

Première partie

Équations de transport d'un écoulement diphase à phase dispersée

Chapitre 1

Approches de modélisation d'une phase liquide dispersée

La simulation d'une phase dispersée peut être réalisée avec différentes méthodes, chacune ayant ses avantages et ses inconvénients, les rendant adaptées à certaines applications. Sur la figure 1.1, les approches sont classées selon Balachandar [2009] en fonction du nombre de Stokes et du ratio entre la taille des particules et la plus petite échelle de turbulence résolue, qui n'est pas la même en DNS (Direct Numerical Simulation) et en LES (Large Eddy Simulation ou Simulation aux Grandes Echelles (SGE)).

Ces deux grandeurs (Stokes et ratio) représentent deux aspects différents de la simulation d'une phase dispersée. Le nombre de Stokes quantifie l'équilibre entre la phase dispersée et la phase gazeuse :

$$St = \frac{\tau_p}{\tau_g} \quad (1.1)$$

où $\tau_p = \rho_l S / 18\pi\mu_g$ est le temps de relaxation des particules (avec $S = \pi d^2$ leur surface), et τ_g un temps caractéristique de l'écoulement gazeux (le temps de Kolmogorov ou le temps de l'échelle de coupure de la LES sur la figure 1.1). Le ratio taille des gouttes sur plus petite échelle résolue d/η (où η est l'échelle de Kolmogorov) quantifie la manière dont on doit traiter le couplage gaz-particules.

1.1 Approches directes de simulation d'une phase dispersée

Quand le rapport d/η est supérieur à 1, on doit résoudre complètement l'écoulement gazeux autour de chaque inclusion liquide ("fully resolved" sur la figure 1.1). Cette approche nécessite un maillage spécifique autour de chaque inclusion, pour bien résoudre l'écoulement. Le calcul d'un écoulement autour d'une ou plusieurs particules est faisable (Massol [2003]), mais les applications finales font intervenir un nombre tellement important de particules que la simulation à une échelle industrielle paraît complètement hors de portée de nos jours.

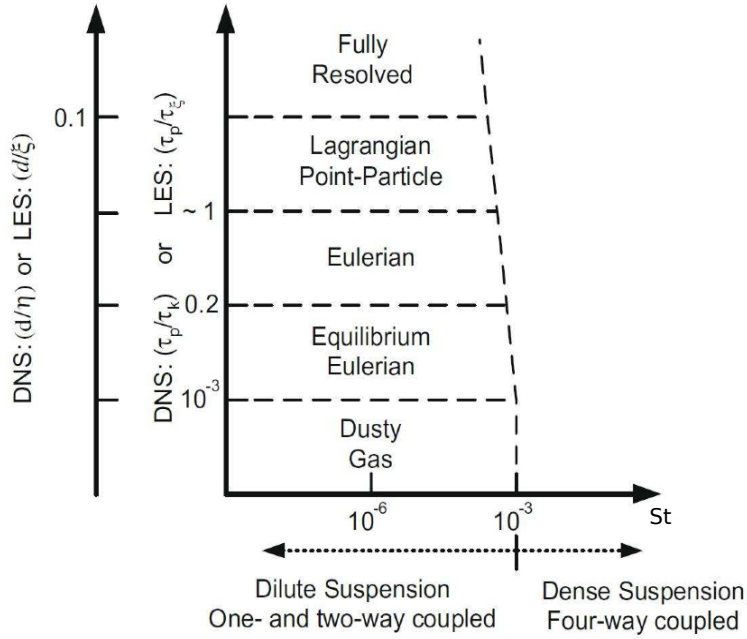


FIGURE 1.1 – Classification et domaine de validité des méthodes de résolution d'une phase dispersée selon Balachandar [2009] en fonction du nombre de Stokes et du ratio taille des particules sur plus petite échelle résolue.

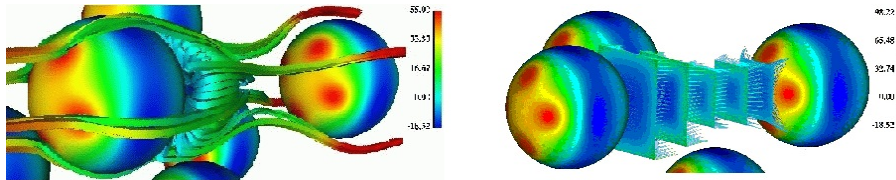


FIGURE 1.2 – Écoulement dans un réseau fixe de particules : trajectoires du gaz (gauche) et profils de vitesse (droite) (www.cerfacs.fr, Massol [2003]).

Une approche intermédiaire permettant de s'affranchir de la simulation complète de l'écoulement est la méthode FCM pour Force Coupling Method [Maxey and Patel [2001], Yeo et al. [2010]]. Dans cette méthode, la présence de la particule dans l'écoulement gazeux est prise en compte par une décomposition multi-polaire de l'écoulement autour de la particule (figure 1.3, (Abbas [2008])). Cette décomposition permet d'imposer au gaz une force qui représente la présence "volumique" de la particule. Ce genre d'approche permet de prendre en compte aussi bien des interactions hydrodynamiques (influence de l'écoulement autour d'une bulle sur une autre bulle) que des collisions. Elle permet aussi de prendre en compte d'autres forces extérieures, telle que la force électromagnétique.

Quand la taille des particules est suffisamment faible par rapport à la taille des plus petites échelles résolues, on peut utiliser des méthodes de suivi lagrangien des particules ("Lagrangian Point-Particle" sur

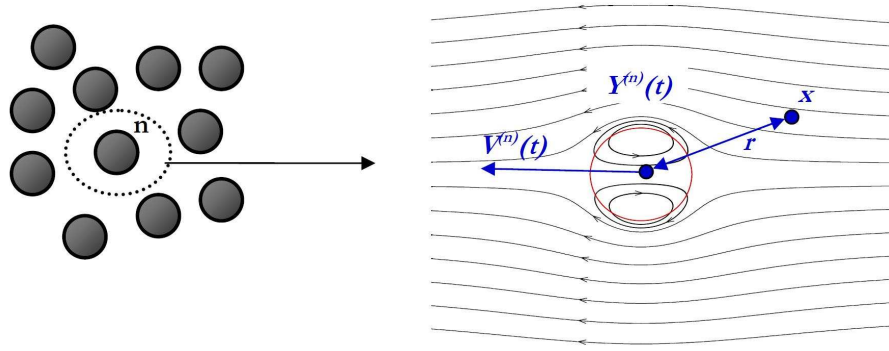


FIGURE 1.3 – Principe de la méthode de décomposition multipolaire de l'écoulement autour d'une particule (Abbas [2008]).

la figure 1.1), appelés Discrete Particle Simulation (DPS). Les particules sont assimilées à des "points" et chaque particule "physique" est suivie grâce à une particule numérique qui est régie par le système d'équations suivant, qui prédit la dynamique de la particule par un bilan de forces (Maxey and Riley [1983]) :

$$\frac{dx_{p,i}}{dt} = u_{p,i} \quad (1.2)$$

$$\frac{du_{p,i}}{dt} = \sum \frac{F_i}{m_p} \quad (1.3)$$

où x_p , $u_{p,i}$, m_p et F_i sont respectivement la position, la vitesse et la masse de la particule, et les forces extérieures exercées sur cette particule. L'intérêt de cette approche est que la modélisation des phénomènes est globalement très intuitive, et ne nécessite pas de méthodes numériques spécifiques pour résoudre le système d'équations. Cette méthode est intégrée dans de nombreux codes industriels comme IFP-C3D (Bohbot et al. [2009]) ou AVBP (Garcia [2009]). Elle a été appliquée dans de nombreux cas d'injection automobile (Reveille et al. [2006], Habchi [2008]) ou aéronautique (Sanjosé et al. [2008], Jaegle [2009], Senoner et al. [2009b], Sanjosé [2009]).

Cependant, même si le temps de calcul nécessaire pour ce genre de méthode est nettement inférieur à celui d'une approche de résolution complète de l'écoulement autour de chaque particule, le nombre de particules numériques nécessaires pour décrire de manière détaillée un spray rend cette approche très lourde pour des applications industrielles. L'augmentation du temps de calcul avec le nombre de particules impose une parallélisation de la résolution de cette phase. Cependant, dans le cas de distributions très hétérogènes, l'équilibrage de la charge de calcul entre les processeurs devient une tâche très complexe et cruciale. Entre autres, les travaux de Garcia [2009] ont permis de développer des méthodes de partitionnement spécifiques, qui se basent notamment sur un premier résultat lagrangien pour partitionner de manière efficace les calculs suivants.

Un autre problème de l'approche lagrangienne provient du couplage entre la phase dispersée et la

phase porteuse. En effet, la phase porteuse est décrite de manière continue alors que la phase dispersée est décrite de manière discrète. Il faut donc "traduire" les termes d'échanges entre les phases par interpolation qui comme toute méthode numérique induit des erreurs d'approximations. Ces méthodes imposent un biais aussi bien pour l'échange gaz-liquide (pour l'interpolation des propriétés du gaz vues par la particule) que pour l'échange liquide-gaz (pour la redistribution dans le gaz des termes sources créés par les particules). Un autre problème lié au couplage provient de la simulation de zones au maillage très fin. En effet, dans ces zones, les gouttes peuvent être plus grandes que la taille de maille. Il devient alors difficile de définir les propriétés du gaz vues par la goutte, et le couplage impose des conditions en terme de pas de temps très drastiques pour bien décrire l'échange.

1.2 Approches statistiques

1.2.1 Équation de Williams-Boltzmann

Les approches statistiques s'intéressent à une description probabiliste de la phase dispersée. Cette description est basée sur l'équation de Williams-Boltzmann (EWB) qui décrit l'évolution d'une fonction densité de probabilité (fdp) f_p d'une particule dans l'espace des phases $\{t, \vec{x}, \vec{c}_p, S, T\}$ où t est le temps, $\vec{x}$ la position, $\vec{c}_p$ la vitesse, S la surface, et T la température de la particule :

$$\frac{\partial f_p}{\partial t} + \frac{\partial c_{p,j} f_p}{\partial x_j} + \frac{1}{m_p} \frac{\partial F_{p,j} f_p}{\partial c_{p,j}} + \frac{\partial R_S f_p}{\partial S} + \frac{\partial E_T f_p}{\partial T} = 0 \quad (1.4)$$

où $F_{p,i}$ est l'ensemble des forces extérieures agissant sur la particule, R_S le terme d'évolution de la taille des particules (évaporation pour des gouttes, croissance en surface pour des suies...), et E_T le terme d'évolution de la température des particules (conduction, rayonnement...). Les termes R_S et E_T sont des quantités propres à une particule et sont définies ainsi pour le cas de l'évaporation :

$$R_S = \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{4\sqrt{\pi}}{\rho_l S^{1/2}} \dot{m}_p \quad (1.5)$$

$$E_T = \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\phi_p^c}{m_p C_{p,l}}. \quad (1.6)$$

où $\dot{m}_p$ est la variation de la masse d'une goutte de surface S , ϕ_p^c l'échange d'enthalpie par conduction entre une goutte et le gaz, et $C_{p,l}$ la capacité calorifique de la goutte (on considère ici que $C_{p,l}$ est constant en fonction de la température). Les modèles physiques utilisés pour le calcul de ces termes sont donnés dans l'annexe B. On considère des régimes suffisamment dilués pour considérer que les collisions entre gouttes sont négligeables. Le terme de droite de l'EWB est donc nul.

Le nombre de dimensions de l'espace des phases interdit une résolution en des temps raisonnables. Tout l'enjeu est donc d'utiliser une stratégie permettant de résoudre efficacement cette équation, tout en

conservant le maximum de physique. Deux types d'approches sont possibles : l'approche lagrangienne stochastique et les approches eulériennes.

1.2.2 Approche lagrangienne stochastique

L'approche lagrangienne stochastique (Dukowicz [1980]) se base sur une décomposition de la fdp f_p en une somme de particules numériques ou parcelle f_l , qui sont des solutions de l'EWB :

$$f_l = \phi_l(t, \vec{x}, \vec{c}_p) \varphi_l(S) \Phi_l(T) \quad (1.7)$$

Cette décomposition fait apparaître trois termes : ϕ_p est la fdp dans l'espace physique, φ_p la fdp dans l'espace des tailles et Φ_p la fdp dans l'espace des températures. Chaque parcelle représentera donc plusieurs particules physiques de plusieurs tailles et plusieurs températures différentes, mais ayant la même position dans l'espace physique (temps, position et vitesse). L'intégration de cette fdp de parcelle donne des équations de transport de type lagrangien :

$$\frac{dM_l}{dt} = \dot{m}_p \quad (1.8)$$

$$\frac{dX_{l,i}}{dt} = V_{l,i} \quad (1.9)$$

$$\frac{dV_{l,i}}{dt} = \{\dot{c}_{p,i}\} \quad (1.10)$$

$$\frac{dT_l}{dt} = \{\dot{T}\} \quad (1.11)$$

où M_l , $X_{l,i}$, $V_{l,i}$ et T_l sont la masse, la position, la vitesse et la température de la parcelle et $\{\cdot\}$ l'opérateur de moyenne statistique sur la parcelle. Il est à noter que si il n'y a qu'une seule particule par parcelle, la décorrélation taille/vitesse/température imposée par Eq. 1.7 n'est pas nécessaire.

1.2.3 Approches eulériennes

Au lieu de résoudre directement la fdp, les approches eulériennes s'intéressent aux moments en taille et en vitesse, qui sont des propriétés intégrées sur l'espace des phases :

$$M_S^k(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^+} S^k f_p d\vec{c}_p dS dT \quad (1.12)$$

$$M_u^{ijk}(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^+} c_{p,1}^i c_{p,2}^j c_{p,3}^k f_p d\vec{c}_p dS dT \quad (1.13)$$

Les moments peuvent correspondre à des quantités physiques communes. Par exemple, les moments M_S^0 et $M_S^{3/2}$ représentent respectivement la densité de masse et la densité de nombre de gouttes, alors que M_u^{100} représente la quantité de mouvement dans la direction i .

Pour obtenir les équations de conservation de ces moments, on intègre l'EWB sur les tailles, les températures et les vitesses. On obtient ainsi un système d'équations dans l'espace physique (temps et espace).

Tout l'enjeu des méthodes eulériennes réside dans le choix des hypothèses faites lors de l'intégration. La figure 1.4 montre différentes approches existantes. La notion essentielle qui détermine chaque méthode est la capacité à prédire la polydispersion de la phase dispersée pour chaque variable de l'espace des phases, à savoir la surface, la vitesse et la température. Les méthodes sont classées selon qu'elles puissent capturer la polydispersion dans telle ou telle variable, voire dans plusieurs variables à la fois. Les méthodes de quadrature sont un peu à part des autres méthodes, et seront donc détaillées séparément.

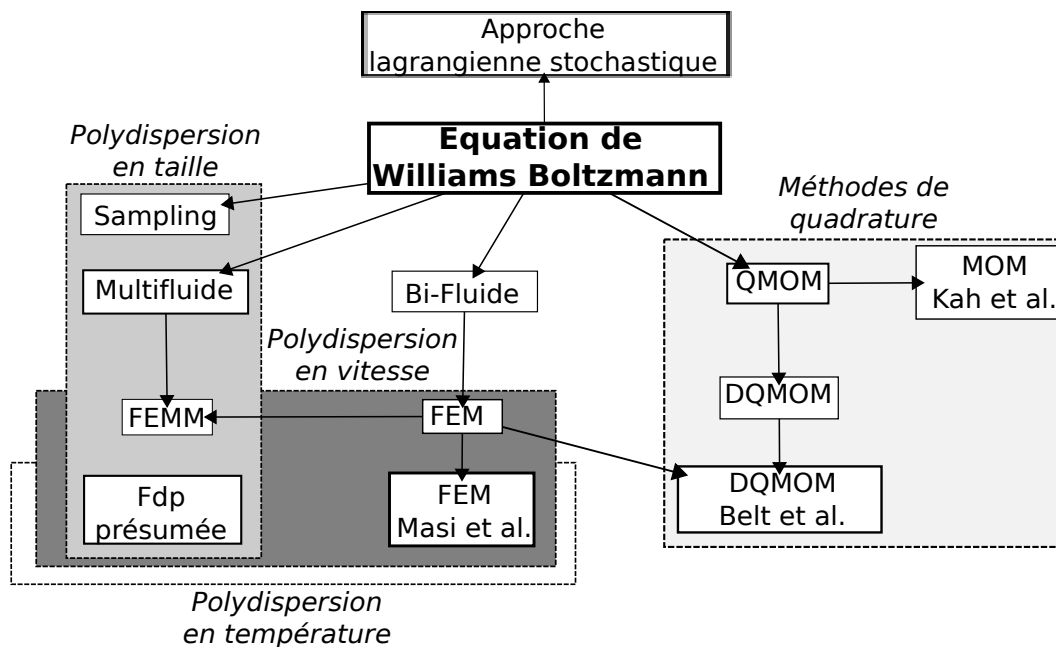


FIGURE 1.4 – Méthodes de résolution de l'équation de Williams-Boltzmann.

1.3 Approches eulériennes monodisperses en taille

1.3.1 Modèle bi-fluide

Le modèle bi-fluide est, du point de vue de la polydispersion, le plus simple des modèles eulériens (Drew and Passman [1999], Chanteperdrix et al. [2002], Murrone and Guillard [2005]). Dans cette approche, la phase dispersée est définie par deux moments en taille (la densité en nombre de goutte et la masse par exemple) et un moment en vitesse (la vitesse moyenne). Cette méthode ne prend pas en compte

la fdp en taille, réduite à un seul Dirac. Le système d'équations résultant est de type Euler :

$$\frac{\partial}{\partial t} n_l + \frac{\partial}{\partial x_m} n_l u_{l,m} = 0 \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} m_l + \frac{\partial}{\partial x_m} m_l u_{l,m} = \dot{m}_p \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} m_l u_{l,i} + \frac{\partial}{\partial x_m} m_l u_{l,i} u_{l,m} = \dot{m}_p u_{l,i} - m_l \{F_{d,i}\} \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} m_l H_l + \frac{\partial}{\partial x_m} m_l H_l u_{l,m} = \dot{m}_p H_l + m_l C_{p,i} E_T \quad (1.17)$$

où n_l , m_l , $u_{l,i}$ et H_l sont la densité en nombre, la masse, la vitesse et l'enthalpie de la phase liquide. Le champ d'application de ce modèle simple est très réduit. Il ne s'applique qu'aux écoulements à faibles Stokes, et ne peut prendre en compte aucun caractère polydisperse.

1.3.2 Formalisme Eulérien Mésoscopique

Le Formalisme Eulérien Mésoscopique (FEM) de [Février et al. \[2005\]](#) est une extension du modèle bi-fluide qui permet d'étendre le domaine d'applicabilité du modèle bi-fluide à des Stokes plus élevés. Introduisant une décomposition statistique de la vitesse des particules (figure 1.5) en une partie corrélée (la vitesse mésoscopique, égale à la vitesse moyenne de la phase liquide) et une partie décorrélée (l'agitation des particules). Cette approche sera détaillée dans le chapitre 2. Elle est à la base des méthodes de traitement de l'interaction particules-turbulence en Eulérien, et a été utilisée dans de nombreuses analyses d'écoulements ([Simonin and Lavieville \[2002\]](#), [Réveillon et al. \[2002\]](#), [Reeks \[2005\]](#)). Dans [Masi et al. \[2008\]](#) et [Masi et al. \[2010\]](#), le même principe de décomposition est appliqué à la température.

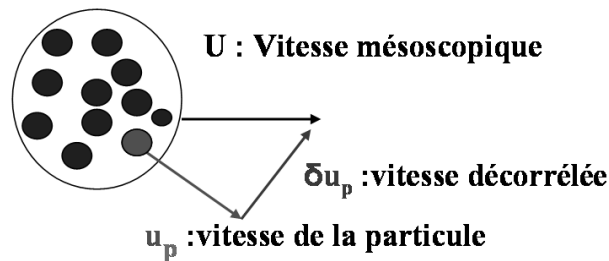


FIGURE 1.5 – Décomposition de la vitesse d'un nuage de particules en vitesse corrélée et vitesse décorrélée.

1.4 Prise en compte de la polydispersion en taille

1.4.1 Sampling

Les méthodes de Sampling se basent sur la discrétisation de l'espace en taille en plusieurs Diracs (Laurent and Massot [2001], Laurent [2002]). La fdp f_p devient alors :

$$f_p(t, \vec{x}, \vec{c}_p, S, T) = \sum_{k=1, N} n_l^{(k)}(t, \vec{x}) \delta(\vec{c}_p - \vec{U}_l^{(k)}) \delta(S - S_l^{(k)}) \delta(T - T_l^{(k)}) \quad (1.18)$$

où $n_l^{(k)}$, $\vec{U}_l^{(k)}$, $S_l^{(k)}$ et $T_l^{(k)}$ sont la densité de nombre de gouttes, la vitesse, la surface et la température associés à chaque Dirac, et N le nombre de Diracs. Une fois la condition initiale et/ou les conditions aux limites discrétisées, chaque Dirac correspond à un fluide, et est transporté indépendamment des autres. Cela revient à calculer autant de bi-fluides que de Diracs, et permet de capturer la polydispersion en taille.

1.4.2 Fdp présumée

Les méthodes à fdp présumée (Babinsky and Sojka [2002], Mossa [2005]) consistent à présumer les distributions en taille, en température et en vitesse, et à intégrer l'EWB sur l'espace des tailles, des vitesses et des températures avec ces distributions. La justification de cette méthode est que dans la plupart des applications la forme de la fdp n'évolue pas beaucoup, et qu'il peut donc être efficace de la définir a priori. Dans Mossa [2005], la fdp en taille est supposée log-normale, alors que les fdp en vitesse et température sont supposées gaussiennes (ici la variable de taille est le diamètre d) :

$$f_p(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \ln(\sigma_{LN}) d} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{\ln \left(\frac{d}{D} \right)^2}{\ln(\sigma_{LN})^2} \right) \quad (1.19)$$

où σ_{LN} et D sont les paramètres de la distribution. Plusieurs inconvénients de cette méthode ont été montrés dans Mossa [2005]. Le plus important de tous est que la fonction log-normale utilisée pour approcher la fdp ne permet de bien reproduire le phénomène d'évaporation. En effet, cette fdp impose un nombre de gouttes tendant vers 0 quand la taille des gouttes tend vers 0, ce qui impose un flux nul de disparition des gouttes en 0, et qui contraint fortement l'évolution de la fdp.

1.4.3 Approche Multi-fluide

L'approche multi-fluide (Laurent and Massot [2001], Massot [2007], de Chaisemartin [2009]) discrétise l'espace des tailles en sections continues (figure 1.6). L'intégration de l'EWB conduit alors à un système à N fluides, couplés par les phénomènes faisant varier la taille des gouttes (atomisation, évaporation, coalescence). Les détails de la dérivation de cette méthode seront donnés au chapitre 2.2.3.

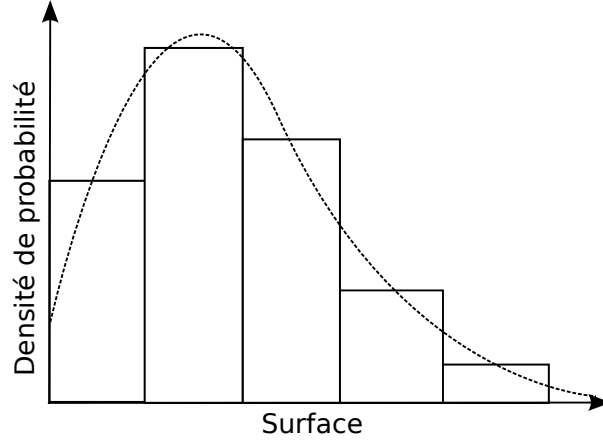


FIGURE 1.6 – Fonction densité de probabilité réelle (ligne pointillée) et représentation sectionnelle (ligne continue).

1.5 Les méthodes de quadrature

Pour reproduire une distribution, que ce soit une distribution en taille, en température, ou en vitesse, il faut vérifier le maximum de moments de cette distribution. On est donc tenté d'en prendre un maximum. Nous prenons ici l'exemple d'une EWB réduite au cas monodimensionnel sans variation de vitesse et de surface (mais les idées sont identiques pour le traitement de moments en taille par exemple) :

$$\frac{\partial f_p}{\partial t} + \frac{\partial c_p f_p}{\partial x} = 0 \quad (1.20)$$

Si on intègre cette équation sur les vitesses, on obtient le système suivant pour $k = 1, N$ moments (pour un cas 1D, les moments en vitesse M_u^{ijk} sont réduits à $M_u^k = M_u^{00k}$) :

$$\frac{\partial M_u^k}{\partial t} + \frac{\partial M_u^{k+1}}{\partial x} = 0 \quad (1.21)$$

Dans le cas où on n'a qu'une seule vitesse pour chaque position, cela ne pose pas de problème. En effet si on connaît 2 moments, on peut définir tous les moments d'ordre supérieur. Considérons la distribution suivante monodisperse :

$$f_p(t, S) = n_l \cdot \delta(c_p - U_l) \quad (1.22)$$

U_l et n_l sont la vitesse des gouttes et la densité de nombre de la phase dispersée. Si on transporte deux moments, on peut vérifier :

$$M_u^0 = \int n_l \cdot \delta(c_p - U_l) dc_p = n_l \quad (1.23)$$

$$M_u^1 = \int c_p \cdot n_l \cdot \delta(c_p - U_l) dc_p = n_l \cdot U_l \quad (1.24)$$

$$(1.25)$$

On peut donc reconstruire la fdp. Tous les moments supérieurs s'obtiennent alors facilement :

$$M_u^k = \int c_p^k \cdot n_l \cdot \delta(c_p - U_l) dc_p = U_l^k \cdot n_l \quad (1.26)$$

Cependant, les moments d'ordre supérieur ont peu d'intérêt pour une distribution monodisperse, étant donné que seuls deux moments suffisent.

1.5.1 Approche QMOM

Dans le cas de distribution de vitesse inconnue a priori, on ne peut pas reconstruire directement les moments supérieurs et le flux convectif. C'est ici qu'interviennent les méthodes de quadratures. L'approche QMOM (Quadrature Method of Moment, McGraw [1997], Marchisio et al. [2003]) se base sur une reconstruction de la fdp par une quadrature de Gauss. En restant dans le cas simplifié décrit précédemment, la fdp est donc :

$$f_p = \sum_{j=1,N} w_j \delta(c_p - U_{l,j}) \quad (1.27)$$

où N est le nombre de points de quadrature. Si le nombre de points de quadrature est N, alors cette reconstruction vérifie 2N moments, et inversement il faut 2N moments pour la reconstruire. De manière analogue à ce qui a été montré précédemment pour une distribution monodisperse, quand la fdp est connue, tous les moments de la fdp le sont aussi :

$$M_U^k = \int c_p^k \cdot \sum_{j=1,N} w_j \delta(c_p - U_{l,j}) dc_p = \sum_{j=1,N} w_j \cdot U_{l,j}^{k-1} \quad (1.28)$$

C'est ce système non-linéaire qui permet, en connaissant les moments, de retrouver les couples poids-abscisse. En effet, si on connaît 2N moments, on a un système à 2N équations (autant que de moments) et 2N inconnues (N pour les poids et N pour les abscisses). Des méthodes existent pour faciliter la projection des moments sur la quadrature (McGraw [1997]), basées sur l'algorithme product-difference (PD) de Gordon [1968], et sur la théorie des moments canoniques (Dette and Studden [1997]).

Une application intéressante de cette méthode est le traitement des croisements de gouttes. En effet, si deux "paquets de gouttes" se croisent, dans une approche monocinétique (une vitesse par position), la vitesse locale devient la moyenne des vitesses de chaque paquet, et on n'aura donc plus qu'un seul paquet. Pour arriver à simuler ce croisement, la méthode de quadrature est particulièrement appropriée (de Chaisemartin et al. [2008], de Chaisemartin et al. [2009b]). En effet, si à une certaine position, il n'y a qu'une seule vitesse, alors la distribution de vitesse est un Dirac. Si il y a deux vitesses, il y a deux Diracs. On voit donc bien que la quadrature reproduit naturellement cette distribution, et permet de réécrire le terme de transport de manière à utiliser un schéma convectif par Dirac :

$$\frac{\partial M_u^{k+1}}{\partial x} = \sum_{j=1,N} \frac{\partial U_{l,j} M_u^k}{\partial x} \quad (1.29)$$

Pour pouvoir simuler un croisement de deux trajectoires, il faudra donc avoir 4 moments en vitesse 1D (nécessaires à la reconstruction de la distribution). Ce nombre de moments nécessaire augmente bien sûr avec le nombre de dimension.

1.5.2 Approche DQMOM

Comme pour le QMOM, l'approche DQMOM (Direct Quadrature Method of Moment, [Marchisio and Fox \[2005\]](#)) se base sur une quadrature de Gauss de la fdp. La différence est qu'on ne transporte pas les moments, mais directement les poids et abscisses de la quadrature. Chaque couple poids/abscisse correspond alors à un fluide eulérien :

$$\frac{\partial}{\partial t} w_j + \frac{\partial}{\partial x_m} w_j U_{j,m} = a_j \quad (1.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} w_j S_j + \frac{\partial}{\partial x_m} w_j S_p U_{j,m} = b_j \quad (1.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} w_j S_j U_{j,i} + \frac{\partial}{\partial x_m} w_j S_p U_{j,i} U_{j,m} = c_j \quad (1.32)$$

$$(1.33)$$

Les termes sources a_p , b_p et c_p sont déterminés en insérant la quadrature de la fdp dans l'équation de Williams-Boltzmann ([Marchisio and Fox \[2005\]](#)). Cela revient en pratique à transporter N diracs. A la différence de la méthode de sampling, ces Diracs sont couplés par un système linéaire lorsque les phénomènes physiques font évoluer la taille des gouttes (coalescence, atomisation, évaporation). [Fox et al. \[2008\]](#) a montré l'efficacité de cette méthode pour la simulation des processus de coalescence et d'évaporation, mais a aussi soulevé le problème du flux de nombre de gouttes en 0, qui est résolu dans [Massot et al. \[2010\]](#). Cette approche a récemment été étendue aux cas turbulents par [Belt and Simonin \[2009\]](#) par la prise en compte d'une dispersion en vitesse pour chaque abscisse de la quadrature. Ce nouveau formalisme a été appliqué à des cas de coalescence en Turbulence Homogène Isotrope ([Wunsch et al. \[2009\]](#)).

1.5.3 Méthode de Moments d'ordre élevé

Le problème des méthodes de quadrature est qu'étant donné qu'elle approche la fdp par des Diracs, la distribution n'est pas continue. Dans le cas de l'évaporation, cela pose problème parce qu'elles ne peuvent simuler correctement le flux de disparition des gouttes à la surface 0 ([Fox et al. \[2008\]](#)). En effet l'évaporation d'une fdp continue fait disparaître des gouttes de manière continue quand elles ont une surface nulle. Dans le cas d'une quadrature, le seul moyen pour "perdre" des gouttes est qu'un Dirac soit de surface nulle. On aura donc un flux de disparition des gouttes discontinu, ce qui ne serait pas physique.

L'approche développée dans Kah et al. [2009] et Massot et al. [2010] propose de résoudre ce problème. Elle se base sur une reconstruction continue de la fdp avec N moments. La forme de la reconstruction choisie est de type exponentiel :

$$n_l(S) = \exp \left(- \sum_{j=0}^N \xi_j S^j \right) \quad (1.34)$$

Les paramètres ξ_j de la reconstruction sont obtenus en maximisant l'entropie de Shannon $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H}(n_l) = - \int_{S_{min}}^{S_{max}} n_l(S) \ln(n_l(S)) dS \quad (1.35)$$

Cette maximisation d'entropie permet de choisir parmi tous les ξ_j les combinaisons vérifiant les moments de la fdp qui donnent la solution la plus régulière. Le système résultant est non-linéaire et nécessite de calculer numériquement les intégrales qu'il fait intervenir, comme expliqué dans Massot et al. [2010]. L'intérêt est qu'en reconstruisant la fdp en taille de manière continue, on peut calculer le flux de gouttes qui disparaissent (concrètement toutes celles qui deviennent de surface nulle pendant un pas de temps). Avec la connaissance de ce flux, on peut alors utiliser une méthode de quadrature, mais en ajoutant ce nouveau flux dans l'équation de nombre de gouttes.

1.6 Quelle approche choisir ?

Le choix de la méthode de polydispersion est contraint par le fait que l'approche choisie doit pouvoir être appliquée avec les méthodes numériques présentes dans AVBP . Sous ces contraintes, les méthodes de quadrature ne peuvent être utilisées, ces dernières nécessitant une précision sur le transport simultané de plusieurs moments de la fdp (Wright [2007], Kah et al. [2009]). Le choix s'est ici porté sur les approches multi-fluides parce qu'elles reviennent à calculer N phases eulériennes, couplées seulement par l'évaporation. La représentation continue de la fdp fait que cette approche est plus adaptée que le sampling, qui ne peut prédire le flux en 0, du fait d'une représentation discrète de la fdp.

Dans le chapitre suivant, on propose donc un couplage entre le FEM et l'approche multi-fluide, appelé FEMM pour Formalisme Eulérien Mésoscopique Multi-fluide.