Chapitre 2

Equations du mouvement

Introduction

Pour traiter le problème des vibrations d'un pneumatique, on va se placer dans l'hypothèse de petite oscillation autour d'une configuration particulière d'équilibre statique. La modélisation comporte donc trois temps :

- *définir une géométrie qui tienne compte de l'étendue de la surface de contact ;*
- *définir une configuration de référence en équilibre statique : cet état doit faire apparaître le mouvement de la frontière du pneumatique dans la zone de contact avec la chaussée (indentation et glissement) comme une source d'excitation qui se superpose à l'excitation par le défilement du motif de la bande de roulement ;*
- *décrire les équations d'équilibre pour une petite perturbation autour de cet état.*

On a choisi de garder une modélisation tridimensionnelle de la géométrie et du mouvement pour traiter simplement l'influence des rainures dans la bande de roulement sur la réponse.

On va s'attacher à décrire un saut de vitesse au niveau de la ligne d'attaque et de la ligne de fuite de la zone de contact.

On va chercher à simplifier la description du contact pour la perturbation.

2.1 Géométrie, cinétique, déformations

• **Description de la géométrie**

Pour décrire une géométrie, on a un grand éventail de choix. Par exemple, si on traite le problème d'une poutre rectangulaire en vibration de flexion forcée, on choisit de prendre comme géométrie sa configuration non chargée, immobile. Mais on aurait pu choisir à tout instant la forme qu'elle aurait en équilibre statique si on lui appliquait la charge d'excitation. On aurait une géométrie dépendant du temps. Sur cet exemple simple, on voit que la description de la géométrie est un choix, et que certains choix sont plus judicieux que d'autres.

La géométrie du pneumatique est arbitraire, mais c'est normal.

On ne veut pas introduire l'indentation et le glissement dans la géométrie. On ne veut pas non plus décrire l'écrasement quasi statique de la gomme responsable de "l'air pumping".

On veut une géométrie $\mathcal{D}_0(t)$ qui caricature la courbure de la bande de roulement au niveau des lignes d'attaque et de fuite de la zone de contact. On a mesuré à ce niveau une forte accélération sur une distance courte, et on veut modéliser ce mouvement par une discontinuité de vitesse. Une telle discontinuité de vitesse ne peut être équilibrée que par une discontinuité de contrainte. Si la contrainte est une tension membranaire alignée avec le plan tangent de la géométrie, cela implique que *la géométrie est anguleuse*. De plus, une géométrie anguleuse implique bien un saut de vitesse en régime permanent.

On identifie $\mathcal{D}$, la configuration naturelle du pneumatique avec l'ensemble des positions $\underline{X}$ des particules du pneumatique monté sur la jante, mais ni gonflé ni chargé par le poids du véhicule. On note $\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}$ la dérivation par rapport à $\underline{X}$ et $\frac{d}{dt}$ la dérivée par rapport au temps à $\underline{X}$ fixé.

On choisit comme dans [**Rahier**91] de décrire cette géométrie $\mathcal{D}_0(t)$ à partir de la configuration relâchée du pneumatique. A partir de cette configuration, on passe à la géométrie par une rotation de corps rigide, puis une transformation d'écrasement continue $\underline{\phi}_0$. On se propose de montrer au cours du chapitre les hypothèses sur $\underline{\phi}_0$ qui simplifient les calculs, mais de garder pour développer les équations une transformation quelconque. On proposera une solution pour $\underline{\phi}_0$ au chapitre 5.

Etape 1
On applique à la configuration naturelle une rotation de corps rigide autour de l'axe de la roue. La vitesse de rotation Ω est une donnée. On note $\underline{\underline{U}}(\Omega t)$ la matrice de rotation.

Etape 2
Cette rotation est composée par $\underline{\phi}_0$, la transformation d'écrasement. Le résultat de ces deux transformations donne la géométrie $\mathcal{D}_0(t)$, ensemble des positions d'entraînement. La géométrie

dépend du temps à cause de la présence de rainures :

$$\underline{x}_0(t,\underline{X}) = \underline{\phi}_0\left(\underline{\underline{U}}(\Omega t).\underline{X}\right)$$

On note $\underline{\underline{F}}_0(t,\underline{X}) = \underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\,\underline{x}_0$, la transformation tangente de la position d'entraînement, et $\underline{u}_0 = \dfrac{d\underline{x}_0}{dt}$, la vitesse d'entraînement.

On note $\underline{\underline{\mathrm{grad}}}$ la dérivée par rapport à $\underline{x}_0$ et $\dfrac{\partial}{\partial t}$ la dérivée par rapport au temps à $\underline{x}_0$ fixé.

On introduit ici des hypothèses. Cette transformation $\underline{x}_0$ indique la position des ondes de choc. La surface de discontinuité du vecteur vitesse (onde de choc) au niveau de la ligne d'attaque est notée $\mathcal{A}_0(t)$ et la surface au niveau de la ligne de fuite est notée $\mathcal{F}_0(t)$. On suppose de plus que la position des ondes de choc est stationnaire dans cette géométrie, seule leur surface change suivant si elles coupent une rainure ou un patin de gomme. Cela signifie que cette position ne dépend pas du profil de la chaussée, mais uniquement de la structure du pneumatique et de son chargement par le véhicule. On pourra étudier la propagation des vibrations dans le pneumatique indépendamment de la chaussée.

Au travers des lignes de fuite $\mathcal{F}_0$ et d'attaque $\mathcal{A}_0$ la vitesse d'entraînement et transformation tangente de $\underline{\phi}_0$ sont discontinues.

Les surfaces $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{F}_0$ sont lisses et admettent une normale. On note $\underline{n}$ la normale qui pointe vers l'extérieur de la zone de contact. Cette direction est associée au sens qui définit les discontinuités : on note $[\ldots]$ le saut d'une quantité entre le sous domaine vers lequel pointe $\underline{n}$ (domaine $(+)$) et le sous domaine intérieur (domaine $(-)$).

• Description de la configuration de référence

On choisit comme configuration de référence le roulement quasi statique du pneumatique sur la chaussée. La jante est chargée par le poids du véhicule et par un couple correspondant au couple du moteur. C'est un état d'équilibre stable, qui dépend de α la rotation de la roue. On va donc décrire l'indentation et le glissement comme un petit déplacement sur la géométrie :

$$\underline{x}_s(\alpha,\underline{X}) = \underline{\phi}_0\left(\underline{\underline{U}}(\alpha).\underline{X}\right) + \underline{\xi}_s(t,\underline{X})$$

On remplace α par Ωt dans les équations pour avoir le mouvement de référence à vitesse constante. On adoptera par la suite une paramétrisation par $\underline{x}_0$ plutôt que par $\underline{X}$.

On va ensuite chercher la solution du roulement comme une perturbation de ce mouvement. Cette représentation de la réponse en une réponse quasi statique et une perturbation (la réponse dynamique) est classique. Elle assure que l'excitation par l'indentation et le glissement sur la chaussée est naturellement un paramètre d'excitation de la vibration qui se superpose aux autres, comme la déformation quasi statique de la gomme utilisée dans la théorie "air pumping".

Etape 3

On superpose à la position d'entraînement un déplacement quasi statique $\underline{\xi}_s(t, \underline{x}_0)$. Ce déplacement compté à partir de la position d'entraînement permet de retrouver la position des particules lors d'un roulement quasi statique. On suppose que ce déplacement est petit pour pouvoir confondre dans les équations d'équilibre la position d'entraînement et la position exacte. La modélisation de ce déplacement peut faire intervenir le comportement non linéaire de la gomme comme dans [**Ronneberger**88]. Elle doit aussi faire intervenir des lois de contact non linéaires de frottement.

Ce champ de déplacement est continu, et son gradient est continu sauf à l'interface entre deux matériaux. Le gradient est notamment continu de part et d'autre des positions des ondes de choc.

On note $\underline{u}_s(t, \underline{x}_0) = \dfrac{d\underline{\xi}_s(t, \underline{x}_0)}{dt}$, la vitesse relative due à la réponse statique. C'est une dérivée à $\underline{X}$ fixé. Elle n'est pas continue au travers des surfaces d'onde de choc. On remarque que :

$$[\underline{u}_s] = \underbrace{\left[\!\left[\frac{\partial \underline{\xi}_s}{\partial t}\right]\!\right]}_{0} + \left[\!\left[\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{\xi}_s . \underline{u}_0\right]\!\right] = \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{\xi}_s . [\underline{u}_0]$$

- **Description de la vibration**

Etape 4

On superpose à l'état de référence un déplacement dynamique $\underline{\xi}(t, \underline{x}_0)$ et on obtient la position des particules :

$$\underline{x} = \underline{x}_0 + \underline{\xi}_s(t, \underline{x}_0) + \underline{\xi}(t, \underline{x}_0)$$

On note $\underline{u}(t, \underline{x}_0)$ la vitesse relative de la vibration : $\underline{u} = \dfrac{d\underline{\xi}}{dt}$

On suppose que le gradient de la vibration $\underline{\xi}$ et la vitesse relative $\underline{u}$ sont discontinus de part et d'autre des lignes de fuite $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{A}_0$.

Pour ce qui est de la modélisation de la vibration au niveau de la partie du bord du pneumatique en interaction avec la chaussée, on suppose que la position des particules du pneumatique en surface (et l'étendue de cette surface) est une donnée qui ne dépend que des géométries en contact, des caractéristiques de la structure et de la vitesse du véhicule, mais pas de la vibration proprement dite. Physiquement, si on étudie deux pneumatiques identiques, roulant sur des surfaces identiques, et qu'on perturbe un des deux pneumatiques, alors il existe deux sortes de particules au niveau de la surface;

- celles de la partie du bord du pneumatique qui ont la même position pour les deux pneumatiques quelque soit la perturbation. Elles se trouvent dans la zone de contact avec la chaussée. Ces particules ne sont pas forcément en contact avec la chaussée, mais elles peuvent être considérées en quelque sorte liées à la route. L'ensemble de ces particules et leurs positions sont des *données* de notre problème.

- celles de la partie du bord du pneumatique qui ont une position différente. On suppose qu'elles se trouvent en contact avec l'air extérieur. On pourrait revenir sur cette hypothèse si certaines particules qui se déplacent en fonction de la perturbation glissent sur la chaussée. Il faudrait introduire une condition sur ce sous domaine qui modélise un frottement.

Si on a choisi une définition un peu compliquée des particules liés à la route, c'est pour justifier l'hypothèse que l'ensemble des particules liées à la route dépend peu de la route, mais surtout de la géométrie des patins de gomme. Ce sera un ensemble qui dépend du temps, de façon périodique si le pneumatique roule à vitesse angulaire constante. Cette hypothèse permettra de découpler le problème des vibrations de la structure du pneumatique du profil de la chaussée.

Ces hypothèses sont difficiles à justifier a priori. Elles conduisent à une modélisation des conditions aux limites simple, c'est la raison pour laquelle on les a choisies.

On a d'une part une partie du bord du pneumatique connue, variable dans le temps, qui subit un déplacement imposé "connu" (indépendant de la solution du problème de vibration). Cette zone se trouve au niveau de la route. Dans la géométrie, l'ensemble des points de la frontière du pneumatique liée à la route au temps t est noté $\partial\mathcal{D}_{0U_c}(t)$, et le sous ensemble des particules en contact avec la jante $\partial\mathcal{D}_{0U_j}$. La réunion de ces deux sous ensembles est la partie de la frontière du pneumatique en contact avec un solide, notée $\partial\mathcal{D}_{0U}(t)$:

$$\partial\mathcal{D}_{0U}(t) = \partial\mathcal{D}_{0U_c}(t) \cup \partial\mathcal{D}_{0U_j}$$

On a d'autre part la partie complémentaire en contact avec de l'air, soit à la pression atmosphérique (partie du pneumatique qui n'est pas en contact avec la route, intérieur des rainures), soit à la pression de gonflement. Le complémentaire dans la frontière du pneumatique de $\partial\mathcal{D}_{0U}(t)$ est noté $\mathcal{D}_{0\Sigma}(t)$, c'est l'ensemble des particules en contact avec de l'air. Cet ensemble se décompose en $\mathcal{D}_{0\Sigma_i}$ pour les particules en contact avec la chambre et $\mathcal{D}_{0\Sigma_e}(t)$ pour les particules en contact avec l'air extérieur.

• Description des déformations

On part d'une description Lagrangienne du mouvement par la transformation $\underline{\phi}(t,\underline{X})$:

$$\underline{\phi}(t,\underline{X}) = \underline{x}_0(t,\underline{X}) + \underline{\xi}_s(t,\underline{x}_0(t,\underline{X})) + \underline{\xi}(t,\underline{x}_0(t,\underline{X}))$$

On utilisera le tenseur de Green-Lagrange pour étudier les déformations entre la configuration naturelle et la configuration actuelle :

$$\underline{\underline{e}}(t,\underline{X}) = \frac{1}{2}\left((\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\,\underline{\phi})^T.\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\,\underline{\phi} - \underline{\underline{1}}\right)$$

En introduisant la décomposition de la transformation, on trouve :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{e}}(t,\underline{X}) = \frac{1}{2}\left((\underline{\underline{F}}_0)^T.\underline{\underline{F}}_0 - \underline{\underline{1}}\right) &+ \frac{1}{2}\left((\underline{\underline{F}}_0)^T.\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\,\underline{\xi}_s + (\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\,\underline{\xi}_s)^T.\underline{\underline{F}}_0\right) + \frac{1}{2}(\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\,\underline{\xi}_s)^T.\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\,\underline{\xi}_s \\ &+ \frac{1}{2}\left((\underline{\underline{F}}_0)^T.\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\,\underline{\xi} + (\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\,\underline{\xi})^T.\underline{\underline{F}}_0\right) + \frac{1}{2}(\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\,\underline{\xi})^T.\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\,\underline{\xi} \\ &+ \frac{1}{2}\left((\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\,\underline{\xi}_s)^T.\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\,\underline{\xi} + (\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\,\underline{\xi})^T.\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\,\underline{\xi}_s\right)\end{aligned}$$

On reconnaît ici la déformation de Green-Lagrange $\underline{\underline{e}}_0$ causée par le mouvement d'entraînement et la déformation de Green-Lagrange entre la configuration naturelle et la configuration de référence $\underline{\underline{e}}_r$:

$$\left\{\begin{aligned}\underline{\underline{e}}_0 &= \frac{1}{2}\left((\underline{\underline{F}}_0)^T.\underline{\underline{F}}_0 - \underline{\underline{1}}\right) \\ \underline{\underline{e}}_r &= \underline{\underline{e}}_0 + \frac{1}{2}\left((\underline{\underline{F}}_0)^T.\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\,\underline{\xi}_s + (\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\,\underline{\xi}_s)^T.\underline{\underline{F}}_0\right) + \frac{1}{2}(\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\,\underline{\xi}_s)^T.\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\,\underline{\xi}_s\end{aligned}\right.$$

2.2 Equations d'équilibre

On fait une hypothèse de petite perturbation par rapport à la position d'entraînement. Le principe de conservation de la masse, ainsi que le principe des puissances virtuelles sont écrits sur $\mathcal{D}_0(t)$, avec les masses volumiques $\rho_0(t, \underline{x}_0)$ des particules dans leur position d'entraînement. Cette hypothèse est cohérente avec la notion de vibration.

• Conservation de la masse

La masse d'un sous système $\mathcal{V}$ de $\mathcal{D}_0(t)$ vaut :

$$m = \int_{\mathcal{V}} \rho_0 \, dV_0$$

La dérivée particulaire de ce terme vaut :

$$\dot{m} = \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{d\rho_0}{dt} + \rho_0 \, \underline{\mathrm{div}\, u_0} \right) dV_0 + \int_{\mathcal{V}\cap(\mathcal{A}_0 \cup \mathcal{F}_0)} [\![\rho_0 \underline{u}_0]\!] . \underline{n} \, dS_0$$

Cette égalité étant valable pour tout sous système $\mathcal{V}$, on trouve les deux équations :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall \underline{x}_0 \neq \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{F}_0 & \dfrac{d\rho_0}{dt} + \rho_0 \, \underline{\mathrm{div}\, u_0} = 0 \\ \forall \underline{x}_0 \in \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{F}_0 & [\![\rho_0 \underline{u}_0]\!] . \underline{n} = 0 \end{array} \right.$$

Hyp sur $\underline{\phi}_0$: Cette équation permet de trouver la masse volumique pour le choix de géométrie. On va faire des hypothèses simplificatrices sur la masse volumique et en déduire des conditions sur la définition de la position d'entraînement.

On suppose que le mouvement d'entrainement n'introduit pas de variation de masse volumique (on peut prendre $\underline{\underline{F}}_0$ de det 1, pour respecter l'incompressibilité de la gomme). Dans ce cas, il n'y a pas de discontinuité de densité de part et d'autre des lignes de choc :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall \underline{x}_0 \neq \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{F}_0 & \underline{\mathrm{div}\, u_0} = 0 \\ \forall \underline{x}_0 \in \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{F}_0 & [\![\underline{u}_0]\!] . \underline{n} = 0 \end{array} \right.$$

• Principe des Puissances Virtuelles

Le champ $\underline{\xi}(t, \underline{x}_0)$ est continu en espace à tout instant. Ses dérivées sont discontinues de part et d'autre des surfaces $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{F}_0$.

Sur la partie de la frontière en interaction avec un autre solide, les conditions aux limites portant sur le champ de vibration $\underline{\xi}$ sont des conditions d'encastrement. Pour en tenir compte on résout le problème mécanique dans le sous espace des champs $\underline{\xi}(t, \underline{x}_0)$ vérifiant :

$$\forall \underline{x}_0 \in \partial \mathcal{D}_{0U}(t) \quad \underline{\xi}(t, \underline{x}_0) = 0$$

On utilise des champs de vitesse virtuelle $\underline{\delta\xi}(\underline{x}_0)$ qui vérifient la condition d'encastrement sur $\partial\mathcal{D}_{0U}(t)$ et qui sont continus de part et d'autre de $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{F}_0$.

Puissance virtuelle des efforts extérieurs :
On note $\underline{n}(\underline{x}_0)$ la normale extérieure au domaine $\mathcal{D}_0(t)$. Sur $\mathcal{D}_{0\Sigma_i}$, les particules du pneumatique sont en contact avec l'air qui se trouve à l'intérieur du pneumatique. L'hypothèse de découplage du problème des vibrations et du problème de l'émission sonore nous conduit à modéliser la condition aux limites par un chargement imposé qui fait intervenir la pression de gonflement p_i :

$$\underline{t}(\underline{x}_0) = -p_i \underline{n}$$

De même, sur $\mathcal{D}_{0\Sigma_e}$, les particules du pneumatique sont en contact avec l'air qui se trouve à l'extérieur du pneumatique. La condition aux limites est modélisée par un chargement imposé qui fait intervenir la pression atmosphérique p_a :

$$\underline{t}(\underline{x}_0) = -p_a \underline{n}$$

En conclusion,

$$\mathcal{P}_e(\underline{\delta\xi}) = \int_{\partial\mathcal{D}_{0\Sigma}} \underline{t}.\underline{\delta\xi}\, dS_0$$

Puissance virtuelle des efforts intérieurs :
On écrit l'expression classique du Principe des Puissances Virtuelles séparément pour les deux sous domaines $(+)$ et $(-)$. Sur ces domaines, le champ de vitesse virtuelle $\underline{\delta\xi}$ est continu. Cette expression fait intervenir un tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}(t, \underline{x}_0)$, l'accélération totale $\underline{a}_t(t, \underline{x}_0)$.

$$\begin{aligned}
-\int_{(+)} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\, \underline{\delta\xi}\, dV_0 + \int_{\mathcal{F}_0\cup\mathcal{A}_0} \left(\underline{\underline{\sigma}}^{(+)}.(-\underline{n})\right).\underline{\delta\xi}\, dS_0 + \int_{\partial\mathcal{D}_{0\Sigma}\cap(+)} \underline{t}.\underline{\delta\xi}\, dS_0 &= \int_{(+)} \rho_0 \underline{a}_t\, dV_0 \\
-\int_{(-)} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\, \underline{\delta\xi}\, dV_0 + \int_{\mathcal{F}_0\cup\mathcal{A}_0} \left(\underline{\underline{\sigma}}^{(-)}.\underline{n}\right).\underline{\delta\xi}\, dS_0 + \int_{\partial\mathcal{D}_{0\Sigma}\cap(-)} \underline{t}.\underline{\delta\xi}\, dS_0 &= \int_{(-)} \rho_0 \underline{a}_t\, dV_0
\end{aligned}$$

A cause du principe d'extensivité, on somme ces deux relations. Le seul terme qui s'annule dans les mouvement rigidifiant est la puissance des efforts intérieurs :

$$\mathcal{P}_i(\underline{\delta\xi}) = -\int_{\mathcal{D}_0} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\, \underline{\delta\xi}\, dV_0$$

On reconnaît la puissance des efforts extérieurs :

$$\mathcal{P}_e(\underline{\delta\xi}) = \int_{\partial\mathcal{D}_{0\Sigma}\cap(+)} \underline{t}.\underline{\delta\xi}\, dS_0 + \int_{\partial\mathcal{D}_{0\Sigma}\cap(-)} \underline{t}.\underline{\delta\xi}\, dS_0$$

Il nous reste donc un terme surfacique à identifier dans la puissance des efforts d'accélération :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_a(\underline{\delta\xi}) &= \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \underline{a}_t \, dV_0 - \int_{\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{A}_0} (\underline{\underline{\sigma}}^{(+)}.(-\underline{n})) \,.\underline{\delta\xi} \, dS_0 - \int_{\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{A}_0} (\underline{\underline{\sigma}}^{(-)}.\underline{n}) \,.\underline{\delta\xi} \, dS_0 \\ &= \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \underline{a}_t \, dV_0 + \int_{\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{A}_0} \left([\![\underline{\underline{\sigma}}]\!] \,.\underline{n}\right) .\underline{\delta\xi} \, dS_0\end{aligned}$$

Puissance virtuelle des efforts d'accélération :
On choisit une fonction $\underline{\Delta\xi}(t = t_0 + h, \underline{x}_0)$ constante par particule $(\dfrac{d\underline{\Delta\xi}}{dt}(t, \underline{x}_0) = 0)$ et telle que $\underline{\Delta\xi}(t_0, \underline{x}_0) = \underline{\delta\xi}(\underline{x}_0)$.

Cette puissance est obtenue par la dérivée totale (c'est à dire à $\underline{X}$ fixé) de la puissance virtuelle de la quantité de mouvement en $t = t_0$ (voir [**Salençon**92, tome 1, p. 167-168]).

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_a(\underline{\delta\xi}) &= \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}_0} \rho_0(\underline{u} + \underline{u}_s + \underline{u}_0).\underline{\Delta\xi} \, dV_0 = \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \left(\frac{d\underline{u}}{dt} + \frac{d\underline{u}_s}{dt} + \frac{d\underline{u}_0}{dt}\right) .\underline{\delta\xi} \, dV_0 \\ &+ \int_{\mathcal{D}_0} \underbrace{\left(\frac{d\rho_0}{dt} + \rho_0 \, \underline{\mathrm{div}} \frac{d\underline{x}_0}{dt}\right)}_{0} (\underline{u} + \underline{u}_s + \underline{u}_0).\underline{\delta\xi} \, dV_0 + \int_{\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{A}_0} \underbrace{\left[\!\!\left[\rho_0(\underline{u} + \underline{u}_s + \underline{u}_0).\underline{\delta\xi} \, \frac{d\underline{x}_0}{dt}\right]\!\!\right] .\underline{n}}_{\rho_0 \, (\underline{u}_0.\underline{n}) \, [\![(\underline{u} + \underline{u}_s + \underline{u}_0)]\!] .\underline{\delta\xi}} \, dS_0 \\ &+ \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0(\underline{u} + \underline{u}_s + \underline{u}_0). \underbrace{\frac{d\underline{\Delta\xi}}{dt}}_{0} \, dV_0\end{aligned}$$

Les simplifications sont dues à la conservation de la masse d'une part et aux conditions portant sur $\underline{\Delta\xi}$ d'autre part.

Par la suite, on note $\underline{a}_0 = \dfrac{d\underline{u}_0}{dt}$, $\underline{a}_s = \dfrac{d\underline{u}_s}{dt}$ et $\underline{a} = \dfrac{d\underline{u}}{dt}$

$$\mathcal{P}_a(\underline{\delta\xi}) = \int_{\mathcal{D}_0} \rho_0 \, (\underline{a}_0 + \underline{a}_s + \underline{a}) \,.\underline{\delta\xi} \, dV_0 + \int_{\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{A}_0} \rho_0 \, (\underline{u}_0.\underline{n}) \, [\![(\underline{u} + \underline{u}_s + \underline{u}_0)]\!] .\underline{\delta\xi} \, dS_0$$

En comparant les deux expressions obtenues pour la puissance des efforts d'accélération, on trouve une condition de saut qui traduit l'équilibre au niveau des ondes de choc $\mathcal{A}_0(t)$ et $\mathcal{F}_0(t)$:

$$[\![\underline{\underline{\sigma}}']\!] \,.\underline{n} - \rho_0 \, (\underline{u}_0.\underline{n}) \, [\![\underline{u}]\!] = +\rho_0 \, (\underline{u}_0.\underline{n}) \, [\![\underline{u}_s]\!] + \rho_0 \, (\underline{u}_0.\underline{n}) \, [\![\underline{u}_0]\!]$$

- **Relation de comportement**

On veut traduire les deux idées suivantes :

- on veut tenir compte de l'état contraint de la configuration de référence, principalement dans la carcasse qui est beaucoup plus rigide que la gomme. La contrainte fait intervenir la réponse différée des matériaux. L'état de contrainte de la configuration de référence est statiquement équilibré.

Lorsqu'on réintroduit le temps, la réponse du matériau est différente à cause de la viscosité. La différence de niveau de contrainte sera négligée. On supposera donc que la viscosité dans la carcasse n'a pas d'influence notable sur la rigidité géométrique, et que l'état de contrainte de référence en roulement reste statiquement équilibré.

- la réponse du matériau à la vibration est supposée linéaire. C'est au moins justifié dans le domaine où les vibrations sont de petite amplitude. On néglige dans un premier temps la dissipation, quitte à corriger le mouvement prédit en seconde approximation comme on peut le faire dans l'analyse modale par exemple. On pense que cette hypothèse est justifiée parce qu'on peut mesurer des fréquences de résonance pour un pneumatique immobile. C'est donc que l'énergie dissipée par une vibration est faible.

  Par conséquent, le champ de température est supposé connu ne dépendant que du mouvement de référence.

  On fait une hypothèse d'élasticité instantanée.

On note $\rho(t, \underline{X})$ la densité de la particule repérée par $\underline{X}$ au temps t.

On suppose que la gomme et que le matériau composite de la carcasse (un empilement de plis renforcés par des unidirectionnels à fibres longues) ont un comportement qui peut être décrit par une énergie libre massique $\psi(T, \underline{\underline{e}}, \underline{\underline{\alpha}})$ qui dépend de la température, du tenseur de déformation de Green-Lagrange et de variables internes $\underline{\underline{\alpha}}$. La réponse différée est donnée par une valeur $\underline{\underline{\alpha}}_d(\underline{\underline{e}})$ de la variable interne.

On rappelle la décomposition des déformations en une déformation de référence et des termes faisant intervenir la vibration :

$$\underline{\underline{e}}(t, \underline{X}) = \underline{\underline{e}}_r(t, \underline{X}) + \frac{1}{2}\left((\underline{\underline{F}}_0 + \underline{\underline{\mathrm{Grad}\,\xi_s}})^T . \underline{\underline{\mathrm{Grad}\,\xi}} + (\underline{\underline{\mathrm{Grad}\,\xi}})^T . (\underline{\underline{F}}_0 + \underline{\underline{\mathrm{Grad}\,\xi_s}})\right) + \frac{1}{2}(\underline{\underline{\mathrm{Grad}\,\xi}})^T . \underline{\underline{\mathrm{Grad}\,\xi}}$$

On note $\underline{\underline{\Pi}}_r$, la contrainte de Piola due aux déformations entre l'état naturel et l'état de référence :

$$\underline{\underline{\Pi}}_r = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{e}}}\left(T(t, \underline{X}), \underline{\underline{e}}_r(t, \underline{X}), \underline{\underline{\alpha}}_d(\underline{\underline{e}}_r)\right)$$

On définit le tenseur d'ordre 4 $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}$ par la formule :

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial \underline{\underline{e}}^2}\left(T(t, \underline{X}), \underline{\underline{e}}_r(t, \underline{X}), \underline{\underline{\alpha}}_d(\underline{\underline{e}}_r)\right) = A_{ijkl}(\underline{\underline{e}}_r) \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l$$

C'est le comportement tangent du matériau autour de la déformation $\underline{\underline{e}}_r$, de la température T et de la variable interne $\underline{\underline{\alpha}}_d$. On suppose que ψ est choisie de telle sorte que $A_{ijkl} = A_{jikl}$. La propriété de Schwartz sur les dérivées secondes implique que $A_{ijkl} = A_{klij}$.

On va développer l'énergie libre ψ autour de la déformation $\underline{\underline{\epsilon}}_r$, en supposant constantes la température et la variable interne qui donne la réponse différée $\underline{\underline{\alpha}}_d(\underline{\underline{\epsilon}}_r)$. On s'arrête au deuxième ordre en $\underline{\xi}$.

$$\begin{aligned}
\psi\left(T,\underline{\underline{\epsilon}},\underline{\underline{\alpha}}_d(\underline{\underline{\epsilon}}_r)\right)-\psi\left(T,\underline{\underline{\epsilon}}_r,\underline{\underline{\alpha}}_d(\underline{\underline{\epsilon}}_r)\right) &= \frac{\partial\psi}{\partial\underline{\underline{\epsilon}}}:\left(\underline{\underline{\epsilon}}-\underline{\underline{\epsilon}}_r\right)+\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\epsilon}}-\underline{\underline{\epsilon}}_r\right):\frac{1}{\rho}\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}:\left(\underline{\underline{\epsilon}}-\underline{\underline{\epsilon}}_r\right)+o\left(\|\underline{\xi}\|^2\right)\\
&= \frac{1}{\rho}\left(\underline{\underline{\Pi}}_r\cdot(\underline{\underline{F}}_0+\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\,\underline{\xi}_s)^T\right):\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\,\underline{\xi}+\frac{1}{\rho}\underline{\underline{\Pi}}_r:\frac{(\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\,\underline{\xi})^T\cdot\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\,\underline{\xi}}{2}\\
&+\frac{1}{2}\left((\underline{\underline{F}}_0+\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\,\underline{\xi}_s)^T\cdot\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\,\underline{\xi}\right):\frac{1}{\rho}\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}(\underline{\underline{\epsilon}}_r):\left((\underline{\underline{F}}_0+\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\,\underline{\xi}_s)^T\cdot\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\,\underline{\xi}\right)\\
&+o\left(\|\underline{\xi}\|^2\right)
\end{aligned}$$

On calcule ensuite le tenseur des contraintes de Cauchy par la formule:

$$\underline{\underline{\sigma}}=\rho_0\underline{\underline{F}}_0\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\,\underline{\xi}}$$

On introduit les notations suivantes:

$$\left\{\begin{array}{l}
\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\,\underline{\xi}_s=\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{\xi}_s\cdot\underline{\underline{F}}_0\\
\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\,\underline{\xi}=\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{\xi}\cdot\underline{\underline{F}}_0\\
\underline{\underline{\sigma}}_0=\dfrac{\rho_0}{\rho}\underline{\underline{F}}_0\cdot\underline{\underline{\Pi}}_r\cdot(\underline{\underline{F}}_0)^T\\
\underline{\underline{\sigma}}_r=\underline{\underline{\sigma}}_0+\dfrac{\delta_{il}\sigma_{0jk}+\delta_{jl}\sigma_{0ik}}{2}\underline{e}_i\otimes\underline{e}_j\otimes\underline{e}_k\otimes\underline{e}_l:\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{\xi}_s
\end{array}\right.$$

On obtient la relation finale:

$$\underbrace{\underline{\underline{\sigma}}-\underline{\underline{\sigma}}_r}_{\underline{\underline{\sigma}}'}=\underbrace{\left(\frac{\delta_{il}\sigma_{rjk}+\delta_{jl}\sigma_{rik}}{2}\underline{e}_i\otimes\underline{e}_j\otimes\underline{e}_k\otimes\underline{e}_l+\frac{\rho_0}{\rho}A_{ijkl}\underline{\underline{F}}_0\cdot\underline{e}_i\otimes\underline{\underline{F}}_0\cdot\underline{e}_j\otimes\underline{\underline{F}}_0\cdot\underline{e}_k\otimes\underline{\underline{F}}_0\cdot\underline{e}_l\right)}_{\underline{\underline{\underline{\underline{R}}}}_0}:\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{\xi}$$

La contrainte de Cauchy est la somme de la contrainte due à la réponse quasi statique, et d'un terme proportionnel à $\underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{\xi}$.

La rigidité apparente $\underline{\underline{\underline{\underline{R}}}}_0$ est la somme de deux termes,

- une rigidité géométrique linéaire en $\underline{\underline{\sigma}}_r$. On simplifiera ce terme en supposant qu'il ne dépend pas du détail de l'indentation, et on gardera une grandeur moyenne qui ne dépend que de $\underline{x}_0$. C'est une hypothèse d'homogénéisation qui est valable si les variations dues à l'indentation sont courtes devant les longueurs d'onde étudiées.
- une rigidité tangente. De la même manière, on choisit de négliger pour simplifier la dépendance en fonction du détail de l'indentation, et on garde une dépendance en $\underline{x}_0$.

On fait les intégrations par parties qui vont bien dans le Principe des Puissances Virtuelles et on trouve les équations qui portent sur la vibration $\underline{\xi}$. On utilise que le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}_r$ est en équilibre statique avec la pression, et qu'il n'a pas de saut.

Conclusion

Sur l'ensemble des positions d'entraînement donné par la composition d'une rotation et d'une fonction d'écrasement :

$$\underline{x}_0(t,\underline{X}) = \underline{\phi}_0\left(\underline{\underline{U}}(\Omega t).\underline{X}\right)$$

On a les équations suivantes :

1. *Une condition de saut qui traduit l'équilibre au niveau des ondes de choc $\mathcal{A}_0(t)$ et $\mathcal{F}_0(t)$*

$$\left[\underline{\underline{\sigma}}'\right].\underline{n} - \rho_0\left(\underline{u}_0.\underline{n}\right)\left[\underline{u}\right] = +\rho_0\left(\underline{u}_0.\underline{n}\right)\left[\underline{u}_s\right] + \rho_0\left(\underline{u}_0.\underline{n}\right)\left[\underline{u}_0\right]$$

2. *Une équation d'équilibre sur $\mathcal{D}_0(t)$*

$$\underline{div}\,\underline{\underline{\sigma}}' - \rho_0\,\underline{a} = \rho_0\,\underline{a}_s + \rho_0\,\underline{a}_0$$

3. *Des conditions aux limites en contrainte et en déplacement*

$$\begin{cases} \textit{sur}\ \partial\mathcal{D}_{0\Sigma}(t) & \underline{\underline{\sigma}}'.\underline{n} = 0 \\ \textit{sur}\ \partial\mathcal{D}_{0U}(t) & \underline{\xi} = \underline{u} = 0 \end{cases}$$

4. *Une relation de comportement sur $\mathcal{D}_0(t)$ qui fait intervenir l'état de référence :*

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\underline{\underline{R}}}}_0\left(\underline{x}_0\right) : \underline{\underline{grad}}\,\underline{\xi}$$

Remarque : *le mouvement d'entrainement vérifie l'équation de conservation de la masse*

$$\begin{cases} \forall \underline{x}_0 \neq \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{F}_0 & div\,\underline{u}_0 = 0 \\ \forall \underline{x}_0 \in \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{F}_0 & \left[\underline{u}_0\right].\underline{n} = 0 \end{cases}$$

L'apport de ce chapitre porte sur deux aspects :

1. *la description du mouvement qui permet :*
   - *de tenir compte de l'étendue de la zone de contact ;*
   - *de séparer les contributions du défilement du motif de la bande de roulement (décrit par le mouvement d'entraînement $\underline{x}_0(t,\underline{X})$) et de l'indentation ou du glissement sur la chaussée (décrits par le déplacement quasi statique $\underline{\xi}_s(t,\underline{x}_0)$) ;*
   - *de linéariser la vibration $\underline{\xi}$.*
2. *l'étude de l'équilibre d'une onde de choc au niveau des lignes d'attaque et de fuite de la zone de contact.*