array}{ll} \frac{da}{d\tau} & \simeq \frac{1}{2\pi}\int_{\tilde{\tau}}^{2\pi+\tilde{\tau}} -C\left[ab + \frac{1}{2}\left\langle \frac{N_i}{N}\psi_1(z_i)\sin(\Psi_{str}-\Phi_i)\right\rangle + h_1(\tau)\right]d\tau \\ & = -C\left[ab + \frac{1}{2}\left\langle \frac{N_i}{N}\psi_1(z_i)\sin(\Psi_{str}-\Phi_i)\right\rangle\right]\ , \end{array} \tag{5.38}$$

$\tilde{\tau}$ étant arbitraire. L'intégrale sur la période 2π des termes $h_1(\tau)$ et $h_2(\tau)$ est nulle. Ainsi le système (5.36) devient

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{da}{d\tau} = -C\left[ab + \frac{1}{2}\left\langle \frac{N_i}{N}\psi_1(z_i)\sin(\Psi_{str}-\Phi_i)\right\rangle\right] \\ a\frac{d\Psi_{str}}{d\tau} = -\frac{C}{2}\left\langle \frac{N_i}{N}\psi_1(z_i)\cos(\Psi_{str}-\Phi_i)\right\rangle \\ \frac{d\Phi_i}{d\tau} = C\left[\Omega_i + \frac{\varepsilon_i}{\bar{\varepsilon}}a\psi_1(z_i)\sin(\Psi_{str}-\Phi_i+\alpha)\right] \qquad i=1...N. \end{array}\right. \tag{5.39}$$

Nous introduisons la variable de temps lent $T = C\tau$ afin d'éliminer le paramètre C dans le système (5.39) :

$$\begin{cases} \frac{da}{dT} = -ab - \frac{1}{2}\left\langle \frac{N_i}{N}\psi_1(z_i)\sin(\Psi_{str} - \Phi_i)\right\rangle \\ a\frac{d\Psi_{str}}{dT} = -\frac{1}{2}\left\langle \frac{N_i}{N}\psi_1(z_i)\cos(\Psi_{str} - \Phi_i)\right\rangle \\ \frac{d\Phi_i}{dT} = \Omega_i + \frac{\varepsilon_i}{\bar{\varepsilon}}a\psi_1(z_i)\sin(\Psi_{str} - \Phi_i + \alpha) \qquad i = 1...N. \end{cases} \tag{5.40}$$

Ce système met en évidence le fait que l'amplitude et les phases (normalisées) ont une évolution lente par rapport à la période d'oscillation.

5.3.3 Synchronisation partielle

On étudie le cas où un certain nombre de piétons est synchronisé avec la passerelle. On veut donc trouver analytiquement l'état stationnaire correspondant à la synchronisation piétons-structure, i.e. $\frac{da}{dT} = 0$ et $\frac{d\Psi_{str}}{dT} = cst = q$. Les inconnues à déterminer sont l'amplitude a constante et la fréquence normalisée q de la passerelle et des piétons synchronisés (ou fréquence de bloquage), qui vaut zéro si et seulement si la structure sous l'action de la foule synchronisée vibre à la fréquence ω_T. $\frac{d\Psi_{str}}{dT} = q = 0$ implique $U_y(t) = A\sin(\Psi_{str} + \omega_T t)$ avec Ψ_{str} constante.
On introduit alors un nouveau repère qui effectue une rotation avec une vitesse angulaire q.
(cas1-H11) On peut faire l'hypothèse suivante :

$$\Psi_{str}(T) = qT - \alpha \tag{5.41}$$

où α est déjà utilisé dans (4.47), et on introduit $\varphi_i(T)$ défini par :

$$\Phi_i(T) = qT + \varphi_i(T). \tag{5.42}$$

Pour simplifier le système, dans la suite nous supposons :

(cas1-H12) Les variables caractérisant un piéton sont supposées identiques pour chaque piéton : $m_i = \bar{m}$, $N_i = \bar{N}$, $\varepsilon_i = \bar{\varepsilon}$.

Le système (5.40) devient donc

$$\begin{cases} a(T)\,b = \frac{1}{2}\langle\psi_1(z_i)\sin(\varphi_i(T) + \alpha)\rangle \\ a(T)\,q = -\frac{1}{2}\langle\psi_1(z_i)\cos(\varphi_i(T) + \alpha)\rangle \\ \frac{d\varphi_i}{dT}(T) = \Omega_i - q - a(T)\,\psi_1(z_i)\sin(\varphi_i(T)) \qquad i = 1...N. \end{cases} \tag{5.43}$$

La résolution de ce système nécessite la détermination de $\varphi_i(T)$ à partir de l'équation $(5.43)_3$. Or l'évolution de $\varphi_i(T)$ doit être étudiée suivant que les piétons sont synchronisés ou non avec la passerelle.
La phase des piétons synchronisés vérifie $\frac{d\Phi_i}{dT}(T) = q$ donc $\frac{d\varphi_i}{dT}(T) = 0$. Ainsi, de l'équation $(5.43)_3$, on peut définir une phase constante φ_i^* pour chaque piéton i, tel que :

$$\varphi_i^* = \arcsin\left(\frac{\Omega_i - q}{a\psi_1(z_i)}\right) . \tag{5.44}$$

La condition de synchronisation devant être satisfaite par les piétons synchronisés est :

$$|\Omega_i - q| \leq a\,|\psi_1(z_i)| . \tag{5.45}$$

Les piétons non synchronisés avec la passerelle sont ceux qui ont des fréquences naturelles assez éloignées de la fréquence des oscillations de la passerelle :

$$|\Omega_i - q| > a\,|\psi_1(z_i)| \ . \tag{5.46}$$

La détermination d'une forme analytique de φ à partir de l'équation $(5.43)_3$ est impossible à notre connaissance. On propose donc de faire une étude statistique [19, 31, 137, 142, 143].

5.3.4 Synchronisation global foule-structure

La procédure pour l'étude de la synchronisation globale foule-structure, dans le but de déterminer le nombre critique de piétons N_c, est fondée sur une représentation statistique de la foule. Elle est présentée dans la suite.
On note $p(\Omega)$ la distribution des fréquences normalisées de marche libre des piétons (ou fréquences naturelles des piétons), et $h(z)$ la densité de probabilité représentant la distribution spatiale de la foule sur la longueur de la passerelle. Si la distribution est constante sur $z \in [0,1]$, on a $h(z) = 1$. On pourrait considérer une distribution non constante pour représenter un groupe de piétons qui marchent sur place sur une longueur z_1 autour du centre de la travée. Dans ce cas $h(z) = \frac{1}{z_1}$ pour $z \in \left[\frac{1-z_1}{2}, \frac{1+z_1}{2}\right]$ et zéro ailleurs. Cette expression représente aussi le cas où les piétons font des aller-retours sur cette portion de la passerelle.
Selon l'approche statistique qu'on veut adopter ici, il faut définir une distribution statistique couplée de la forme

$$\rho(\varphi, \Omega, z) = \rho(\varphi|\Omega, z)\, p(\Omega)\, h(z) \ .$$

La quantité $\rho(\varphi, \Omega, z)\, d\varphi d\Omega dz$ est la probabilité qu'un groupe "infinitésimal" de piétons ait une phase comprise entre φ et $\varphi + d\varphi$, un décalage en fréquence compris entre Ω et $\Omega + d\Omega$ et une position normalisée entre z et $z + dz$. Chacune des distributions statistiques est supposée indépendante du temps, car on veut étudier l'état synchronisé stationnaire.
Pour déterminer $\rho(\varphi|\Omega, z)$, deux situations sont à distinguer : les piétons synchronisés respectant la condition (5.45), et les piétons non synchronisés respectant la condition (5.46).
Pour les piétons synchronisés, à partir de (5.44) et (5.45), on a :

$$\rho_s(\varphi|\Omega, z) = \delta\left(\varphi - \arcsin\frac{\Omega - q}{a\psi_1(z)}\right) \qquad |\Omega - q| \leq a\,|\psi_1(z)|\,, z \in [0,1]\,, \tag{5.47}$$

où δ représente la distribution delta de Dirac et $\int_0^{2\pi} \rho_s(\varphi|\Omega, z)\, d\varphi = 1$.

Pour les piétons non synchronisés, la distribution statique est de la forme [137] :

$$\rho_{ns}(\varphi|\Omega, z) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{(\Omega - q)^2 - a^2\psi_1^2(z)}}{|\Omega - q - a\psi_1(z)\sin(\varphi)|} \qquad |\Omega - q| > a\,|\psi_1(z)|\,, z \in [0,1]\,, \tag{5.48}$$

où $\int_0^{2\pi} \rho_{ns}(\varphi|\Omega, z)\, d\varphi = 1$.

Nous cherchons à expliciter les expressions $\langle\psi_1(z_i)\cos(\varphi_i(T))\rangle$ et $\langle\psi_1(z_i)\sin(\varphi_i(T))\rangle$, afin de déduire des équations $(5.43)_{1,2}$ les expressions du nombre critique de piétons, de la fréquence de synchronisation et de l'amplitude stationnaire post-critique du déplacement latéral de la passerelle.

De manière cohérente avec cette approche statistique, dans le cas d'un grand nombre de piétons $N >> 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\langle \psi_1(z_i)\cos(\varphi_i(T))\rangle &= \int\limits_0^1 \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_0^{2\pi} \psi_1(z)\cos(\varphi)\,\rho(\varphi|\Omega,z)\,d\varphi\right) p(\Omega)\,d\Omega\right] h(z)\,dz\ ,\\ \langle \psi_1(z_i)\sin(\varphi_i(T))\rangle &= \int\limits_0^1 \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_0^{2\pi} \psi_1(z)\sin(\varphi)\,\rho(\varphi|\Omega,z)\,d\varphi\right) p(\Omega)\,d\Omega\right] h(z)\,dz\ .\end{aligned} \tag{5.49}$$

En mettant en évidence les distributions statiques pour les cas des piétons synchronisés et non synchronisés, on pose :

$$\langle \psi_1(z_i)\cos(\varphi_i(T))\rangle = I_1 + I_2 \tag{5.50}$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\limits_0^1 \left[\int\limits_{|\Omega-q|\leq a|\psi_1(z)|} \cos(\arcsin(\varphi^*))\,p(\Omega)\,d\Omega\right] \psi_1(z)\,h(z)\,dz\ ,\\ I_2 &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1 \left[\int\limits_{|\Omega-q|>a|\psi_1(z)|} \left(\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi)}{|\Omega-q-a\psi_1(z)\sin(\varphi)|}d\varphi\right)\sqrt{(\Omega-q)^2-a^2\psi_1^2(z)}\,p(\Omega)\,d\Omega\right]\psi_1(z)\,h(z)\,dz\ .\end{aligned} \tag{5.51}$$

Or

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi)}{|\Omega-q-a\psi_1(z)\sin(\varphi)|}d\varphi = 0 \tag{5.52}$$

et

$$\cos(\arcsin(\varphi^*)) = \sqrt{1-\varphi^{*\,2}} = \frac{\sqrt{a^2\psi_1^2(z)-(\Omega-q)^2}}{a\psi_1(z)} \tag{5.53}$$

donc

$$\langle \psi_1(z_i)\cos(\varphi_i(T))\rangle = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_{|\Omega-q|\leq a|\psi_1(z)|} \frac{\sqrt{a^2\psi_1^2(z)-(\Omega-q)^2}}{a\psi_1(z)}p(\Omega)\,d\Omega\right]\psi_1(z)\,h(z)\,dz\ . \tag{5.54}$$

De même, nous posons :

$$\langle \psi_1(z_i)\sin(\varphi_i(T))\rangle = I_3 + I_4 \tag{5.55}$$

avec

$$\begin{aligned} I_3 &= \int\limits_0^1 \left[\int\limits_{|\Omega-q|\leq a|\psi_1(z)|} \frac{\Omega-q}{a}p(\Omega)\,d\Omega\right] h(z)\,dz\\ I_4 &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1 \left[\int\limits_{|\Omega-q|>a|\psi_1(z)|} \left(\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin(\varphi)}{|\Omega-q-a\psi_1(z)\sin(\varphi)|}d\varphi\right)\sqrt{(\Omega-q)^2-a^2\psi_1^2(z)}\,p(\Omega)\,d\Omega\right]\psi_1(z)\,h(z)\,dz.\end{aligned} \tag{5.56}$$

Or

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin(\varphi)}{|\Omega-q-a\psi_1(z)\sin(\varphi)|}d\varphi = \frac{2\pi}{a\psi_1(z)}\left[\frac{\Omega-q}{\sqrt{(\Omega-q)^2-a^2\psi_1^2(z)}} - sign(\Omega-q)\right] \tag{5.57}$$

donc

$$\begin{aligned}\langle\psi_1(z_i)\sin(\varphi_i(T))\rangle &= \int_0^1\left[\int_{|\Omega-q|\le a|\psi_1(z)|}\frac{\Omega-q}{a}p(\Omega)\,d\Omega\right]h(z)\,dz\\ &+\int_0^1\left[\int_{|\Omega-q|>a|\psi_1(z)|}\frac{1}{a}\left[\Omega-q-sign(\Omega-q)\sqrt{(\Omega-q)^2-a^2\psi_1^2(z)}\right]p(\Omega)\,d\Omega\right]h(z)\,dz.\end{aligned} \tag{5.58}$$

Pour calculer le nombre critique N_c, nous considérons un cas post-critique, i.e. $N > N_c$ et $A > 0$ et $a > 0$, puis on fait tendre a vers 0^+ dans le but de faire tendre N vers N_c.

Comme on veut considérer le cas où a tend vers 0^+, nous pouvons faire l'hypothèse que $a << 1$. L'équation (5.54) est :

$$\langle\psi_1(z_i)\cos(\varphi_i(T))\rangle = \int_0^1\left[\int_{|\Omega-q|\le a|\psi_1(z)|}\sqrt{1-\frac{(\Omega-q)^2}{a^2\psi_1^2(z)}}p(\Omega)\,d\Omega\right]\psi_1(z)\,h(z)\,dz\ . \tag{5.59}$$

La condition de synchronisation (5.45) permet d'effectuer le changement de variables $\Omega = q + a\psi_1(z)\sin(\chi)$. En notant q_0 la limite de q lorsque a tend vers 0^+, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\langle\psi_1(z_i)\cos(\varphi_i(T))\rangle &= \int_0^1\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(\chi)\,a\psi_1(z)\,p(q+a\psi_1(z)\sin(\chi))\,d\chi\right]\psi_1(z)\,h(z)\,dz\\ &\simeq ap(q_0)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(\chi)\,d\chi\int_0^1\psi_1^2(z)\,h(z)\,dz\ .\end{aligned} \tag{5.60}$$

Ainsi

$$\boxed{\langle\psi_1(z_i)\cos(\varphi_i(T))\rangle = \frac{\pi an}{2}p(q_0)\qquad\text{avec}\quad n=\int_0^1\psi_1^2(z)\,h(z)\,dz}\ . \tag{5.61}$$

Pour calculer $\langle\psi_1(z_i)\sin(\varphi_i(T))\rangle$ (5.58), il faut déterminer I_3 et I_4. Pour évaluer I_3, on peut remarquer que $|\Omega-q| << 1$ car $a << 1$. Ainsi on peut faire le développement de Taylor suivant :

$$p(\Omega) = p(q) + p^{'}(q)(\Omega-q) + O\left((\Omega-q)^2\right)\ . \tag{5.62}$$

En remplaçant dans l'expression de I_3, on obtient :

$$I_3 = \int_0^1\left[\int_{q-a\psi_1(z)}^{q+a\psi_1(z)}\frac{(\Omega-q)\,p(q)+(\Omega-q)^2p^{'}(q)+O\left((\Omega-q)^3\right)}{a}d\Omega\right]h(z)\,dz. \tag{5.63}$$

Or

$$\int_{q-a\psi_1(z)}^{q+a\psi_1(z)}(\Omega-q)\,d\Omega = 0$$

et

$$\int_{q-a\psi_1(z)}^{q+a\psi_1(z)}(\Omega-q)^2\,d\Omega = \frac{2}{3}(a\psi_1(z))^3$$

donc

$$I_3 = \frac{2}{3}a^2 p'(q) \int_0^1 \psi_1^3(z)\, h(z)\, dz. \tag{5.64}$$

Pour évaluer I_4, on peut remarquer que $a << 1$ permet d'écrire $\sqrt{1 - \frac{a^2\psi_1^2(z)}{(\Omega-q)^2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{a^2\psi_1^2(z)}{(\Omega-q)^2}$. Ainsi

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^1 \left[\int_{|\Omega-q|>a|\psi_1(z)|} \frac{1}{a}\left[\Omega - q - (\Omega-q)\sqrt{1-\frac{a^2\psi_1^2(z)}{(\Omega-q)^2}}\right] p(\Omega)\, d\Omega \right] h(z)\, dz \\ &= \int_0^1 \left[\int_{|\Omega-q|>a|\psi_1(z)|} \frac{a\psi_1^2(z)}{2}\frac{p(\Omega)}{\Omega-q} d\Omega \right] h(z)\, dz. \end{aligned} \tag{5.65}$$

Or

$$\lim_{a\longrightarrow 0} \int_{|\Omega-q|>a|\psi_1(z)|} \frac{p(\Omega)}{\Omega-q} d\Omega = PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(\Omega)}{\Omega-q_0} d\Omega = \pi\tilde{p}(q_0) \tag{5.66}$$

où PV représente la valeur principale de Cauchy et $\tilde{p}(q_0) = \mathcal{H}[p(\Omega)]$, avec $\mathcal{H}[p(\Omega)]$ la transformée de Hilbert de p en q_0. Donc

$$I_4 = \frac{a\pi}{2}\tilde{p}(q_0) \int_0^1 \psi_1^2(z)\, h(z)\, dz\ . \tag{5.67}$$

Comme on propose de limiter le développement de Taylor à l'ordre 1 en a, on obtient :

$$\boxed{\langle \psi_1(z_i) \sin(\varphi_i(T)) \rangle \simeq I_4 = \frac{a\pi n}{2}\tilde{p}(q_0) \qquad \text{avec} \quad n = \int_0^1 \psi_1^2(z)\, h(z)\, dz}\ . \tag{5.68}$$

Les équations $(5.43)_{1,2}$ peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} 2b_c a &= \langle \psi_1(z_i) \sin(\varphi_i + \alpha) \rangle \\ &= \langle \psi_1(z_i) \sin(\varphi_i) \rangle \cos(\alpha) + \langle \psi_1(z_i) \cos(\varphi_i) \rangle \sin(\alpha)\ , \\ 2q_0 a &= -\langle \psi_1(z_i) \cos(\varphi_i + \alpha) \rangle \\ &= \langle \psi_1(z_i) \sin(\varphi_i) \rangle \sin(\alpha) - \langle \psi_1(z_i) \cos(\varphi_i) \rangle \cos(\alpha)\ , \end{aligned} \tag{5.69}$$

où $\lim\limits_{a\longrightarrow 0} b = b_c$ est l'amortissement critique normalisé. Dans le cas qui nous intéresse, $a > 0$ et donc à partir des équations (5.61), (5.68) et (5.69), nous trouvons les expressions :

$$\boxed{\left\{ \begin{aligned} b_c &= \frac{\pi n}{4}\tilde{p}(q_0)\cos(\alpha) + \frac{\pi n}{4}p(q_0)\sin(\alpha) \\ q_0 &= \frac{\pi n}{4}\tilde{p}(q_0)\sin(\alpha) - \frac{\pi n}{4}p(q_0)\cos(\alpha) \end{aligned} \right.}\ . \tag{5.70}$$

Dans le cas particulier $\alpha = \frac{\pi}{2}$ généralement choisi dans la littérature [31, 137, 142], les équations précédentes simplifiées s'écrivent :

$$\left\{ \begin{aligned} b_c &= \frac{\pi n}{4}p(q_0) \\ q_0 &= \frac{\pi n}{4}\tilde{p}(q_0)\ . \end{aligned} \right. \tag{5.71}$$

Cas où $p(\Omega)$ est une distribution gaussienne de moyenne $\bar{\Omega}$ et d'écart type σ_Ω

L'objectif de cette partie est de déterminer le nombre critique de piétons N_c à partir duquel les piétons engendrent des oscillations suffisemment importantes de la passerelle pour déclencher la synchronisation, dans le cas où $p(\Omega)$ est une distribution gaussienne de moyenne $\bar{\Omega}$ et d'écart type σ_Ω. Ce cas est équivalent à dire que la fréquence dimensionnelle ω des piétons suit également une distribution gaussienne de moyenne $\bar{\omega} = \omega_T\left(1 + C\bar{\Omega}\right)$ et d'écart type $\sigma_\omega = \omega_T C\sigma_\Omega$ (équation $(5.28)_2$).

Pour déterminer les expressions de q_0 et b_c, qui nous permettront de définir N_c, nous devons dans un premier temps exprimer $\tilde{p}(q_0)$ et $p(q_0)$.
Si la fréquence moyenne adimensionnalisée des piétons $\bar{\Omega}$ est non nulle, mais reste très petite (la fréquence moyenne dimensionnelle $\bar{\omega}$ est donc très proche de ω_T), alors on peut écrire [143] :

$$p(\Omega) = p\left(\left(\Omega + \bar{\Omega} - q_0\right) - \left(\bar{\Omega} - q_0\right)\right) \; . \tag{5.72}$$

En faisant un développement limité pour "$q_0 - \bar{\Omega}$" petit, on obtient :

$$p(\Omega) = p\left(\Omega + \bar{\Omega} - q_0\right)\left(1 + \frac{\left(\bar{\Omega} - q_0\right)\left(\Omega - q_0\right)}{\sigma_\Omega^2}\right) \; , \tag{5.73}$$

et ainsi

$$\tilde{p}(q_0) = \frac{1}{\pi} PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(\Omega)}{\Omega - q_0} d\Omega \simeq \frac{1}{\pi}\frac{\left(\bar{\Omega} - q_0\right)}{\sigma_\Omega^2} \; . \tag{5.74}$$

L'expression de $p(q_0)$ est la suivante :

$$p(q_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\Omega} e^{-\frac{\left(q_0 - \bar{\Omega}\right)^2}{2\sigma_\Omega^2}} \; . \tag{5.75}$$

En faisant un développement limité pour "$q_0 - \bar{\Omega}$" petit, on obtient :

$$p(q_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\Omega}\left(1 - \frac{\left(q_0 - \bar{\Omega}\right)^2}{2\sigma_\Omega^2}\right) \; . \tag{5.76}$$

L'équation $(5.70)_2$ devient

$$q_0 = \frac{n}{4}\frac{\left(\bar{\Omega} - q_0\right)}{\sigma_\Omega^2}\sin(\alpha) - \frac{\pi n}{4\sqrt{2\pi}\sigma_\Omega}\left(1 - \frac{\left(q_0 - \bar{\Omega}\right)^2}{2\sigma_\Omega^2}\right)\cos(\alpha) \; , \tag{5.77}$$

donc q_0 est solution du polynôme d'ordre 2 suivant :

$$\begin{aligned} -\pi n\cos(\alpha)\, q_0^2 \; & + \left[2\pi n\bar{\Omega}\cos(\alpha) + 2\sqrt{2\pi}n\sigma_\Omega\sin(\alpha) + 8\sqrt{2\pi}\sigma_\Omega^3\right] q_0 \\ & + \left[2\pi n\sigma_\Omega^2\cos(\alpha) - 2\sqrt{2\pi}n\sigma_\Omega\bar{\Omega}\sin(\alpha) - \pi n\bar{\Omega}^2\cos(\alpha)\right] = 0 \end{aligned} \; , \tag{5.78}$$

et l'équation $(5.70)_1$ donne l'expression de b_c en fonction de q_0 :

$$\boxed{b_c = \frac{n}{4}\frac{\left(\bar{\Omega} - q_0\right)}{\sigma_\Omega^2}\cos(\alpha) + \frac{n\pi}{4\sqrt{2\pi}\sigma_\Omega}\left(1 - \frac{\left(q_0 - \bar{\Omega}\right)^2}{2\sigma_\Omega^2}\right)\sin(\alpha)} \; . \tag{5.79}$$

Le passage aux variables dimensionnelles permet de trouver l'expression de N_c.

Cas particulier, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $\bar{\Omega} = 0$: Cette valeur particulière de α est celle choisie généralement dans la littérature [31,137,142]. Elle met en évidence une relation de proportionnalité entre la force latérale engendrée par les piétons et la vitesse du déplacement de la passerelle. Le cas $\bar{\Omega} = 0$ implique que $\bar{\omega} = \omega_T$, la fréquence moyenne des piétons est la fréquence modale du système passerelle-piétons. Ce cas est le plus critique pour la passerelle. Les équations (5.78) et (5.79) deviennent :

$$\begin{cases} q_0 = 0 \\ b_c = \frac{n\pi}{4\sqrt{2\pi}\sigma_\Omega} \end{cases} . \tag{5.80}$$

Le passage aux variables dimensionnelles, conduit à l'égalité suivante :

$$N_c = \frac{2\sqrt{2\pi}C_{str}\sigma_\omega}{n\pi\bar{N}\bar{\varepsilon}}\omega_T \tag{5.81}$$

avec $\omega_T = \sqrt{\frac{K_{str}}{M_T}} = \sqrt{\frac{K_{str}}{M_{str}+\sum\limits_{i=1}^{N} m_i\psi_1^2(q_{OC_i}^x)}} = \sqrt{\frac{K_{str}}{M_{str}+n\bar{m}N_c}}$.

Le carré de l'équation (5.81) donne un polynôme d'ordre 3 en N_c :

$$N_c^3 + \frac{M_{str}}{n\bar{m}}N_c^2 - \frac{K_{str}}{n\bar{m}}\gamma^2 = 0 \qquad \text{avec} \quad \gamma = \frac{2\sqrt{2\pi}C_{str}\sigma_\omega}{n\pi\bar{N}\bar{\varepsilon}} . \tag{5.82}$$

Si $\bar{\varepsilon}$ est connu, la résolution de l'équation (5.82) nous permet de trouver N_c dans le cas particulier où $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $\bar{\Omega} = 0$.

Cas particulier, $\alpha = \frac{\pi}{2}$: Les équations (5.78) et (5.79) deviennent :

$$\begin{cases} q_0 = \frac{n\bar{\Omega}}{n+4\sigma_\Omega^2} \\ b_c = \frac{n\pi}{4\sqrt{2\pi}\sigma_\Omega}\left(1 - \frac{\left(\frac{n\bar{\Omega}}{n+4\sigma_\Omega^2}-\bar{\Omega}\right)^2}{2\sigma_\Omega^2}\right) \end{cases} . \tag{5.83}$$

En passant aux variables dimensionnelles, l'équation $(5.83)_1$ permet de donner l'expression de la fréquence de synchronisation ω_{syn} :

$$\begin{aligned} \omega_{syn} &= \omega_T\left(1 + \frac{n\bar{\Omega}}{n+4\sigma_\Omega^2}C\right) \\ &= \frac{4K_{str}\sigma_\omega^2+nN\bar{N}\bar{\varepsilon}\bar{\omega}}{4K_{str}\sigma_\omega^2+nN\bar{N}\bar{\varepsilon}\omega_T}\omega_T . \end{aligned} \tag{5.84}$$

On peut remarquer que lorsque les piétons marchent à une fréquence moyenne égale à la fréquence modale du système passerelle-piétons, i.e. $\bar{\omega} = \omega_T$, nous retrouvons que la fréquence de synchronisation est $\omega_{syn} = \omega_T$.
Le passage aux variables dimensionnelles de l'équation $(5.83)_2$ nous conduit à un polynôme d'ordre 3 en $\bar{\varepsilon}N_c$:

$$a_3\left(\bar{\varepsilon}N_c\right)^3 + a_2\left(\bar{\varepsilon}N_c\right)^2 + a_1\left(\bar{\varepsilon}N_c\right) + a_0 = 0 \tag{5.85}$$

où

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{n^3\pi\bar{N}^3\omega_T}{2\sqrt{2\pi}C_{str}\sigma_\omega K_{str}^2} , \\ a_2 &= \frac{4n^2\pi\sigma_\omega\bar{N}^2}{\sqrt{2\pi}K_{str}C_{str}} - \frac{n^2\bar{N}^2\omega_T^2}{K_{str}^2} , \\ a_1 &= \frac{8\pi n\sigma_\omega^3\bar{N}}{\sqrt{2\pi}C_{str}\omega_T} - \frac{4\pi n\sigma_\omega\bar{N}(\bar{\omega}-\omega_T)^2}{\sqrt{2\pi}C_{str}\omega_T} - \frac{8n\sigma_\omega^2\bar{N}\omega_T}{K_{str}} , \\ a_0 &= -16\sigma_\omega^4 . \end{aligned} \tag{5.86}$$

La connaissance de N_c pour la travée Nord de la passerelle du Millenium de Londres nous permet de déterminer le paramètre $\bar{\varepsilon}$ à l'aide du polynôme (5.85). Par contre, dans la mesure où ω_T est fonction du nombre de piétons N, le polynôme (5.85) n'est pas une bonne expression pour déterminer analytiquement N_c quand $\bar{\varepsilon}$ est connu. On pourrait cependant déterminer N_c implicitement à l'aide de (5.85), en traçant la courbe qui représente le polynôme en fonction du nombre de piétons N. Cette courbe coupe l'axe des abscisses en $N = N_c$.

En remplaçant ω_T par son expression $\omega_T = \sqrt{\frac{K_{str}}{M_{str}+n\bar{m}N_c}}$ quand $N \longrightarrow N_c$ dans (5.85) et (5.88), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\gamma_6\sqrt{M_{str}+n\bar{m}N_c}N_c^3+\gamma_5N_c^3 \quad &+\gamma_4\sqrt{M_{str}+n\bar{m}N_c}N_c^2+\gamma_3N_c^2 \\ &+\gamma_2\sqrt{M_{str}+n\bar{m}N_c}N_c+\gamma_1N_c+\gamma_0=0\end{aligned} \tag{5.87}$$

où

$$\begin{aligned}
\gamma_6 &= \frac{n^3\pi\bar{N}^3\bar{\varepsilon}^3\sqrt{K_{str}}}{2\sqrt{2\pi}C_{str}\sigma_\omega K_{str}^2}\ , \\
\gamma_5 &= \frac{4n^3\pi\bar{m}\sigma_\omega\bar{N}^2\bar{\varepsilon}^2}{\sqrt{2\pi}C_{str}K_{str}}\ , \\
\gamma_4 &= \frac{4n^2\pi\bar{m}\sigma_\omega\bar{N}\bar{\varepsilon}\left(2\sigma_\omega^2-\bar{\omega}^2\right)}{\sqrt{2\pi}C_{str}\sqrt{K_{str}}}\ , \\
\gamma_3 &= \frac{4n^2\pi\sigma_\omega\bar{N}^2\bar{\varepsilon}^2M_{str}}{\sqrt{2\pi}C_{str}K_{str}}-\frac{n^2\bar{N}^2\bar{\varepsilon}^2}{K_{str}}+\frac{8n^2\pi\sigma_\omega\bar{N}\bar{\omega}\bar{\varepsilon}\bar{m}}{\sqrt{2\pi}C_{str}}\ , \\
\gamma_2 &= \frac{4n\pi\sigma_\omega\bar{N}\bar{\varepsilon}M_{str}\left(2\sigma_\omega^2-\bar{\omega}^2\right)}{\sqrt{2\pi}\sqrt{K_{str}}C_{str}}-4\pi n\sigma_\omega\bar{N}\bar{\varepsilon}\sqrt{K_{str}}\left(\frac{2\sigma_\omega}{\pi K_{str}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}C_{str}}\right)\ , \\
\gamma_1 &= \frac{8\pi n\sigma_\omega\bar{N}\bar{\omega}\bar{\varepsilon}M_{str}}{\sqrt{2\pi}C_{str}}-16\sigma_\omega^4n\bar{m}\ , \\
\gamma_0 &= -16\sigma_\omega^4M_{str}\ .
\end{aligned} \tag{5.88}$$

En posant $\Gamma = \sqrt{M_{str}+n\bar{m}N_c}$, l'équation (5.87) devient un polynôme d'ordre 7 en Γ :

$$\begin{aligned}&\frac{\gamma_6}{n^3\bar{m}^3}\Gamma^7+\frac{\gamma_5}{n^3\bar{m}^3}\Gamma^6+\left[\frac{\gamma_4}{n^2\bar{m}^2}-\frac{3M_{str}\gamma_6}{n^3\bar{m}^3}\right]\Gamma^5+\left[\frac{\gamma_3}{n^2\bar{m}^2}-\frac{3M_{str}\gamma_5}{n^3\bar{m}^3}\right]\Gamma^4+\left[\frac{3M_{str}^2\gamma_6}{n^3\bar{m}^3}-\frac{2M_{str}\gamma_4}{n^2\bar{m}^2}+\frac{\gamma_2}{n\bar{m}}\right]\Gamma^3 \\ &+\left[\frac{3M_{str}^2\gamma_5}{n^3\bar{m}^3}-\frac{2M_{str}\gamma_3}{n^2\bar{m}^2}+\frac{\gamma_1}{n\bar{m}}\right]\Gamma^2+\left[-\frac{M_{str}^3\gamma_6}{n^3\bar{m}^3}+\frac{M_{str}^2\gamma_4}{n^2\bar{m}^2}-\frac{M_{str}\gamma_2}{n\bar{m}}\right]\Gamma \\ &+\left[-\frac{M_{str}^3\gamma_5}{n^3\bar{m}^3}+\frac{M_{str}^2\gamma_3}{n^2\bar{m}^2}-\frac{M_{str}\gamma_1}{n\bar{m}}+\gamma_0\right]=0\ .\end{aligned} \tag{5.89}$$

La résolution du polynôme (5.89) permet de déterminer N_c (lorsque $\bar{\varepsilon}$ est connu).

5.4 Calcul de l'amplitude du déplacement de la passerelle lorsque $N > N_c$ dans le cas de vibrations latérales

Nous cherchons à déterminer l'amplitude post-critique du déplacement latéral de la passerelle dans le cas stationnaire. Nous nous limitons au cas particulier où $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $p(\Omega)$ est une distribution gaussienne de moyenne $\bar{\Omega}$.

Les équations $(5.43)_{1,2}$ deviennent :

$$\left\{\begin{array}{l} a(T)\,b = \frac{1}{2}\left\langle\psi_1(z_i)\cos(\varphi_i(T))\right\rangle \\ a(T)\,q = \frac{1}{2}\left\langle\psi_1(z_i)\sin(\varphi_i(T))\right\rangle . \end{array}\right. \tag{5.90}$$

$q = 0$ est une solution de l'équation $(5.90)_2$ lorsque $\langle \psi_1(z_i) \sin(\varphi_i(T)) \rangle$ est remplacé par son expression (5.58). D'après (5.54), l'équation $(5.90)_1$ devient :

$$\begin{aligned} 2a(T)\,b &= \int_0^1 \left[\int_{|\Omega| \le a|\psi_1(z)|} \frac{\sqrt{a^2\psi_1^2(z) - \Omega^2}}{a\psi_1(z)} p(\Omega)\, d\Omega \right] \psi_1(z)\, h(z)\, dz \\ &= \int_0^1 \left[\int_{|\Omega| \le a|\psi_1(z)|} \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{a\psi_1(z)} \right)^2} p(\Omega)\, d\Omega \right] \psi_1(z)\, h(z)\, dz \ . \end{aligned} \tag{5.91}$$

Ce choix de q implique $\bar{\Omega} = 0$ et donc le cas étudié est celui où la fréquence moyenne des piétons est égale à la fréquence modale du système piétons-passerelle.

De part la condition de synchronisation, on peut poser $\Omega = a\psi_1(z)\sin(\chi)$ avec $a > 0$. Ainsi, l'équation (5.91) devient :

$$b = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\chi)\, p(a\psi_1(z)\sin(\chi))\, d\chi \right] \psi_1^2(z)\, h(z)\, dz \ . \tag{5.92}$$

En introduisant la fonction de Bessel modifiée $I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta)\, e^{x\cos(\theta)} d\theta$, l'équation (5.92) s'écrit sous la forme :

$$b = \frac{\sqrt{2\pi}}{8\sigma_\Omega} \int_0^1 e^{-\frac{a^2\psi_1^2(z)}{4\sigma_\Omega^2}} \left[I_0\left(\frac{a^2\psi_1^2(z)}{4\sigma_\Omega^2} \right) + I_1\left(\frac{a^2\psi_1^2(z)}{4\sigma_\Omega^2} \right) \right] \psi_1^2(z)\, h(z)\, dz \ , \tag{5.93}$$

soit, en passant aux variables dimensionnelles

$$\frac{4C_{str}L_{str}\sigma_\omega\omega_T}{\sqrt{2\pi}N\bar{N}\bar{\varepsilon}} = \int_0^{L_{str}} e^{-\frac{A_y^2\psi_1^2(x)\bar{\varepsilon}^2}{4\sigma_\omega^2}} \left[I_0\left(\frac{A_y^2\psi_1^2(x)\bar{\varepsilon}^2}{4\sigma_\omega^2} \right) + I_1\left(\frac{A_y^2\psi_1^2(x)\bar{\varepsilon}^2}{4\sigma_\omega^2} \right) \right] \psi_1^2(x)\, h(x)\, dx \ . \tag{5.94}$$

La résolution de cette équation permet de déterminer l'amplitude stationnaire A_y du déplacement latéral de la passerelle lorsque $N > N_c$ dans le cas particulier où $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\bar{\Omega} = 0$ et $p(\Omega)$ est une distribution gaussienne de moyenne $\bar{\Omega}$.

5.5 Synthèse du chapitre

Pour le cas des vibrations latérales d'une passerelle, les expressions analytiques du nombre critique N_c, de l'amplitude stationnaire post-critique du déplacement latéral de la passerelle, et de la fréquence de synchronisation sont définies selon certains cas particuliers. Ces expressions obtenues à partir du modèle discret d'interaction foule-passerelle proposé sont très proches de celles obtenues à partir du modèle continue [31].