Estimateurs a posteriori pour une méthode par éléments finis mixte stabilisée appliquée au problème de contact frottant

On s'intéresse dans ce chapitre à une méthode par éléments finis mixte ne nécessitant pas de condition inf-sup de Babuška-Brezzi : il s'agit d'une méthode de type Barbosa et Hughes que l'on généralise au problème de contact unilatéral avec frottement de Coulomb. On justifie l'existence et l'unicité du problème discret et on met en exergue un estimateur a posteriori.

Le début de ce chapitre a abouti à un article paru dans *Mathematical Modelling of Natural Phenomena* intitulé **A stabilized Lagrange multiplier method for the finite element approximation of frictional contact problems in elastostatics** [168].

Sommaire

Pour le modèle de contact unilatéral sans frottement, on dispose de nombreuses méthodes par éléments finis faisant intervenir des multiplicateurs de Lagrange [29, 33, 70], des éléments finis quadratiques [28, 123] ou un Lagrangien augmenté [64]. En fait, toutes les méthodes citées ci-dessus ont besoin d'une condition inf-sup (voir [14, 53, 54]) et seul un choix judicieusement approprié des espaces éléments finis fournira des approximations convergentes. Les deux conditions clé qui assurent le succès de la convergence sont la coercivité vérifiée par la forme bilinéaire associée à l'opérateur d'élasticité et la condition inf-sup ou de Babuška-Brezzi dont l'influence a été étudiée dans [14]. Cette seconde condition joue un rôle important dans les problèmes de minimisation sous contraintes qui peuvent être reformulés comme des problèmes de point-selle par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. La condition inf-sup s'exprime de la manière suivante :

$$\exists \beta > 0, \qquad \inf_{\boldsymbol{\lambda}_h \in \mathbf{M}_h(\mu\lambda_{hn})} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{b(\boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{v}_h)}{\|\boldsymbol{\lambda}_h\|_{-1/2,\Gamma_C} \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}} \geq \beta$$

où $\mathbf{V}_h$ et $\mathbf{M}_h(\mu\lambda_{hn})$ sont les espaces des champs de déplacement et de contrainte normale discrétisés et β est une constante strictement positive indépendante de la taille du maillage.

Dans ce chapitre, on considère une méthode par éléments finis mixte (dont les formulations font intervenir des multiplicateurs de Lagrange en tant qu'inconnues) qui ne requiert pas de condition inf-sup. De telles méthodes qui assurent la stabilité des multiplicateurs en ajoutant des termes supplémentaires dans la formulation faible ont été introduites par Hughes et Brooks en 1987. Hughes, Franca et Balestra [136] les ont développées pour le problème de Stokes et elles ont été analysées dans [21, 22]. Le gros avantage de ces méthodes comparées aux classiques dans [14] est que les espaces d'éléments finis pour les variables primales et duales peuvent être choisis indépendamment. Dans les méthodes de pénalisation, la pénétration entre deux bords se touchant est introduite et la force normale de contact est reliée á la pénétration par un paramètre de pénalisation ([6, 195]). De plus, contrairement aux techniques de pénalisation, pour la méthode des multiplicateurs de Lagrange, la stabilité est améliorée sans compromettre la consistance de la méthode. Plus tard, la connection entre la méthode stabilisée de Barbosa et Hughes [21, 22] et celle antérieure de Nitsche [188] a été réalisée dans [215]. Les études de [21, 22] ont été généralisées à un système d'inégalités variationnelles dans [23] (pour les problèmes de type Signorini entre autres). Cette méthode a aussi été étendue aux problèmes d'interface sur les maillages non conformes dans [26, 110] et plus récemment pour le problème de contact bilatéral (voir [116]).

Mon but dans ce chapitre est d'étendre le travail d'Hild et Renard dans [130] au modèle plus général de contact avec frottement de Coulomb. Dans une première section, on propose une extension du concept "Barbosa-Hughes-Nitsche's" au problème de contact avec frottement et on étudie les propriétés d'existence et d'unicité du problème discret. Ensuite on s'intéresse aux estimateurs d'erreur a posteriori.

4.1 Discrétisation par une méthode stabilisée à l'aide de multiplicateurs de Lagrange

Le problème continu ainsi que les résultats d'existence et d'unicité sont les mêmes que dans le chapitre précédent (voir section 3.1)

4.1.1 Problème discret

Soit $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$ une famille d'espaces de dimension finie indexés par $h > 0$ et soit une famille régulière T_h (voir [50, 54, 66]) de triangulations du domaine Ω. Pour $T \in T_h$, soit h_T le diamètre de T et $h = \max_{T \in T_h} h_T$. On choisit des fonctions standard continues et affines par morceaux, i.e. :

$$\mathbf{V}_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in (C(\overline{\Omega}))^2 : \mathbf{v}_{h|_T} \in (P_1(T))^2, \forall T \in T_h, \mathbf{v}_h = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_D \right\}.$$

Puis, on pose $x_0, ..., x_N$ des points distincts appartenant à $\overline{\Gamma_C}$ (notons que l'on ne suppose pas que ces nœuds coïncident avec des nœuds de la triangulation T_h). Ces nœuds forment une famille monodimensionnelle de maillages de Γ_C notée $\mathcal{T}_H$ et on définit $H = \max_{0 \le i \le N-1} |x_{i+1} - x_i|$.

Afin d'exprimer les contraintes du contact en utilisant des multiplicateurs de Lagrange sur la zone de contact, on introduit l'espace W_H de dimension finie approximant W'_n et W'_t :

$$W_H = \left\{ \nu_H \in L^2(\Gamma_C) : \nu_{H|_{]x_i, x_{i+1}[}} \in P_0(]x_i, x_{i+1}[), \forall 0 \le i \le N-1 \right\}.$$

Le choix pour l'espace W_H nous permet de définir les cônes convexes fermés suivants :

$$M_{Hn} = \left\{ \nu_H \in W_H : \ \nu_H \ge 0 \right\}$$

et, pour $g \in M_{Hn}$:

$$M_{Ht}(g) = \left\{ \nu_H \in W_H : \ |\nu_H| \le g \right\}.$$

Le problème discret consiste à trouver $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ et $\boldsymbol{\lambda}_H = (\lambda_{Hn}, \lambda_{Ht}) \in \mathbf{M}_H(\mu\lambda_{Hn}) = M_{Hn} \times M_{Ht}(\mu\lambda_{Hn})$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\boldsymbol{\lambda}_H, \mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Hn} - \sigma_n(\mathbf{u}_h))\sigma_n(\mathbf{v}_h) d\Gamma \\ \quad + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h))\sigma_t(\mathbf{v}_h) d\Gamma = L(\mathbf{v}_h), \qquad \forall\, \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ \\ b(\boldsymbol{\nu}_H - \boldsymbol{\lambda}_H, \mathbf{u}_h) + \int_{\Gamma_C} \gamma(\nu_{Hn} - \lambda_{Hn})(-\lambda_{Hn} - \sigma_n(\mathbf{u}_h)) d\Gamma \\ \quad + \int_{\Gamma_C} \gamma(\nu_{Ht} - \lambda_{Ht})(-\lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h)) d\Gamma \le 0, \qquad \forall\, (\nu_{Hn}, \nu_{Ht}) \in \mathbf{M}_H(\mu\lambda_{Hn}), \end{array} \right. \tag{4.1}$$

où γ est constante sur chaque élément T et $\gamma = \gamma_0 h_T$ où $\gamma_0 > 0$ est indépendante de h.

Remarque 4.1.1

La particularité de (4.1) est la présence des termes de stabilisation incluant γ.

La méthode est consistante au sens que λ_{Hn} et $-\sigma_n(\mathbf{u}_h)$ (resp. λ_{Ht} et $-\sigma_t(\mathbf{u}_h)$) sont des approximations de $\lambda_n = -\sigma_n(\mathbf{u})$ (resp. $\lambda_t = -\sigma_t(\mathbf{u})$) et le terme de stabilisation additionnel converge vers la solution du problème continu. Bien sûr le terme de stabilisation modifie la solution discrète. En effet, cela renforce la correspondance entre λ_{Hn} et $-\sigma_n(\mathbf{u}_h)$ (resp. λ_{Ht} et $-\sigma_t(\mathbf{u}_h)$).

4.1.2 Etude de l'existence et de l'unicité de la solution

Remarque 4.1.2

Lorsque γ=0, en utilisant un théorème de point fixe, la référence [69] établit l'existence d'une solution et l'unicité lorsque $\mu \leq C(h)$ ($C(h) \sim h^{\frac{1}{2}}$).

Proposition 4.1.1

Pour tout coefficient μ positif et pour γ_0 suffisamment petit, le problème (4.1) admet au moins une solution.

Démonstration : Soit $\mu > 0$ fixé. On introduit le problème de frottement $P(g_{Hn})$ avec un seuil fixé μg_{Hn} où $g_{Hn} \in M_{Hn}$. Cela consiste à trouver $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ et $\boldsymbol{\lambda}_H \in \mathbf{M}_H(\mu g_{Hn}) = M_{Hn} \times M_{Ht}(\mu g_{Hn})$ satisfaisant :

$$P(g_{Hn}) \left\{ \begin{array}{l} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\boldsymbol{\lambda}_H, \mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Hn} - \sigma_n(\mathbf{u}_h))\sigma_n(\mathbf{v}_h) d\Gamma \\ \quad + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h))\sigma_t(\mathbf{v}_h) d\Gamma = L(\mathbf{v}_h), \ \forall \, \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ \\ b(\boldsymbol{\nu}_H - \boldsymbol{\lambda}_H, \mathbf{u}_h) + \int_{\Gamma_C} \gamma(\nu_{Hn} - \lambda_{Hn})(-\lambda_{Hn} - \sigma_n(\mathbf{u}_h)) d\Gamma \\ \quad + \int_{\Gamma_C} \gamma(\nu_{Ht} - \lambda_{Ht})(-\lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h)) d\Gamma \leq 0, \ \forall \, \boldsymbol{\nu}_H \in \mathbf{M}_H(\mu g_{Hn}). \end{array} \right. \tag{4.2}$$

Le problème (4.2) est équivalent à trouver un point-selle $(\mathbf{u}_h, \lambda_{Hn}, \lambda_{Ht}) = (\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_H) \in \mathbf{V}_h \times \mathbf{M}_H(\mu g_{Hn})$ vérifiant

$$\mathcal{L}_\gamma(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\nu}_H) \leq \mathcal{L}_\gamma(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_H) \leq \mathcal{L}_\gamma(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\lambda}_H), \qquad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \ \forall \boldsymbol{\nu}_H \in \mathbf{M}_H(\mu g_{Hn}),$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\gamma(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\nu}_H) &= \frac{1}{2} a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) - L(\mathbf{v}_h) + b(\boldsymbol{\nu}_H, \mathbf{v}_h) \\ & \quad - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_C} \gamma(\nu_{Hn} + \sigma_n(\mathbf{v}_h))^2 d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_C} \gamma(\nu_{Ht} + \sigma_t(\mathbf{v}_h))^2 d\Gamma. \end{aligned}$$

Remarque 4.1.3

L'avantage de cette formulation est que la fonction $\mathcal{L}_\gamma$ est régulière par rapport aux deux variables.

Soit E un côté (d'un triangle) sur Γ_C et soit $T \in T_h$ un élément contenant E. Sans perte de généralité, on peut supposer que Γ_C est un segment de droite parallèle à l'axe des abscisses et on écrit $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$. Par conséquent, on déduit pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$:

$$\begin{aligned} \|\sigma_n(\mathbf{v}_h)\|_E &= \|\sigma_{yy}(\mathbf{v}_h)\|_E = \frac{|E|^{1/2}}{|T|^{1/2}} \|\sigma_{yy}(\mathbf{v}_h)\|_T \\ &\sim h_E^{-1/2} \|\sigma_{yy}(\mathbf{v}_h)\|_T \sim h_T^{-1/2} \|\sigma_{yy}(\mathbf{v}_h)\|_T \end{aligned}$$

Soit h_{Γ_C} la fonction égale à $\dfrac{\gamma}{\gamma_0}$ et indépendante de γ_0. Par sommation sur les côtés $E \subset \Gamma_C$, on obtient

$$\|h_{\Gamma_C}^{1/2}\sigma_n(\mathbf{v}_h)\|_{\Gamma_C}^2 \leq C\|\sigma_{yy}(\mathbf{v}_h)\|_\Omega^2 \leq C\|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}^2. \tag{4.3}$$

On obtient la même inégalité avec $\sigma_t(\mathbf{v}_h)$. Ainsi par l'inégalité de Korn et (4.3), lorsque γ_0 est suffisamment petit, il existe $C > 0$ tel que pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$:

$$a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) - \int_{\Gamma_C} \gamma(\sigma_n(\mathbf{v}_h))^2 d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \gamma(\sigma_t(\mathbf{v}_h))^2 d\Gamma \geq C\|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}^2. \tag{4.4}$$

En utilisant des arguments classiques sur les points-selles d'Haslinger, Hlaváček et Nečas ([112], p.338), on déduit qu'il existe un tel point-selle. En effet, l'existence d'une solution au problème (4.2) lorsque γ_0 est suffisamment petit provient du fait que :

- $\mathbf{V}_h$ et $\mathbf{M}_H(\mu g_{Hn})$ sont deux ensembles convexes fermés non vides,
- $\mathcal{L}_\gamma(.,.)$ est continue sur $\mathbf{V}_h \times W_H^2$,
- $\mathcal{L}_\gamma(\mathbf{v}_h, .)$ (resp. $\mathcal{L}_\gamma(., \boldsymbol{\nu}_H)$) est strictement concave (resp. strictement convexe) pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ (resp. pour tout $\boldsymbol{\nu}_H \in \mathbf{M}_H(\mu g_{Hn})$),
- en prenant $\boldsymbol{\nu}_H = 0$ et par (4.4) avec γ_0 suffisamment petit, on obtient

$$\mathcal{L}_\gamma(\mathbf{v}_h, 0) \geq \frac{C}{2}\|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}^2 - \|L\|_V \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}$$

  qui tend vers l'infini lorsque $\|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega} \longrightarrow \infty$. Ainsi

$$\lim_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega} \to \infty} \mathcal{L}_\gamma(\mathbf{v}_h, 0) = +\infty$$

- en choisissant $\mathbf{v}_h = 0$ on aboutit à

$$\begin{aligned} &\lim_{\boldsymbol{\nu}_H \in \mathbf{M}_H(\mu g_{Hn}), \|\gamma^{1/2}\boldsymbol{\nu}_H\|_{0,\Gamma_C} \to \infty} \mathcal{L}_\gamma(0, \boldsymbol{\nu}_H) \\ &= -1/2\int_{\Gamma_C} \gamma\nu_{Hn}^2 d\Gamma - 1/2\int_{\Gamma_C} \gamma\nu_{Ht}^2 d\Gamma = -\infty. \end{aligned}$$

La stricte convexité de $a(.,.)$ entraine que le premier argument $\mathbf{u}_h$ est unique.
De plus, on suppose que le second argument n'est pas unique. L'inégalité de (4.2) nous permet d'écrire en choisissant $\nu_{Hn} = \lambda_{Hn}^2$ et $\nu_{Ht} = \lambda_{Ht}^2$,

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_C} (\lambda_{Hn}^2 - \lambda_{Hn}^1)u_{hn}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(\lambda_{Hn}^2 - \lambda_{Hn}^1)(-\lambda_{Hn}^1 - \sigma_n(\mathbf{u}_h))d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_C} (\lambda_{Ht}^2 - \lambda_{Ht}^1)u_{ht}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(\lambda_{Ht}^2 - \lambda_{Ht}^1)(-\lambda_{Ht}^1 - \sigma_t(\mathbf{u}_h))d\Gamma \leq 0 \end{aligned}$$

et en choisissant $\nu_{Hn} = \lambda_{Hn}^1$ et $\nu_{Ht} = \lambda_{Ht}^1$,

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_C} (\lambda_{Hn}^1 - \lambda_{Hn}^2)u_{hn}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(\lambda_{Hn}^1 - \lambda_{Hn}^2)(-\lambda_{Hn}^2 - \sigma_n(\mathbf{u}_h))d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_C} (\lambda_{Ht}^1 - \lambda_{Ht}^2)u_{ht}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(\lambda_{Ht}^1 - \lambda_{Ht}^2)(-\lambda_{Ht}^2 - \sigma_t(\mathbf{u}_h))d\Gamma \leq 0 \end{aligned}$$

Par addition on obtient $-\|\gamma^{1/2}(\lambda_{Hn}^1 - \lambda_{Hn}^2)\|_{\Gamma_C}^2 - \|\gamma^{1/2}(\lambda_{Ht}^1 - \lambda_{Ht}^2)\|_{\Gamma_C}^2 \geq 0$ et on arrive à la conclusion que $\lambda_{Hn}^1 = \lambda_{Hn}^2, \lambda_{Ht}^1 = \lambda_{Ht}^2$. Par conséquent, le second argument $\boldsymbol{\lambda}_H$ est unique et (4.2) admet une solution unique.

La définition suivante est une conséquence directe de la définition des problèmes (4.1) et (4.2).

Lemme 4.1.1

Les solutions du problème discret de contact et frottement de Coulomb (4.1) sont les solutions de $P(\lambda_{Hn})$ où λ_{Hn} est un point fixe de Φ_H définie comme suit :

$$\begin{array}{rrcl} \Phi_H : & M_{Hn} & \longrightarrow & M_{Hn} \\ & g_{Hn} & \longmapsto & \lambda_{Hn}. \end{array}$$

où $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_H)$ est la solution de $P(g_{Hn})$.

Pour établir l'existence d'un point fixe de Φ_H, on utilise le théorème du point fixe de Brouwer.

Etape 1. On prouve que l'application Φ_H est continue.

Soit $(\mathbf{u}_h, \lambda_{Hn}, \lambda_{Ht})$ et $(\overline{\mathbf{u}_h}, \overline{\lambda_{Hn}}, \overline{\lambda_{Ht}})$ les solutions de $(P(g_{Hn}))$ et $(P(\overline{g_{Hn}}))$ respectivement. D'une part, on a :

$$\|\gamma^{1/2}(\lambda_{Hn} - \overline{\lambda_{Hn}})\|^2_{\Gamma_C} = \int_{\Gamma_C} \gamma\lambda^2_{Hn}\, d\Gamma - 2\int_{\Gamma_C} \gamma\lambda_{Hn}\overline{\lambda_{Hn}} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma\overline{\lambda_{Hn}}^2 d\Gamma$$

En utilisant (4.2) et $\nu_{Ht} = \lambda_{Ht}$, on obtient $\forall\, \nu_{Hn} \in M_{Hn}$

$$\int_{\Gamma_C} (\nu_{Hn} - \lambda_{Hn})u_{hn} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(\nu_{Hn} - \lambda_{Hn})(-\lambda_{Hn} - \sigma_n(\mathbf{u}_h))d\Gamma \leq 0$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_C} \gamma\lambda^2_{Hn} d\Gamma \;\; &\leq \;\; \int_{\Gamma_C} (\lambda_{Hn} - \nu_{Hn})u_{hn} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(\nu_{Hn} - \lambda_{Hn})\sigma_n(\mathbf{u}_h) d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_C} \gamma\nu_{Hn}\lambda_{Hn} d\Gamma \end{aligned} \tag{4.5}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_C} \gamma\overline{\lambda_{Hn}}^2 d\Gamma \;\; &\leq \;\; \int_{\Gamma_C} (\overline{\lambda_{Hn}} - \nu_{Hn})\overline{u_{hn}} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(\nu_{Hn} - \overline{\lambda_{Hn}})\sigma_n(\overline{\mathbf{u}_h}) d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_C} \gamma\nu_{Hn}\overline{\lambda_{Hn}} d\Gamma. \end{aligned} \tag{4.6}$$

En prenant $\nu_{Hn} = \overline{\lambda_{Hn}}$ dans (4.5) et $\nu_{Hn} = \lambda_{Hn}$ dans (4.6) et (4.3), on déduit :

$$\begin{aligned} \|\gamma^{1/2}(\lambda_{Hn} - \overline{\lambda_{Hn}})\|^2_{\Gamma_C} \;\; &\leq \;\; \int_{\Gamma_C} (\lambda_{Hn} - \overline{\lambda_{Hn}})u_{hn}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(\overline{\lambda_{Hn}} - \lambda_{Hn})\sigma_n(\mathbf{u}_h) d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_C} (\overline{\lambda_{Hn}} - \lambda_{Hn})\overline{u_{hn}}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(\lambda_{Hn} - \overline{\lambda_{Hn}})\sigma_n(\overline{\mathbf{u}_h}) d\Gamma \\ &\leq \|\gamma^{1/2}(\lambda_{Hn} - \overline{\lambda_{Hn}})\|_{\Gamma_C}\gamma_0^{-1/2}\|h^{-1/2}_{\Gamma_C}(u_{hn} - \overline{u_{hn}})\|_{\Gamma_C} \\ &\quad + \|\gamma^{1/2}(\lambda_{Hn} - \overline{\lambda_{Hn}})\|_{\Gamma_C}\gamma_0^{1/2}\|h^{1/2}_{\Gamma_C}(\sigma_n(\mathbf{u}_h) - \sigma_n(\overline{\mathbf{u}_h}))\|_{\Gamma_C} \\ &\lesssim \|\gamma^{1/2}(\lambda_{Hn} - \overline{\lambda_{Hn}})\|_{\Gamma_C}\gamma_0^{-1/2}\|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|_{1,\Omega} \\ &\quad + \|\gamma^{1/2}(\lambda_{Hn} - \overline{\lambda_{Hn}})\|_{\Gamma_C}\gamma_0^{1/2}\|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

Ainsi on obtient la première estimation

$$\|\gamma^{1/2}(\lambda_{Hn} - \overline{\lambda_{Hn}})\|_{\Gamma_C} \lesssim (\gamma_0^{1/2} + \gamma_0^{-1/2})\|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|_{1,\Omega}. \tag{4.7}$$

D'autre part, on déduit de (4.2) $\forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$,

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn} v_{hn}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Hn} - \sigma_n(\mathbf{u}_h))\sigma_n(\mathbf{v}_h) d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_C} \lambda_{Ht} v_{ht}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h))\sigma_t(\mathbf{v}_h) d\Gamma = L(\mathbf{v}_h) \end{aligned} \tag{4.8}$$

et

$$\begin{aligned} a(\overline{\mathbf{u}_h}, \mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_C} \overline{\lambda_{Hn}} v_{hn}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\overline{\lambda_{Hn}} - \sigma_n(\overline{\mathbf{u}_h}))\sigma_n(\mathbf{v}_h) d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_C} \overline{\lambda_{Ht}} v_{ht}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\overline{\lambda_{Ht}} - \sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h}))\sigma_t(\mathbf{v}_h) d\Gamma = L(\mathbf{v}_h) \end{aligned} \tag{4.9}$$

En choisissant $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}$ dans (4.8) et $\mathbf{v}_h = \overline{\mathbf{u}_h} - \mathbf{u}_h$ dans (4.9), on obtient par addition :

$$\begin{aligned} & a(\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}, \mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}) \\ = & \int_{\Gamma_C} (\overline{\lambda_{Hn}} - \lambda_{Hn})(u_{hn} - \overline{u_{hn}})\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} (\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht})(u_{ht} - \overline{u_{ht}})\, d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_C} \gamma(\overline{\lambda_{Hn}} - \lambda_{Hn} - \sigma_n(\mathbf{u}_h) + \sigma_n(\overline{\mathbf{u}_h}))\sigma_n(\overline{\mathbf{u}_h} - \mathbf{u}_h) d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_C} \gamma(\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h) + \sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h}))\sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h} - \mathbf{u}_h) d\Gamma \end{aligned} \tag{4.10}$$

Notons que l'inégalité dans (4.2) est équivalente aux deux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_C} (\nu_{Hn} - \lambda_{Hn}) u_{hn}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Hn} - \sigma_n(\mathbf{u}_h))(\nu_{Hn} - \lambda_{Hn}) d\Gamma & \leq 0, \\ \forall \nu_{Hn} \in M_{Hn}, & \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_C} (\nu_{Ht} - \lambda_{Ht}) u_{ht}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h))(\nu_{Ht} - \lambda_{Ht}) d\Gamma & \leq 0, \\ \forall \nu_{Ht} \in M_{Ht}(\mu g_{Hn}). & \end{aligned} \tag{4.12}$$

D'après la définition de M_{Hn}, on peut prendre $\nu_{Hn} = 0$ et $\nu_{Hn} = 2\lambda_{Hn}$ dans (4.11) qui donne $\forall \nu_{Hn} \in M_{Hn}$

$$\int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn} u_{hn}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Hn} - \sigma_n(\mathbf{u}_h))\lambda_{Hn} d\Gamma = 0$$

et

$$\int_{\Gamma_C} \nu_{Hn} u_{hn}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Hn} - \sigma_n(\mathbf{u}_h))\nu_{Hn} d\Gamma \leq 0.$$

On déduit alors que :

$$-\int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn} u_{hn}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma \lambda_{Hn} \sigma_n(\mathbf{u}_h) d\Gamma = -\int_{\Gamma_C} \gamma \lambda_{Hn}^2 d\Gamma,$$

$$\int_{\Gamma_C} \overline{\lambda_{Hn}} u_{hn}\, d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \gamma \overline{\lambda_{Hn}} \sigma_n(\mathbf{u}_h) d\Gamma \leq \int_{\Gamma_C} \gamma \overline{\lambda_{Hn}} \lambda_{Hn} d\Gamma.$$

De même on a :

$$-\int_{\Gamma_C} \overline{\lambda_{Hn}}\, \overline{u_{hn}}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma \overline{\lambda_{Hn}} \sigma_n(\overline{\mathbf{u}_h}) d\Gamma = -\int_{\Gamma_C} \gamma \overline{\lambda_{Hn}}^2 d\Gamma$$

$$\int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn} \overline{u_{hn}}\, d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \gamma \lambda_{Hn} \sigma_n(\overline{\mathbf{u}_h}) d\Gamma \leq \int_{\Gamma_C} \gamma \overline{\lambda_{Hn}} \lambda_{Hn} d\Gamma.$$

En notant α la constante d'ellipticité de la forme bilinéaire $a(.,.)$, (4.10) devient

$$\begin{aligned}
\alpha \|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|_{1,\Omega}^2 &\leq -\int_{\Gamma_C} \gamma \overline{\lambda_{Hn}}^2 d\Gamma + 2\int_{\Gamma_C} \gamma \overline{\lambda_{Hn}} \lambda_{Hn} d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \gamma \lambda_{Hn}^2 d\Gamma \\
&\quad + \int_{\Gamma_C} \gamma \sigma_n(\overline{\mathbf{u}_h} - \mathbf{u}_h)^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_C} (\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht})(u_{ht} - \overline{u_{ht}})\, d\Gamma \\
&\quad + \int_{\Gamma_C} \gamma(\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h) + \sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h}))\sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h} - \mathbf{u}_h) d\Gamma \\
&= -\int_{\Gamma_C} \gamma(\overline{\lambda_{Hn}} - \lambda_{Hn})^2 d\Gamma + \gamma_0 \|h_{\Gamma_C}^{1/2} \sigma_n(\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h})\|_{\Gamma_C}^2 \\
&\quad + \int_{\Gamma_C} (\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht})(u_{ht} - \overline{u_{ht}})\, d\Gamma \\
&\quad + \int_{\Gamma_C} \gamma(\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h) + \sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h}))\sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h} - \mathbf{u}_h) d\Gamma \\
&\leq C\gamma_0 \|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|_{1,\Omega}^2 + \int_{\Gamma_C} (\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht})(u_{ht} - \overline{u_{ht}})\, d\Gamma \\
&\quad + \int_{\Gamma_C} \gamma(\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h) + \sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h}))\sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h} - \mathbf{u}_h) d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.13}$$

En combinant (4.12) et (4.3), $\forall \nu_{Ht} \in M_{Ht}(\mu g_{Hn})$ et $\forall \overline{\nu_{Ht}} \in M_{Ht}(\mu \overline{g_{Hn}})$:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_C} (\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht})(u_{ht} - \overline{u_{ht}})\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h) + \sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h}))\sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h} - \mathbf{u}_h) d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma_C} \overline{\lambda_{Ht}} u_{ht}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \lambda_{Ht} \overline{u_{ht}}\, d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \gamma \overline{\lambda_{Ht}}(\lambda_{Ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h)) d\Gamma \\
&- \int_{\Gamma_C} \gamma \lambda_{Ht}(\overline{\lambda_{Ht}} + \sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h})) d\Gamma + 2\int_{\Gamma_C} \gamma \overline{\lambda_{Ht}} \lambda_{Ht} d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma \sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h} - \mathbf{u}_h)^2 d\Gamma \\
&- \int_{\Gamma_C} \lambda_{Ht} u_{ht}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma \lambda_{Ht} \sigma_t(\mathbf{u}_h) d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \overline{\lambda_{Ht}}\, \overline{u_{ht}}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma \overline{\lambda_{Ht}} \sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h}) d\Gamma \\
&\leq \int_{\Gamma_C} \overline{\lambda_{Ht}} u_{ht}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \lambda_{Ht} \overline{u_{ht}}\, d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \gamma \overline{\lambda_{Ht}}(\lambda_{Ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h)) d\Gamma \\
&- \int_{\Gamma_C} \gamma \lambda_{Ht}(\overline{\lambda_{Ht}} + \sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h})) d\Gamma + 2\int_{\Gamma_C} \gamma \overline{\lambda_{Ht}} \lambda_{Ht} d\Gamma + \gamma_0 \|h_{\Gamma_C}^{1/2} \sigma_t(\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h})\|_{\Gamma_C}^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\Gamma_C} \nu_{Ht}u_{ht}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma\nu_{Ht}(\lambda_{Ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h))d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \gamma\lambda_{Ht}^2 d\Gamma \\
&-\int_{\Gamma_C} \overline{\nu_{Ht}u_{ht}}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma\overline{\nu_{Ht}}(\overline{\lambda_{Ht}} + \sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h}))d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \gamma\overline{\lambda_{Ht}}^2 d\Gamma \\
&\leq \; -\int_{\Gamma_C} \nu_{Ht}(u_{ht} - \gamma\lambda_{Ht} - \gamma\sigma_t(\mathbf{u}_h))d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \overline{\nu_{Ht}}(\overline{u_{ht}} - \gamma\overline{\lambda_{Ht}} - \gamma\sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h}))d\Gamma \\
&\quad + \int_{\Gamma_C} \lambda_{Ht}(\overline{u_{ht}} - \gamma\overline{\lambda_{Ht}} - \gamma\sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h}))d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \overline{\lambda_{Ht}}(u_{ht} - \gamma\lambda_{Ht} - \gamma\sigma_t(\mathbf{u}_h))d\Gamma \\
&\quad - \int_{\Gamma_C} \gamma(\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht})^2 d\Gamma + C\gamma_0\|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|_{1,\Omega}^2
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Pour évaluer la dernière inégalité, on commence par introduire les matrices $M_1 = (m1_{ij})_{1\leq i,j\leq p}$, $M_2 = (m2_{ij})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq q}$, $M_3 = (m3_{ij})_{1\leq i\leq p,1\leq j\leq r}$ sur Γ_C définies par :

$$
m1_{ij} = \int_{\Gamma_C} \phi_i\phi_j d\Gamma, \quad m2_{ij} = \int_{\Gamma_C} \phi_i\psi_j d\Gamma, \quad m3_{ij} = \int_{\Gamma_C} \phi_i\chi_j d\Gamma
$$

où ϕ_i et χ_i sont les fonctions de base sur $\mathbf{V}_{h|\Gamma_C}.n$ et ψ_i sont les fonctions de base sur W_H.

Soient $U_T, \overline{U_T}, \Lambda_T, \overline{\Lambda_T}, \Sigma_T, \overline{\Sigma_T}, G_N, \overline{G_N}$ les vecteurs ayant pour composantes les valeurs des éléments de $u_{ht}, \overline{u_{ht}}, \lambda_{Ht}, \overline{\lambda_{Ht}}, \sigma_t(\mathbf{u}_h), \sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h}), g_{Hn}$ et $\overline{g_{Hn}}$ respectivement. De la définition de $M_{Ht}(\mu g_{Hn})$, on obtient $\forall N \in \mathbb{R}^p$ tel que $|N_i| \leq \mu(G_N)_i, 1 \leq i \leq p$

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\Gamma_C} \nu_{Ht}(u_{ht} - \gamma\lambda_{Ht} - \gamma\sigma_t(\mathbf{u}_h))d\Gamma \\
&= -\int_{\Gamma_C} \sum_{i=1}^{p} \nu_{Ht}(x_i)\phi_i(\sum_{j=1}^{p} u_{ht}(x_j)\phi_j - \sum_{j=1}^{q} \gamma\lambda_{Ht}(x_j)\psi_j - \sum_{j=1}^{r} \gamma\sigma_t(\mathbf{u}_h)(x_j)\chi_j)d\Gamma \\
&= -\sum_{i=1}^{p} N_i((M_1U_T)_i - \gamma(M_2\Lambda_T)_i - \gamma(M_3\Sigma_T)_i).
\end{aligned}
$$

Il est facile de construire un vecteur N minimisant la somme :
si $(M_1U_T)_i - \gamma(M_2\Lambda_T)_i - \gamma(M_3\Sigma_T)_i \geq 0$, on choisit $N_i = \mu(G_N)_i$ et
si $(M_1U_T)_i - \gamma(M_2\Lambda_T)_i - \gamma(M_3\Sigma_T)_i \leq 0$, on choisit $N_i = -\mu(G_N)_i$
et on aboutit à la borne suivante :

$$
-\int_{\Gamma_C} \nu_{Ht}(u_{ht} - \gamma\lambda_{Ht} - \gamma\sigma_t(\mathbf{u}_h))d\Gamma = -\sum_{i=1}^{p} \mu(G_N)_i|(M_1U_T)_i - \gamma(M_2\Lambda_T)_i - \gamma(M_3\Sigma_T)_i|.
$$

Une expression similaire peut être obtenue en intégrant le terme $-\int_{\Gamma_C} \overline{\nu_{Ht}}(\overline{u_{ht}} - \gamma\overline{\lambda_{Ht}} - \gamma\sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h}))d\Gamma$. De plus par la définition de $M_{Ht}(\mu g_{Hn})$, on a :

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma_C} \lambda_{Ht}(\overline{u_{ht}} - \gamma\overline{\lambda_{Ht}} - \gamma\sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h}))d\Gamma &= \sum_{i=1}^{p}(\Lambda_T)_i((M_1\overline{U_T})_i - \gamma(M_2\overline{\Lambda_T})_i - \gamma(M_3\overline{\Sigma_T})_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{p} |(\Lambda_T)_i||(M_1\overline{U_T})_i - \gamma(M_2\overline{\Lambda_T})_i - \gamma(M_3\overline{\Sigma_T})_i| \\
&\leq \sum_{i=1}^{p} \mu(G_N)_i|(M_1\overline{U_T})_i - \gamma(M_2\overline{\Lambda_T})_i - \gamma(M_3\overline{\Sigma_T})_i|
\end{aligned}
$$

Puis en intégrant le terme $\int_{\Gamma_C} \overline{\lambda_{Ht}}(u_{ht} - \gamma\lambda_{Ht} - \gamma\sigma_t(\mathbf{u}_h))d\Gamma$. Finalement, (4.14) mène avec l'inégalité de Hölder à :

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_C} (\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht})(u_{ht} - \overline{u_{ht}})\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h) + \sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h}))\sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h} - \mathbf{u}_h)d\Gamma \\
\lesssim\ & \mu \sum_{i=1}^{p} (G_N - \overline{G_N})_i \\
&\qquad \left(\left|(M_1\overline{U_T})_i - \gamma(M_2\overline{\Lambda_T})_i - \gamma(M_3\overline{\Sigma_T})_i\right| - \left|(M_1U_T)_i - \gamma(M_2\Lambda_T)_i - \gamma(M_3\Sigma_T)_i\right|\right) \\
&+C\gamma_0\|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|^2_{1,\Omega} - \int_{\Gamma_C} \gamma(\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht})^2 d\Gamma \\
\lesssim\ & \mu \sum_{i=1}^{p} (G_N - \overline{G_N})_i \\
&\qquad \left|(M_1\overline{U_T})_i - \gamma(M_2\overline{\Lambda_T})_i - \gamma(M_3\overline{\Sigma_T})_i - (M_1U_T)_i + \gamma(M_2\Lambda_T)_i + \gamma(M_3\Sigma_T)_i\right| \\
&+C\gamma_0\|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|^2_{1,\Omega} - \int_{\Gamma_C} \gamma(\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht})^2 d\Gamma \\
\lesssim\ & \mu \left(\sum_{i=1}^{p} (G_N - \overline{G_N})^2_i\right)^{\frac{1}{2}} \left(\left(\sum_{i=1}^{p} (M_1(U_T - \overline{U_T}))^2_i\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{p} (\gamma M_2(\Lambda_T - \overline{\Lambda_T}))^2_i\right)^{\frac{1}{2}}\right. \\
&\left. + \left(\sum_{i=1}^{p} (\gamma M_3(\Sigma_T - \overline{\Sigma_T}))^2_i\right)^{\frac{1}{2}}\right) + C\gamma_0\|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|^2_{1,\Omega} - \int_{\Gamma_C} \gamma(\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht})^2 d\Gamma \\
\lesssim\ & \mu\|G_N - \overline{G_N}\|_{\mathbb{R}^p}(\|U_T - \overline{U_T}\|_{\mathbb{R}^p,M_1} + \gamma\|\Lambda_T - \overline{\Lambda_T}\|_{\mathbb{R}^p,M_2} + \gamma\|\Sigma_T - \overline{\Sigma_T}\|_{\mathbb{R}^p,M_3}) \\
&+C\gamma_0\|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|^2_{1,\Omega} - \int_{\Gamma_C} \gamma(\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht})^2 d\Gamma.
\end{aligned}$$

Les notations $\|.\|_{\mathbb{R}^p}$ et $\|.\|_{\mathbb{R}^p,M_k}$ représentent des normes sur $\mathbb{R}^p$. Par conséquent, il existe des constantes dépendant de h telles que :

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_C} (\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht})(u_{ht} - \overline{u_{ht}})\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h) + \sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h}))\sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h} - \mathbf{u}_h)d\Gamma \\
\lesssim\ & C\gamma_0\|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|^2_{1,\Omega} - \int_{\Gamma_C} \gamma(\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht})^2 d\Gamma \\
&+\mu C_1(h)\|\gamma^{1/2}(g_{Hn} - \overline{g_{Hn}})\|_{\Gamma_C}\|u_{ht} - \overline{u_{ht}}\|_{\Gamma_C} \\
&+\mu C_2(h)\gamma_0\|\gamma^{1/2}(g_{Hn} - \overline{g_{Hn}})\|_{\Gamma_C}\|\gamma^{1/2}(\lambda_{Ht} - \overline{\lambda_{Ht}})\|_{\Gamma_C} \\
&+\mu C_3(h)\gamma_0\|\gamma^{1/2}(g_{Hn} - \overline{g_{Hn}})\|_{\Gamma_C}\|h^{1/2}_{\Gamma_C}(\sigma_t(\mathbf{u}_h) - \sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h}))\|_{\Gamma_C} \\
\lesssim\ & C\gamma_0\|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|^2_{1,\Omega} - \|\gamma^{1/2}(\lambda_{Ht} - \overline{\lambda_{Ht}})\|^2_{\Gamma_C} \\
&+\mu C_4(h)(1+\gamma_0)\|\gamma^{1/2}(g_{Hn} - \overline{g_{Hn}})\|_{\Gamma_C}\|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|_{1,\Omega} \\
&+\mu C_2(h)\gamma_0\|\gamma^{1/2}(g_{Hn} - \overline{g_{Hn}})\|_{\Gamma_C}\|\gamma^{1/2}(\lambda_{Ht} - \overline{\lambda_{Ht}})\|_{\Gamma_C}
\end{aligned}$$

où le théorème de trace et (4.3) ont été utilisés.

De plus, en utilisant l'inégalité de Young, on obtient pour tout $\beta > 0$:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_C} (\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht})(u_{ht} - \overline{u_{ht}})\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(\overline{\lambda_{Ht}} - \lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h) + \sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h}))\sigma_t(\overline{\mathbf{u}_h} - \mathbf{u}_h) d\Gamma \\
\lesssim\ & C\gamma_0 \|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|^2_{1,\Omega} - \|\gamma^{1/2}(\lambda_{Ht} - \overline{\lambda_{Ht}})\|^2_{\Gamma_C} + \beta\mu^2\gamma_0^2 C_5(h)\|\gamma^{1/2}(g_{Hn} - \overline{g_{Hn}})\|^2_{\Gamma_C} \\
& + \frac{1}{4\beta}\|\gamma^{1/2}(\lambda_{Ht} - \overline{\lambda_{Ht}})\|^2_{\Gamma_C} + \frac{1}{4\beta}\|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|^2_{1,\Omega} \\
& + \beta\mu^2 C_6(h)(1+\gamma_0)^2\|\gamma^{1/2}(g_{Hn} - \overline{g_{Hn}})\|^2_{\Gamma_C} \\
\lesssim\ & C\gamma_0 \|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|^2_{1,\Omega} + \beta\mu^2\gamma_0^2 C_5(h)\|\gamma^{1/2}(g_{Hn} - \overline{g_{Hn}})\|^2_{\Gamma_C} \\
& + \beta\mu^2 C_6(h)(1+\gamma_0)^2\|\gamma^{1/2}(g_{Hn} - \overline{g_{Hn}})\|^2_{\Gamma_C} + \frac{1}{4\beta}\|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|^2_{1,\Omega} \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

De (4.15) et (4.13) découle :

$$\|\mathbf{u}_h - \overline{\mathbf{u}_h}\|_{1,\Omega} \lesssim \mu \frac{\sqrt{(1+\gamma_0)^2 C_6(h) + \gamma_0^2 C_5(h)}}{\sqrt{1-2\gamma_0}} \|\gamma^{1/2}(g_{Hn} - \overline{g_{Hn}})\|_{\Gamma_C} \qquad (4.16)$$

La combinaison de (4.16) et (4.7) entraîne que

$$\begin{aligned}
&\|\gamma^{1/2}(\lambda_{Hn} - \overline{\lambda_{Hn}})\|_{\Gamma_C} \\
\lesssim\ & \mu(\gamma_0^{1/2} + \gamma_0^{-1/2}) \frac{\sqrt{(1+\gamma_0)^2 C_6(h) + \gamma_0^2 C_5(h)}}{\sqrt{1-2\gamma_0}} \|\gamma^{1/2}(g_{Hn} - \overline{g_{Hn}})\|_{\Gamma_C}. \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

Ainsi Φ_H est continue.

Etape 2. Soit $(\mathbf{u}_h, \lambda_{Hn}, \lambda_{Ht})$ la solution de $(P(g_{Hn}))$. En prenant $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h$ dans (4.2) on a :

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) + \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn} u_{hn}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Hn} - \sigma_n(\mathbf{u}_h))\sigma_n(\mathbf{u}_h) d\Gamma & \\
+ \int_{\Gamma_C} \lambda_{Ht} u_{ht}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h))\sigma_t(\mathbf{u}_h) d\Gamma & = L(\mathbf{u}_h).
\end{aligned}$$

D'après

$$\int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn} u_{hn}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Hn} - \sigma_n(\mathbf{u}_h))\lambda_{Hn} d\Gamma = 0$$

et

$$\int_{\Gamma_C} \lambda_{Ht} u_{ht}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma(-\lambda_{Ht} - \sigma_t(\mathbf{u}_h))\lambda_{Ht} d\Gamma \geq 0,$$

on déduit :

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) + \int_{\Gamma_C} \gamma\lambda_{Hn}^2\, d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \gamma\sigma_n(\mathbf{u}_h)^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \gamma\lambda_{Ht}^2\, d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \gamma\sigma_t(\mathbf{u}_h)^2 d\Gamma \leq L(\mathbf{u}_h).$$

Par (4.4) et la continuité de $L(.)$:

$$C\|\mathbf{u}_h\|^2_{1,\Omega} \leq a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) - \int_{\Gamma_C} \gamma\sigma_n(\mathbf{u}_h)^2 d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \gamma\sigma_t(\mathbf{u}_h)^2 d\Gamma \leq L(\mathbf{u}_h) \leq C'\|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}.$$

Ainsi, on a

$$\|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} \leq \frac{C'}{C}.$$

A d'autres égards,

$$\begin{aligned}
\|\gamma^{1/2}\lambda_{Hn}\|^2_{\Gamma_C} &= \int_{\Gamma_C} \gamma\lambda^2_{Hn} d\Gamma = \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn} u_{hn}\, d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \gamma\lambda_{Hn}\sigma_n(\mathbf{u}_h) d\Gamma \\
&\lesssim \|\gamma^{1/2}\lambda_{Hn}\|_{\Gamma_C}\gamma_0^{-1/2}\|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} + \|\gamma^{1/2}\lambda_{Hn}\|_{\Gamma_C}\gamma_0^{1/2}\|h^{1/2}_{\Gamma_C}\sigma_n(\mathbf{u}_h)\|_{\Gamma_C} \\
&\lesssim \|\gamma^{1/2}\lambda_{Hn}\|_{\Gamma_C}\gamma_0^{-1/2}\|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} + \|\gamma^{1/2}\lambda_{Hn}\|_{\Gamma_C}\gamma_0^{1/2}\|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}
\end{aligned}$$

Cela implique

$$\|\gamma^{1/2}\lambda_{Hn}\|_{\Gamma_C} \lesssim (\gamma_0^{-1/2} + \gamma_0^{1/2})\|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} \lesssim (\gamma_0^{-1/2} + \gamma_0^{1/2})\frac{C'}{C}$$

Finalement

$$\|\gamma^{1/2}\Phi_H(g_{Hn})\|_{\Gamma_C} \lesssim 1, \qquad \forall g_{Hn} \in M_{Hn},$$

La bornitude de Φ_H associée à la continuité de Φ_H prouve qu'il existe au moins une solution au problème discret de contact et frottement de Coulomb d'après le théorème du point fixe de Brouwer. ■

Proposition 4.1.2

Lorsque μ et γ_0 sont suffisamment petits, le problème (4.1) admet une solution unique.

Démonstration : De (4.17), on déduit le résultat d'unicité dépendant de la taille du maillage lorsque $C\mu(\gamma_0^{1/2} + \gamma_0^{-1/2})\dfrac{\sqrt{(1+\gamma_0)^2 C_6(h) + \gamma_0^2 C_5(h)}}{\sqrt{1-2\gamma_0}} < 1$. Ce résultat signifie qu'il y a unicité lorsque μ et γ_0 sont suffisamment petits. ■

Remarque 4.1.4

Lorsque $\mu = 0$, il y a existence et unicité de la solution si γ_0 est suffisamment petit.

4.2 Estimateurs d'erreur a posteriori

4.2.1 Définition de l'estimateur par résidu

Comme dans le chapitre précédent, on définit le résidu de l'équation d'équilibre (2) $\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)+\mathbf{f} = \mathbf{f}$ sur T. On note également l'élément résiduel approché $\mathbf{f}_T \in (\mathbb{P}_k(T))^2$. Un choix classique est de prendre $\mathbf{f}_T = \int_T \mathbf{f}(x)\,/|T|$. Pour $\mathbf{f} \in (H^1(\Omega))^2$, $\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_T\|_T \lesssim h_T\|\mathbf{f}\|_{1,T}$ est négligeable par rapport à l'estimateur η défini juste après. De même $\mathbf{g}$ est approché par la quantité calculable $\mathbf{g}_E$ pour tout $E \in E_h^N$.

Définition 4.2.1

Les estimateurs résiduels global et locaux sont définis par :

$$\begin{aligned}
\eta &= \left(\sum_{T\in T_h}\eta_T^2\right)^{1/2},\ \eta_T = \left(\sum_{i=1}^{9}\eta_{iT}^2\right)^{1/2},\\
\eta_{1T} &= h_T\|\mathbf{f}_T\|_T,\\
\eta_{2T} &= h_T^{1/2}\left(\sum_{E\in E_T^{int}\cup E_T^N}\|J_{E,n}(\mathbf{u}_h)\|_E^2\right)^{1/2},\\
\eta_{3T} &= h_T^{1/2}\left(\sum_{E\in E_T^C}\|\lambda_{Hn}+\sigma_n(\mathbf{u}_h)\|_E^2\right)^{1/2},\\
\eta_{4T} &= h_T^{1/2}\left(\sum_{E\in E_T^C}\|\lambda_{Ht}+\sigma_t(\mathbf{u}_h)\|_E^2\right)^{1/2},\\
\eta_{5T} &= \left(\int_{T\cap\Gamma_C}\lambda_{Hn+}u_{hn-}\right)^{1/2},\\
\eta_{6T} &= \left(\sum_{E\in E_T^C}\|\lambda_{Hn-}\|_E^2\right)^{1/2},\\
\eta_{7T} &= \left(\sum_{E\in E_T^C}\|u_{hn+}\|_{1,E}^2\right)^{1/2},\\
\eta_{8T} &= \left(\int_{T\cap\Gamma_C}(|\lambda_{Ht}|-\mu\lambda_{Hn+})_-|u_{ht}| + \int_{T\cap\Gamma_C}(\lambda_{Ht}u_{ht})_-\right)^{1/2},\\
\eta_{9T} &= \|(|\lambda_{Ht}|-\mu\lambda_{Hn+})_+\|_{T\cap\Gamma_C}
\end{aligned}$$

où les notations v_+ et v_- désignent les parties positive et négative de v ; $J_{E,n}(\mathbf{u}_h)$ désigne le saut de contrainte de $\mathbf{u}_h$ dans la direction normale, i.e.

$$J_{E,n}(\mathbf{u}_h) = \begin{cases} [\![\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\mathbf{n}_E]\!]_E, \forall E\in E_h^{int},\\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\mathbf{n}-\mathbf{g}_E, \forall E\in E_h^N.\end{cases} \tag{4.18}$$

Les termes d'approximation locaux et global sont définis par :

$$\zeta_T = \left(h_T^2\sum_{T'\subset\omega_T}\|\mathbf{f}-\mathbf{f}_{T'}\|_{T'}^2 + h_E\sum_{E\subset E_T^N}\|\mathbf{g}-\mathbf{g}_E\|_E^2\right)^{1/2}, \zeta = \left(\sum_{T\in T_h}\zeta_T^2\right)^{1/2}.$$

4.2.2 Borne supérieure

Proposition 4.2.1

On suppose que la solution $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ du problème (3.1) est telle que $\lambda_t = \mu\lambda_n\xi$, avec $\xi \in M$, $\xi \in Dir_t(u_t)$ sur Γ_C et $\mu\|\xi\|_M$ suffisamment petit. Soit γ_0 suffisamment petit. Alors une solution $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_H)$ du problème (4.1) satisfait l'estimation suivante :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} + \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_H\|_{-1/2,\Gamma_C} \lesssim \eta + \zeta.$$

Démonstration : On note le terme d'erreur de déplacement par :

$$\mathbf{e}_\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h.$$

Soit $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$. De la $\mathbf{V}$-ellipticité de $a(.,.)$ et des équations d'équilibre (3.1) et (4.1), on obtient :

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{e}_\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2 &\lesssim a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \\
&= a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) + a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) \\
&= L(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) - b(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) - b(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_H, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) \\
&\quad + \int_{\Gamma_C} \gamma(\lambda_{Hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h))\sigma_n(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) + \int_{\Gamma_C} \gamma(\lambda_{Ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h))\sigma_t(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h).
\end{aligned}$$

En intégrant par parties sur chaque triangle T, en utilisant la définition de $J_{E,n}(\mathbf{u}_h)$ (4.18) et la condition complémentaire $\int \lambda_n u_n = 0$, on aboutit à :

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{e}_\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2 &\lesssim \int_\Omega \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) + \sum_{E \in E_h^N} \int_E (\mathbf{g} - \mathbf{g}_E) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \\
&\quad + b(\boldsymbol{\lambda}_H, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) + b(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}_h) - \int_{\Gamma_C} \lambda_t u_t \\
&\quad - \sum_{E \in E_h^C} \int_E (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\mathbf{n}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) - \sum_{E \in E_h^{int} \cup E_h^N} \int_E J_{E,n}(\mathbf{u}_h) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \\
&\quad + \int_{\Gamma_C} \gamma(\lambda_{Hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h))\sigma_n(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) + \int_{\Gamma_C} \gamma(\lambda_{Ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h))\sigma_t(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h).
\end{aligned}$$

En décomposant les intégrales sur Γ_C en composantes normale et tangentielle, cela donne :

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{e}_\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2 &\lesssim \int_{\Gamma_C} \lambda_n u_{hn} + \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn}(u_n - u_{hn}) + \int_{\Gamma_C} (\lambda_t - \lambda_{Ht})(u_{ht} - u_t) + \int_\Omega \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \\
&\quad + \sum_{E \in E_h^N} \int_E (\mathbf{g} - \mathbf{g}_E) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) - \sum_{E \in E_h^{int} \cup E_h^N} \int_E J_{E,n}(\mathbf{u}_h) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \\
&\quad + \sum_{E \in E_h^C} \int_E (\lambda_{Hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h))(v_{hn} - u_n) + \sum_{E \in E_h^C} \int_E (\lambda_{Ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h))(v_{ht} - u_t) \\
&\quad + \int_{\Gamma_C} \gamma(\lambda_{Hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h))\sigma_n(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) + \int_{\Gamma_C} \gamma(\lambda_{Ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h))\sigma_t(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\lesssim\ & \int_{\Gamma_C} \lambda_n u_{hn} + \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn}(u_n - u_{hn}) + \int_{\Gamma_C} (\lambda_t - \lambda_{Ht})(u_{ht} - u_t) \\
& + I + II + III + IV + V \\
& + \int_{\Gamma_C} \gamma(\lambda_{Hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h))\sigma_n(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) + \int_{\Gamma_C} \gamma(\lambda_{Ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h))\sigma_t(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h)
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

On estime maintenant chaque terme de droite. On procède comme dans le chapitre précédent en choisissant :

$$\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h + \pi_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)$$

où π_h est l'opérateur de quasi-interpolation défini au Lemme 3.2.1.

Les termes I à V sont bornés, comme au chapitre précédent, par :

$$I + II + III + IV + V \lesssim (\eta + \zeta)\|\mathbf{e_u}\|_{1,\Omega}. \tag{4.20}$$

On estime le terme de stabilisation en se servant de (4.3) et de la stabilité H^1 de π_h :

$$
\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_C} \gamma(\lambda_{Hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h))\sigma_n(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) \\
= \ & \sum_{E \in E_C^h} \int_E \gamma(\lambda_{Hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h))\sigma_n(\pi_h(\mathbf{e_u})) \\
= \ & \sum_{E \in E_C^h} \int_E \gamma_0 h_E^{1/2}(\lambda_{Hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h)) h_E^{1/2} \sigma_n(\pi_h(\mathbf{e_u})) \\
\leq \ & \gamma_0 \left(\sum_{E \in E_C^h} h_E \|\lambda_{Hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h)\|_E^2 \right)^{1/2} \|\pi_h(\mathbf{e_u})\|_{1,\Omega} \\
\leq \ & \gamma_0 \left(\sum_{E \in E_C^h} h_E \|\lambda_{Hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h)\|_E^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{e_u}\|_{1,\Omega} \\
\leq \ & \gamma_0 \eta \|\mathbf{e_u}\|_{1,\Omega}.
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

En procédant de la même manière et en utilisant η_{4T}, on obtient :

$$\int_{\Gamma_C} \gamma(\lambda_{Ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h))\sigma_t(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) \leq \gamma_0 \eta \|\mathbf{e_u}\|_{1,\Omega}. \tag{4.22}$$

Ensuite

$$
\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn}(u_n - u_{hn}) \\
= \ & \int_{\Gamma_C} (\lambda_{Hn+} - \lambda_{Hn-})(u_n - u_{hn}) \\
\leq \ & -\int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn+} u_{hn} - \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn-}(u_n - u_{hn}) \\
\leq \ & \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn+} u_{hn-} - \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn+} u_{hn+} - \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn-}(u_n - u_{hn}).
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

Le terme suivant est estimée à l'aide des inégalités de Cauchy-Schwarz et Young :

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn-}(u_n - u_{hn})\right| &= \left|\sum_{E\in E_h^C}\int_E \lambda_{Hn-}(u_n - u_{hn})\right| \\ &\leq \sum_{E\in E_h^C} \|\lambda_{Hn-}\|_E \|u_n - u_{hn}\|_E \\ &\leq \sum_{E\in E_h^C}\left(\alpha\|u_n - u_{hn}\|_E^2 + \frac{1}{4\alpha}\|\lambda_{Hn-}\|_E^2\right),\end{aligned}$$

pour tout $\alpha > 0$. Un théorème de trace standard implique l'existence de $C > 0$ telle que :

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn-}(u_n - u_{hn})\right| &\leq \alpha\|u_n - u_{hn}\|_{\Gamma_C}^2 + \frac{1}{4\alpha}\sum_{E\in E_h^C}\|\lambda_{Hn-}\|_E^2 \\ &\leq C\alpha\|\mathbf{e_u}\|_{1,\Omega}^2 + \frac{\eta^2}{4\alpha}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Le dernier terme provenant du contact est borné par :

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_C} \lambda_n u_{hn} &\leq \int_{\Gamma_C} \lambda_n(u_{hn+} - u_{hn-}) + \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn-}u_{hn+} \\ &\leq \int_{\Gamma_C} \lambda_n u_{hn+} + \int_{\Gamma_C} (\lambda_{Hn+} - \lambda_{Hn})u_{hn+} \\ &\leq \int_{\Gamma_C} (\lambda_n - \lambda_{Hn})u_{hn+} + \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn+}u_{hn+} \\ &\leq \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn+}u_{hn+} + \|\lambda_{Hn} - \lambda_n\|_{W_t'}\|u_{hn+}\|_{W_t} \\ &\leq \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn+}u_{hn+} + \|\boldsymbol{\lambda}_H - \boldsymbol{\lambda}\|_{-1/2,\Gamma_C}\|u_{hn+}\|_{1,\Gamma_C}\end{aligned} \tag{4.25}$$

En regroupant les estimations (4.23), (4.24) et (4.25) et en utilisant l'inégalité de Young, on aboutit à

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn}(u_n - u_{hn}) + \int_{\Gamma_C} \lambda_n u_{hn} \\ \lesssim\ & \int_{\Gamma_C} \lambda_{Hn+}u_{hn-} + \alpha\|\mathbf{e_u}\|_{1,\Omega}^2 + \frac{\eta^2}{4\alpha} + \|\boldsymbol{\lambda}_H - \boldsymbol{\lambda}\|_{-1/2,\Gamma_C}\|u_{hn+}\|_{1,\Gamma_C} \\ \lesssim\ & \eta^2\left(1 + \frac{1}{4\alpha}\right) + \alpha\|\mathbf{e_u}\|_{1,\Omega}^2 + \alpha\|\boldsymbol{\lambda}_H - \boldsymbol{\lambda}\|_{-1/2,\Gamma_C}^2 + \frac{1}{4\alpha}\|u_{hn+}\|_{1,\Gamma_C}^2 \\ \lesssim\ & \eta^2\left(1 + \frac{1}{2\alpha}\right) + \alpha\|\mathbf{e_u}\|_{1,\Omega}^2 + \alpha\|\boldsymbol{\lambda}_H - \boldsymbol{\lambda}\|_{-1/2,\Gamma_C}^2\end{aligned} \tag{4.26}$$

pour tout $\alpha > 0$.

Pour le terme correspondant au frottement, en procédant comme dans le chapitre précédent, on obtient pour tout α positif :

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_C} (\lambda_{Ht} - \lambda_t)(u_t - u_{ht}) &\lesssim (\alpha + (1+\alpha)\mu\|\xi\|_M)\,\|\mathbf{e_u}\|_{1,\Omega}^2 \\ &+ \frac{\mu\|\xi\|_M + 2\alpha + 1 + \mu^2}{2\alpha}\left(\eta^2 + \zeta^2\right).\end{aligned} \tag{4.27}$$

En regroupant les estimations (4.20), (4.21), (4.22), (4.26) et (4.27) avec α et γ_0 suffisamment petits dans (4.19) et en utilisant (4.29), on aboutit à la conclusion que si $\mu\|\xi\|_M$ est suffisamment petit :

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} \lesssim \eta+\zeta. \tag{4.28}$$

On cherche maintenant une borne pour l'erreur de discrétisation $\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}_H$ correspondant aux multiplicateurs. Soient $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ et $\mathbf{v}_h\in\mathbf{V}_h$. Des équations d'équilibre (3.1) et (4.1), on tire :

$$\begin{aligned}
b(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}_H,\mathbf{v}) &= b(\boldsymbol{\lambda},\mathbf{v}-\mathbf{v}_h)-b(\boldsymbol{\lambda}_H,\mathbf{v}-\mathbf{v}_h)+b(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}_H,\mathbf{v}_h)\\
&= L(\mathbf{v}-\mathbf{v}_h)-a(\mathbf{u},\mathbf{v}-\mathbf{v}_h)-b(\boldsymbol{\lambda}_H,\mathbf{v}-\mathbf{v}_h)+a(\mathbf{u}_h-\mathbf{u},\mathbf{v}_h)\\
&\quad+\int_{\Gamma_C}\gamma(-\lambda_{Hn}-\sigma_n(\mathbf{u}_h))\sigma_n(\mathbf{v}_h)+\int_{\Gamma_C}\gamma(-\lambda_{Ht}-\sigma_t(\mathbf{u}_h))\sigma_t(\mathbf{v}_h)\\
&= L(\mathbf{v}-\mathbf{v}_h)-a(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h,\mathbf{v})-a(\mathbf{u}_h,\mathbf{v}-\mathbf{v}_h)-b(\boldsymbol{\lambda}_H,\mathbf{v}-\mathbf{v}_h)\\
&\quad+\int_{\Gamma_C}\gamma(-\lambda_{Hn}-\sigma_n(\mathbf{u}_h))\sigma_n(\mathbf{v}_h)+\int_{\Gamma_C}\gamma(-\lambda_{Ht}-\sigma_t(\mathbf{u}_h))\sigma_t(\mathbf{v}_h).
\end{aligned}$$

Une intégration par parties sur chaque élément T mène à :

$$\begin{aligned}
b(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}_H,\mathbf{v}) &= \int_\Omega \mathbf{f}\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{v}_h)-a(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h,\mathbf{v})\\
&\quad-\sum_{E\in E_h^{int}\cup E_h^N}\int_E J_{E,n}(\mathbf{u}_h)\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{v}_h)+\sum_{E\in E_h^N}\int_E(\mathbf{g}-\mathbf{g}_E)\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{v}_h)\\
&\quad-\sum_{E\in E_h^C}\int_E(\lambda_{Hn}+\sigma_n(\mathbf{u}_h))(v_n-v_{hn})-\sum_{E\in E_h^C}\int_E(\lambda_{Ht}+\sigma_t(\mathbf{u}_h))(v_t-v_{ht})\\
&\quad+\int_{\Gamma_C}\gamma(-\lambda_{Hn}-\sigma_n(\mathbf{u}_h))\sigma_n(\mathbf{v}_h)+\int_{\Gamma_C}\gamma(-\lambda_{Ht}-\sigma_t(\mathbf{u}_h))\sigma_t(\mathbf{v}_h).
\end{aligned}$$

En procédant comme pour le début de la preuve et en posant $\mathbf{v}_h=\pi_h\mathbf{v}$, on arrive à :

$$|b(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}_H,\mathbf{v})| \lesssim (\eta+\zeta+\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega})\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}$$

pour tout $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$. Par conséquent

$$\|\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}_H\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_C} \lesssim \eta+\zeta+\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}. \tag{4.29}$$

Le regroupement des estimations (4.28) et (4.29) achève la preuve. ■

4.2.3 Borne inférieure

Théorème 4.2.1

Soient $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_H)$ une solution du problème discret (4.1) et $\eta = \eta(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_H)$ l'estimateur correspondant. Soit $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ une solution du problème (3.1) telle que $\boldsymbol{\lambda} \in (L^2(\Gamma_C))^2$. Pour tous les éléments T, les bornes inférieures locales suivantes ont lieu :

$$\begin{aligned} \eta_{1T} &\lesssim \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,T} + \zeta_T, \\ \eta_{2T} &\lesssim \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\omega_T} + \zeta_T. \end{aligned}$$

Pour tous les éléments T possédant un côté sur Γ_C (i.e. $T \cap \Gamma_C = E$), les bornes locales inférieures sont obtenues :

$$\begin{aligned} \eta_{iT} &\lesssim h_T^{1/2} \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_H\|_E + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,T} + \zeta_T, \quad i = 3, 4, \\ \eta_{jT} &\leq 2(1+\mu)\Big(\|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_H\|_E + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E + \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_H\|_E^{1/2} \|\mathbf{u}\|_E^{1/2} \\ &\qquad + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E^{1/2} \|\boldsymbol{\lambda}\|_E^{1/2} \Big), \quad j = 5, 8, \qquad (4.30) \\ \eta_{lT} &\leq (1+\mu) \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_H\|_E, \quad l = 6, 9, \\ \eta_{7T} &\leq \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_E + h_E^{-1} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_E + h_E^{-1} \|\mathbf{u}\|_E. \qquad (4.31) \end{aligned}$$

Démonstration : On précise que l'on ne suppose pas que la solution du problème continu est unique. Bien sûr, notre résultat reste valide lorsque $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ est l'unique solution donnée par la Proposition 3.1.1. Notons également que la solution du problème discret n'est pas supposée unique.

La preuve de ces estimations inférieures est la même que pour le premier estimateur du chapitre précédent exceptée pour les bornes de η_{5T} et η_{7T}. On montre (4.30). Si $E \in E_T^C$, soit $F \subset E$ la partie du côté où $u_{hn} = u_{hn-}$. Donc comme $u_n \leq 0$ et $\int_F \lambda_n u_n = 0$:

$$\begin{aligned} & \int_E \lambda_{Hn+} u_{hn-} = \int_F \lambda_{Hn+} u_{hn} = \int_F (\lambda_{Hn} + \lambda_{Hn-}) u_{hn} \\ = \; & \int_F (\lambda_{Hn} - \lambda_n)(u_{hn} - u_n) + \int_F \lambda_{Hn} u_n + \int_F \lambda_n u_{hn} + \int_F \lambda_{Hn-} u_{hn} \\ = \; & \int_F (\lambda_{Hn} - \lambda_n)(u_{hn} - u_n) + \int_F (\lambda_{Hn} - \lambda_n) u_n + \int_F \lambda_n (u_{hn} - u_n) + \int_F \lambda_{Hn-}(u_{hn} - u_n) \\ \leq \; & \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_H\|_E \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E + \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_H\|_E \|\mathbf{u}\|_E + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E \|\boldsymbol{\lambda}\|_E + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E \|\lambda_{Hn-}\|_E. \end{aligned}$$

En utilisant la borne inférieure de η_{6T}, on aboutit au résultat. On termine par l'estimation de η_{7T} dans (4.31). Comme $u_n \leq 0$, on a $0 \leq u_{hn+} \leq |u_{hn} - u_n|$ sur Γ_C. Ainsi

$$\|u_{hn+}\|_E \leq \|u_{hn} - u_n\|_E \leq \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_E.$$

Cependant on veut estimer $\|u_{hn+}\|_{1,E}$. Lorsque $u_{hn+} > 0$ sur E par une inégalité inverse et l'inégalité précédente, on obtient :

$$\|u'_{hn+}\|_E \leq h_E^{-1} \|u_{hn+}\|_E \leq h_E^{-1} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_E.$$