

# Estimateurs a posteriori pour la méthode XFEM

DANS ce chapitre, on propose, analyse et implémente un estimateur a posteriori par résidu pour le problème de Laplace et pour le système de l'élasticité en dimension deux d'espace approximés par la méthode des éléments finis étendus (XFEM). La méthode XFEM permet d'améliorer les calculs éléments finis sur les domaines fissurés en utilisant des maillages sur le domaine non fissuré et en ajoutant des fonctions de base de type Heaviside et des fonctions singulières afin de prendre en compte la géométrie de la fissure et la singularité en pointe de fissure. Les résultats numériques sont réalisés sous la librairie éléments finis Getfem++.

Ce travail a abouti à un article paru dans *ESAIM proceedings* intitulé **A posteriori error analysis for Poisson's equation approximated by XFEM** [125] et un article soumis intitulé **A residual error estimator for the XFEM approximation of the elasticity problem**[126].

## Sommaire

---

2.1	Les problèmes de Laplace et de l'élasticité sur un domaine fissuré . . . . .	61
2.2	Discrétisation des problèmes de Laplace et de l'élasticité avec la méthode XFEM . . . . .	64
2.3	Opérateur de quasi-interpolation . . . . .	67
2.3.1	Définition . . . . .	67
2.3.2	Stabilité . . . . .	70
2.3.3	Estimations d'erreur . . . . .	74
2.4	Estimations d'erreur . . . . .	77

2.4.1	Estimations a priori . . . . .	77
2.4.2	Estimations a posteriori . . . . .	79
<b>2.5</b>	<b>Résultats numériques . . . . .</b>	<b>85</b>
2.5.1	Le mode I d'ouverture . . . . .	85
2.5.2	Le mode II de cisaillement . . . . .	89
2.5.3	L'exemple du domaine en forme de L . . . . .	92
<b>2.6</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>96</b>

---

APRÈS de nombreux travaux numériques développés dans divers contextes en mécanique, le premier résultat de convergence avec une estimation a priori a été récemment obtenu pour la méthode XFEM dans [61, 63] : dans l'analyse de la convergence, une difficulté consiste à évaluer l'erreur locale sur les éléments coupés par la fissure en utilisant des opérateurs de prolongement adaptés et des estimations d'erreur spécifiques. Dans [61], les auteurs obtiennent une estimation d'erreur d'ordre  $h$  ( $h$  désigne le paramètre de discrétisation) sous la régularité  $H^{2+\varepsilon}$  de la partie régulière de la solution en gardant en tête que la solution est seulement de régularité  $H^{3/2-\varepsilon}$  pour tout  $\varepsilon$  positif. Un travail récent [63] prouve une estimation d'erreur optimale d'ordre  $h$  sous une régularité  $H^2$  de la partie régulière.

Des travaux numériques remarquables ont été réalisés sur les estimateurs d'erreur a posteriori. Une technique simple de recouvrement et son estimateur associé pour la méthode XFEM a été proposé dans [41], [40] (par la méthode de recouvrement global étendu XGR), [39] (par la méthode des moindres carrés mobiles étendue XMLS) et [207] (par la méthode SPR avec polynômes conjoints). Ces estimations d'erreur basées sur le recouvrement améliorent la technique de recouvrement par patch superconvergent (SPR) introduite par Zienkiewicz et Zhu. Dans ce chapitre, on propose et on analyse un estimateur d'erreur de type résidu (voir [17], [231]) pour les problèmes de Laplace et de l'élasticité linéaire discrétisés par la méthode XFEM. Comme les maillages ne coïncident pas avec le domaine fissuré, on a besoin d'introduire et d'étudier un nouvel opérateur de quasi-interpolation (voir par exemple [35, 65, 67, 119, 208, 217] pour des opérateurs de quasi-interpolation variés). L'utilisation de ce nouvel opérateur nous permet de réaliser une première analyse a posteriori de l'erreur et d'obtenir une borne supérieure de l'erreur de discrétisation. Dans la dernière section, on présente plusieurs résultats numériques, réalisés avec la librairie éléments finis Getfem++ ([99]). Les expériences numériques montrent que l'estimateur d'erreur et l'erreur de discrétisation admettent des taux de convergence similaires lorsque le paramètre de discrétisation tend vers zéro.

Dans la suite, le symbole  $|\cdot|$  désigne soit la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^2$ , soit la longueur d'un segment, soit l'aire d'un plan. Finalement la notation  $a \lesssim b$  signifie qu'il existe une constante positive  $C$  indépendante de  $a$  et  $b$  (et de la taille du maillage) telle que  $a \leq C b$ . La notation  $a \sim b$  signifie que  $a \lesssim b$  et  $b \lesssim a$  simultanément.

## 2.1 Les problèmes de Laplace et de l'élasticité sur un domaine fissuré

Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$  possédant une fissure, avec un bord polygonal  $\partial\Omega$  où  $\Gamma_F \subset \partial\Omega$  désigne la fissure (la fissure  $\Gamma_F$  est constituée de deux segments distincts ayant le même emplacement). On fixe une "partition" de  $\partial\Omega$  de trois ensembles ouverts disjoints  $\Gamma_D$ ,  $\Gamma_N$  et  $\Gamma_F$  où on considère des conditions homogènes de Dirichlet (sur  $\Gamma_D$ ) et des conditions homogènes de Neumann (sur  $\Gamma_N \cup \Gamma_F$ ). Des conditions homogènes sont choisies pour simplifier les notations et l'extension à des conditions non-homogènes peut être faite sans aucune difficulté. On suppose que  $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N \cup \bar{\Gamma}_F$ . On suppose de plus que les mesures de  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_F$  sont positives.

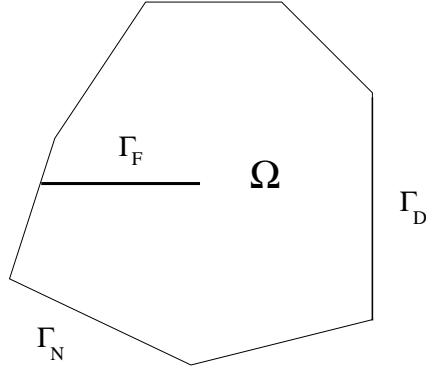


FIG. 2.1 – La géométrie du domaine fissuré  $\Omega$

Dans ce chapitre, on effectue l'analyse sur deux problèmes : l'équation de Laplace (ou problème de Poisson) et le problème de l'élasticité (voir Introduction générale pour les caractéristiques). Le problème de Poisson se résume par : pour  $f \in L^2(\Omega)$  soit  $u \in H^1(\Omega)$  la solution variationnelle de

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sur } \Gamma_N \cup \Gamma_F, \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $\partial u / \partial \mathbf{n}$  désigne la dérivée normale de  $u$  sur le bord.

Le problème d'élasticité est : pour  $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^2$  soit  $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^2$  le champ de déplacement solution variationnelle de

$$\begin{cases} -\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_D, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_N \cup \Gamma_F, \end{cases} \quad (2.2)$$

Soit  $d = 1$  pour le problème de Poisson et  $d = 2$  pour l'élasticité et

$$V = \{v \in (H^1(\Omega))^d : v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}.$$

La formulation variationnelle de (2.1) est l'unique solution  $u$  de

$$u \in V, \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad \forall v \in V. \quad (2.3)$$

Détaillons la pour l'élasticité. En multipliant par  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  la première équation de (2.2) et en intégrant sur  $\Omega$ , on aboutit à :

$$-\int_{\Omega} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega$$

En utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma$$

Alors en prenant en compte les conditions au bord, la solution variationnelle de (2.2) est l'unique solution  $\mathbf{u}$  de

$$\mathbf{u} \in \mathbf{V}, \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad (2.4)$$

où les notations  $\cdot$  et  $:$  désignent les produits scalaires dans  $\mathbb{R}^2$  et dans l'espace des tenseurs symétriques de second ordre dans  $\mathbb{R}^2$ . Ces problèmes (2.3) et (2.4) s'écrivent en définissant la forme bilinéaire  $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega$  ou  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega$  et la forme linéaire continue  $L(v) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega$  :

$$u \in V, \quad a(u, v) = L(v) \text{ pour tout } v \in V.$$

Ce problème équivaut au problème de minimisation de l'énergie :  $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - f(v)$  sur  $V$ . Dans [84], l'existence et l'unicité de la solution de ce problème ont été montrées pour  $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^2$ .

La solution  $u$  des problèmes de Laplace et d'élasticité peut être écrite comme la somme d'une partie régulière  $u_r$  et d'une partie singulière  $u_s$ . Pour l'équation de Laplace,  $u_s = K r^{1/2} \sin(\theta/2)$  et pour le problème d'élasticité  $\mathbf{u}_s = K_I \mathbf{u}_I + K_{II} \mathbf{u}_{II}$  où  $K$ ,  $K_I$  et  $K_{II}$  sont les facteurs d'intensité des contraintes (voir par exemple [163]) et les fonctions  $\mathbf{u}_I$  et  $\mathbf{u}_{II}$  sont définies en coordonnées polaires comme suit dans le cas d'une fissure horizontale pour  $\theta = \pi$  :

$$\mathbf{u}_I = \frac{\lambda + \zeta}{\mu(3\lambda + 2\zeta)} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \theta \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} (a + b \cos \theta), \quad (2.5)$$

$$\mathbf{u}_{II} = \frac{\lambda + \zeta}{\mu(3\lambda + 2\zeta)} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} (c + 2 + \cos \theta) \\ \cos \frac{\theta}{2} (2 - c - \cos \theta) \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Dans la définition précédente,  $r$  désigne la distance à la pointe de fissure,  $\lambda$  et  $\zeta$  sont les coefficients de Lamé et

$$a = 2 + \frac{2\zeta}{\lambda + 2\zeta}, \quad b = -2 \frac{\lambda + \zeta}{\lambda + 2\zeta}, \quad c = \frac{\lambda + 3\zeta}{\lambda + \zeta}.$$

Notons que la composante normale (respectivement tangentielle) de  $\mathbf{u}_I$  (respectivement  $\mathbf{u}_{II}$ ) est discontinue sur la fissure (i.e. pour  $\theta = \pi$ ). On peut vérifier que pour tout  $\varepsilon > 0$ , les fonctions  $\mathbf{u}_I$  et  $\mathbf{u}_{II}$  appartiennent à  $H^{\frac{3}{2}-\varepsilon}(\Omega)$  (voir par exemple [103, 104]).

**Remarque 2.1.1**

En 1957, Irwin a introduit la notion de facteur d'intensité des contraintes comme un paramètre caractéristique des champs en pointe de fissure. Les facteurs d'intensité des contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$  caractérisent l'intensité de la singularité du champ des contraintes à la pointe et sont proportionnels à la discontinuité du champ de déplacement des lèvres de la fissure pour chaque mode élémentaire. Ils contiennent l'information sur la géométrie de la fissure et la nature des sollicitations.

## 2.2 Discrétisation des problèmes de Laplace et de l'élasticité avec la méthode XFEM

On approche les problèmes (2.1) et (2.2) par la méthode XFEM avec une fonction cut-off introduite dans le chapitre précédent (voir sous-section 1.2.3). On considère une famille régulière de triangulations  $T_h, h > 0$  sur le domaine non-fissuré constituée de triangles fermés  $T$  tels que  $\bar{\Omega} = \cup_{T \in T_h} T$  (voir [50, 54, 66]).

**Définition 2.2.1**

$T_h, h > 0$  est une famille régulière de triangulations de  $\Omega$  avec des triangles, au sens usuel que :

- pour tout  $h$ ,  $\bar{\Omega}$  est l'union des éléments de  $T_h$ .
- pour tout  $h$ , l'intersection de deux éléments distincts de  $T_h$  est soit vide, soit un sommet, soit un côté entier.
- le quotient  $h_T/\rho_T$  du diamètre  $h_T$  d'un élément  $T$  de  $T_h$  par le diamètre  $\rho_T$  de son cercle inscrit est inférieur ou égal à une constante  $\sigma$  qui ne dépend ni de  $T$  ni de  $h$ .

**Définition 2.2.2**

Une famille de maillages  $T_h, h > 0$  est dite quasi-uniforme si et seulement si elle est régulière et s'il existe une constante  $c > 0$  indépendante de  $h$  telle que :

$$\forall T \in T_h, h_T \geq ch$$

Pour  $T \in T_h$ , on rappelle que  $h_T$  est le diamètre de  $T$  et  $h = \max_{T \in T_h} h_T$ . La régularité du maillage implique en particulier que, pour tout côté  $E$ , de  $T$  on a  $h_E = |E| \sim h_T$ . Comme les triangles de  $T_h$  ne coïncident pas avec la géométrie de la fissure, on définit la famille d'éléments généralisés  $G_h, h > 0$  contenant les éléments suivants : (voir Figure 2.2) :

- les triangles de  $T \in T_h$  dont l'intérieur n'est pas coupé par  $\Gamma_F$ ,
- les triangles et quadrangles obtenus lorsque la fissure partage un triangle de  $T_h$  en deux parties,
- le triangle fissuré contenant la pointe de fissure.

Cela implique que  $\bar{\Omega} = \cup_{G \in G_h} \bar{G}$  et  $\cup_{G \in G_h} G^\circ \subset \Omega$  où  $G^\circ$  désigne le plus grand ensemble ouvert contenu dans  $G$ .

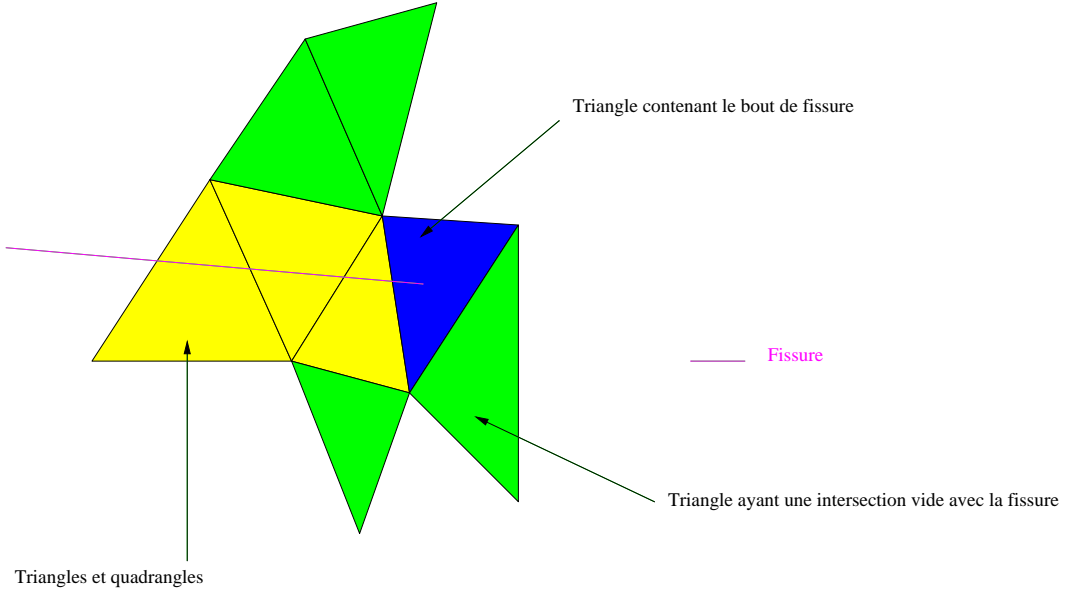


FIG. 2.2 – Eléments généralisés

### Définition 2.2.3

Soit  $\mathcal{N}_h$  l'ensemble des nœuds de la triangulation  $T_h$ . On dit qu'un nœud  $x \in \mathcal{N}_h$  est enrichi si le patch entourant  $x$  :  $\omega_x = \cup_{T:x \in T} T$  est partagé en deux sous-ensembles (au moins) par la fissure et on note par  $\mathcal{N}_h^H \subset \mathcal{N}_h$  l'ensemble des nœuds enrichis. On dit qu'un triangle est enrichi (respectivement partiellement enrichi) si trois nœuds (respectivement un ou deux nœuds) sont enrichis (voir Figure 1.2).

On note par  $h_x$  le diamètre du patch  $\omega_x$ . Si  $T \in T_h$  on note par  $\omega_T$  l'union de tous les éléments de  $T_h$  ayant une intersection non vide avec  $T$ . De même pour un côté  $E$  d'un triangle de  $T_h$ , on désigne par  $\omega_E$  l'union de tous les éléments de  $T_h$  ayant une intersection non vide avec  $\bar{E}$  (voir Figure 2.3). Soit  $\mathcal{N}_h^D = \mathcal{N}_h \cap \bar{\Gamma}_D$  (les nœuds extrêmes de  $\bar{\Gamma}_D$  appartiennent à  $\mathcal{N}_h^D$ ).

Soit  $E_h$  l'ensemble des côtés de l'élément de  $G_h$  (les côtés sont supposés être relativement ouverts). Soit  $E_h^{int} = \{E \in E_h : E \subset \Omega\}$  l'ensemble des côtés intérieurs de  $G_h$ ,  $E_h^{ext} = E_h \setminus E_h^{int}$ . On note par  $E_h^N = \{E \in E_h : E \subset \Gamma_N\}$ ,  $E_h^F = \{E \in E_h : E \subset \Gamma_F\}$  l'ensemble des côtés extérieurs inclus dans la partie du bord où on impose des conditions de Neumann. Pour un élément généralisé  $G \in G_h$  (respectivement élément standard  $T \in T_h$ ), on note par  $E_G$  l'ensemble des côtés de  $G$  (respectivement par  $E_T$  l'ensemble des côtés de  $T$ ) et d'après les notations précédentes, on pose  $E_G^{int} = E_G \cap E_h^{int}$ ,  $E_G^N = E_G \cap E_h^N$ ,  $E_G^F = E_G \cap E_h^F$ . Pour un côté  $E$  d'un élément généralisé  $G$ , on introduit  $\mathbf{n}_{G,E} = (n_x, n_y)$  le vecteur normal unitaire sortant de  $G$  par rapport à  $E$ . De plus, pour chaque côté  $E \in E_h^{int}$  on fixe un des deux vecteurs normaux et on le note par  $\mathbf{n}_E$ . Le saut d'une fonction scalaire ou vectorielle  $v$  à travers un côté  $E \in E_h$  au point  $\mathbf{y} \in E$  est défini par

$$\llbracket v(\mathbf{y}) \rrbracket_E = \begin{cases} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} v(\mathbf{y} + \alpha \mathbf{n}_E) - v(\mathbf{y} - \alpha \mathbf{n}_E) & \forall E \in E_h^{int}, \\ v(\mathbf{y}) & \forall E \in E_h^{ext}. \end{cases}$$

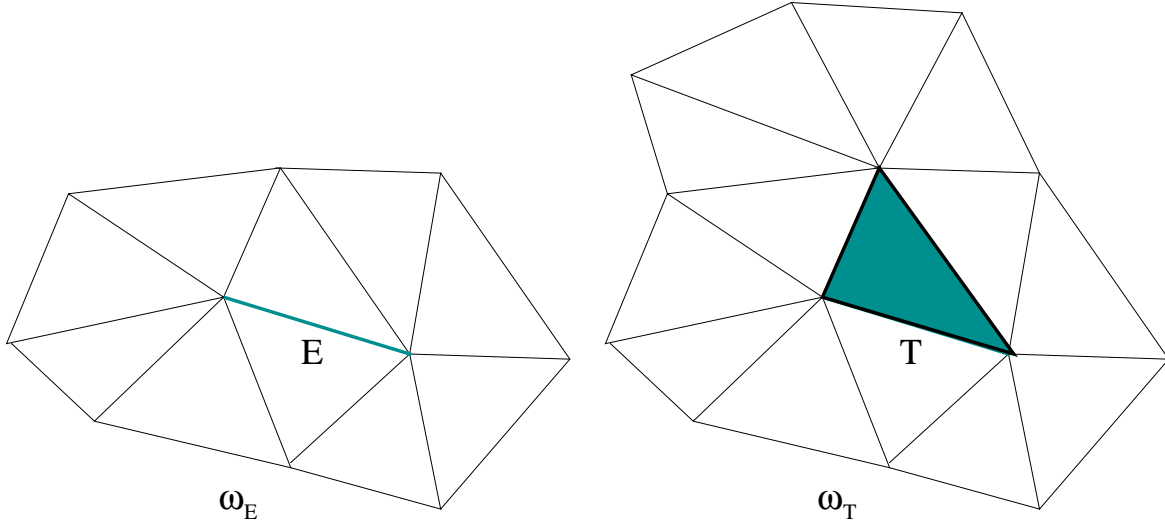


FIG. 2.3 – Patch pour un côté à droite et patch pour un triangle à gauche

L'approximation du problème de Poisson (2.3) se lit : trouver  $u_h$  telle que

$$u_h \in V_h, \quad \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, d\Omega = \int_{\Omega} f v_h \, d\Omega, \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.7)$$

où

$$\begin{aligned} V_h &= \left\{ v_h \in C(\Omega) : v_h = \sum_{x \in \mathcal{N}_h} a_x \psi_x + \sum_{x \in \mathcal{N}_h^H} b_x H \psi_x + c \chi r^{1/2} \sin(\theta/2) \right. \\ &= \left. v_{h,r} + \chi v_{h,s}, \quad a_x, b_x, c \in \mathbb{R} \right\} \subset V. \end{aligned} \quad (2.8)$$

On rappelle la définition de  $\mathbf{V}_h$  pour l'élasticité :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_h &= \left\{ \mathbf{v}_h \in (C(\Omega))^2 : \mathbf{v}_h = \sum_{x \in \mathcal{N}_h} a_x \psi_x + \sum_{x \in \mathcal{N}_h^H} b_x H \psi_x + \chi \sum_{i=1}^4 c_i F_i \right. \\ &= \left. \mathbf{v}_{h,r} + \chi \mathbf{v}_{h,s}, \quad a_x, b_x, c_i \in \mathbb{R}^2 \right\} \end{aligned}$$

Le problème discret issu de (2.4) consiste à trouver  $\mathbf{u}_h$  telle que

$$\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h, \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h \, d\Omega, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h. \quad (2.9)$$

En utilisant le théorème de Lax-Milgram, on déduit que les problèmes (2.7) et (2.9) admettent une solution unique.



## 2.3 Opérateur de quasi-interpolation

Dans cette section, on introduit un opérateur de quasi-interpolation qui sera utilisé dans l'analyse a posteriori dans la prochaine section.

### 2.3.1 Définition

On utilise un opérateur de quasi-interpolation  $\pi_h$  (voir par exemple [35, 65, 67, 119, 208, 217] pour des opérateurs variés). Au nœud  $x$ , la valeur de la quasi-interpolation est souvent une "moyenne" de la fonction sur le patch  $\omega_x$  autour de  $x$ . Pour simplifier la discussion suivante, on suppose que les extrémités de la fissure appartenant à  $\partial\bar{\Omega}$  ne sont pas soumises aux conditions de Dirichlet. On commence alors par construire l'opérateur de quasi-interpolation  $\pi_h$  dans le cas scalaire pour l'équation de Laplace : on pose

$$X = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}.$$

et

$$X_h = \left\{ v_h \in C(\Omega) : v_h = \sum_{x \in \mathcal{N}_h} \alpha_x \psi_x + \sum_{x \in \mathcal{N}_h^H} \beta_x H \psi_x, \quad \alpha_x, \beta_x \in \mathbb{R} \right\} \subset X,$$

et on définit

$$\pi_h : X \rightarrow X_h.$$

#### Remarque 2.3.1

$X_h$  n'englobe aucune fonction singulière de la pointe de fissure.

La première idée serait d'utiliser un de ces opérateurs sur le maillage régulier  $T_h$ . Une telle approche contient des termes comme  $\|u - u_h\|_{1, \omega_T}$  (où  $T \in T_h$ ) et malheureusement ni  $u$  ni  $u_h$  n'appartient à  $H^1(\bar{\Omega})$  (donc  $u - u_h$  n'appartient pas en général à  $H^1(\omega_T)$ ) à cause de la discontinuité à travers la fissure.

Le seconde idée est de définir  $\pi_h v$  (avec  $v \in H^1(\Omega)$ ) séparément de chaque côté de la fissure. Si on divise  $\Omega$  en  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  le long de la fissure et de son extension rectiligne (voir Figure 2.4), on définit d'abord  $\pi_h v$  sur  $\Omega_1$  (resp.  $\Omega_2$ ) en utilisant uniquement les valeurs de  $v$  sur  $\Omega_1$  (resp.  $\Omega_2$ ). Cela consiste à définir  $\pi_h v$  sur chaque élément généralisé  $G \in G_h$ . Cette approche mène à des difficultés techniques car les éléments de  $G_h$  sont parfois des quadrangles.

Par conséquent, on choisit une approche qui consiste à déterminer  $\pi_h v$  séparément de chaque côté de la fissure en définissant  $\pi_h v|_G$ ,  $G \in G_h$  et en utilisant les valeurs de  $v$  de chaque côté de la fissure. On doit alors utiliser des opérateurs de prolongement. Comme on l'a déjà mentionné, on divise  $\Omega$  en  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  à l'aide de l'extension rectiligne de la fissure (voir Figure 2.4). Soit  $v \in H^1(\Omega)$  avec  $v_1 = v|_{\Omega_1} \in H^1(\Omega_1)$  et  $v_2 = v|_{\Omega_2} \in H^1(\Omega_2)$ . On définit une extension  $\tilde{v}_1$  de  $v_1$  définie sur  $\bar{\Omega}$  (voir [3, 92]) telle que

$$\|\tilde{v}_1\|_{1, \bar{\Omega}} \lesssim \|v_1\|_{1, \Omega_1} \leq \|v\|_{1, \Omega} \quad (2.10)$$

et une extension  $\tilde{v}_2$  (définie sur  $\bar{\Omega}$ ) de  $v_2$  telle que

$$\|\tilde{v}_2\|_{1, \bar{\Omega}} \lesssim \|v_2\|_{1, \Omega_2} \leq \|v\|_{1, \Omega}. \quad (2.11)$$

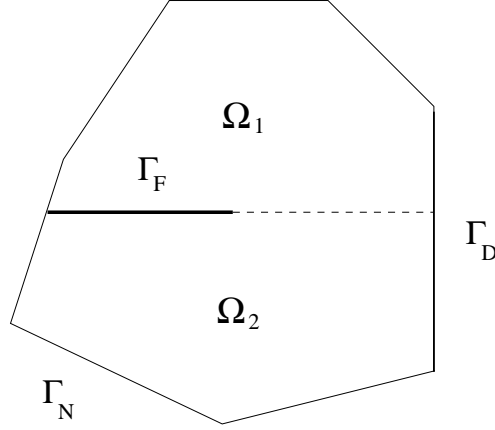


FIG. 2.4 – Décomposition du domaine en utilisant une extension rectiligne de la fissure

Pour tout  $v \in H^1(\Omega)$ , on définit  $\pi_h v$  comme l'unique élément de  $X_h$  tel que

$$\pi_h v = \sum_{x \in \mathcal{N}_h} \alpha_x(v) \lambda_x + \sum_{x \in \mathcal{N}_h^H} \beta_x(v) H \lambda_x. \quad (2.12)$$

satisfaisant les conditions suivantes :

- Etape 1 : Définition de  $\pi_h v$  aux nœuds  $\mathcal{N}_h$  de la triangulation  $T_h$ .

*i : Nœuds non enrichis* : Si  $x \in \mathcal{N}_h \setminus \mathcal{N}_h^D$  est tel que  $\omega_x$  ne soit pas coupé par la fissure (i.e. pas partagé en plusieurs parties) alors

$$\pi_h v(x) = \frac{1}{|\omega_x|} \int_{\omega_x} v(y) dy.$$

On obtient par l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$|\pi_h v(x)| \lesssim |\omega_x|^{-1/2} \|v\|_{\omega_x} \sim h_x^{-1} \|v\|_{\omega_x} \leq h_x^{-1} \|v\|_{\omega_x} + \|\nabla v\|_{\omega_x}.$$

Les trois nœuds du triangle contenant la pointe de fissure font partie de cette section.

*ii : Nœuds enrichis* : Si  $x \in \mathcal{N}_h \setminus \mathcal{N}_h^D$ ,  $x \in \bar{\Omega}_\ell$ ,  $\ell = 1, 2$ , est tel que  $\omega_x$  soit coupé par la fissure alors on pose

$$\pi_h v(x) = \frac{1}{|\omega_x|} \int_{\omega_x} \tilde{v}_\ell(y) dy.$$

Ainsi on déduit

$$|\pi_h v(x)| \lesssim |\omega_x|^{-1/2} \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_x} \sim h_x^{-1} \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_x} \leq h_x^{-1} \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_x} + \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_x}.$$

Notons que si  $x$  appartient à la fissure et (ii) est vérifié alors il y a deux valeurs pour  $\pi_h v(x)$  : l'une correspondant à  $\pi_h v(x)$  sur  $\bar{\Omega}_1$  et l'autre correspondant à  $\pi_h v(x)$  sur  $\bar{\Omega}_2$ . On verra à l'étape 2 la détermination de  $\pi_h$  dans ce cas.

iii : *Nœuds de Dirichlet* : Si  $x \in \mathcal{N}_h^D$ , notons  $\Gamma_x = \omega_x \cap \Gamma_D$  (on rappelle que  $\bar{\Gamma}_F \cap \bar{\Gamma}_D = \emptyset$  pour simplifier) et on pose :

$$\pi_h v(x) = \frac{1}{|\Gamma_x|} \int_{\Gamma_x} v(y) d\Gamma.$$

Par une inégalité de trace mise à l'échelle (voir par exemple [103, 113]) :

$$\|v\|_E \lesssim h_E^{-1/2} \|v\|_T + h_E^{1/2} \|\nabla v\|_T, \quad \forall v \in H^1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h, \forall E \in \mathcal{E}_T, \quad (2.13)$$

on déduit

$$\begin{aligned} |\pi_h v(x)| &\lesssim |\Gamma_x|^{-1/2} \|v\|_{\Gamma_x} \sim h_x^{-1/2} \|v\|_{\Gamma_x} \lesssim h_x^{-1/2} (h_x^{-1/2} \|v\|_{\omega_x} + h_x^{1/2} \|\nabla v\|_{\omega_x}) \\ &\lesssim h_x^{-1} \|v\|_{\omega_x} + \|\nabla v\|_{\omega_x}. \end{aligned}$$

- Etape 2 : Définition de  $\pi_h v$  sur  $\Omega$ .

Avec les expressions nodales précédentes, on définit par interpolation linéaire la fonction  $\pi_h v$  sur chaque triangle sauf ceux coupés par la fissure.

### Remarque 2.3.2

Un triangle peut être totalement enrichi (i.e. ces trois nœuds sont enrichis) et ne pas être coupé par la fissure.

Si le triangle est coupé par la fissure alors il est soit enrichi (trois nœuds enrichis) ou partiellement enrichi (un ou deux nœuds enrichis) (voir Figure 1.2). La définition pour les triangles coupés par la fissure est donnée ci-dessous.

On considère en premier lieu un triangle totalement enrichi  $T$  avec par exemple  $x_1 \in \Omega_1$  et  $x_2, x_3 \in \Omega_2$ . Pour déterminer  $(\pi_h v)|_{\Omega_1 \cap T}$ , on écrit :

$$\tilde{\pi}_h^1 v(x) = \frac{1}{|\omega_x|} \int_{\omega_x} \tilde{v}_1(y) dy. \quad (2.14)$$

pour  $x = x_1, x_2, x_3$ . Alors  $\tilde{\pi}_h^1 v$  est défini par interpolation linéaire sur  $T$  et  $\pi_h v$  est défini sur  $T \cap \Omega_1$  comme la restriction de  $\tilde{\pi}_h^1 v$  à  $T \cap \Omega_1$ .

De même on définit  $(\pi_h v)|_{\Omega_2 \cap T}$  par la restriction sur  $T \cap \Omega_2$  de  $\tilde{\pi}_h^2 v$  définie pour  $x = x_1, x_2, x_3$  par :

$$\tilde{\pi}_h^2 v(x) = \frac{1}{|\omega_x|} \int_{\omega_x} \tilde{v}_2(y) dy. \quad (2.15)$$

Une construction similaire est accomplie pour les triangles partiellement enrichis : si un nœud  $x$  n'est pas enrichi alors on calcule la valeur de  $\pi_h v(x)$  au nœud et s'il est enrichi, on calcule les deux quantités (2.14) et (2.15) correspondant à  $\tilde{v}_1$  et  $\tilde{v}_2$  en ce nœud.

**Remarque 2.3.3**

De la construction précédente de  $\pi_h v$  et l'expression (2.12), on voit que :

$$\alpha_x(v) = \pi_h v(x) \quad \text{si } x \in \mathcal{N}_h \setminus \mathcal{N}_h^H.$$

Si  $x \in \mathcal{N}_h^H$ ,  $x \in \bar{\Omega}_k$  et en notant  $\ell = 3 - k$ , on obtient :

$$\alpha_x(v) + \beta_x(v)H(x) = \frac{1}{|\omega_x|} \int_{\omega_x} \tilde{v}_k(y) dy, \quad \text{et} \quad \alpha_x(v) - \beta_x(v)H(x) = \frac{1}{|\omega_x|} \int_{\omega_x} \tilde{v}_\ell(y) dy.$$

D'où

$$\alpha_x(v) = \frac{1}{2|\omega_x|} \int_{\omega_x} (\tilde{v}_k(y) + \tilde{v}_\ell(y)) dy, \quad \text{et} \quad \beta_x(v) = \frac{H(x)}{2|\omega_x|} \int_{\omega_x} (\tilde{v}_k(y) - \tilde{v}_\ell(y)) dy.$$

**2.3.2 Stabilité**

Maintenant on considère les propriétés de stabilité de notre opérateur sur les éléments généralisés :

**Lemme 2.3.1**

Pour tout  $v \in H^1(\Omega)$  et tout  $T \in T_h$  on a :

(i) Si aucun nœud de  $T$  n'est enrichi (ainsi la fissure ne partage pas  $T$ ) alors :

$$\|\pi_h v\|_T \lesssim \|v\|_{\omega_T} + h_T \|\nabla v\|_{\omega_T},$$

(ii) Si les trois nœuds de  $T$  sont enrichis, alors pour  $\ell = 1$  et  $\ell = 2$ , on obtient :

$$\|\pi_h v\|_{T \cap \Omega_\ell} \lesssim \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_T} + h_T \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_T},$$

(iii) Si un (ou deux nœuds) de  $T$  est enrichi et si  $\omega_T$  est coupé par la fissure ( $T \subset \bar{\Omega}_\ell$  pour  $\ell = 1$  ou  $\ell = 2$ ) on a :

$$\|\pi_h v\|_T \lesssim \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_T} + h_T \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_T},$$

(iv) Si un (ou deux nœuds) de  $T$  est enrichi et si  $\omega_T$  contient la pointe de fissure alors pour  $\ell = 1$  ou  $\ell = 2$ , on a :

$$\|\pi_h v\|_{T \cap \Omega_\ell} \lesssim \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_T} + \|v\|_{\omega_T} + h_T \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_T} + h_T \|\nabla v\|_{\omega_T}.$$

**Remarque 2.3.4**

Par régularité du maillage, il existe un nombre fini indépendant du maillage de triangles satisfaisant (iv) : plus précisément cet ensemble est contenu dans  $\omega_{T^*}$  où  $T^*$  est le triangle contenant la pointe de fissure (voir Figure 2.5). Quelques triangles de cet ensemble sont coupés par la fissure et les autres non.

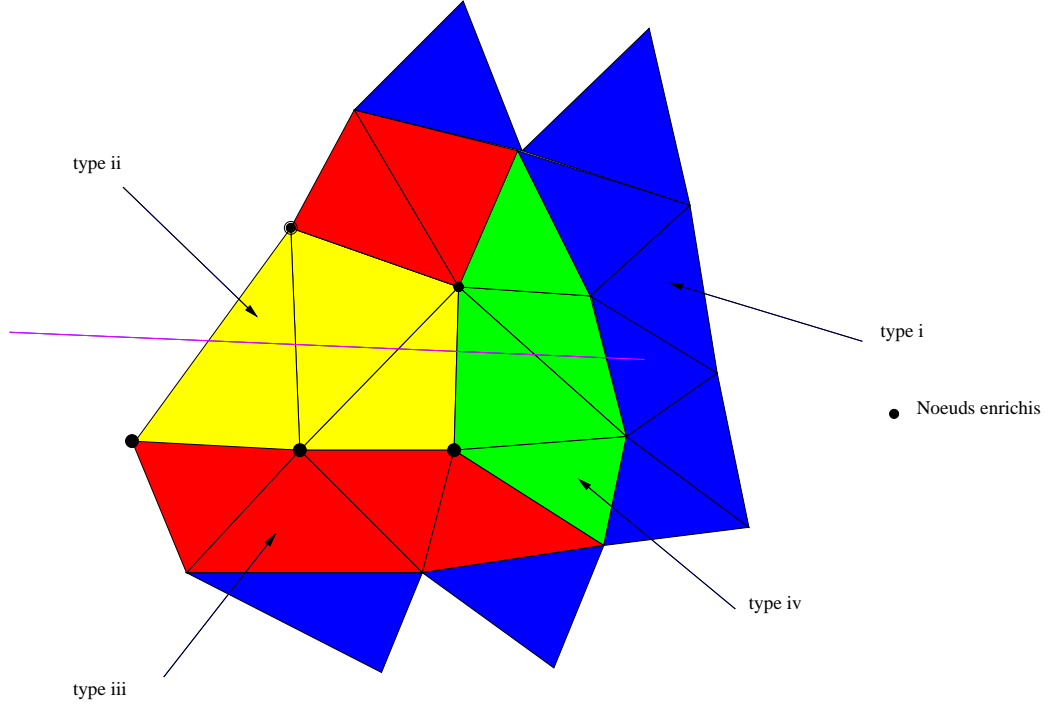


FIG. 2.5 – Les différentes configurations du Lemme 2.3.1

**Démonstration :** (i). Si aucun des nœuds n'est enrichi alors pour chacun des trois nœuds de  $T$ , on a :

$$|\pi_h v(x)| \lesssim h_x^{-1} \|v\|_{\omega_x} + \|\nabla v\|_{\omega_x}.$$

En écrivant  $\pi_h v = \sum_{x \in T} \pi_h v(x) \psi_x$  sur  $T$  et en utilisant le fait que  $\|\psi_x\|_T \sim h_T \sim h_x$ , le résultat découle.

(ii). Prenons par exemple  $\ell = 1$ . En notant que pour chacun des trois nœuds de  $T$ , on a

$$|\tilde{\pi}_h^1 v(x)| \lesssim h_x^{-1} \|\tilde{v}_1\|_{\omega_x} + \|\nabla \tilde{v}_1\|_{\omega_x},$$

et en se servant de la même estimation que dans (i), on aboutit au résultat. Le même résultat est valable lorsque  $\ell = 2$ .

(iii) et (iv). Ces estimations sont obtenues comme les précédentes. ■

Maintenant on considère les propriétés de stabilité de  $\pi_h$  sur les côtés des éléments généralisés non localisés sur la fissure.

**Lemme 2.3.2**

Pour tout  $v \in H^1(\Omega)$  et tout côté  $E$  d'un triangle  $T \in T_h$ , on a :

(i) Si les deux extrémités de  $E$  ne sont pas enrichies :

$$\|\pi_h v\|_E \lesssim h_E^{-1/2} \|v\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \|\nabla v\|_{\omega_E},$$

(ii) Si les deux extrémités de  $E$  sont enrichies alors pour  $\ell = 1$  ou  $\ell = 2$ , on obtient :

$$\|\pi_h v\|_{E \cap \tilde{\Omega}_\ell} \lesssim h_E^{-1/2} \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_E},$$

(iii) Si seulement une des extrémités de  $E$  est enrichie et si  $\omega_E$  est coupé par la fissure (ainsi  $E \subset \tilde{\Omega}_\ell$  pour  $\ell = 1$  ou  $\ell = 2$ ), on a :

$$\|\pi_h v\|_E \lesssim h_E^{-1/2} \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_E},$$

(iv) Si seulement une des extrémités de  $E$  est enrichie et si  $\omega_E$  contient la pointe de fissure alors pour  $\ell = 1$  ou  $\ell = 2$ , on obtient :

$$\|\pi_h v\|_{E \cap \tilde{\Omega}_\ell} \lesssim h_E^{-1/2} \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_E} + h_E^{-1/2} \|v\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \|\nabla v\|_{\omega_E}.$$

**Remarque 2.3.5**

Il y a un nombre fini indépendant du maillage de côtés satisfaisant (iv). Plus précisément tous ces côtés ont une extrémité appartenant au triangle contenant le bout de la fissure.

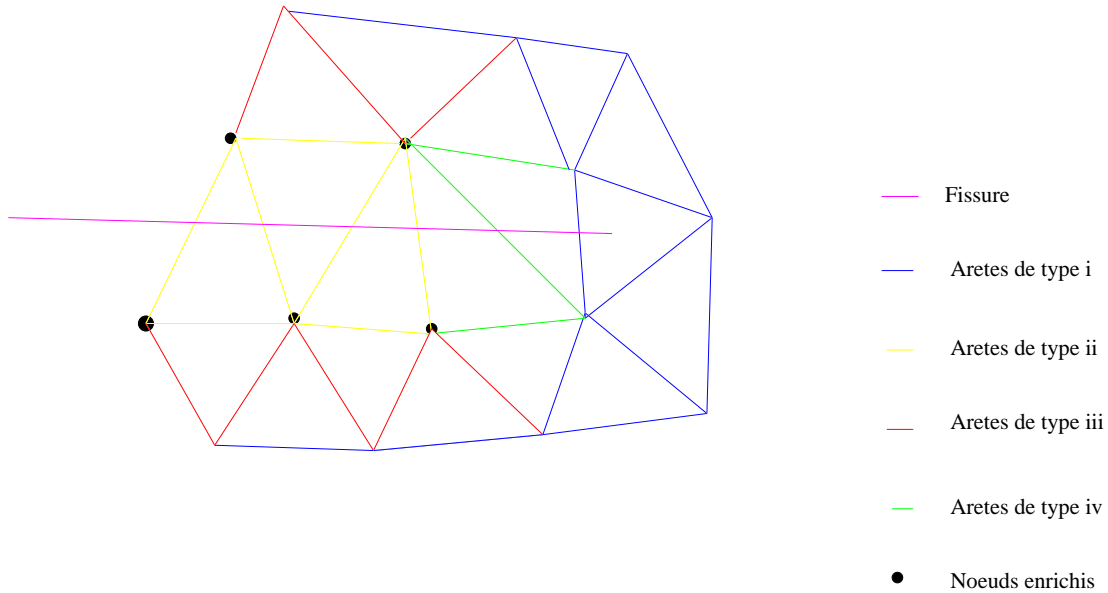


FIG. 2.6 – Les différentes configurations du Lemme 2.3.2

**Démonstration :** (i). Pour les deux extrémités de  $E$ , on a :

$$|\pi_h v(x)| \lesssim h_x^{-1} \|v\|_{\omega_x} + \|\nabla v\|_{\omega_x}.$$

En écrivant  $\pi_h v = \sum_{x \in E} \pi_h v(x) \psi_x$  et en utilisant  $\|\psi_x\|_E \sim h_E^{1/2}$ ,  $h_E \leq h_x$ , on aboutit au résultat.

(ii). On suppose d'abord que  $E$  appartient à  $\bar{\Omega}_\ell$ . Alors  $E \cap \bar{\Omega}_\ell = E$  et pour les deux sommets de  $E$ , on déduit :

$$|\tilde{\pi}_h^l v(x)| \lesssim h_x^{-1} \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_x} + \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_x}.$$

L'estimation est obtenue comme pour (i). Si  $E$  est coupée par la fissure, la discussion est la même avec  $E \cap \bar{\Omega}_\ell = E_1$ .

(iii) et (iv). Directe (voir (i) et (ii)). ■

Maintenant on étudie la stabilité de l'opérateur de quasi-interpolation  $\pi_h$  sur la fissure. On note par  $F_h \subset E_h$  l'ensemble des côtés vivant sur la fissure (ces côtés correspondent aux côtés des éléments généralisés sur la fissure).

### **Lemme 2.3.3**

Pour tout  $v \in H^1(\Omega)$  et tout côté  $F \in F_h$ , on a :

(i) Si  $F \subset T \in T_h$  où  $T$  est totalement enrichi alors pour  $\ell = 1$  et  $\ell = 2$ , on obtient :

$$\|(\pi_h v)|_{\Omega_\ell}\|_F \lesssim h_F^{1/2} h_T^{-1} \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_T} + h_F^{1/2} \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_T},$$

(ii) Si  $F \subset T \in T_h$  où  $T$  est partiellement enrichi, alors pour  $\ell = 1$  et  $\ell = 2$ , on a :

$$\|(\pi_h v)|_{\Omega_\ell}\|_F \lesssim h_F^{1/2} h_T^{-1} \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_T} + h_F^{1/2} \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_T} + h_F^{1/2} h_T^{-1} \|v\|_{\omega_T} + h_F^{1/2} \|\nabla v\|_{\omega_T},$$

(iii) Si  $F \subset T \in T_h$  avec la pointe de fissure contenue dans  $T$ , (alors  $(\pi_h v)|_{\Omega_1} = (\pi_h v)|_{\Omega_2}$  sur  $F$ ), on a :

$$\|\pi_h v\|_F \lesssim h_F^{1/2} h_T^{-1} \|v\|_{\omega_T} + h_F^{1/2} \|\nabla v\|_{\omega_T}.$$

**Démonstration :** (i), (ii) et (iii). On considère un côté  $F = (a, b)$  et on fixe  $\ell = 1$  ou  $\ell = 2$ .

Sur  $F$ , on a

$$(\pi_h v)|_{\Omega_\ell} = (\pi_h v)|_{\Omega_\ell}(a) \psi_a + (\pi_h v)|_{\Omega_\ell}(b) \psi_b,$$

où  $\psi_a$  et  $\psi_b$  sont les fonctions de base des côtés en  $a$  et  $b$ . Soit  $T = x_1 x_2 x_3 \in T_h$  le triangle contenant  $F$ . Comme  $(\pi_h v)|_{\Omega_\ell}$  est construit comme la restriction de l'extension affine sur  $T$ , alors  $(\pi_h v)|_{\Omega_\ell}(a)$  et  $(\pi_h v)|_{\Omega_\ell}(b)$  sont des combinaisons convexes de  $\tilde{\pi}_h^l v(x_i)$  et de  $\pi_h v(x_i)$  dépendant du fait que  $x_i$  soit enrichi ou non. On obtient soit :

$$|\tilde{\pi}_h^l v(x_i)| \lesssim h_{x_i}^{-1} \|\tilde{v}_\ell\|_{\omega_{x_i}} + \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_{x_i}},$$

soit

$$|\pi_h v(x_i)| \lesssim h_{x_i}^{-1} \|v\|_{\omega_{x_i}} + \|\nabla v\|_{\omega_{x_i}}.$$

Les résultats (i), (ii) et (iii) proviennent de  $\|\psi_a\|_F \sim \|\psi_b\|_F \sim h_F^{1/2}$ . ■

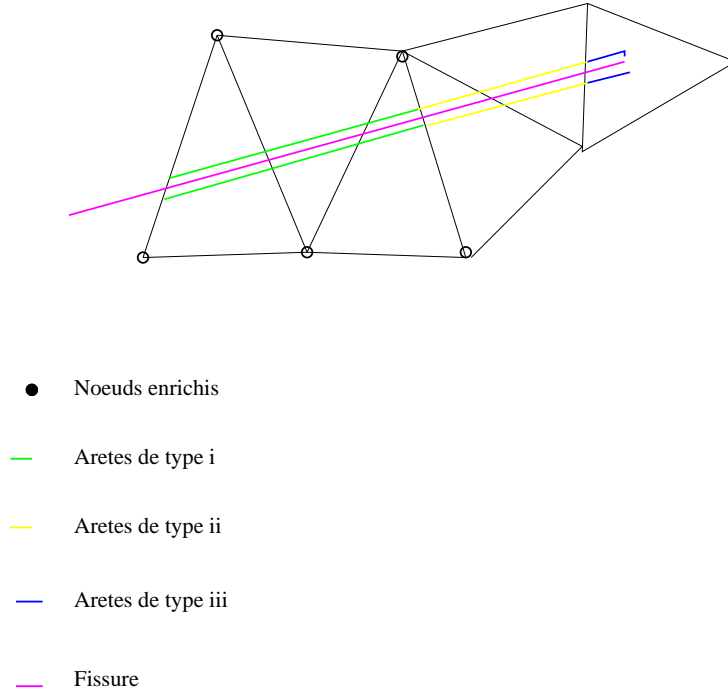


FIG. 2.7 – Les différentes configurations du Lemme 2.3.3

### 2.3.3 Estimations d'erreur

On considère désormais les estimations locales de l'erreur en norme  $L^2$ .

#### **Lemme 2.3.4**

Pour tout  $v \in H^1(\Omega)$  et tout  $T \in T_h$  on a :

(i) Si aucun des nœuds de  $T$  n'est enrichi alors

$$\|v - \pi_h v\|_T \lesssim h_T \|\nabla v\|_{\omega_T},$$

(ii) Si les trois nœuds de  $T$  sont enrichis alors pour  $\ell = 1$  ou  $\ell = 2$ , on a :

$$\|v - \pi_h v\|_{T \cap \Omega_\ell} \lesssim h_T \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_T},$$

(iii) Si un (ou deux nœuds) de  $T$  sont enrichis et si  $\omega_T$  est coupé par la fissure (alors  $T \subset \bar{\Omega}_\ell$  pour  $\ell = 1$  ou  $\ell = 2$ ), on a :

$$\|v - \pi_h v\|_T \lesssim h_T \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_T},$$

(iv) Si un (ou deux nœuds) de  $T$  est enrichi et si  $\omega_T$  contient la pointe de fissure alors pour  $\ell = 1$  ou  $\ell = 2$ , on obtient :

$$\|v - \pi_h v\|_{T \cap \Omega_\ell} \lesssim h_T \sqrt{-\ln(h_T)} (\|\nabla \tilde{v}_\ell\|_\Omega + \|\nabla v\|_\Omega).$$



**Démonstration :** En supposant que les fonctions constantes sont prolongées de l'autre côté de la fissure par les mêmes fonctions constantes,  $\pi_h$  préserve les fonctions constantes. Ainsi, pour tout  $v \in H^1(\Omega)$  et toute fonction constante  $c(x) = c$  on écrit :

$$v - \pi_h v = v - c - \pi_h(v - c).$$

(i) Dans ce cas

$$\|v - \pi_h v\|_T \leq \|v - c\|_{\omega_T} + \|\pi_h(v - c)\|_T \lesssim h_T \|\nabla v\|_{\omega_T},$$

en utilisant le Lemme 2.3.1(i) et en choisissant  $c = |\omega_T|^{-1} \int_{\omega_T} v(x) dx$  avec  $h_T \sim h_{\omega_T}$ .

En effet,

$$\begin{aligned} \|v - c\|_{\omega_T} &= \|\omega_T^{-1} \int_{\omega_T} (v(t) - v(x)) dx\|_{\omega_T} \\ &\leq |\omega_T|^{-1} \int_{\omega_T} \|(v(x + ah) - v(x))\|_{\omega_T} dx \\ &\leq |\omega_T|^{-1} \int_{\omega_T} \|\nabla v\|_{\omega_T} |a| h_{\omega_T} dx \\ &= \|\nabla v\|_{\omega_T} |a| h_{\omega_T} \end{aligned}$$

(ii) On écrit, pour toute fonction constante  $c$  :

$$\begin{aligned} \|v - \pi_h v\|_{T \cap \Omega_\ell} &\leq \|\tilde{v}_\ell - c\|_{\omega_T} + \|\pi_h(v - c)\|_{T \cap \Omega_\ell} \\ &\lesssim \|\tilde{v}_\ell - c\|_{\omega_T} + h_T \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_T} \\ &\lesssim h_T \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_T} \end{aligned}$$

où  $c = |\omega_T|^{-1} \int_{\omega_T} \tilde{v}_\ell(x) dx$  et on conclut comme pour (i) en utilisant le Lemme 2.3.1(ii).

(iii) Comme pour les cas précédents.

(iv) Cette estimation est obtenue en utilisant le Lemme 2.3.1(iv) et en choisissant  $c = |\omega_T|^{-1} \int_{\omega_T} \tilde{v}_\ell(x) dx$  :

$$\begin{aligned} \|v - \pi_h v\|_{T \cap \Omega_\ell} &\leq \|\tilde{v}_\ell - c\|_{\omega_T} + \|\pi_h(v - c)\|_{T \cap \Omega_\ell} \\ &\lesssim \|\tilde{v}_\ell - c\|_{\omega_T} + \|v - c\|_{\omega_T} + h_T \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_T} + h_T \|\nabla v\|_{\omega_T} \\ &\lesssim \|\tilde{v}_\ell - v\|_{\omega_T} + h_T \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_T} + h_T \|\nabla v\|_{\omega_T}. \end{aligned}$$

De plus, en notant  $1_X$  la fonction indicatrice de l'ensemble  $X$ , on a

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}_\ell - v\|_{\omega_T} &= \|(\tilde{v}_\ell - v) 1_{\omega_T}\|_{\Omega} \\ &\leq \|\tilde{v}_\ell - v\|_{L^q(\Omega)} \|1_{\omega_T}\|_{L^{\frac{2q}{q-2}}(\Omega)} \\ &\lesssim h_T^{1-\frac{2}{q}} \|\tilde{v}_\ell - v\|_{L^q(\Omega)} \\ &\lesssim q^{\frac{1}{2}} h_T^{1-\frac{2}{q}} \|\tilde{v}_\ell - v\|_{1,\Omega} \\ &\lesssim q^{\frac{1}{2}} h_T^{1-\frac{2}{q}} \|\nabla(\tilde{v}_\ell - v)\|_{\Omega} \\ &\lesssim q^{\frac{1}{2}} h_T^{1-\frac{2}{q}} (\|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\Omega} + \|\nabla v\|_{\Omega}) \end{aligned}$$

où  $2 < q < \infty$  et l'inégalité de Sobolev  $\|w\|_{L^q(\Omega)} \leq Cq^{1/2} \|w\|_{1,\Omega}$  a été utilisée, voir [95].

Par minimisation de la fonction  $f(x) = x^{\frac{1}{2}} h_T^{1-\frac{2}{x}}$ , on choisit  $q = -\ln(h_T)$  et on obtient finalement l'estimation. ■

**Lemme 2.3.5**

Pour tout  $v \in H^1(\Omega)$  et tout côté  $E$  d'un triangle  $T \in T_h$  on a :

(i) Si deux des extrémités de  $E$  ne sont pas enrichies :

$$\|v - \pi_h v\|_E \lesssim h_E^{1/2} \|\nabla v\|_{\omega_E},$$

(ii) Si deux des extrémités de  $E$  sont enrichies alors pour  $\ell = 1$  ou  $\ell = 2$ , on a :

$$\|v - \pi_h v\|_{E \cap \bar{\Omega}_\ell} \lesssim h_E^{1/2} \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_E},$$

(iii) Si seulement un des deux sommets de  $E$  est enrichi et si  $\omega_E$  est coupé par la fissure (ainsi  $E \subset \bar{\Omega}_\ell$  pour  $\ell = 1$  ou  $\ell = 2$ ), on a :

$$\|v - \pi_h v\|_E \lesssim h_E^{1/2} \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_E},$$

(iv) Si seulement une des extrémités de  $E$  est enrichie et si  $\omega_E$  contient la pointe de fissure alors pour  $\ell = 1$  ou  $\ell = 2$ , on a :

$$\|v - \pi_h v\|_{E \cap \bar{\Omega}_\ell} \lesssim h_E^{1/2} \sqrt{-\ln(h_E)} (\|\nabla \tilde{v}_\ell\|_\Omega + \|\nabla v\|_\Omega).$$

**Démonstration :** (i) Comme  $\pi_h$  préserve les fonctions constantes, on a pour tout  $v \in H^1(\Omega)$  et toute fonction constante  $c(x) = c : v - \pi_h v = v - c - \pi_h(v - c)$ . Ainsi par l'inégalité de trace mise à l'échelle (2.13) et le Lemme 2.3.2(i), on obtient

$$\|v - \pi_h v\|_E \leq \|v - c\|_E + \|\pi_h(v - c)\|_E \lesssim h_E^{-1/2} \|v - c\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \|\nabla v\|_{\omega_E},$$

et on choisit  $c = |\omega_E|^{-1} \int_{\omega_E} v(x) dx$  avec  $h_E \sim h_{\omega_E}$ .

(ii, iii) Comme dans le cas précédent avec  $c = |\omega_E|^{-1} \int_{\omega_E} \tilde{v}_\ell(x) dx$ .

(iv) L'estimation est obtenue en utilisant le Lemme 2.3.2(iv) et en choisissant  $c = |\omega_E|^{-1} \int_{\omega_E} \tilde{v}_\ell(x) dx$ . On effectue les mêmes calculs que dans le Lemme 2.3.4(iv) :

$$\begin{aligned} \|v - \pi_h v\|_{E \cap \bar{\Omega}_\ell} &\leq \|\tilde{v}_\ell - c\|_E + \|\pi_h(v - c)\|_{E \cap \bar{\Omega}_\ell} \\ &\lesssim h_E^{-1/2} \|\tilde{v}_\ell - c\|_{\omega_E} + h_E^{-1/2} \|v - c\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \|\nabla v\|_{\omega_E} \\ &\lesssim h_E^{-1/2} \|\tilde{v}_\ell - v\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \|\nabla v\|_{\omega_E} \\ &\lesssim h_E^{1/2} \sqrt{-\ln(h_E)} (\|\nabla \tilde{v}_\ell\|_\Omega + \|\nabla v\|_\Omega). \end{aligned}$$

■

Le prochain lemme consiste à estimer l'erreur commise par l'opérateur moyenné sur les côtés des éléments généralisés localisés sur la fissure. L'ensemble de ces côtés est noté  $F_h$ .

**Lemme 2.3.6**

Pour tout  $v \in H^1(\Omega)$  et tout côté  $F \in F_h$ , on a :

(i) Si  $F \subset T \in T_h$  où  $T$  est totalement enrichi, alors pour  $\ell = 1$  et  $\ell = 2$ , on a :

$$\|(v - \pi_h v)|_{\Omega_\ell}\|_F \lesssim h_T^{1/2} \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_T},$$

(ii) Si  $F \subset T \in T_h$  où  $T$  est partiellement enrichi, alors pour  $\ell = 1$  et  $\ell = 2$ , on a :

$$\|(v - \pi_h v)|_{\Omega_\ell}\|_F \lesssim h_T^{1/2} \sqrt{-\ln(h_T)} (\|\nabla \tilde{v}_\ell\|_\Omega + \|\nabla v\|_\Omega),$$

(iii) Si  $F \subset T \in T_h$  où la pointe de fissure se situe dans l'intérieur de  $T$ , (alors  $(\pi_h v)|_{\Omega_1} = (\pi_h v)|_{\Omega_2}$  sur  $F$ ), on a :

$$\|v|_{\Omega_\ell} - \pi_h v\|_F \lesssim h_T^{1/2} \|\nabla v\|_{\omega_T}.$$

**Démonstration :** (i) Comme  $\pi_h$  préserve les fonctions constantes, on obtient pour tout  $v \in H^1(\Omega)$  et toute fonction constante  $c(x) = c : v - \pi_h v = v - c - \pi_h(v - c)$ . Par l'inégalité de trace mise à l'échelle généralisée (voir [103, 113]) :

$$\|w\|_F \lesssim h_T^{-1/2} \|w\|_T + h_T^{1/2} \|\nabla w\|_T,$$

et le Lemme 2.3.3, on obtient

$$\begin{aligned} \|(v - \pi_h v)|_{\Omega_\ell}\|_F &\leq \|\tilde{v}_\ell - c\|_F + \|\pi_h(\tilde{v}_\ell - c)\|_F \\ &\lesssim h_T^{-1/2} \|\tilde{v}_\ell - c\|_T + h_T^{1/2} \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_T + h_F^{1/2} h_T^{-1} \|\tilde{v}_\ell - c\|_{\omega_T} + h_F^{1/2} \|\nabla \tilde{v}_\ell\|_{\omega_T}. \end{aligned}$$

D'où la conclusion avec  $c = |\omega_T|^{-1} \int_{\omega_T} \tilde{v}_\ell(x) dx$ . La preuve de (ii) et (iii) est la même que précédemment. ■

Ayant défini et analysé l'opérateur de quasi-interpolation  $\pi_h : X \rightarrow X_h$  dans le cas scalaire, l'extension au cas vectoriel est immédiat en définissant

$$\boldsymbol{\pi}_h^* v : \mathbf{V} = X \times X \rightarrow X_h \times X_h$$

tel que pour tout  $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in X \times X$  on ait  $\boldsymbol{\pi}_h^* v = (\pi_h v_1, \pi_h v_2)$ . Bien sûr les estimations d'erreur des Lemmes 2.3.4, 2.3.5 et 2.3.6 sont encore valables pour  $\boldsymbol{\pi}_h^*$ .

## 2.4 Estimations d'erreur

### 2.4.1 Estimations a priori

Une estimation d'erreur a priori quasi optimale a été montrée [61, 62] : les auteurs ont obtenu une convergence d'ordre  $h$  sous la régularité  $(H^{2+\varepsilon}(\Omega))^2$  pour  $\mathbf{u} - \chi \mathbf{u}_s$ . Plus récemment, une estimation d'erreur a priori optimale a été obtenue dans [63] pour la méthode XFEM avec une fonction cut-off  $\chi$ , pour  $d = 1$  ou  $d = 2$  :

**Théorème 2.4.1**

Soient  $u$  la solution de (2.3) (respectivement (2.4)) et  $u_h$  solution de (2.7) (respectivement (2.9)). Sous la régularité  $(H^2(\Omega))^d$  pour  $u - \chi u_s$ , on a :

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \lesssim h \|u - \chi u_s\|_{2,\Omega}.$$

Ceux-ci ont également montré une estimation a priori pour la méthode XFEM avec surface d'enrichissement :

**Théorème 2.4.2**

Soient  $u$  solution de (2.3) (respectivement 2.4) telle que  $u - u_s \in (H^2(\Omega))^d$  et  $u_h$  solution de (2.7) (respectivement 2.9). L'estimation suivante a lieu pour  $R$  un rayon fixe indépendant du paramètre de maillage :

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \lesssim h (\|u - u_s\|_{2,\Omega} + \|u_s\|_{1,\Omega} + \|u_s\|_{2,\Omega \setminus B(x^*, R/2)}).$$

Notons qu'en utilisant une méthode classique par éléments finis, on obtient un taux de convergence de seulement  $h^{1/2-\epsilon}$  car  $\mathbf{u}$  appartient à  $(H^{3/2-\epsilon}(\Omega))^2$ .

De plus, l'influence du rayon de la fonction cut-off a été comparée sur plusieurs situations dans la Figure 2.8. Le taux de convergence est faiblement modifié et le niveau d'erreur est influencé par la zone de transition de l'enrichissement. Ceci est dû à la norme  $H^2$  de la fonction cut-off. Pour les résultats numériques, on choisira donc  $r_0 = 0.01$  et  $r_1 = 0.49$ .

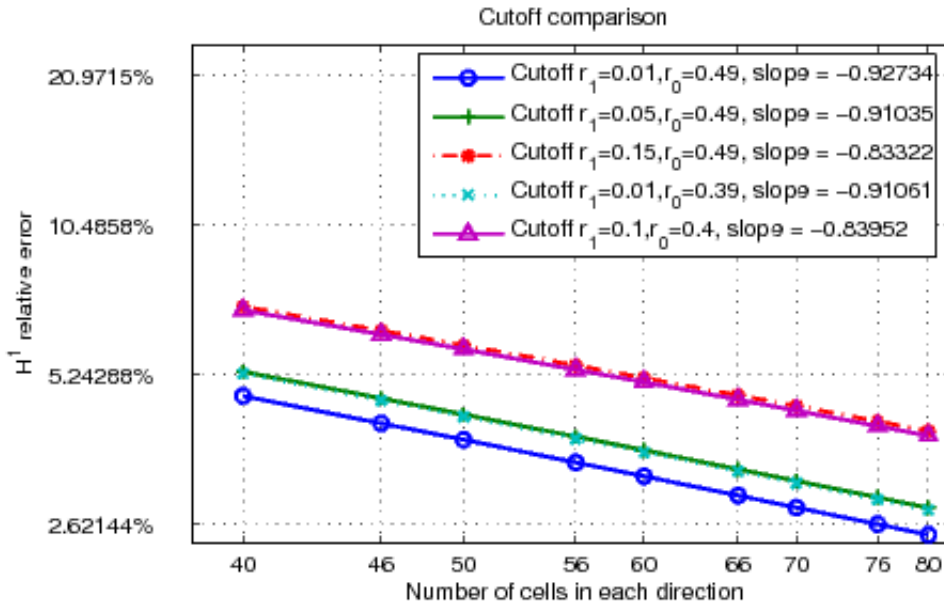


FIG. 2.8 – Influence du rayon de la fonction cut-off pour le mode I [60]

## 2.4.2 Estimations a posteriori

### Définition de l'estimateur par résidu

En écrivant  $u_h = u_{h,r} + \chi u_{h,s}$  comme dans (2.8) et (2.9), le résidu exact par élément est défini par :

$$R_G = f + \Delta u_h = f + \Delta(\chi u_{h,s}) = f + c\Delta(\chi r^{1/2} \sin(\theta/2)) \quad \text{pour le problème de Poisson}$$

$$R_G = \mathbf{f} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) = \mathbf{f} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\chi \mathbf{u}_{h,s}) \quad \text{pour l'élasticité}$$

sur chaque élément généralisé  $G \in G_h$ . Comme  $\Delta(r^{1/2} \sin(\theta/2)) = 0$  (respectivement  $\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_{h,s}) = 0$ ), on déduit que l'expression  $\Delta(\chi r^{1/2} \sin(\theta/2))$  (respectivement  $\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\chi \mathbf{u}_{h,s})$ ) disparaît sauf sur les éléments (éloignés de la pointe de fissure) ayant une intersection non vide avec l'anneau où  $\chi$  varie entre 0 et 1.

#### Définition 2.4.1 (*Estimateur d'erreur résiduel pour le problème de Laplace*)

Soit  $G \in G_h$  et  $T \in T_h$  le triangle contenant  $G$ . Les estimateurs d'erreur locaux et global sont définis par

$$\begin{aligned} \eta_{1G} &= h_T C(h_T) \|f + \Delta(\chi u_{h,s})\|_G, \\ \eta_{2G} &= h_T^{1/2} D(h_T) \left( \sum_{E \in E_G^{int} \cup E_G^N \cup E_G^F} \|[\partial u_h / \partial \mathbf{n}]_E\|_E^2 \right)^{1/2}, \\ \eta_G &= (\eta_{1G}^2 + \eta_{2G}^2)^{1/2}, \quad \eta = \left( \sum_{G \in G_h} \eta_G^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

où  $C(h_T) = \sqrt{-\ln(h_T)}$  pour les éléments du cas (iv) du Lemme 2.3.4, sinon  $C(h_T) = 1$  et  $D(h_T) = \sqrt{-\ln(h_T)}$  pour les éléments du cas (iv) du Lemme 2.3.5 ou du cas (ii) du Lemme 2.3.6, sinon  $D(h_T) = 1$ .

#### Définition 2.4.2 (*Estimateur d'erreur résiduel pour le problème d'élasticité*)

Soit  $G \in G_h$  et  $T \in T_h$  un triangle contenant  $G$ . Les estimateurs résiduels locaux et global sont définis par :

$$\begin{aligned} \eta_{1G} &= h_T C(h_T) \|\mathbf{f} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\chi \mathbf{u}_{h,s})\|_G, \\ \eta_{2G} &= h_T^{1/2} D(h_T) \left( \sum_{E \in E_G^{int} \cup E_G^N \cup E_G^F} \|[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \mathbf{n}]_E\|_E^2 \right)^{1/2}, \\ \eta_G &= (\eta_{1G}^2 + \eta_{2G}^2)^{1/2}, \quad \eta = \left( \sum_{G \in G_h} \eta_G^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

où  $C(h_T) = \sqrt{-\ln(h_T)}$  pour les éléments du cas (iv) du Lemme 2.3.4, sinon  $C(h_T) = 1$  et  $D(h_T) = \sqrt{-\ln(h_T)}$  pour les éléments du cas (iv) du Lemme 2.3.5 ou du cas (ii) du Lemme 2.3.6, sinon  $D(h_T) = 1$ .

### Remarque 2.4.1

On obtient le résidu exact par élément  $\|\mathbf{f} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\chi \mathbf{u}_{h,s})\|_G$  qui mesure la non vérification de l'équation d'équilibre intérieure :

```
for (unsigned ii=0; ii < pail->nb_points_on_convex(); ++ii) {
  base_small_vector res = sol_f(pail->point(ii));
  ctx1.set_xref(pail->point(ii));
  pfl->interpolation_hess(ctx1, coeff1, hess1, dim_type(qdim));
  for (size_type i = 0; i < N; ++i)
    for (size_type j = 0; j < N; ++j)
      res[i] += (lambda + zeta) * hess1(j, i*N+j) + zeta * hess1(i, j*N+j);
  ERR[cv] += radius*radius*ctx1.J()*pail->coeff(ii)*ctx1.J()*pail->coeff(ii)*gmm::
    vect_norm2_sqr(res);
}
```

où l'on a utilisé l'expression suivante pour l'équation d'équilibre pour  $i = 1, 2$  :

$$(\lambda + \zeta) \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{div} \mathbf{u}) + \zeta \Delta u_i + f_i = 0$$

D'autre part on a le terme de résidu de bord  $\|[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\mathbf{n}]_E\|_E^2$  : s'il vaut  $[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\mathbf{n}]_E$ ,  $\forall E \in E_G^{int}$ , il mesure la discontinuité du vecteur contraintes dans la direction  $\mathbf{n}_E$  à l'interface entre deux éléments :

```
for (short_type f1=0; f1 < mesh.structure_of_convex(cv)->nb_faces(); ++f1) {
  if (gmm::abs(mmls(mesh.trans_of_convex(cv)->convex_ref()->points_of_face(f1)[0])) < 1E-7
    * radius) continue;
  for (unsigned ii=0; ii < pail->nb_points_on_face(f1); ++ii) {

    ctx1.set_xref(pail->point_on_face(f1, ii));
    gmm::mult(ctx1.B(), pgt1->normals()[f1], up);
    scalar_type norm = gmm::vect_norm2(up);
    up /= norm;
    scalar_type coefficient = pail->coeff_on_face(f1, ii) * ctx1.J()* norm;
    pfl->interpolation_grad(ctx1, coeff1, grad1, dim_type(qdim));
    gmm::copy(grad1, E); gmm::add(gmm::transposed(grad1), E);
    gmm::scale(E, 0.5);
    scalar_type trace = gmm::mat_trace(E);
    gmm::copy(gmm::identity_matrix(), S1);
    gmm::scale(S1, lambda * trace);
    gmm::add(gmm::scaled(E, 2*mu), S1);

    ctx2.set_xref(xref2);
    pfl->interpolation_grad(ctx2, coeff2, grad2, dim_type(qdim));
    gmm::copy(grad2, E); gmm::add(gmm::transposed(grad2), E);
    gmm::scale(E, 0.5);
    trace = gmm::mat_trace(E);
    gmm::copy(gmm::identity_matrix(), S2);
    gmm::scale(S2, lambda * trace);
    gmm::add(gmm::scaled(E, 2*mu), S2);
    gmm::mult(S1, up, jump);
    gmm::mult_add(S2, gmm::scaled(up, -1.0), jump);
    ERR[cv] += radius*coefficient*coefficient*gmm::vect_norm2_sqr(jump);
  }
}
```

et s'il vaut  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\mathbf{n}$ ,  $\forall E \in E_G^N \cup E_G^F$ , il mesure la non vérification des conditions d'équilibre sur le bord.

```
for (unsigned ii=0; ii < pai_crack->nb_points(); ++ii) {
  ctx1.set_xref(pai_crack->point(ii));
  mmls.grad(pai_crack->point(ii), gradls);
  gradls /= gmm::vect_norm2(gradls);
  gmm::mult(ctx1.B(), gradls, up);
  scalar_type norm = gmm::vect_norm2(up);
  up /= norm;
  scalar_type coefficient = pai_crack->coeff(ii)*ctx1.J();

  for (scalar_type e = -1.0; e < 2.0; e += 2.0) {
    base_node ptref = pai_crack->point(ii) + e * 1.0E-7 * gradls;
    if (pgt1->convex_ref()->is_in(ptref) > 0.) continue;
    ctx1.set_xref(ptref);
  }
}
```

```

pfl->interpolation_grad(ctx1, coeff1, grad1, dim_type(qdim));
gmm::copy(grad1, E); gmm::add(gmm::transposed(grad1), E);
gmm::scale(E, 0.5);
scalar_type trace = gmm::mat_trace(E);
gmm::copy(gmm::identity_matrix(), S1);
gmm::scale(S1, lambda * trace);
gmm::add(gmm::scaled(E, 2*mu), S1);
gmm::mult(S1, up, jump);
ERR[cv] +=radius*coefficient*coefficient*gmm::vect_norm2_sqr(jump);

```

Dans ces derniers programmes, on a utilisé la loi de Hooke définie en (2.29) ainsi que les transformations des calculs d'intégration et de dérivation par rapport à l'élément de référence.

### Remarque 2.4.2

La présence des termes en  $\ln(h_T)$  dans l'estimateur est valable que pour un nombre fini (indépendant du maillage) d'éléments proche de la pointe de fissure. D'un point de vue numérique, ces termes en  $\ln(h_T)$  sont négligeables. Dans le cas de la méthode standard des éléments finis avec le maillage coïncidant avec la fissure, on a  $G_h = T_h$  et  $G = T$  (évidemment la méthode XFEM n'est pas une généralisation de la méthode standard par éléments finis pour les maillages non coïncidants avec la fissure). Dans le cas des maillages coïncidant avec la fissure, on voit que les termes en  $\ln(h_T)$  disparaissent (i.e.,  $C(h_T) = D(h_T) = 1$ ) et on retrouve l'estimateur résiduel classique (voir par exemple [36, 231]).

## Borne supérieure

### Théorème 2.4.3

Soit  $u \in V$  la solution de (2.3) (respectivement (2.4)) et soit  $u_h \in V_h$  la solution de (2.7) (respectivement (2.9)). Alors

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \lesssim \eta.$$

**Démonstration :** • Démarrons la preuve pour le problème de Poisson :

En notant l'erreur :

$$e = u - u_h,$$

on a, d'après (2.3) et (2.7) :

$$\begin{aligned}
\|\nabla e\|_{\Omega}^2 &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(u - u_h) - \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla(u - u_h) \\
&= \int_{\Omega} f(u - u_h) - \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla(u - u_h) \\
&= \int_{\Omega} f(u - v_h) - \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla(u - v_h), \quad \forall v_h \in V_h.
\end{aligned}$$

En partageant les intégrales sur chaque élément généralisé  $G \in G_h$  et en écrivant  $u_h = u_{h,r} + \chi u_{h,s}$ , on aboutit à

$$\begin{aligned}
 \|\nabla e\|_{\Omega}^2 &= \sum_{G \in G_h} \int_G f(u - v_h) \\
 &\quad - \sum_{G \in G_h} \int_G \nabla u_{h,r} \cdot \nabla(u - v_h) - \sum_{G \in G_h} \int_G \nabla(\chi u_{h,s}) \cdot \nabla(u - v_h) \\
 &= \sum_{G \in G_h} \int_G (f + \Delta(\chi u_{h,s}))(u - v_h) - \sum_{E \in E_h^{int}} \int_E \llbracket \partial u_{h,r} / \partial \mathbf{n}_E \rrbracket_E (u - v_h) \\
 &\quad - \sum_{E \in E_h^N \cup E_h^F} \int_E \frac{\partial u_h}{\partial \mathbf{n}}(u - v_h), \quad \forall v_h \in V_h,
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

où l'on a utilisé la formule de Green sur chaque élément généralisé (remarquons que bien que le triangle contenant la pointe de fissure ait un bord non Lipschitz, on peut le diviser en deux parties en utilisant l'extension rectiligne de la fissure et utiliser séparément la formule de Green sur chaque partie, voir Annexe B pour une autre preuve) et le fait que  $\Delta u_{h,r} = 0$  sur  $G$  et  $\llbracket \partial(\chi u_{h,s}) / \partial \mathbf{n} \rrbracket_E = 0$  pour tout  $E \in E_h^{int}$ .

A cette étape, on fixe le choix de  $v_h$ . On pose

$$v_h = u_h + \pi_h(u - u_h).$$

On considère (2.16) : avec le choix figurant ci-dessus, on peut estimer chaque terme de droite de l'expression précédente. L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne

$$\sum_{G \in G_h} \int_G (f + \Delta(\chi u_{h,s}))(u - v_h) \leq \sum_{G \in G_h} \|f + \Delta(\chi u_{h,s})\|_G \|u - v_h\|_G.$$

Il reste alors à estimer  $\|u - v_h\|_G$  pour tout élément généralisé  $G$ . Soit  $T \in T_h$  le triangle contenant  $G$ . En utilisant le Lemme 2.3.4, on obtient pour les triangles considérés dans les cas (i)–(iii) :

$$\|u - v_h\|_G = \|e - \pi_h e\|_G \lesssim h_T \|\nabla e\|_{\omega_T} \tag{2.17}$$

ou

$$\|u - v_h\|_G = \|e - \pi_h e\|_G \lesssim h_T \|\nabla \tilde{e}\|_{\omega_T}, \tag{2.18}$$

où  $\tilde{e}$  est une extension de l'erreur le long de la fissure (voir (2.10), (2.11)). Si  $T$  appartient à l'ensemble fini des triangles du cas (iv) du Lemme 2.3.4, on a

$$\|u - v_h\|_G = \|e - \pi_h e\|_G \lesssim h_T \sqrt{-\ln(h_T)} (\|\nabla \tilde{e}\|_{\Omega} + \|\nabla e\|_{\Omega}). \tag{2.19}$$

Ainsi, dépendant des cas (i)–(iv) du Lemme 2.3.4 et en utilisant les estimations (2.17)–(2.19), on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 &\sum_{G \in G_h} \int_G (f + \Delta(\chi u_{h,s}))(u - v_h) \\
 &\lesssim \left( \sum_{G \in G_h, \text{cas}(i)-(iii)} h_T^2 \|f + \Delta(\chi u_{h,s})\|_G^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{G \in G_h, \text{cas}(i)-(iii)} (\|\nabla \tilde{e}\|_{\omega_T} + \|\nabla e\|_{\omega_T})^2 \right)^{1/2} \\
 &\quad + \left( \sum_{G \in G_h, \text{cas}(iv)} h_T^2 (-\ln(h_T)) \|f + \Delta(\chi u_{h,s})\|_G^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{G \in G_h, \text{cas}(iv)} (\|\nabla \tilde{e}\|_{\Omega} + \|\nabla e\|_{\Omega})^2 \right)^{1/2} \\
 &\lesssim \eta \|\nabla e\|_{\Omega}.
 \end{aligned} \tag{2.20}$$



Maintenant on s'occupe de l'estimation des termes restants : comme précédemment on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz d'où

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{E \in E_h^{int}} \int_E \llbracket \partial u_{h,r} / \partial \mathbf{n}_E \rrbracket (u - v_h) - \sum_{E \in E_h^N \cup E_h^F} \int_E \frac{\partial u_h}{\partial \mathbf{n}} (u - v_h) \\
 = & - \sum_{E \in E_h^N \cup E_h^{int} \cup E_h^F} \int_E \llbracket \partial u_h / \partial \mathbf{n} \rrbracket (e - \pi_h e) \\
 \leq & \sum_{E \in E_h^N \cup E_h^{int} \cup E_h^F} \|\llbracket \partial u_h / \partial \mathbf{n} \rrbracket\|_E \|e - \pi_h e\|_E. \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

En utilisant les Lemmes 2.3.5(i,ii,iii) et 2.3.6(i,iii) et en notant  $T \in T_h$  un triangle contenant  $E$ , on obtient

$$\|e - \pi_h e\|_E \lesssim h_T^{1/2} (\|\nabla \tilde{e}\|_{\omega_T} + \|\nabla e\|_{\omega_T}). \tag{2.22}$$

Si  $E$  appartient au nombre fini de triangles étudiés dans le Lemme 2.3.5(iv) ou dans le Lemme 2.3.6(ii), on a

$$\|e - \pi_h e\|_E \lesssim h_T^{1/2} \sqrt{-\ln(h_T)} (\|\nabla \tilde{e}\|_{\Omega} + \|\nabla e\|_{\Omega}). \tag{2.23}$$

En regroupant les estimations (2.22), (2.23), (2.21) et (2.20), on termine la preuve.

• Pour la preuve pour le problème d'élasticité, on procède comme suit :  
on a, d'après (2.4), (2.9) et l'inégalité de Korn :

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{e}\|_{1,\Omega}^2 & \lesssim \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \\
 & = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \\
 & = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h.
 \end{aligned}$$

En découpant les intégrales sur chaque élément généralisé  $G \in G_h$  et en écrivant  $\mathbf{u}_h = \mathbf{u}_{h,r} + \chi \mathbf{u}_{h,s}$ , on aboutit à :

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{e}\|_{1,\Omega}^2 & \lesssim \sum_{G \in G_h} \int_G \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \\
 & \quad - \sum_{G \in G_h} \int_G \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_{h,r}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) - \sum_{G \in G_h} \int_G \boldsymbol{\sigma}(\chi \mathbf{u}_{h,s}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \\
 = & \sum_{G \in G_h} \int_G (\mathbf{f} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\chi \mathbf{u}_{h,s})) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) - \sum_{E \in E_h^{int}} \int_E \llbracket \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_{h,r}) \mathbf{n}_E \rrbracket \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \\
 & \quad - \sum_{E \in E_h^N \cup E_h^F} \int_E \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \tag{2.24}
 \end{aligned}$$

où on a utilisé la formule de Green sur chaque élément généralisé avec  $\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_{h,r}) = \mathbf{0}$  sur  $G$  et  $\llbracket \boldsymbol{\sigma}(\chi \mathbf{u}_{h,s}) \mathbf{n}_E \rrbracket = \mathbf{0}$  pour tout  $E \in E_h^{int}$ .

On pose  $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h + \boldsymbol{\pi}_h^*(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)$ . On considère (2.24) et pour le premier terme, l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne :

$$\sum_{G \in G_h} \int_G (\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\chi \mathbf{u}_{h,s})) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \leq \sum_{G \in G_h} \|\mathbf{f} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\chi \mathbf{u}_{h,s})\|_G \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_G.$$

En procédant comme pour le problème de Poisson, suivant les cas (i)–(iv) du Lemme 2.3.4 on peut écrire :

$$\begin{aligned} & \sum_{G \in G_h} \int_G (\mathbf{f} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\chi \mathbf{u}_{h,s})) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \\ & \lesssim \left( \sum_{G \in G_h, \text{cas}(i)-(iii)} h_T^2 \|\mathbf{f} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\chi \mathbf{u}_{h,s})\|_G^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{G \in G_h, \text{cas}(i)-(iii)} (\|\tilde{\mathbf{e}}\|_{1, \omega_T} + \|\mathbf{e}\|_{1, \omega_T})^2 \right)^{1/2} \\ & \quad + \left( \sum_{G \in G_h, \text{cas}(iv)} h_T^2 (-\ln(h_T)) \|\mathbf{f} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\chi \mathbf{u}_{h,s})\|_G^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{G \in G_h, \text{cas}(iv)} (\|\tilde{\mathbf{e}}\|_{1, \Omega} + \|\mathbf{e}\|_{1, \Omega})^2 \right)^{1/2} \\ & \lesssim \eta \|\mathbf{e}\|_{1, \Omega}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

L'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les termes restants mène à

$$\begin{aligned} & - \sum_{E \in E_h^{int}} \int_E [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_{h,r}) \mathbf{n}_E]_E \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) - \sum_{E \in E_h^N \cup E_h^F} \int_E \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \\ & = - \sum_{E \in E_h^N \cup E_h^{int} \cup E_h^F} \int_E [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \mathbf{n}]_E \cdot (\mathbf{e} - \boldsymbol{\pi}_h^* \mathbf{e}) \\ & \leq \sum_{E \in E_h^N \cup E_h^{int} \cup E_h^F} \|[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \mathbf{n}]_E\|_E \|\mathbf{e} - \boldsymbol{\pi}_h^* \mathbf{e}\|_E. \end{aligned} \tag{2.26}$$

En utilisant les Lemmes 2.3.5(i,ii,iii) et 2.3.6(i,iii) puis en notant par  $T \in \mathcal{T}_h$  un triangle contenant  $E$ , on obtient

$$\|\mathbf{e} - \boldsymbol{\pi}_h^* \mathbf{e}\|_E \lesssim h_T^{1/2} (\|\tilde{\mathbf{e}}\|_{1, \omega_T} + \|\mathbf{e}\|_{1, \omega_T}). \tag{2.27}$$

Si  $E$  appartient à l'ensemble fini des triangles du Lemme 2.3.5(iv) ou du Lemme 2.3.6(ii), on déduit

$$\|\mathbf{e} - \boldsymbol{\pi}_h^* \mathbf{e}\|_E \lesssim h_T^{1/2} \sqrt{-\ln(h_T)} (\|\tilde{\mathbf{e}}\|_{1, \Omega} + \|\mathbf{e}\|_{1, \Omega}). \tag{2.28}$$

Par les estimations (2.27) et (2.28) avec (2.26) et (2.25), on achève la preuve du théorème. ■

## 2.5 Résultats numériques

Dans cette section, on implémente l'estimateur par résidu pour le système de l'élasticité de la Définition 2.4.2 sur trois exemples en utilisant la librairie éléments finis Getfem++ (voir [99]). On suppose que le corps  $\Omega$  est homogène isotrope tel que la loi de Hooke  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})$  soit donnée par :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))I + 2\zeta\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \quad (2.29)$$

où  $I$  représente la matrice identité,  $\text{tr}$  est l'opérateur trace,  $\lambda \geq 0$  et  $\zeta > 0$  sont les coefficients de Lamé.

### 2.5.1 Le mode I d'ouverture

On commence par un cas-test simple : simplicité de la géométrie, de la position et de la forme de la fissure qui modélise un problème dont on connaît la solution analytique afin de pouvoir calculer la véritable erreur de discrétisation. On définit alors le domaine  $\Omega = (0, 1)^2$  illustré dans la Figure 2.9 avec la fissure  $(0, 0.5) \times \{0.5\}$  et  $\Gamma_N = \emptyset$ . Dans ce cas le maillage coïncide avec la fissure donc  $T_h = G_h$ . On impose des conditions de Dirichlet sur le bord  $\Gamma_D$ .

```
getfem::mesh_region border_faces;
getfem::outer_faces_of_mesh(mesh, border_faces);
for (getfem::mr_visitor i(border_faces); !i.finished(); ++i) {
    mesh.region(DIRICHLET_BOUNDARY_NUM).add(i.cv(), i.f());}
```

Les coefficients de Lamé valent  $\zeta = 150$  et  $\lambda = 200$ . La fonction cut-off  $\chi$  définie en (1.2) est choisie polynomiale de degré cinq avec  $r_0 = 0.01$  et  $r_1 = 0.49$  et elle est définie par :

$$\chi(r) = \frac{-6r^5 + 15(r_0 + r_1)r^4 - 10(r_0^2 + 4r_0r_1 + r_1^2)r^3 + 30r_0r_1(r_0 + r_1)r^2 - 30r_1^2r_0^2r + r_0^3(r_0^2 - 5r_1r_0 + 10r_1^2)}{(r_1 - r_0)^5}$$

si  $r_0 \leq r \leq r_1$ .

La géométrie de la fissure est définie par deux level sets de fonctions  $\xi_h$  et  $\zeta_h$ . On a alors (voir [216]) :

$$H(x) = \text{sign}(\xi_h(x)), \quad r = \sqrt{\xi_h^2 + \zeta_h^2} \quad \text{et} \quad \theta = \arctan \frac{\xi_h}{\zeta_h}.$$

```
base_small_vector ls_function(const base_node P, int option) {
    scalar_type x = P[0], y = P[1];
    base_small_vector res(2);
    switch (option) {
        case 0: //definition de la fissure pour les premier et second exemples
            res[0] = y - 0.5;
            res[1] = x - 0.5;
            break;
        case 1: //definition de la fissure pour le troisieme exemple
            res[0] = (2.*x - y - 0.5) / sqrt(5);
            res[1] = (7./8. - (x + 2.*y)) / sqrt(5);
            break;
        default: assert(0);
    }
    return res;
}
```

#### Remarque 2.5.1

Cette technique peut être étendue à des fissures plus compliquées.

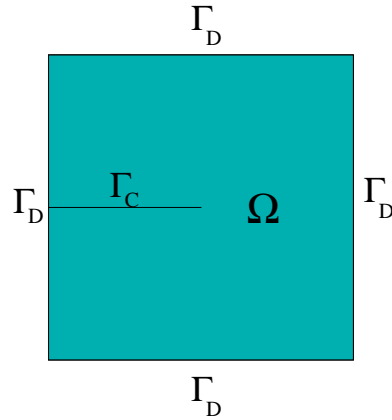


FIG. 2.9 – Premier exemple : le corps fissuré

### Raffinement uniforme

Le domaine est discrétisé à l'aide d'une famille de maillages triangulaires uniformes. Par la suite, on note  $N_D$  le nombre d'éléments du maillage sur un côté du carré unitaire  $(0, 1)^2$ . Comme on utilise des maillages uniformes, le paramètre  $N_D$  mesure la taille du maillage. La solution exacte  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_I$  est connue (donnée par (2.5)). Ainsi on peut évaluer la norme  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}$  et par conséquent l'indice d'efficacité qui est égal à  $\eta/\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}$  (voir Tableau 2.1).

$N_D$	8	16	32	48	64	80	96	112	128
$\eta (\times 10^{-2})$	7.48248	4.34222	2.46972	1.74772	1.35644	1.10928	0.938618	0.813512	0.717829
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{1,\Omega}$ ( $\times 10^{-4}$ )	6.99878	4.39294	2.4652	1.71217	1.31164	1.06293	0.893545	0.770712	0.677583
Indice d'efficacité	106.91	98.84	100.18	102.07	103.41	104.36	105.04	105.55	105.93

TAB. 2.1 – Valeurs de l'estimateur  $\eta$ , de la norme  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}$  et des indices d'efficacité pour le premier exemple

On procède ici à des raffinements uniformes successifs afin d'étudier l'évolution de l'erreur globale et de l'estimateur en fonction de la taille des mailles  $h$  et d'en déduire leur comportement asymptotique. L'étude de la convergence de l'erreur estimée permettra de vérifier notre estimateur. En effet, si la convergence de l'erreur estimée est la même que l'erreur vraie alors l'estimateur est utilisable comme critère de raffinement. La Figure 2.10 représente le taux de convergence de  $\eta$  et  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}$  du Tableau 2.1. L'estimateur d'erreur  $\eta$  admet une vitesse de convergence semblable à celle de la norme  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}$  et lorsque le paramètre de discrétisation converge vers zéro, on obtient une convergence en  $h$  (sans oublier une constante).

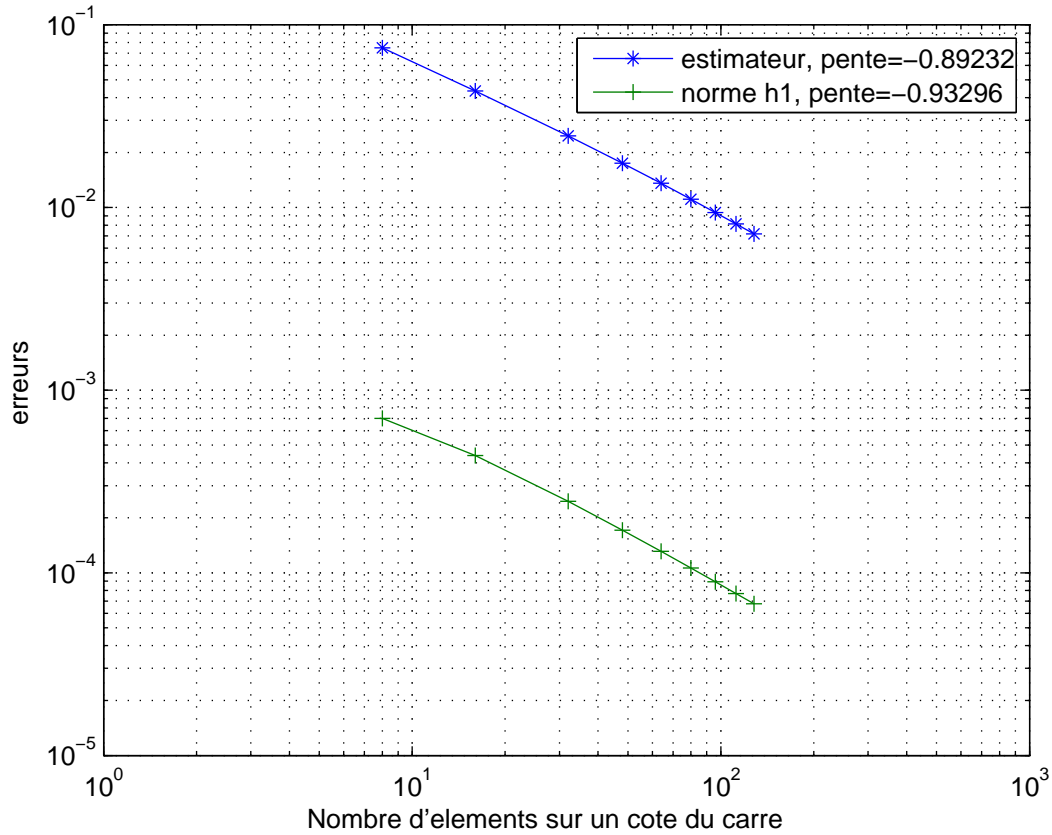


FIG. 2.10 – Convergence de l’estimateur  $\eta$  et de la norme d’erreur  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}$

La majeure partie de l’erreur pour  $\eta$  se localise à proximité de la pointe de fissure  $(0.5, 0.5)$  (voir Figure 2.11).

### Raffinement avec un seuil

Maintenant on raffine à l’aide d’une procédure adaptative. Le critère pour raffiner le maillage est défini par : on choisit un seuil et l’élément  $G$  est raffiné lorsque  $\eta_G$  est plus important que le seuil. Le raffinement de maillage est stoppé dès que  $\eta_G$  est plus petit que le seuil pour tout  $G$ . On démarre avec un maillage initial uniforme. En choisissant un seuil valant  $10^{-5}$  ou  $10^{-6}$  et une fonction cut-off exponentielle  $\chi(r) = \exp(-2075r^4)$  dans  $\Omega$ , on aboutit aux maillages figurant sur la Figure 2.12. En prenant une fonction polynômiale  $\chi$  de degré cinq définie précédemment, on obtient les maillages affichés dans la Figure 2.13. Finalement les valeurs de l’estimateur d’erreur  $\eta$  obtenues à chaque maillage intermédiaire avec un seuil égal à  $10^{-6}$  sont reportés dans le Tableau 2.2 (pour la fonction cut-off exponentielle) et dans le Tableau 2.3 (pour la fonction cut-off polynômiale de degré cinq). Dans cet exemple, les différentes fonctions cut-off mènent à des maillages raffinés différents avec une réduction de l’erreur satisfaisante dans les deux cas.

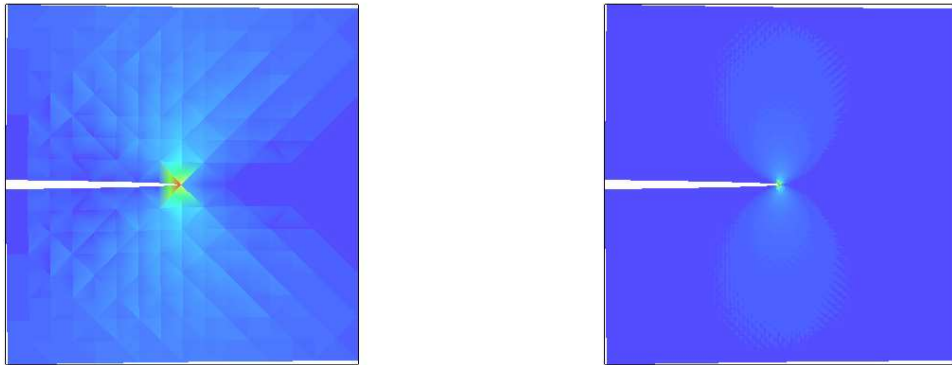


FIG. 2.11 – Carte de l'estimateur d'erreur local  $\eta_G$  avec  $N_D = 16$  (à gauche) et  $N_D = 80$  (à droite)

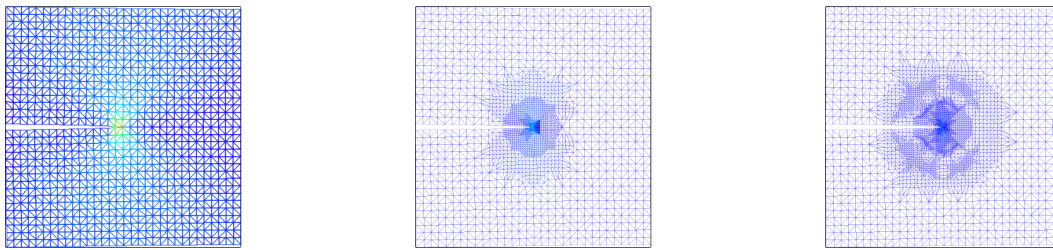


FIG. 2.12 – Cas de la fonction cut-off exponentielle  $\chi$  : maillage initial (à gauche), maillage final pour un seuil valant  $10^{-5}$  (au milieu) et maillage final pour un seuil égal à  $10^{-6}$  (à droite)

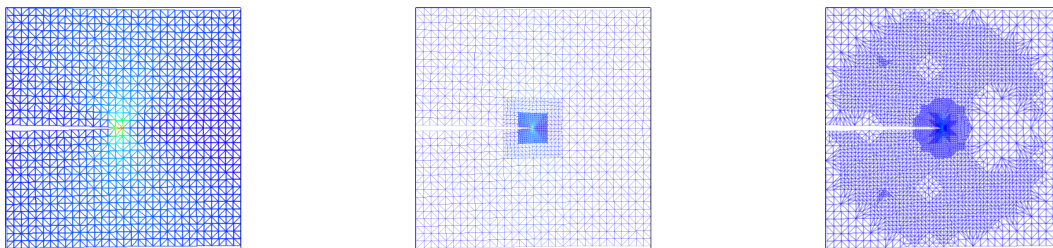


FIG. 2.13 – Cas de la fonction cut-off polynômiale  $\chi$  de degré cinq : maillage initial (à gauche), maillage final pour un seuil valant  $10^{-5}$  (au milieu) et maillage final pour un seuil égal à  $10^{-6}$  (à droite)

Degrés de liberté	730	1106	1472	1500	1526
$\eta (\times 10^{-2})$	4.45143	2.94918	2.07349	1.91532	1.82311

TAB. 2.2 – Valeurs de l’estimateur  $\eta$  pour une fonction cut-off exponentielle  $\chi$ 

Degrés de liberté	730	1666	1714	1734	1740
$\eta (\times 10^{-2})$	4.34222	2.30949	2.04415	1.93209	1.90008

TAB. 2.3 – Valeurs de l’estimateur  $\eta$  pour une fonction cut-off polynômiale  $\chi$  de degré cinq

## 2.5.2 Le mode II de cisaillement

### Raffinement uniforme

On choisit la même géométrie et les mêmes caractéristiques matériau que pour l’exemple précédent. Maintenant la solution exacte  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{II}$  est donnée par (2.6). Dans le Tableau 2.4, on reporte les contributions de  $\eta$ ,  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}$  et les indices d’efficacité pour une famille de maillages triangulaires uniformes.

$N_D$	8	16	32	48	64	80	96	112	128
$\eta (\times 10^{-2})$	8.65243	4.64238	2.44897	1.6639	1.26226	1.01857	0.855114	0.73785	0.649653
$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{1,\Omega}$ ( $\times 10^{-4}$ )	9.24249	5.68551	3.14573	2.17081	1.65698	1.33966	1.12436	0.968637	0.850816
Indices d’efficacité	93.62	81.65	77.85	76.64	76.17	76.03	76.05	76.17	76.35

TAB. 2.4 – Valeurs de l’estimateur  $\eta$ , de la norme  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}$  et des indices d’efficacité pour le second exemple.

On reporte les taux de convergence de l’estimateur  $\eta$  et  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}$  dans la Figure 2.14. Les conclusions sont les mêmes que pour le premier exemple : l’estimateur et la norme  $H^1$  de l’erreur sont d’ordre  $h$  lorsque  $h \rightarrow 0$ . De plus, la majeure partie de l’erreur pour  $\eta$  est encore localisée à proximité de la pointe de fissure (0.5, 0.5) (voir Figure 2.15).

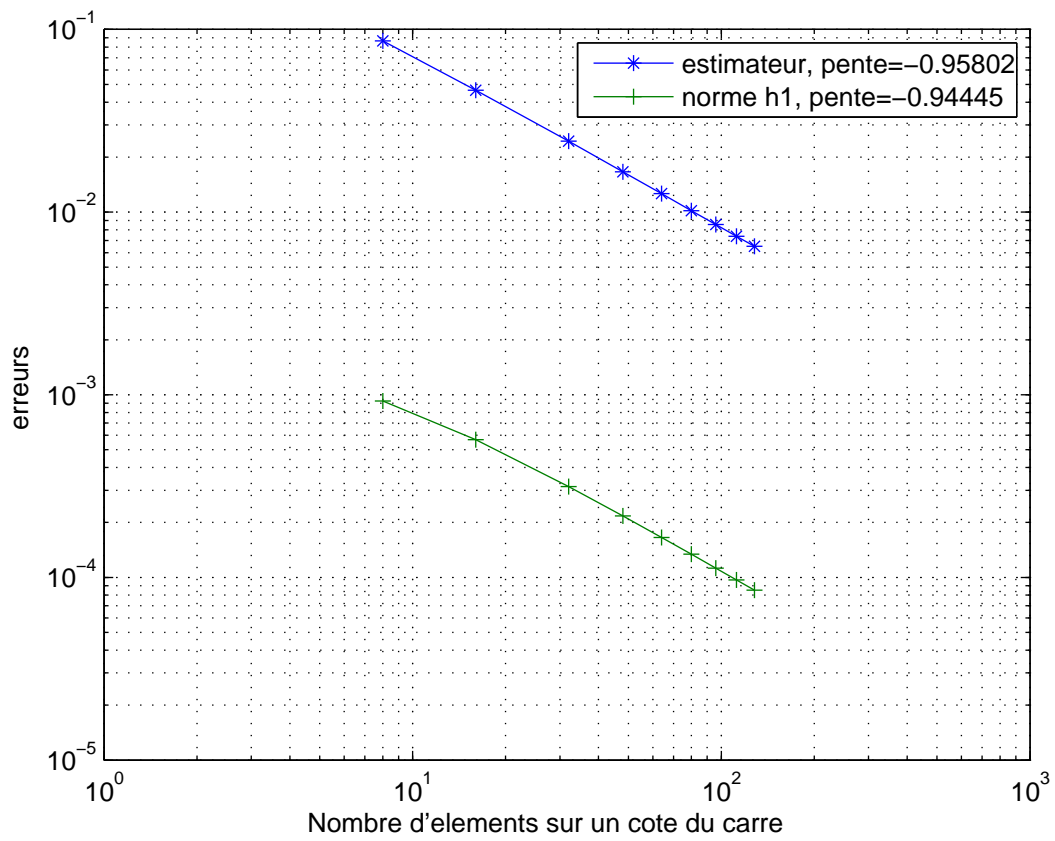


FIG. 2.14 – Convergence de l’estimateur  $\eta$  et de la norme d’erreur  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}$

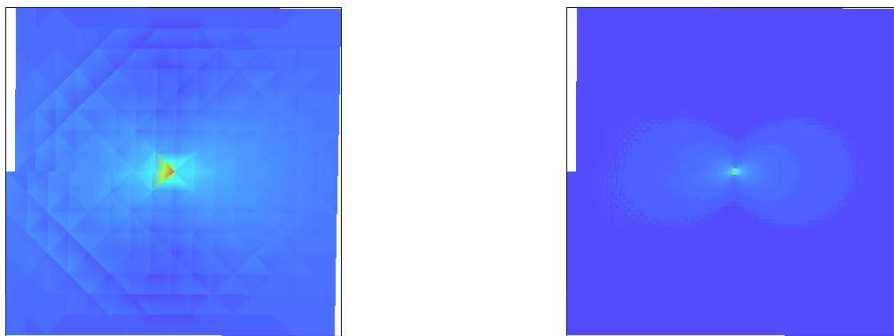


FIG. 2.15 – Carte de l’estimateur d’erreur local  $\eta_G$  avec  $N_D = 16$  (à gauche) et  $N_D = 80$  (à droite)



### Raffinement avec un seuil

Le critère de raffinement est le même que précédemment. Les maillages initial et finaux utilisant une fonction cut-off exponentielle pour deux seuils différents sont illustrés Figure 2.16. La Figure 2.17 représente également ces maillages lorsque la fonction polynômiale de degré cinq est utilisée. Finalement les valeurs de l'estimateur d'erreur  $\eta$  obtenues à chaque maillage intermédiaire pour un seuil égal à  $10^{-6}$  sont reportées dans le Tableau 2.5 (pour la fonction cut-off exponentielle) et dans le Tableau 2.6 (pour la fonction polynômiale de degré cinq).

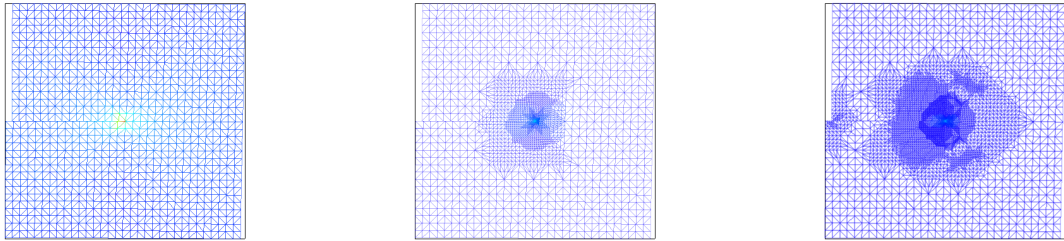


FIG. 2.16 – Cas de la fonction cut-off exponentielle  $\chi$  : maillage initial (à gauche), maillage final pour un seuil valant  $10^{-5}$  (au milieu) et maillage final pour un seuil égal à  $10^{-6}$  (à droite)

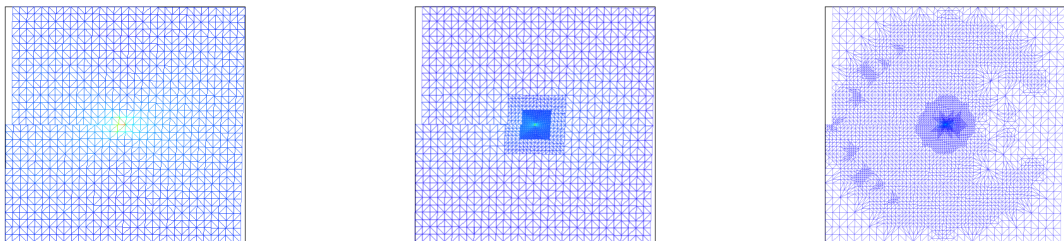


FIG. 2.17 – Cas de la fonction cut-off polynômiale  $\chi$  de degré cinq : maillage initial (à gauche), maillage final avec un seuil égal à  $10^{-5}$  (au milieu) et maillage final pour un seuil valant  $10^{-6}$  (à droite)

Degrés de liberté	730	1146	1782	1808	1850	1880
$\eta (\times 10^{-2})$	5.50767	3.87577	2.45115	2.26363	2.08548	2.07013

TAB. 2.5 – Valeurs de l’estimateur  $\eta$  pour une fonction cut-off exponentielle  $\chi$

Degrés de liberté	730	1668	1848	1874	1944
$\eta (\times 10^{-2})$	4.64238	2.97789	2.49811	2.32357	2.08207

TAB. 2.6 – Valeurs de l’estimateur  $\eta$  pour la fonction polynômiale  $\chi$  de degré cinq

### 2.5.3 L’exemple du domaine en forme de L

Dans un troisième exemple, on considère un corps en forme de L fissuré (correspondant aux trois quarts du carré  $(0, 1)^2$ ) représenté sur la Figure 2.18. La pointe de fissure se situe au point  $(0.375, 0.25)$ . Ici le maillage ne coïncide plus avec la fissure. On pose  $\Gamma_D = (0, 0.5) \times \{1\}$  et  $\Gamma_N$  ailleurs. Une densité de forces surfaciques  $F=(0,-1)$  est appliquée sur  $\Gamma_{N1} = (0, 1) \times \{0\} \subset \Gamma_N$  et  $N$  désigne le nombre d’éléments du maillage sur  $\Gamma_D$ .

```

getfem::mesh_region border_faces;
getfem::outer_faces_of_mesh(mesh, border_faces);
for (getfem::mr_visitor i(border_faces); !i.finished(); ++i) {
  base_node un = mesh.normal_of_face_of_convex(i.cv(), i.f());
  un /= gmm::vect_norm2(un);
  if (gmm::abs(un[N-1]-1.0) < 1.0E-7) {
    base_node pt = gmm::mean_value(mesh.points_of_face_of_convex(i.cv(), i.f()));
    if (pt[N-1] > 0.9) mesh.region(DIRICHLET_BOUNDARY_NUM).add(i.cv(), i.f());
  }
  else if (gmm::abs(un[N-1]+1.0) < 1.0E-7)
    mesh.region(NEUMANN_BOUNDARY_NUM1).add(i.cv(), i.f());
  else
    mesh.region(NEUMANN_BOUNDARY_NUM2).add(i.cv(), i.f());
  break;
}

```

Les caractéristiques matériau et la fonction cut-off sont les mêmes que pour les exemples précédents.

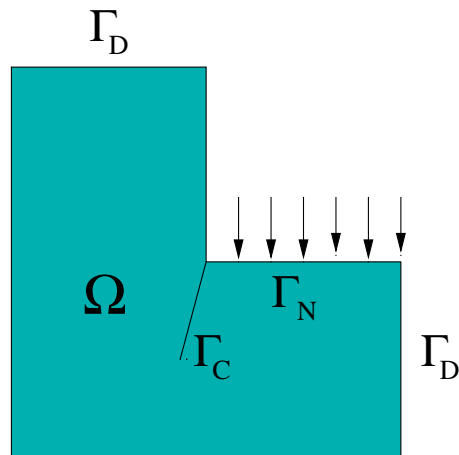


FIG. 2.18 – Troisième exemple : le corps fissuré

### Raffinement uniforme

Dans cet exemple, on ne dispose pas de solution exacte. C'est pourquoi seulement les valeurs de l'estimateur  $\eta$  figurent dans le Tableau 2.7 pour une famille uniforme de maillages triangulaires.

N	8	16	32	48	64	80	96
$\eta (\times 10^{-2})$	28.1005	15.7341	8.323	5.69931	4.34828	3.52219	2.96384

TAB. 2.7 – Valeurs de l'estimateur  $\eta$  pour le troisième exemple

On peut voir sur la Figure 2.19 que la vitesse de convergence de l'estimateur est proche de 1 et qu'elle est similaire à celles obtenues dans les deux exemples précédents.

La majeure partie de l'erreur pour l'estimateur  $\eta$  se localise vers la pointe de fissure  $(0.375, 0.25)$  (voir Figure 2.20).

### Raffinement à l'aide d'un seuil

En utilisant le même critère de raffinement que dans les exemples précédents, on obtient le maillage initial et les deux maillages finaux avec une fonction cut-off exponentielle dans la Figure 2.21. Ces maillages sont représentés pour une fonction cut-off polynômiale de degré cinq dans la Figure 2.22. Finalement les valeurs de l'estimateur d'erreur  $\eta$  obtenues à chaque maillage intermédiaire pour un seuil de  $10^{-5}$  sont reportées dans le Tableau 2.8 (pour la fonction cut-off exponentielle) et dans le Tableau 2.9 (pour la fonction cut-off polynômiale de degré cinq).

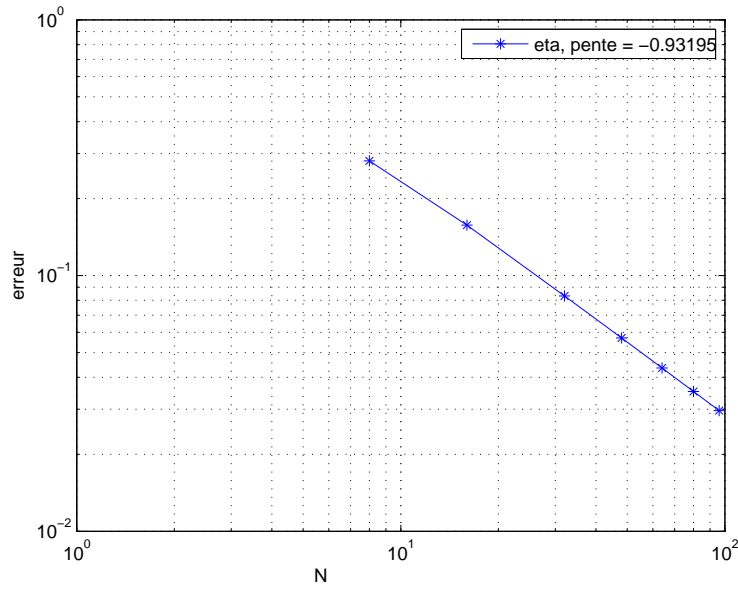


FIG. 2.19 – Convergence de l'estimateur  $\eta$

Degrés de liberté	1740	2978	3242	3296	3316
$\eta$	0.195918	0.131541	0.113071	0.105575	0.103496

TAB. 2.8 – Valeurs de l'estimateur  $\eta$  pour une fonction cut-off exponentielle  $\chi$

Degrés de liberté	1740	3156	3244	3312	3326
$\eta$	0.157341	0.117158	0.108942	0.103859	0.102766

TAB. 2.9 – Valeurs de l'estimateur  $\eta$  pour une fonction cut-off polynômiale  $\chi$  de degré cinq

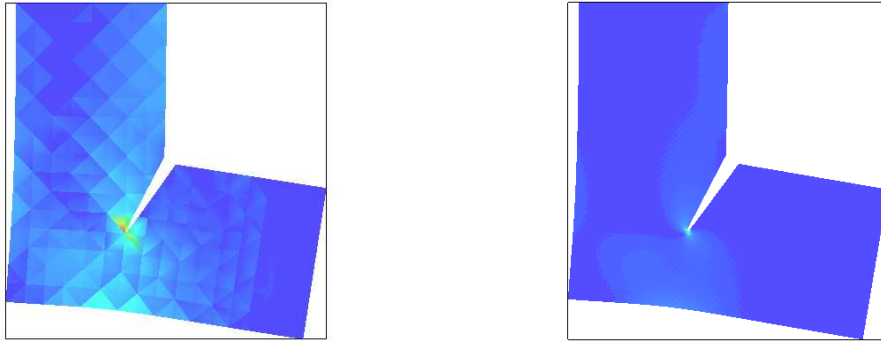


FIG. 2.20 – Carte de l'estimateur d'erreur local  $\eta_G$  avec  $N = 8$  (à gauche) et  $N = 48$  (à droite)

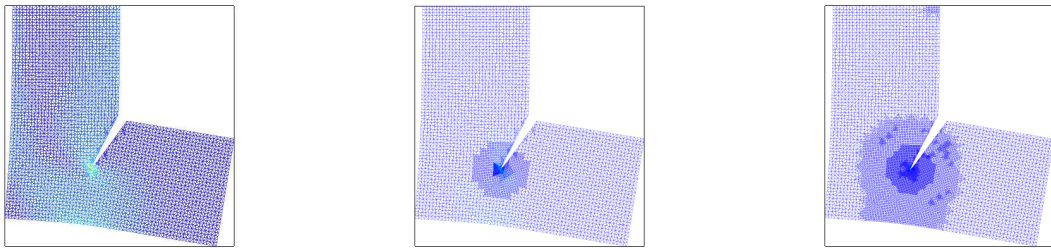


FIG. 2.21 – Cas de la fonction cut-off exponentielle  $\chi$  : maillage initial (à gauche), maillage final pour un seuil valant  $2 \times 10^{-4}$  (au milieu) et maillage final pour un seuil égal à  $10^{-5}$  (à droite)

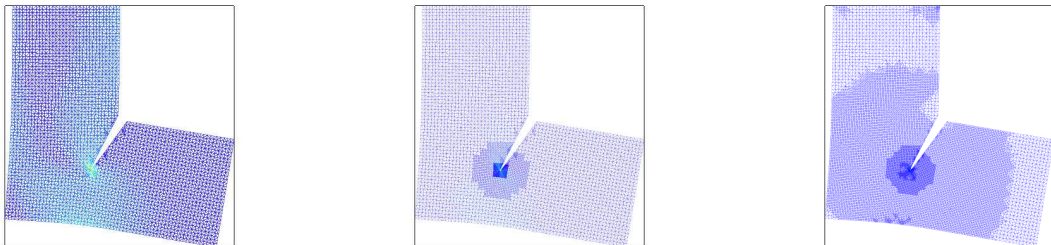


FIG. 2.22 – Cas de la fonction cut-off polynômiale  $\chi$  de degré cinq : maillage initial (à gauche), maillage final pour un seuil valant  $2 \times 10^{-4}$  (au milieu) et maillage final pour un seuil égal à  $4 \times 10^{-6}$  (à droite)

## 2.6 Conclusion

On propose, étudie et implémente sous Getfem++ un estimateur a posteriori par résidu pour le problème de Poisson et le problème d'élasticité approché par la méthode XFEM. L'estimateur est une généralisation de celui existant dans le cadre de la méthode classique par éléments finis avec des maillages standards. Une borne supérieure de l'erreur  $H^1$  est obtenue après définition d'un nouvel opérateur de quasi-interpolation et les simulations numériques montrent que l'estimateur et la norme de l'erreur  $H^1$  admettent des vitesses de convergence similaires.

Notre but est de formuler et d'étudier le contact (et éventuellement le frottement) avec la méthode XFEM. Dans le prochain chapitre, on va commencer par analyser le problème de contact unilatéral avec frottement de Coulomb approché par la méthode classique des éléments finis.

# Chapitre 3

## Estimateurs a posteriori pour le problème de Signorini avec frottement de Coulomb

Ce chapitre traite des estimateurs d'erreur par résidu pour les approximations par éléments finis des problèmes de contact avec frottement de Coulomb. Un résultat récent d'unicité de Renard dans [203] pour le problème continu nous permet de réaliser l'analyse de l'erreur a posteriori. On propose, étudie et implémente deux estimateurs d'erreur associés à deux discrétisations par éléments finis. Dans les deux cas, les estimations permettent d'obtenir des bornes supérieure et inférieure de l'erreur de discrétisation.

L'article **Residual error estimators for Coulomb friction** [124] accepté dans *SIAM Journal on Numerical Analysis* et un proceeding intitulé **A residual type error estimate for the static Coulomb friction problem with unilateral contact** traitent de ce sujet.

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Le problème de contact avec frottement de Coulomb en élasticité . . . . .</b>	<b>100</b>
3.1.1	Le problème continu . . . . .	100
3.1.2	Résultats d'existence et d'unicité . . . . .	103
<b>3.2</b>	<b>Discrétisation par éléments finis . . . . .</b>	<b>104</b>
<b>3.3</b>	<b>Estimations d'erreur . . . . .</b>	<b>107</b>
3.3.1	Estimations a priori . . . . .	107
3.3.2	Définition de l'estimateur d'erreur par résidu $\eta$ . . . . .	108
3.3.3	Borne supérieure . . . . .	109