

Estimateurs a posteriori pour le problème de Signorini avec frottement de Coulomb

Ce chapitre traite des estimateurs d'erreur par résidu pour les approximations par éléments finis des problèmes de contact avec frottement de Coulomb. Un résultat récent d'unicité de Renard dans [203] pour le problème continu nous permet de réaliser l'analyse de l'erreur a posteriori. On propose, étudie et implémente deux estimateurs d'erreur associés à deux discrétisations par éléments finis. Dans les deux cas, les estimations permettent d'obtenir des bornes supérieure et inférieure de l'erreur de discrétisation.

L'article **Residual error estimators for Coulomb friction** [124] accepté dans *SIAM Journal on Numerical Analysis* et un proceeding intitulé **A residual type error estimate for the static Coulomb friction problem with unilateral contact** traitent de ce sujet.

Sommaire

3.1	Le problème de contact avec frottement de Coulomb en élasticité	100
3.1.1	Le problème continu	100
3.1.2	Résultats d'existence et d'unicité	103
3.2	Discrétisation par éléments finis	104
3.3	Estimations d'erreur	107
3.3.1	Estimations a priori	107
3.3.2	Définition de l'estimateur d'erreur par résidu η	108
3.3.3	Borne supérieure	109

3.3.4	Borne inférieure	113
3.4	Une seconde discrétisation par éléments finis	117
3.4.1	Description	118
3.4.2	Etude de l'existence et de l'unicité de la solution	119
3.5	Un second estimateur	123
3.5.1	Définition de l'estimateur par résidu associé à la seconde discrétisation	123
3.5.2	Borne supérieure	124
3.5.3	Borne inférieure	127
3.6	Résultats numériques	129
3.6.1	Un premier exemple avec glissement et séparation	130
3.6.2	Un second exemple avec adhérence, glissement et séparation	135
3.6.3	Troisième exemple : un cas avec peu de frottement ; compa- raison avec un exemple de la littérature	139
3.7	Conclusion et perspectives	143

Le problème de contact unilatéral sans frottement présente une non-linéarité sur le bord correspondant à la non-pénétration des matériaux sur la zone de contact qui mène à une inégalité variationnelle du premier ordre. Pour ce modèle, la méthode basée sur les résidus a été considérée et étudiée dans [58, 108, 237] par une approche pénalisée et dans [38] en utilisant la technique de mesure d'erreur développée dans [27]. Plus récemment, l'analyse sans terme de pénalisation a été achevée dans [127], et dans [128] pour l'approximation par éléments finis mixtes correspondante (voir aussi [30]). De plus, le concept d'erreur en relation de comportement a permis d'élaborer un estimateur d'erreur dans [71, 72, 234, 235] pour le problème du contact et l'estimation d'erreur a posteriori pour la méthode des éléments frontières a été étudiée dans [171, 172]. Plus généralement, on mentionne que l'analyse de l'erreur par résidu pour les inégalités variationnelles mène à des difficultés techniques importantes quel que soit le modèle. Notons aussi qu'un important travail a été réalisé pour les problèmes d'obstacle dans lequel l'inégalité a lieu sur tout le domaine (voir [2, 5, 47, 48, 65, 90, 133, 140, 152, 167, 189, 190, 222, 229]). D'autres analyses a posteriori contenant des inégalités liées à la plasticité ont été considérées dans [57, 201, 202, 220] et pour le problème du fluide de Bingham dans [221].

Plusieurs estimations d'erreur a posteriori ont été effectuées pour le modèle avec frottement de Coulomb : erreur pour la relation de comportement dans [69, 169] aussi bien qu'un estimateur heuristique par résidu pour la discrétisation par la méthode des éléments frontières dans [89]. Le modèle plus simple de frottement de Tresca est traité dans [43] (voir aussi [44] pour l'étude d'un problème similaire où les estimateurs par résidu sont analysés). Notons que ce dernier modèle est gouverné par une inégalité variationnelle du second ordre (voir [13]). Finalement une analyse a posteriori est traitée pour le modèle de frottement avec compliance normale dans [161].

Notre but est de s'occuper de l'analyse de l'erreur a posteriori du modèle de frottement de Coulomb et d'obtenir une estimation avec des bornes supérieure et inférieure par rapport à l'erreur de discrétisation. Dans la première section, on définit le problème continu de contact unilatéral avec frottement en élasticité linéaire en rappelant les résultats d'existence et d'unicité et on écrit le problème en utilisant une formulation mixte où les inconnues sont le champ de déplacement et les pressions de contact frottant sur la zone de contact. Ensuite on choisit une discrétisation classique à l'aide d'éléments finis continus de degré un et de multiplicateurs continus affines par morceaux sur la zone de contact. La section 3 concerne l'étude de l'estimateur d'erreur découlant de cette discrétisation. Grâce au résultat d'unicité de Renard, on obtient une borne supérieure de l'erreur. Les bornes inférieures sont aussi démontrées. Dans la partie suivante, on s'intéresse à un nouvel estimateur provenant d'une autre discrétisation. Cette seconde approche a deux propriétés intéressantes par rapport au premier estimateur : il contient moins de termes provenant du contact-frottement et ces termes ont une expression plus simple. De plus, l'analyse de l'erreur mène à des meilleures bornes. On termine par des résultats numériques et la comparaison des deux approches.

3.1 Le problème de contact avec frottement de Coulomb en élasticité

3.1.1 Le problème continu

On considère dans ce qui suit le modèle le plus simple : élasticité linéaire, petites déformations et frottement de Coulomb présenté dans le chapitre Introduction générale. On reprend les équations de l'élasticité (2) munies des équations de contact (3) et des conditions de frottement de Coulomb (4-5). Le contact est supposé être frottant et les zones d'adhérence, glissement et séparation ne sont pas connues à l'avance mais on suppose que la zone finale de contact après déformation est incluse dans Γ_C .

La formulation faible de (2)–(5) utilise les espaces de Hilbert

$$\mathbf{V} = \left\{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^2 : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_D \right\}, \quad W_n = \{v_n|_{\Gamma_C} : \mathbf{v} \in \mathbf{V}\}, \quad W_t = \{v_t|_{\Gamma_C} : \mathbf{v} \in \mathbf{V}\},$$

et leur espaces duaux topologiques \mathbf{V}' , W'_n , W'_t , munis des normes usuelles. Comme Γ_C est une ligne droite, on a $H_{00}^{1/2}(\Gamma_C) \subset W_n \subset H^{1/2}(\Gamma_C)$ (resp. $H_{00}^{1/2}(\Gamma_C) \subset W_t \subset H^{1/2}(\Gamma_C)$) qui implique $W'_n \subset H^{-1/2}(\Gamma_C)$ (resp. $W'_t \subset H^{-1/2}(\Gamma_C)$). Classiquement, $H^{1/2}(\Gamma_C)$ est l'espace des restrictions sur Γ_C des traces sur $\partial\Omega$ des fonctions dans $H^1(\Omega)$, et $H^{-1/2}(\Gamma_C)$ est l'espace dual de $H_{00}^{1/2}(\Gamma_C)$ qui est l'espace des restrictions sur Γ_C des fonctions dans $H^{1/2}(\partial\Omega)$ nulles à l'extérieur de Γ_C . Pour une présentation détaillée des opérateurs et des espaces de trace, on se réfère à [164] et [3].

On introduit le cône convexe de multiplicateurs sur Γ_C : $\mathbf{M}(\mu\lambda_n) = M_n \times M_t(\mu\lambda_n)$ où

$$M_n = \left\{ \nu \in W'_n, \nu \geq 0 \text{ sur } \Gamma_C \right\},$$

et, pour tout $g \in M_n$

$$M_t(g) = \left\{ \nu \in W'_t, -g \leq \nu \leq g \text{ sur } \Gamma_C \right\}.$$

Les conditions d'inégalité incorporées dans les définitions de M_n et $M_t(g)$ sont à prendre au sens dual.

On adopte les notations suivantes :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega, & b(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{v}) &= \langle \nu_n, v_n \rangle_{W'_n, W_n} + \langle \nu_t, v_t \rangle_{W'_t, W_t}, \\ L(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma, \end{aligned}$$

pour \mathbf{u} et \mathbf{v} dans \mathbf{V} et $\boldsymbol{\nu} = (\nu_n, \nu_t)$ dans $W'_n \times W'_t$. Dans ces définitions, les notations \cdot et $:$ représentent les produits scalaires canoniques dans \mathbb{R}^2 et \mathcal{S}_2 respectivement et la notation $\langle \cdot, \cdot \rangle_{W'_n, W_n}$ représente le crochet de dualité entre W'_n et W_n . On écrit par la suite des termes sous formes d'intégrale à la place des crochets de dualité.

La formulation mixte du problème de contact unilatéral avec frottement de Coulomb (2)–(5) consiste à trouver $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ et $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{M}(\mu\lambda_n)$ tels que (voir [129, 203])

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ b(\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) \leq 0, & \forall \boldsymbol{\nu} = (\nu_n, \nu_t) \in \mathbf{M}(\mu\lambda_n). \end{cases} \quad (3.1)$$

Remarque 3.1.1

Cette formulation faible peut être écrite d'une manière différente : trouver $(\mathbf{u}, \lambda_n, \lambda_t) \in \mathbf{V} \times M_n \times W'_t$ tel que $\lambda_t \in M_t(\mu\lambda_n)$ et (3.1) aient lieu.

Propriétés 3.1.1

Si $(\mathbf{u}, \lambda_n, \lambda_t)$ est solution de (3.1), alors $\lambda_n = -\sigma_n(\mathbf{u})$ et $\lambda_t = -\sigma_t(\mathbf{u})$.

Démonstration : On a d'après la première équation de (3.1) :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \lambda_n v_n \, d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \lambda_t v_t \, d\Gamma$$

En utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{f} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} (\mathbf{g} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_C} (\lambda_n + \sigma_n(\mathbf{u})) v_n \, d\Gamma - \int_{\Gamma_C} (\lambda_t + \sigma_t(\mathbf{u})) v_t \, d\Gamma = 0$$

En choisissant $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sur $\partial\Omega$, la première intégrale est nulle. Puis en prenant $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sur Γ_C , on retrouve que $\mathbf{g} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}$ sur Γ_N . Finalement en identifiant les deux dernières intégrales, on obtient que $\lambda_n = -\sigma_n(\mathbf{u})$ et $\lambda_t = -\sigma_t(\mathbf{u})$. ■

L'espace W_n est muni de la norme

$$\|w\|_{W_n} = \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : v_n = w \text{ sur } \Gamma_C} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega},$$

et de façon similaire pour $\|\cdot\|_{W_t}$. L'espace dual de $W_n \times W_t$ est muni de la norme

$$\|\boldsymbol{\nu}\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_C} = \sup_{\mathbf{w} \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{b(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{w})}{\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}}, \quad \forall \boldsymbol{\nu} = (\nu_n, \nu_t) \in W'_n \times W'_t.$$

Une autre formulation faible classique du problème (2)–(5) est l'inégalité quasi-variationnelle :

Propriétés 3.1.2

Trouver \mathbf{u} telle que

$$\mathbf{u} \in \mathbf{K}, \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) - \mu \int_{\Gamma_C} \sigma_n(\mathbf{u})(|v_t| - |u_t|) \, d\Gamma \geq L(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{K}, \quad (3.2)$$

où \mathbf{K} désigne le cône convexe fermé des déplacements admissibles satisfaisant les conditions de non-interpénétration :

$$\mathbf{K} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : v_n \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C\}.$$

Démonstration : La formulation variationnelle en déplacement du problème s'écrit $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{K}$:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, d\Gamma$$

Avec les notations précédentes et la décomposition en composantes normale et tangentielle, on obtient :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) = L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \int_{\Gamma_C} \sigma_n(\mathbf{u})(v_n - u_n) d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \sigma_t(\mathbf{u})(v_t - u_t) d\Gamma$$

Pour le terme en composante normale, en utilisant le fait que $\sigma_n(\mathbf{u}) \leq 0$ et que la relation de complémentarité annule la deuxième partie de l'intégrale, on a :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \int_{\Gamma_C} \sigma_t(\mathbf{u})(v_t - u_t) d\Gamma$$

Maintenant étudions le signe de $f : \Gamma_C \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$f = \mu |\sigma_n(\mathbf{u})| (|v_t| - |u_t|) + \sigma_t(\mathbf{u})(v_t - u_t)$. Soit $x \in \Gamma_C$

- supposons que $u_t(x) = 0$ alors $f(x) = \mu |\sigma_n(\mathbf{u})| |v_t| + \sigma_t(\mathbf{u})v_t \geq 0$
car $v_t \leq |v_t|$ et $|\sigma_t(\mathbf{u})| \leq -\mu\sigma_n(\mathbf{u}) = \mu |\sigma_n(\mathbf{u})|$
- supposons que $u_t(x) \neq 0$ alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= -\mu\sigma_n(\mathbf{u}) |v_t| + \mu\sigma_n(\mathbf{u}) |u_t| + \mu\sigma_n(\mathbf{u}) \frac{u_t}{|u_t|} v_t - \mu\sigma_n(\mathbf{u}) |u_t| \\ &= -\mu\sigma_n(\mathbf{u}) |v_t| + \underbrace{\mu\sigma_n(\mathbf{u}) \frac{u_t}{|u_t|} v_t}_{A} \geq 0 \end{aligned}$$

car $|A| = \mu |\sigma_n(\mathbf{u})| |v_t| = -\mu\sigma_n(\mathbf{u}) |v_t|$.

Ainsi $\forall x \in \Gamma_C, f(x) \geq 0$ d'où $\int_{\Gamma_C} f(x) d\Gamma \geq 0$ ce qui donne :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \int_{\Gamma_C} f(x) d\Gamma \geq L(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \int_{\Gamma_C} \sigma_t(\mathbf{u})(v_t - u_t) d\Gamma.$$

On obtient le résultat après simplification. ■

Remarque 3.1.2

La fonctionnelle $j(\cdot, \cdot)$ donnée formellement par

$$j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\mu \int_{\Gamma_C} \sigma_n(\mathbf{u}) |v_t| d\Gamma$$

traduit le frottement de Coulomb.

Remarque 3.1.3

Pour le problème avec frottement de Tresca, la fonctionnelle $j(\cdot)$ continue convexe est donnée par

$$j(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_C} s |v_t| d\Gamma$$

et

$$\mathbf{K} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : v_n \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C\}.$$

3.1.2 Résultats d'existence et d'unicité

Lorsque le frottement est omis ($\mu = 0$), la condition (4-5) est réduite à $\sigma_t(\mathbf{u}) = 0$ et le problème de contact sans frottement admet une unique solution selon [94] et d'après le théorème de Stampacchia (voir [149]). L'étude mathématique du problème avec frottement de Coulomb présente des difficultés considérables. Pendant longtemps, on ne savait pas si ce problème avait une solution. Le premier résultat d'existence d'une solution de (3.2) a été établi dans les années 80 pour des petits coefficients de frottement dans [187] et les bornes assurant l'existence ont été améliorées dans [137], [143] et [87]. Dans [88], l'existence est statuée pour $\mu \leq \sqrt{3 - 4\nu}/(2 - 2\nu)$ où $0 \leq \nu \leq 1/2$ désigne le coefficient de Poisson. Quand le frottement est présent, des solutions multiples aux équations décrivant le contact peuvent exister et la description du mouvement des corps en contact devient extrêmement complexe. Dans [120, 121], quelques solutions multiples du problème (2)–(5) sont exhibées pour des domaines triangulaires ou quadrangulaires. Ces solutions multiples proviennent soit d'un ensemble infini de solutions au niveau du glissement soit de deux configurations isolées (adhérence et séparation). Notons que ces exemples de non-unicité sont valides pour des coefficients de frottement assez grands (i.e. $\mu > \sqrt{(1 - \nu)/\nu}$) et des déplacements tangentiels avec un signe constant sur Γ_C . Pour le moment, il semble qu'aucune solution multiple n'ait été détectée pour un coefficient de frottement arbitrairement petit dans le cas continu, bien que de tels résultats existent pour les approximations par éléments finis dans [114], mais pour une géométrie variable. Plus récemment, un résultat d'unicité a été obtenu dans [203] : des cas sont définis pour lesquels il est possible d'affirmer l'unicité de la solution du problème de frottement de Coulomb. Plus précisément, si une solution "régulière" existe (i.e. la transition est régulière lorsque la direction de glissement change) et si le coefficient de frottement est suffisamment petit alors la solution est la seule.

On introduit maintenant l'espace des multiplicateurs M des fonctions ξ définies sur Γ_C tel que la norme équivalente suivante soit finie :

$$\|\xi\|_M = \sup_{\substack{v_t \in W_t \\ v_t \neq 0}} \frac{\|\xi \cdot v_t\|_{W_t}}{\|v_t\|_{W_t}}.$$

Comme Γ_C est supposé rectiligne, M contient pour tout $\varepsilon > 0$ l'espace $H^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_C)$ (voir [180] pour une discussion complète sur la théorie des multiplicateurs dans une paire d'espaces de Hilbert).

Le résultat d'unicité est donné en supposant que $\lambda_t = \mu \lambda_n \xi$, avec $\xi \in M$. Il est facile de voir que cela implique $|\xi| \leq 1$ sur le support de λ_n . Plus précisément, cela implique que $\xi \in \text{Dir}_t(u_t)$ sur le support de λ_n , où $\text{Dir}_t(\cdot)$ est le sous-différentiel de l'application convexe $x_t \mapsto |x_t|$. Cela signifie qu'il est possible de supposer que $\xi \in \text{Dir}_t(u_t)$ sur Γ_C .

Proposition 3.1.1

Soit $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ une solution du problème (3.1) telle que $\lambda_t = \mu \lambda_n \xi$, avec $\xi \in M$, $\xi \in \text{Dir}_t(u_t)$ sur Γ_C et $\mu < C_0 \|\xi\|_M^{-1}$ où $C_0 > 0$ est indépendante de ξ . Alors $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ est l'unique solution du problème (3.1).

Démonstration : voir [203] ■

Dans un espace bidimensionnel ($d = 2$), le cas $\xi \equiv 1$ correspond à une direction de glissement homogène et le résultat précédent est complémentaire aux résultats de non-unicité obtenus dans [120, 121]. Les multiplicateurs ξ varient de -1 à $+1$ chaque fois que le signe du déplacement tangentiel passe du négatif au positif. L'ensemble M ne contient aucun multiplicateur ayant une singularité du premier ordre. Le déplacement tangentiel de la solution \mathbf{u} ne peut pas passer d'une valeur négative à une valeur positive en passant par zéro en un seul point de Γ_C .

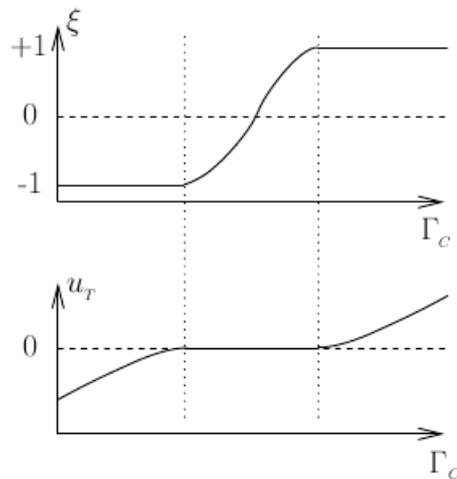


FIG. 3.1 – Exemple de déplacement tangentiel u_t et de multiplicateur ξ correspondant pour $d = 2$ [203]

Remarque 3.1.4

La loi de frottement "non locale" de Coulomb régularisant les contraintes normales a été introduite dans [85] et ce procédé de régularisation a permis d'obtenir l'existence pour tous les coefficients de frottement et l'unicité pour des coefficients de frottement petits [77, 147].

3.2 Discrétisation par éléments finis

On approxime le problème continu à l'aide d'une méthode par éléments finis standard. En effet, on fixe une famille régulière de maillages $T_h, h > 0$, faite de triangles fermés (voir Définition 2.2.1). Pour $T \in T_h$, on définit h_T le diamètre de T et $h = \max_{T \in T_h} h_T$. La régularité du maillage entraîne en particulier que pour tout côté E de T , on a $h_E = |E| \sim h_T$. Soit E_h (resp. \mathcal{N}_h) l'ensemble des côtés (resp. nœuds) de la triangulation et posons $E_h^{int} = \{E \in E_h : E \subset \Omega\}$ l'ensemble des côtés intérieurs de T_h (les côtés sont supposés

être relativement ouverts). On désigne par $E_h^N = \{E \in E_h : E \subset \Gamma_N\}$ l'ensemble des côtés appartenant au bord de Neumann, et $E_h^C = \{E \in E_h : E \subset \Gamma_C\}$ désigne l'ensemble des côtés extérieurs inclus dans la zone de contact. Soit $\mathcal{N}_h^D = \mathcal{N}_h \cap \overline{\Gamma_D}$ (notons que les nœuds extrêmes de $\overline{\Gamma_D}$ appartiennent à \mathcal{N}_h^D). Pour un élément T , on désigne par E_T l'ensemble des côtés de T et d'après les notations précédentes, on pose $E_T^{int} = E_T \cap E_h^{int}$, $E_T^N = E_T \cap E_h^N$, $E_T^C = E_T \cap E_h^C$. Pour tout côté intérieur E , on fixe un des deux vecteurs normaux unitaires et on le note \mathbf{n}_E . Le saut d'une fonction vectorielle \mathbf{v} à travers un côté $E \in E_h^{int}$ au point $\mathbf{y} \in E$ est défini par :

$$[[\mathbf{v}]]_E(\mathbf{y}) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathbf{v}(\mathbf{y} + \alpha \mathbf{n}_E) - \mathbf{v}(\mathbf{y} - \alpha \mathbf{n}_E), \quad \forall E \in E_h^{int}.$$

Notons que le signe de $[[\mathbf{v}]]_E$ dépend de l'orientation de \mathbf{n}_E . Finalement on introduit les patches : en notant x un nœud, E un côté et T un élément, on pose $\omega_x = \cup_{\{T:x \in T\}} T$, $\omega_E = \cup_{\{x:x \in \overline{E}\}} \omega_x$ et $\omega_T = \cup_{\{x:x \in T\}} \omega_x$. L'espace des éléments finis utilisé dans Ω est alors défini par :

$$\mathbf{V}_h = \{ \mathbf{v}_h \in (C(\overline{\Omega}))^2 : \forall T \in T_h, \quad \mathbf{v}_h|_T \in (\mathbb{P}_1(T))^2, \quad \mathbf{v}_h|_{\Gamma_D} = \mathbf{0} \}.$$

On rappelle que la zone de contact est pour simplifier un segment de droite. L'extension de la zone de contact à une ligne brisée peut être effectuée sans difficulté supplémentaire (voir par exemple [128]). Afin d'exprimer les contraintes de contact à l'aide de multiplicateurs de Lagrange, on introduit l'image de \mathbf{V}_h par l'opérateur de trace normal sur Γ_C :

$$W_h = \{ \nu_h \in C(\overline{\Gamma_C}) : \exists \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \text{ telle que } \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} = \nu_h \text{ sur } \Gamma_C \},$$

qui coïncide avec l'image de \mathbf{V}_h par l'opérateur de trace tangentiel sur Γ_C . Le choix de l'espace W_h nous permet de définir les cônes convexes fermés suivants :

$$M_{hn} = \left\{ \nu_h \in W_h : \int_{\Gamma_C} \nu_h \psi_h \, d\Gamma \geq 0, \quad \forall \psi_h \in W_h, \psi_h \geq 0 \right\}$$

et pour $g \in M_{hn}$:

$$M_{ht}(g) = \left\{ \nu_h \in W_h : \left| \int_{\Gamma_C} \nu_h \psi_h \, d\Gamma \right| \leq \int_{\Gamma_C} g \psi_h \, d\Gamma, \quad \forall \psi_h \in W_h, \psi_h \geq 0 \right\}.$$

Remarque 3.2.1

Les fonctions de M_{hn} ne sont pas nécessairement positives. De même, les fonctions de $M_{ht}(g)$ ne satisfont pas partout $|\nu_h| \leq g$.

La formulation discrétisée du problème de contact avec frottement de Coulomb est de trouver $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ et $\boldsymbol{\lambda}_h \in \mathbf{M}_h(\mu \lambda_{hn}) = M_{hn} \times M_{ht}(\mu \lambda_{hn})$ satisfaisant :

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{v}_h) = L(\mathbf{v}_h), & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ b(\boldsymbol{\nu}_h - \boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{u}_h) \leq 0, & \forall \boldsymbol{\nu}_h = (\nu_{hn}, \nu_{ht}) \in \mathbf{M}_h(\mu \lambda_{hn}). \end{cases} \quad (3.3)$$

On sait que le problème discrétisé par éléments finis associé au problème statique de frottement de Coulomb admet toujours une solution [111, 112] et que cette solution est

unique si le coefficient de frottement est assez petit. En effet, la référence [69] établit en utilisant un argument de point fixe que le problème (3.3) admet au moins une solution et que la solution est unique lorsque $\mu \leq C(h)$, ($C(h) \sim h^{1/2}$). Malheureusement la borne assurant l'unicité s'annule quand on raffine le maillage, voir par exemple, [112]. Un résultat de convergence de solutions discrètes vers une solution du problème continu est démontré dans [111]. Les résultats obtenus pour l'unicité prouvent que la taille des mailles influe de manière négligeable sur les conditions d'unicité. Hild montre sur un exemple très simple (un élément fini) que le problème discret peut admettre une, plusieurs ou une infinité de solutions et que le nombre de solutions décroît dans certains cas lorsque le coefficient de frottement augmente.

Le résultat suivant donne explicitement les conditions discrètes de contact avec frottement de (3.3) :

Proposition 3.2.1

Soit $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h)$ une solution de (3.3). On suppose que $\dim(W_h) = p$ et on pose ψ_{x_i} , $1 \leq i \leq p$ les fonctions de base de W_h sur Γ_C . La matrice de masse d'ordre p $\mathcal{M} = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$ sur Γ_C est définie par $m_{ij} = \int_{\Gamma_C} \psi_{x_i} \psi_{x_j}$. Soient U_N et U_T les vecteurs ayant pour composantes les valeurs nodales de u_{hn} et u_{ht} respectivement et soient L_N et L_T les vecteurs de composantes respectives les valeurs nodales de λ_{hn} et λ_{ht} . Alors les conditions discrètes de contact frottant de (3.3) sont les suivantes ; pour tout $1 \leq i \leq p$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}L_N)_i &\geq 0, & (U_N)_i &\leq 0, & (\mathcal{M}L_N)_i (U_N)_i &= 0, \\ |(\mathcal{M}L_T)_i| &\leq \mu (\mathcal{M}L_N)_i, \\ |(\mathcal{M}L_T)_i| &< \mu (\mathcal{M}L_N)_i &\implies (U_T)_i &= 0, \\ (\mathcal{M}L_T)_i (U_T)_i &\geq 0. \end{aligned}$$

Démonstration : voir [69] ■

Opérateur de quasi-interpolation

On considère l'opérateur de quasi-interpolation π_h : pour tout $v \in L^1(\Omega)$, on définit $\pi_h v$ comme l'unique élément de $V_h = \{v_h \in C(\bar{\Omega}) : \forall T \in T_h, v_h|_T \in \mathbb{P}_1(T), v_h|_{\Gamma_D} = 0\}$ tel que :

$$\pi_h v = \sum_{x \in \mathcal{N}_h \setminus \mathcal{N}_h^D} \left(\frac{1}{|\omega_x|} \int_{\omega_x} v(y) dy \right) \psi_x,$$

où pour tout $x \in \mathcal{N}_h$, ψ_x est la fonction de base standard de V_h satisfaisant $\psi_x(x') = \delta_{x,x'}$, pour tout $x' \in \mathcal{N}_h$. On pourrait considérer d'autres opérateurs de quasi-interpolation comme ceux figurant dans [65] ou dans [67].

Cet opérateur π_h possède des propriétés d'approximation locale :

Propriétés 3.2.1

Les estimations suivantes ont lieu ([232]) : pour tout $v \in H^1(\Omega)$ s'annulant sur Γ_D , on a :

$$\|v - \pi_h v\|_T \lesssim h_T \|\nabla v\|_{\omega_T}, \forall T \in T_h,$$

et

$$\|v - \pi_h v\|_E \lesssim h_E^{1/2} \|\nabla v\|_{\omega_E}, \forall E \in E_h.$$

Comme on s'intéresse à des fonctions à valeurs vectorielles, on définit l'opérateur vectoriel (que l'on note encore π_h pour simplifier) dont les composantes sont définies ci-dessus. Donc on a :

Lemme 3.2.1

Pour toute fonction $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n$ (fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$),

$$\|\mathbf{v} - \pi_h \mathbf{v}\|_T \leq C_1 h_T \|\mathbf{v}\|_{1, \omega_T}, \forall T \in T_h, \quad (3.4)$$

$$\|\mathbf{v} - \pi_h \mathbf{v}\|_E \leq C_2 h_E^{1/2} \|\mathbf{v}\|_{1, \omega_E}, \forall E \in E_h. \quad (3.5)$$

Les constantes C_1 et C_2 sont difficiles à évaluer et dépendent du paramètre de régularité σ (voir Définition 2.2.1). En particulier $\pi_h \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h$ pour tout $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^n$.

3.3 Estimations d'erreur

3.3.1 Estimations a priori

L'analyse a priori de l'erreur de (3.3) reste un problème ouvert. Une estimation d'erreur est obtenue dans [129] pour une approximation légèrement différente des conditions de contact et frottement (voir aussi [111] pour un résultat de convergence) :

Théorème 3.3.1

Soit $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ la solution du problème continu (3.1) telle que $\lambda_t = \mu \lambda_n \xi$, avec $\xi \in M$, $\xi \in \text{Dir}_t(u_t)$ sur Γ_C et $\mu < C_{is} C_0 \|\xi\|_M^{-1}$. La constante C_0 est celle de la Proposition 3.1.1 et C_{is} désigne la constante indépendante de h intervenant dans la condition inf-sup de Babuška-Brezzi. Supposons que $\mathbf{u} \in (H^{\frac{3}{2}+\epsilon}(\Omega))^2$ avec $\epsilon > 0$. Soit $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h)$ une solution du problème discret (3.3). Alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et \mathbf{u} telle que :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1, \Omega} + \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_{-\frac{1}{2}, \Gamma_C} \leq C h^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}\|_{\frac{3}{2}+\epsilon, \Omega}$$

Quand le frottement est absent, un nombre important d'analyses a priori de l'erreur ont été effectuées (voir par exemple [33, 135]). Dans [70], des estimations d'erreur a priori ont été obtenues par la méthode des éléments finis mixtes pour le problème sans frottement et les taux de convergence des différentes méthodes ont été comparés numériquement.

Laborde et Hild ont obtenu des estimations a priori pour la méthode des éléments finis quadratiques [123]. Ainsi ils améliorent la précision des calculs par rapport aux éléments linéaires lorsque la régularité du problème le permet [148, 185]. Remarquons que même dans le cas sans frottement, la preuve de l'estimation d'ordre h avec la norme $(H^1(\Omega))^2$ sous la régularité $(H^2(\Omega))^2$ reste un problème ouvert.

3.3.2 Définition de l'estimateur d'erreur par résidu η

Le résidu de l'équation d'équilibre (2) est défini par $\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) + \mathbf{f} = \mathbf{f}$ sur T . Comme d'habitude, cette quantité peut être remplacée par une approximation polynômiale $\mathbf{f}_T \in (\mathbb{P}_k(T))^2$ et la différence $\mathbf{f} - \mathbf{f}_T$ est traitée comme une oscillation des données. Un choix classique est de prendre $\mathbf{f}_T = \int_T \mathbf{f}(x) / |T|$. De même, \mathbf{g} est approchée par la quantité notée \mathbf{g}_E définie pour tout $E \in E_h^N$.

Définition 3.3.1

L'estimateur résiduel global η et les contributions locales η_T sont définis par :

$$\begin{aligned} \eta &= \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T^2 \right)^{1/2}, \quad \eta_T = \left(\sum_{i=1}^8 \eta_{iT}^2 \right)^{1/2}, \\ \eta_{1T} &= h_T \|\mathbf{f}_T\|_T, \\ \eta_{2T} &= h_T^{1/2} \left(\sum_{E \in E_T^{int} \cup E_T^N} \|J_{E,n}(\mathbf{u}_h)\|_E^2 \right)^{1/2}, \\ \eta_{3T} &= h_T^{1/2} \|\lambda_{hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h)\|_{T \cap \Gamma_C}, \\ \eta_{4T} &= h_T^{1/2} \|\lambda_{ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h)\|_{T \cap \Gamma_C}, \\ \eta_{5T} &= \left(\int_{T \cap \Gamma_C} -\lambda_{hn} u_{hn} \right)^{1/2}, \\ \eta_{6T} &= \|\lambda_{hn-}\|_{T \cap \Gamma_C}, \\ \eta_{7T} &= \left(\int_{T \cap \Gamma_C} (|\lambda_{ht}| - \mu \lambda_{hn+})_- |u_{ht}| + \int_{T \cap \Gamma_C} (\lambda_{ht} u_{ht})_- \right)^{1/2}, \\ \eta_{8T} &= \|(|\lambda_{ht}| - \mu \lambda_{hn+})_+\|_{T \cap \Gamma_C}, \end{aligned}$$

où les notations $+$ et $-$ désignent respectivement les parties positives et négatives; $J_{E,n}(\mathbf{u}_h)$ désigne le saut de contrainte de \mathbf{u}_h dans la direction normale, i.e.,

$$J_{E,n}(\mathbf{u}_h) = \begin{cases} \llbracket \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \mathbf{n}_E \rrbracket_E, \forall E \in E_h^{int}, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \mathbf{n} - \mathbf{g}_E, \forall E \in E_h^N. \end{cases} \quad (3.6)$$

Les termes local et global d'oscillation de données sont définis par :

$$\zeta_T = \left(h_T^2 \sum_{T' \subset \omega_T} \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_{T'}\|_{T'}^2 + h_E \sum_{E \in E_T^N} \|\mathbf{g} - \mathbf{g}_E\|_E^2 \right)^{1/2}, \quad \zeta = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \zeta_T^2 \right)^{1/2}. \quad (3.7)$$

On voit qu'il y a huit contributions pour chaque estimateur local η_T . Il y a deux contributions classiques pour tous les éléments dont aucun côté n'appartient à Γ_C : η_{1T} le résidu d'équilibre et η_{2T} le terme de saut intérieur et sur le bord de Neumann. Les éléments restants sur la zone de contact ont six termes supplémentaires. Les termes η_{3T} et η_{4T} représentent la déviation des forces de traction de l'équilibre dans l'approximation par éléments finis mixtes, les termes η_{5T} et η_{6T} (respectivement η_{7T} et η_{8T}) représentent la non vérification des lois de contact unilatéral (3) (respectivement des conditions de frottement (4-5)).

3.3.3 Borne supérieure

On donne maintenant une borne supérieure de l'erreur de discrétisation. Dans le théorème suivant, on suppose que la solution du problème continu satisfait le critère d'unicité de [203].

Théorème 3.3.2

Soit $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ la solution du problème (3.1) telle que $\lambda_t = \mu \lambda_n \xi$, avec $\xi \in M$, $\xi \in \text{Dir}_t(u_t)$ sur Γ_C et $\mu \|\xi\|_M$ suffisamment petit. Soit $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h)$ une solution du problème discret (3.3). Alors

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} + \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_C} \lesssim \eta + \zeta.$$

Démonstration : Pour simplifier la notation, on pose $\mathbf{e}_u = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$. Soit $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$; de la \mathbf{V} -ellipticité de $a(\cdot, \cdot)$ et des équations d'équilibre de (3.1) et (3.3), on obtient :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_u\|_{1,\Omega}^2 &\lesssim a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \\ &= a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) + a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) \\ &= L(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) - b(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) + b(\boldsymbol{\lambda}_h - \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h). \end{aligned}$$

En intégrant par parties sur chaque triangle T , en utilisant la définition de $J_{E,n}(\mathbf{u}_h)$ dans (3.6) et les conditions complémentaires $\int_{\Gamma_C} \lambda_n u_n = \int_{\Gamma_C} \lambda_{hn} u_{hn} = 0$, on aboutit à :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_u\|_{1,\Omega}^2 &\lesssim \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) + \sum_{E \in E_h^N} \int_E (\mathbf{g} - \mathbf{g}_E) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \\ &\quad + b(\boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{v}_h) + b(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}_h) - \int_{\Gamma_C} \lambda_{ht} u_{ht} - \int_{\Gamma_C} \lambda_t u_t \\ &\quad - \sum_{E \in E_h^C} \int_E (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) - \sum_{E \in E_h^{\text{int}} \cup E_h^N} \int_E J_{E,n}(\mathbf{u}_h) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h). \end{aligned}$$

En partageant les intégrales sur Γ_C en composantes normale et tangentielle, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_u\|_{1,\Omega}^2 &\lesssim \int_{\Gamma_C} \lambda_n u_{hn} + \int_{\Gamma_C} \lambda_{hn} u_n + \int_{\Gamma_C} (\lambda_t - \lambda_{ht})(u_{ht} - u_t) + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \\ &\quad - \sum_{E \in E_h^{\text{int}} \cup E_h^N} \int_E J_{E,n}(\mathbf{u}_h) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) + \sum_{E \in E_h^N} \int_E (\mathbf{g} - \mathbf{g}_E) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{E \in E_h^C} \int_E (\lambda_{hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h))(v_{hn} - u_n) + \sum_{E \in E_h^C} \int_E (\lambda_{ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h))(v_{ht} - u_t) \\
= & \int_{\Gamma_C} \lambda_n u_{hn} + \int_{\Gamma_C} \lambda_{hn} u_n + \int_{\Gamma_C} (\lambda_t - \lambda_{ht})(u_{ht} - u_t) \\
& + I + II + III + IV + V.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

On a besoin d'estimer chaque terme à droite dans l'inégalité. Pour cela, on choisit

$$\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h + \pi_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \tag{3.9}$$

où π_h est l'opérateur de quasi-interpolation défini dans le Lemme 3.2.1.

On commence par le terme I . De la définition de \mathbf{v}_h et (3.4), on en tire :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_T = \|\mathbf{e}_\mathbf{u} - \pi_h \mathbf{e}_\mathbf{u}\|_T \lesssim h_T \|\mathbf{e}_\mathbf{u}\|_{1, \omega_T}$$

pour chaque triangle T . Cette estimation couplée avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que :

$$\begin{aligned}
|I| & \lesssim \sum_{T \in T_h} \|\mathbf{f}\|_T h_T \|\mathbf{e}_\mathbf{u}\|_{1, \omega_T} \\
& \lesssim \left(\sum_{T \in T_h} \|\mathbf{f}\|_T^2 h_T^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{T \in T_h} \|\mathbf{e}_\mathbf{u}\|_{1, \omega_T}^2 \right)^{1/2} \\
& \lesssim \left(\sum_{T \in T_h} \|\mathbf{f}_T\|_T^2 h_T^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{T \in T_h} \|\mathbf{e}_\mathbf{u}\|_{1, \omega_T}^2 \right)^{1/2} \\
& \quad + \left(\sum_{T \in T_h} \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_T\|_T^2 h_T^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{T \in T_h} \|\mathbf{e}_\mathbf{u}\|_{1, \omega_T}^2 \right)^{1/2} \\
& \lesssim \left(\sum_{T \in T_h} \eta_{1T}^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{e}_\mathbf{u}\|_{1, \Omega} + \left(\sum_{T \in T_h} \zeta_T^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{e}_\mathbf{u}\|_{1, \Omega} \\
& \lesssim (\eta + \zeta) \|\mathbf{e}_\mathbf{u}\|_{1, \Omega}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

On considère maintenant les termes intérieurs et sur le bord de Neumann dans (3.8) : comme précédemment l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz mène à :

$$|II| \leq \sum_{E \in E_h^{int} \cup E_h^N} \|J_{E,n}(\mathbf{u}_h)\|_E \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_E.$$

En utilisant l'expression (3.9) et l'estimation (3.5), on obtient

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_E = \|\mathbf{e}_\mathbf{u} - \pi_h \mathbf{e}_\mathbf{u}\|_E \lesssim h_E^{1/2} \|\mathbf{e}_\mathbf{u}\|_{1, \omega_E}.$$

En insérant cette estimation dans la précédente, on déduit que :

$$\begin{aligned}
|II| & \lesssim \left(\sum_{E \in E_h^{int} \cup E_h^N} \|J_{E,n}(\mathbf{u}_h)\|_E^2 h_E \right)^{1/2} \left(\sum_{T \in T_h} \|\mathbf{e}_\mathbf{u}\|_{1, \omega_E}^2 \right)^{1/2} \\
& \lesssim \left(\sum_{T \in T_h} \eta_{2T}^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{e}_\mathbf{u}\|_{1, \Omega} \\
& \lesssim \eta \|\mathbf{e}_\mathbf{u}\|_{1, \Omega}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

De plus

$$|III| \lesssim \zeta \|\mathbf{e}_u\|_{1,\Omega}. \quad (3.12)$$

Les deux termes restants sont traités de la même manière que les précédents. Ainsi

$$|IV| + |V| \lesssim \eta \|\mathbf{e}_u\|_{1,\Omega}. \quad (3.13)$$

Notons que $u_{hn} \leq 0$ sur Γ_C , donc

$$\int_{\Gamma_C} \lambda_n u_{hn} \leq 0, \quad (3.14)$$

et il reste à estimer deux termes dans (3.8). En utilisant la condition discrète complémentaire $\int_{\Gamma_C} \lambda_{hn} u_{hn} = 0$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_C} \lambda_{hn} u_n &= \int_{\Gamma_C} \lambda_{hn} (u_n - u_{hn}) = \int_{\Gamma_C} (\lambda_{hn+} - \lambda_{hn-}) (u_n - u_{hn}) \\ &\leq - \int_{\Gamma_C} \lambda_{hn+} u_{hn} - \int_{\Gamma_C} \lambda_{hn-} (u_n - u_{hn}) \\ &\leq \eta^2 - \int_{\Gamma_C} \lambda_{hn-} (u_n - u_{hn}) \\ &= \eta^2 + VI. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Le dernier terme dans l'expression précédente est estimé à l'aide des inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young :

$$|VI| \leq \sum_{E \in E_h^C} \|\lambda_{hn-}\|_E \|u_n - u_{hn}\|_E \leq \sum_{E \in E_h^C} \left(\alpha \|u_n - u_{hn}\|_E^2 + \frac{1}{4\alpha} \|\lambda_{hn-}\|_E^2 \right),$$

pour tout $\alpha > 0$. Un théorème standard de trace implique que :

$$|VI| \leq \alpha \|u_n - u_{hn}\|_{\Gamma_C}^2 + \frac{1}{4\alpha} \sum_{E \in E_h^C} \|\lambda_{hn-}\|_E^2 \lesssim \alpha \|\mathbf{e}_u\|_{1,\Omega}^2 + \frac{\eta^2}{4\alpha}. \quad (3.16)$$

Les estimations (3.15) et (3.16) donnent

$$\int_{\Gamma_C} \lambda_{hn} u_n \lesssim \alpha \|\mathbf{e}_u\|_{1,\Omega}^2 + \eta^2 \left(1 + \frac{1}{4\alpha} \right) \quad (3.17)$$

pour tout $\alpha > 0$.

On estime maintenant le terme de frottement :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_C} (\lambda_{ht} - \lambda_t)(u_t - u_{ht}) &= \int_{\Gamma_C} (\lambda_{ht} - \mu \lambda_{hn} \xi)(u_t - u_{ht}) + \int_{\Gamma_C} (\mu \lambda_{hn} \xi - \lambda_t)(u_t - u_{ht}) \\ &= \int_{\Gamma_C} (\lambda_{ht} - \mu \lambda_{hn} \xi)(u_t - u_{ht}) + \int_{\Gamma_C} \mu (\lambda_{hn} - \lambda_n) \xi (u_t - u_{ht}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

où $\xi \in M$, $\xi \in \text{Dir}_t(u_t)$, $\lambda_t = \mu\lambda_n\xi$. Le second terme de (3.18) est majoré comme suit :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_C} \mu(\lambda_{hn} - \lambda_n)\xi(u_t - u_{ht}) \right| &\leq \mu\|\xi\|_M \|u_t - u_{ht}\|_{W_t} \|\lambda_n - \lambda_{hn}\|_{W_t'} \\ &\lesssim \mu\|\xi\|_M \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_C} \\ &\lesssim \mu\|\xi\|_M \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} + \eta + \zeta). \end{aligned}$$

Dans la dernière inégalité, on a utilisé (3.23). On déduit de l'inégalité de Young :

$$\left| \int_{\Gamma_C} \mu(\lambda_{hn} - \lambda_n)\xi(u_t - u_{ht}) \right| \lesssim (1 + \alpha)\mu\|\xi\|_M \|\mathbf{e}_u\|_{1,\Omega}^2 + \frac{\mu\|\xi\|_M}{2\alpha} (\eta^2 + \zeta^2) \quad (3.19)$$

pour tout α positif.

De plus, le premier terme de (3.18) est traité comme suit :

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_C} (\lambda_{ht} - \mu\lambda_{hn}\xi)(u_t - u_{ht}) \\ = &\int_{\Gamma_C} \lambda_{ht}u_t - \int_{\Gamma_C} \mu\lambda_{hn+}\xi u_t + \int_{\Gamma_C} \mu\lambda_{hn+}\xi u_{ht} + \int_{\Gamma_C} \mu\lambda_{hn-}\xi(u_t - u_{ht}) - \int_{\Gamma_C} \lambda_{ht}u_{ht} \\ = &\int_{\Gamma_C} (\lambda_{ht}u_t - \mu\lambda_{hn+}|u_t|) + \int_{\Gamma_C} \mu\lambda_{hn+}\xi u_{ht} + \int_{\Gamma_C} \mu\lambda_{hn-}\xi(u_t - u_{ht}) - \int_{\Gamma_C} \lambda_{ht}u_{ht} \\ \leq &\int_{\Gamma_C} (|\lambda_{ht}| - \mu\lambda_{hn+})_+ |u_t| + \int_{\Gamma_C} (\mu\lambda_{hn+}|u_{ht}| - \lambda_{ht}u_{ht}) + \int_{\Gamma_C} \mu\lambda_{hn-}|u_t - u_{ht}| \\ \leq &\int_{\Gamma_C} (|\lambda_{ht}| - \mu\lambda_{hn+})_+ |u_t - u_{ht}| + \int_{\Gamma_C} (|\lambda_{ht}| - \mu\lambda_{hn+})_+ |u_{ht}| \\ &+ \int_{\Gamma_C} (\mu\lambda_{hn+}|u_{ht}| - |\lambda_{ht}||u_{ht}|) + \int_{\Gamma_C} \mu\lambda_{hn-}|u_t - u_{ht}| + \int_{\Gamma_C} (|\lambda_{ht}||u_{ht}| - \lambda_{ht}u_{ht}) \\ \lesssim &\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} (\|(|\lambda_{ht}| - \mu\lambda_{hn+})_+\|_{\Gamma_C} + \mu\|\lambda_{hn-}\|_{\Gamma_C}) \\ &+ \int_{\Gamma_C} [(|\lambda_{ht}| - \mu\lambda_{hn+})_+ |u_{ht}| - (|\lambda_{ht}| - \mu\lambda_{hn+}) |u_{ht}|] + 2 \int_{\Gamma_C} (\lambda_{ht}u_{ht})_- \\ \lesssim &\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} (\|(|\lambda_{ht}| - \mu\lambda_{hn+})_+\|_{\Gamma_C} + \mu\|\lambda_{hn-}\|_{\Gamma_C}) \\ &+ \int_{\Gamma_C} (|\lambda_{ht}| - \mu\lambda_{hn+})_- |u_{ht}| + \int_{\Gamma_C} (\lambda_{ht}u_{ht})_-. \end{aligned} \quad (3.20)$$

De (3.19) et (3.20), on obtient pour tout $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_C} (\lambda_{ht} - \lambda_t)(u_t - u_{ht}) &\lesssim (\alpha + (1 + \alpha)\mu\|\xi\|_M) \|\mathbf{e}_u\|_{1,\Omega}^2 \\ &+ \frac{\mu\|\xi\|_M + 2\alpha + 1 + \mu^2}{2\alpha} (\eta^2 + \zeta^2). \end{aligned} \quad (3.21)$$

En regroupant les estimations (3.10), (3.11), (3.12), (3.13), (3.14), (3.17) et (3.21) avec α suffisamment petit dans (3.8), et en utilisant l'inégalité de Young, on déduit que : si $\mu\|\xi\|_M$ est suffisamment petit alors

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} \lesssim \eta + \zeta. \quad (3.22)$$

On cherche maintenant une borne supérieure pour l'erreur de discrétisation $\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h$ correspondant aux multiplicateurs. Soient $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ et $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$. Des équations d'équilibre de (3.1) et (3.3), on déduit :

$$\begin{aligned} b(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{v}) &= b(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - b(\boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) + b(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{v}_h) \\ &= L(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - b(\boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) + a(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) \\ &= L(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - b(\boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h). \end{aligned}$$

Une intégration par parties sur chaque élément T aboutit à :

$$\begin{aligned} b(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}) - \sum_{E \in E_h^{\text{int}} \cup E_h^N} \int_E J_{E,n}(\mathbf{u}_h) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \\ &\quad - \sum_{E \in E_h^C} \int_E (\lambda_{hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h))(v_n - v_{hn}) - \sum_{E \in E_h^C} \int_E (\lambda_{ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h))(v_t - v_{ht}) \\ &\quad + \sum_{E \in E_h^N} \int_E (\mathbf{g} - \mathbf{g}_E) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h). \end{aligned}$$

En choisissant $\mathbf{v}_h = \pi_h \mathbf{v}$ où π_h est l'opérateur de quasi-interpolation défini au Lemme 3.2.1 et en accomplissant un calcul similaire à (3.10), (3.11), (3.12) et (3.13), on déduit que :

$$|b(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{v})| \lesssim (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} + \eta + \zeta) \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}$$

pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Par conséquent :

$$\|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_C} \lesssim \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} + \eta + \zeta. \quad (3.23)$$

Le résultat en découle en regroupant les deux estimations (3.22) et (3.23). ■

3.3.4 Borne inférieure

On rappelle quelques outils au préalable tels que les inégalités inverses [231] et les fonctions bulles :

Proposition 3.3.1 (Fonctions bulles)

Les coordonnées barycentriques de x dans le triangle T sont notées $\beta_{T,1}(x), \beta_{T,2}(x)$ et $\beta_{T,3}(x)$. On définit la fonction bulle $0 \leq b_T \leq 1$ associée au triangle T par :

$$b_T = \begin{cases} 27\beta_{T,1}\beta_{T,2}\beta_{T,3} & \text{sur } T, \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus T. \end{cases}$$

Soit E un côté entre T_1 et T_2 . On note $\beta_{T_i,1}$ et $\beta_{T_i,2}$ les fonctions de base associées aux extrémités du côté. La fonction bulle $0 \leq b_E \leq 1$ associée au côté E est définie par :

$$b_E = \begin{cases} 4\beta_{T_i,1}\beta_{T_i,2} & \text{sur } T_i, i = 1, 2, \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus (T_1 \cup T_2). \end{cases}$$

Cette définition peut s'étendre aux côtés du bord.

Proposition 3.3.2 (Inégalités inverses)

Soit r un entier positif. Pour tout polynôme v de $P_r(T)$

$$c\|v\|_T \leq \|vb_T^{1/2}\|_T \leq c'\|v\|_T$$

$$\|vb_T\|_{1,T} \leq ch_T^{-1}\|v\|_T$$

Pour tout polynôme v de $P_r(E)$

$$c\|v\|_E \leq \|vb_E^{1/2}\|_E \leq c'\|v\|_E$$

En définissant $L_{E,T}$ opérateur de relèvement des polynômes de $P_r(E)$ s'annulant sur ∂E en des polynômes sur T s'annulant sur $\partial T \setminus E$, on a pour tout triangle T possédant E comme côté :

$$\|L_{E,T}(v)b_E\|_T \leq ch_E^{1/2}\|v\|_E$$

$$\|L_{E,T}(v)b_E\|_{1,T} \leq ch_E^{1/2}h_T^{-1}\|v\|_E$$

Les constantes dépendent encore du paramètre de régularité σ mais sont plus faciles à évaluer.

Remarque 3.3.1

Les inégalités inverses se démontrent par passage à l'élément de référence, grâce à l'équivalence des normes sur un espace de dimension finie.

Théorème 3.3.3

Soient $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h)$ une solution du problème discret (3.3) et $\eta = \eta(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h)$ l'estimateur correspondant. Soit $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ une solution du problème (3.1) telle que $\boldsymbol{\lambda} \in (L^2(\Gamma_C))^2$. Pour tous les éléments T , les bornes inférieures locales suivantes ont lieu :

$$\eta_{1T} \lesssim \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,T} + \zeta_T, \quad (3.24)$$

$$\eta_{2T} \lesssim \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\omega_T} + \zeta_T. \quad (3.25)$$

Pour tous les éléments T possédant un côté sur Γ_C (i.e. $T \cap \Gamma_C = E$), les bornes locales inférieures sont obtenues :

$$\eta_{iT} \lesssim h_T^{1/2} \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,T} + \zeta_T, \quad i = 3, 4, \quad (3.26)$$

$$\eta_{jT} \leq 2(1 + \mu) \left(\|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E + \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E^{1/2} \|\mathbf{u}\|_E^{1/2} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E^{1/2} \|\boldsymbol{\lambda}\|_E^{1/2} \right), \quad j = 5, 7, \quad (3.27)$$

$$\eta_{lT} \leq (1 + \mu) \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E, \quad l = 6, 8. \quad (3.28)$$

Démonstration : On précise que l'on ne suppose pas que la solution du problème continu est unique. Bien sûr, notre résultat reste valide lorsque $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ est l'unique solution donnée par la Proposition 3.1.1. Notons également que la solution du problème discret n'est pas supposée unique.

Les estimations de η_{1T} et η_{2T} dans (3.24) et (3.25) sont standard ([231]). En effet,

$$\|\mathbf{f}_T\|_T = \|\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) + \mathbf{f}_T\|_T$$

Or, par l'élasticité linéaire, une inégalité inverse et l'inégalité de Korn :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) + \mathbf{f}_T\|_T^2 &\lesssim \int_T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(b_T(\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) + \mathbf{f}_T)) \\ &\quad - \int_T (\mathbf{f} - \mathbf{f}_T)(b_T(\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) + \mathbf{f}_T)) \\ &\quad - \int_{\Gamma_N} (\mathbf{g} - \mathbf{g}_E)(b_T(\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) + \mathbf{f}_T)) \\ &\lesssim (h_T^{-1}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,T} + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_T\|_T)\|b_T(\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) + \mathbf{f}_T)\|_T \end{aligned}$$

où b_T désigne la fonction bulle sur E (nulle sur Γ_N). Ainsi

$$\|\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) + \mathbf{f}_T\|_T \lesssim h_T^{-1}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,T} + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_T\|_T$$

D'où

$$\begin{aligned} h_T\|\mathbf{f}_T\|_T &\lesssim \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,T} + h_T\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_T\|_T \\ &\lesssim \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,T} + \zeta_T. \end{aligned}$$

D'où le résultat pour η_{1T} . Pour η_{2T} , on distingue le cas des côtés intérieurs et des côtés appartenant au bord de Neumann. De plus, on sait qu'en utilisant $w_E = b_E L_{E,T}[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\mathbf{n}_E]_E$, pour $E \in E_T^{int}$:

$$\|[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\mathbf{n}_E]_E\|_E \lesssim (h_E^{-1}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\omega_E} + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_T\|_{\omega_E} + \sum_{T' \subset \omega_E} \|\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) + \mathbf{f}_T\|_{T'})\|w_E\|_{\omega_E}$$

D'où en utilisant le résultat pour η_1 et une inégalité inverse

$$h_E^{1/2}\|[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\mathbf{n}_E]_E\|_E \lesssim \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\omega_T} + \zeta_T$$

D'autre part, en utilisant $w_E = b_E L_{E,T}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\mathbf{n} - \mathbf{g}_E)$, pour tout $E \in E_T^N$, on obtient :

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\mathbf{n} - \mathbf{g}_E\|_E &\lesssim (h_E^{-1}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\omega_E} + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_T\|_{\omega_E} + \|\mathbf{g} - \mathbf{g}_E\|_E \\ &\quad + \sum_{T' \subset \omega_E} \|\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) + \mathbf{f}_T\|_{T'})\|w_E\|_{\omega_E} \end{aligned}$$

D'où

$$h_E^{1/2}\|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\mathbf{n} - \mathbf{g}_E\|_E \lesssim \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\omega_T} + \zeta_T$$

On estime à présent η_{3T} . En écrivant $\mathbf{w}_E = w_{En}\mathbf{n} + w_{Et}\mathbf{t}$ sur $E \in E_T^C$ et en choisissant $w_{En} = (\lambda_{hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h))b_E$ et $w_{Et} = 0$ pour l'élément T contenant E (ici on fait un petit

abus de notation afin de simplifier) et $\mathbf{w}_E = \mathbf{0}$ dans $\bar{\Omega} \setminus T$. Ainsi

$$\begin{aligned}
 \|\lambda_{hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h)\|_E^2 &\sim \int_E (\lambda_{hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h)) w_{En} \\
 &= b(\boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{w}_E) + \int_T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_E) \\
 &= b(\boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{w}_E) - \int_T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_E) + \int_T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_E) \\
 &= b(\boldsymbol{\lambda}_h - \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{w}_E) + L(\mathbf{w}_E) - \int_T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_E) \\
 &\lesssim \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E \|\mathbf{w}_E\|_E + \|\mathbf{f}\|_T \|\mathbf{w}_E\|_T + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,T} \|\mathbf{w}_E\|_{1,T}.
 \end{aligned}$$

Une inégalité inverse et l'estimation (3.24) impliquent

$$\begin{aligned}
 h_T^{1/2} \|\lambda_{hn} + \sigma_n(\mathbf{u}_h)\|_E &\lesssim h_T^{1/2} \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,T} + h_T \|\mathbf{f}\|_T \\
 &\lesssim h_T^{1/2} \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,T} + \zeta_T.
 \end{aligned}$$

Cette estimation donne la borne de η_{3T} dans (3.26). L'estimation pour η_{4T} dans (3.26) est obtenue comme précédemment en choisissant $w_{En} = 0$ et $w_{Et} = (\lambda_{ht} + \sigma_t(\mathbf{u}_h)) b_E$.

On considère maintenant η_{5T} . Si $E \in E_T^C$, soit $F \subset E$ la partie du côté où $\lambda_{hn} = \lambda_{hn+}$. Donc

$$\begin{aligned}
 \int_E -\lambda_{hn+} u_{hn} &= \int_F -\lambda_{hn} u_{hn} \\
 &= \int_F (\lambda_{hn} - \lambda_n)(u_n - u_{hn}) - \int_F \lambda_{hn} u_n - \int_F \lambda_n u_{hn} \\
 &= \int_F (\lambda_{hn} - \lambda_n)(u_n - u_{hn}) - \int_F (\lambda_{hn} - \lambda_n) u_n - \int_F \lambda_n (u_{hn} - u_n) \\
 &\leq \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E + \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E \|\mathbf{u}\|_E + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E \|\boldsymbol{\lambda}\|_E.
 \end{aligned}$$

La dernière estimation donne la borne de η_{5T} dans (3.27) en prenant la racine carrée.

L'estimation de η_{6T} dans (3.28) est évidente. Comme $\lambda_n \geq 0$, on a $0 \leq \lambda_{hn-} \leq |\lambda_n - \lambda_{hn}|$ sur Γ_C . Ainsi

$$\|\lambda_{hn-}\|_E \leq \|\lambda_n - \lambda_{hn}\|_E \leq \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E.$$

Puis on estime η_{7T} . Si $E \in E_T^C$, soit $F \subset E$ la partie du côté où $-(|\lambda_{ht}| - \mu \lambda_{hn+}) = (|\lambda_{ht}| - \mu \lambda_{hn+})_-$. Donc

$$\begin{aligned}
 &\int_E (|\lambda_{ht}| - \mu \lambda_{hn+})_- |u_{ht}| + \int_E (\lambda_{ht} u_{ht})_- \\
 &= \int_F (-|\lambda_{ht}| + \mu \lambda_{hn+}) |u_{ht}| + \int_E (\lambda_{ht} u_{ht})_- \\
 &= \int_F (-|\lambda_{ht}| + \mu \lambda_{hn}) |u_{ht}| + \int_E (\lambda_{ht} u_{ht})_- + \int_F \mu \lambda_{hn-} |u_{ht}|. \tag{3.29}
 \end{aligned}$$

Le premier terme de (3.29) est estimé comme suit en utilisant (4-5) :

$$- \int_F (|\lambda_{ht}| - \mu \lambda_{hn}) |u_{ht}|$$

$$\begin{aligned}
 &= - \int_F (|\lambda_{ht}| - |\lambda_t| - \mu(\lambda_{hn} - \lambda_n))(|u_{ht}| - |u_t|) \\
 &\quad - \int_F (|\lambda_{ht}| - |\lambda_t| - \mu(\lambda_{hn} - \lambda_n))|u_t| - \int_F (|\lambda_t| - \mu\lambda_n)(|u_{ht}| - |u_t|) \\
 &\leq (1 + \mu) (\|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E + \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E \|\mathbf{u}\|_E + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E \|\boldsymbol{\lambda}\|_E).
 \end{aligned}$$

Le second terme de (3.29) est borné en remarquant que $\lambda_t u_t \geq 0$ sur Γ_C . Donc

$$\begin{aligned}
 0 \leq (\lambda_{ht} u_{ht})_- &\leq |\lambda_t u_t - \lambda_{ht} u_{ht}| \\
 &= |\lambda_t(u_t - u_{ht}) + (\lambda_t - \lambda_{ht})(u_{ht} - u_t) + (\lambda_t - \lambda_{ht})u_t|.
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_E (\lambda_{ht} u_{ht})_- \leq \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E + \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E \|\mathbf{u}\|_E + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E \|\boldsymbol{\lambda}\|_E.$$

Le troisième terme de (3.29) mène (en utilisant l'estimation de η_{6T}) à :

$$\int_F \mu \lambda_{hn-} |u_{ht}| \leq \int_E \mu \lambda_{hn-} |u_{ht} - u_t| + \int_E \mu \lambda_{hn-} |u_t| \leq \mu \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E + \|\mathbf{u}\|_E).$$

Ainsi la borne de η_{7T} est prouvée. On termine par l'estimation de η_{8T} . On a

$$0 \leq (|\lambda_{ht}| - \mu \lambda_{hn+})_+ = (|\lambda_{ht}| - \mu \lambda_{hn} - \mu \lambda_{hn-})_+ \leq (|\lambda_{ht}| - \mu \lambda_{hn})_+.$$

Comme $|\lambda_t| - \mu \lambda_n \leq 0$, on obtient

$$(|\lambda_{ht}| - \mu \lambda_{hn})_+ \leq \|\lambda_{ht}| - |\lambda_t| - \mu \lambda_{hn} + \mu \lambda_n\| \leq |\lambda_{ht} - \lambda_t| + \mu |\lambda_{hn} - \lambda_n|$$

Ainsi

$$\|(|\lambda_{ht}| - \mu \lambda_{hn+})_+\|_E \leq \|\lambda_t - \lambda_{ht}\|_E + \mu \|\lambda_n - \lambda_{hn}\|_E \leq (1 + \mu) \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_E. \quad \blacksquare$$

Remarque 3.3.2

Supposons que $\mathbf{u} \in (H^2(\Omega))^2$ (donc $\boldsymbol{\lambda} \in (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C))^2$), et que l'estimation d'erreur a priori optimale ait lieu (cette question est entièrement ouverte et la présente remarque est simplement destinée à illustrer notre résultat) et on définit :

$$\eta_i = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{iT}^2 \right)^{1/2}, \quad 1 \leq i \leq 8.$$

Alors on aurait $\eta_i \lesssim h, 1 \leq i \leq 4$; $\eta_j \lesssim h^{1/4}, j = 5, 7$; $\eta_l \lesssim h^{1/2}, l = 6, 8$. Donc $\eta \lesssim h^{1/4}$.

3.4 Une seconde discrétisation par éléments finis

Le but de cette section est de considérer une discrétisation par éléments finis des conditions de contact et de frottement qui permet d'obtenir un estimateur d'erreur plus simple. Plus précisément on utilise une formule de quadrature différente pour les conditions de contact frottant (voir [147] pour les premières idées).

3.4.1 Description

Pour tout $\boldsymbol{\nu} = (\nu_{hn}, \nu_{ht}) \in W_h \times W_h$ et $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$, on définit la forme bilinéaire $c(.,.)$ telle que

$$c(\boldsymbol{\nu}_h, \mathbf{v}_h) = \int_{\Gamma_C} (I_h(\nu_{hn}v_{hn}) + I_h(\nu_{ht}v_{ht})) \, d\Gamma$$

où I_h est l'opérateur classique d'interpolation de Lagrange affine par morceaux aux nœuds de $\overline{\Gamma_C}$. Soit $K_{hn} = \{\nu_h \in W_h : \nu_h \geq 0\}$ le cône convexe fermé des fonctions positives de W_h . Pour $g \in K_{hn}$, on pose $K_{ht}(g) = \{\nu_h \in W_h : |\nu_h| \leq g\}$.

Ensuite, on considère le problème suivant :

trouver $\tilde{\mathbf{u}}_h \in \mathbf{V}_h$ et $(\tilde{\lambda}_{hn}, \tilde{\lambda}_{ht}) = \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h \in \mathbf{K}_h(\mu\tilde{\lambda}_{hn}) = K_{hn} \times K_{ht}(\mu\tilde{\lambda}_{hn})$ satisfaisant :

$$\begin{cases} a(\tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) + c(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h, \mathbf{v}_h) = L(\mathbf{v}_h), & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ c(\boldsymbol{\nu}_h - \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h, \tilde{\mathbf{u}}_h) \leq 0, & \forall \boldsymbol{\nu}_h = (\nu_{hn}, \nu_{ht}) \in \mathbf{K}_h(\mu\tilde{\lambda}_{hn}). \end{cases} \quad (3.30)$$

Les conditions de contact avec frottement discrètes incorporées dans l'inégalité de (3.30) sont les suivantes :

Proposition 3.4.1

Soit $(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h)$ une solution de (3.30). Supposons $\dim(W_h) = p$ et soient ψ_{x_i} , $1 \leq i \leq p$ les fonctions de base de W_h sur Γ_C . Soient \tilde{U}_N et \tilde{U}_T les vecteurs de composantes les valeurs nodales de \tilde{u}_{hn} et \tilde{u}_{ht} respectivement et soient \tilde{L}_N et \tilde{L}_T les vecteurs de composantes respectives les valeurs nodales de $\tilde{\lambda}_{hn}$ et $\tilde{\lambda}_{ht}$. Alors les conditions discrètes de contact frottant de (3.30) sont les suivantes pour tout $1 \leq i \leq p$:

$$(\tilde{L}_N)_i \geq 0, \quad (\tilde{U}_N)_i \leq 0, \quad (\tilde{L}_N)_i(\tilde{U}_N)_i = 0, \quad (3.31)$$

$$|(\tilde{L}_T)_i| \leq \mu(\tilde{L}_N)_i, \quad (3.32)$$

$$|(\tilde{L}_T)_i| < \mu(\tilde{L}_N)_i \implies (\tilde{U}_T)_i = 0, \quad (3.33)$$

$$(\tilde{L}_T)_i(\tilde{U}_T)_i \geq 0. \quad (3.34)$$

Démonstration : De $\tilde{\lambda}_{hn} \in K_{hn}$, on a immédiatement la première condition de (3.31). La condition

$$\int_{\Gamma_C} I_h((\nu_{hn} - \tilde{\lambda}_{hn})\tilde{u}_{hn}) \, d\Gamma \leq 0, \quad \forall \nu_{hn} \in K_{hn}$$

est équivalente à :

$$\int_{\Gamma_C} I_h(\nu_{hn}\tilde{u}_{hn}) \, d\Gamma \leq 0, \quad \forall \nu_{hn} \in K_{hn} \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma_C} I_h(\tilde{\lambda}_{hn}\tilde{u}_{hn}) \, d\Gamma = 0. \quad (3.35)$$

En choisissant dans l'inégalité de (3.35), $\nu_{hn} = \psi_{x_i}$ et en écrivant

$$\int_{\Gamma_C} I_h(\psi_{x_i}\tilde{u}_{hn}) \, d\Gamma = \tilde{u}_{hn}(x_i) \int_{\Gamma_C} \psi_{x_i} \, d\Gamma,$$

on aboutit à la seconde inégalité de (3.31).

L'égalité $\int_{\Gamma_C} I_h(\tilde{\lambda}_{hn}\tilde{u}_{hn}) d\Gamma = \sum_{i=1}^p \tilde{\lambda}_{hn}(x_i)\tilde{u}_{hn}(x_i) \int_{\Gamma_C} \psi_{x_i} d\Gamma = 0$ implique $(\tilde{L}_N)_i(\tilde{U}_N)_i = 0$, $1 \leq i \leq p$.

L'inégalité (3.32) provient directement de $\tilde{\lambda}_{ht} \in K_{ht}(\mu\tilde{\lambda}_{hn})$. Comme

$$\int_{\Gamma_C} I_h((\nu_{ht} - \tilde{\lambda}_{ht})\tilde{u}_{ht}) d\Gamma \leq 0, \quad \forall \nu_{ht} \in K_{ht}(\mu\tilde{\lambda}_{hn}) \quad (3.36)$$

on choisit ν_{ht} dans (3.36) comme suit : $\nu_{ht} = \mu\tilde{\lambda}_{hn}$ au nœud x_i et $\nu_{ht} = \tilde{\lambda}_{ht}$ aux $p - 1$ autres nœuds. On obtient

$$\int_{\Gamma_C} I_h((\nu_{ht} - \tilde{\lambda}_{ht})\tilde{u}_{ht})d\Gamma = (\mu\tilde{\lambda}_{hn}(x_i) - \tilde{\lambda}_{ht}(x_i))\tilde{u}_{ht}(x_i) \int_{\Gamma_C} \psi_{x_i}d\Gamma \leq 0. \quad (3.37)$$

Similairement, on prend $\nu_{ht} = -\mu\tilde{\lambda}_{hn}$ au nœud x_i et $\nu_{ht} = \tilde{\lambda}_{ht}$ aux $p - 1$ autres nœuds. On obtient

$$\int_{\Gamma_C} I_h((\nu_{ht} - \tilde{\lambda}_{ht})\tilde{u}_{ht})d\Gamma = (-\mu\tilde{\lambda}_{hn}(x_i) - \tilde{\lambda}_{ht}(x_i))\tilde{u}_{ht}(x_i) \int_{\Gamma_C} \psi_{x_i}d\Gamma \leq 0. \quad (3.38)$$

En regroupant (3.37) et (3.38), on déduit (3.33).

Il reste à prouver (3.34). On définit ν_{ht} dans (3.36) comme suit : $\nu_{ht} = \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_{ht}$ au nœud x_i et $\nu_{ht} = \tilde{\lambda}_{ht}$ aux $p - 1$ autres nœuds. Ainsi

$$\int_{\Gamma_C} I_h((\nu_{ht} - \tilde{\lambda}_{ht})\tilde{u}_{ht}) d\Gamma = -\frac{1}{2}\tilde{\lambda}_{ht}(x_i)\tilde{u}_{ht}(x_i) \int_{\Gamma_C} \psi_{x_i} d\Gamma \leq 0.$$

D'où l'inégalité (3.34). ■

3.4.2 Etude de l'existence et de l'unicité de la solution

Proposition 3.4.2

Pour tout μ positif, le problème (3.30) admet au moins une solution.

Démonstration : Soit $\mu > 0$ donné. On introduit le problème de frottement $P(\tilde{g}_{hn})$ avec un seuil donné $\mu\tilde{g}_{hn}$ où $\tilde{g}_{hn} \in K_{hn}$.

Il consiste à trouver $\tilde{\mathbf{u}}_h \in \mathbf{V}_h$ et $(\tilde{\lambda}_{hn}, \tilde{\lambda}_{ht}) = \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h \in \mathbf{K}_h(\mu\tilde{g}_{hn}) = K_{hn} \times K_{ht}(\mu\tilde{g}_{hn})$ satisfaisant :

$$P(\tilde{g}_{hn}) \begin{cases} a(\tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) + c(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h, \mathbf{v}_h) = L(\mathbf{v}_h), & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ c(\boldsymbol{\nu}_h - \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h, \tilde{\mathbf{u}}_h) \leq 0, & \forall \boldsymbol{\nu}_h = (\nu_{hn}, \nu_{ht}) \in \mathbf{K}_h(\mu\tilde{g}_{hn}). \end{cases} \quad (3.39)$$

Le problème (3.39) est équivalent à trouver un point selle $(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\lambda}_{hn}, \tilde{\lambda}_{ht}) = (\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h) \in \mathbf{V}_h \times \mathbf{K}_h(\mu\tilde{g}_{hn})$ vérifiant

$$\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}_h, \boldsymbol{\nu}_h) \leq \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h) \leq \mathcal{L}(\mathbf{v}_h, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \forall \boldsymbol{\nu}_h \in \mathbf{K}_h(\mu\tilde{g}_{hn}),$$

où

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\nu}_h) = \frac{1}{2}a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_C} I_h(\nu_{hn}v_{hn}) d\Gamma + \int_{\Gamma_C} I_h(\nu_{ht}v_{ht}) d\Gamma - L(\mathbf{v}_h).$$

En utilisant des arguments standards de problèmes de point selle comme dans [112] (Theorème 3.9, p.339), on déduit qu'il existe un tel point selle. La stricte convexité de $a(.,.)$ implique que le premier argument $\tilde{\mathbf{u}}_h$ est unique. En supposant que le second argument n'est pas unique, l'égalité (3.39) implique :

$$c(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h^1 - \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h^2, \mathbf{v}_h) = 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h.$$

La définition de W_h nous permet de choisir $\mathbf{v}_h = \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h^1 - \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h^2$ sur Γ_C . D'après la définition de $c(.,.)$, on aboutit à la conclusion que $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h^1 - \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h^2 = \mathbf{0}$. Par conséquent, le second argument $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h$ est unique et (3.39) admet une unique solution. Le lemme suivant est une conséquence directe de la définition des problèmes (3.30) et (3.39).

Lemme 3.4.1

Les solutions du problème discret de contact avec frottement (3.30) sont les solutions de $P(\tilde{\lambda}_{hn})$ où $\tilde{\lambda}_{hn}$ est un point fixe de Φ_h . La fonction Φ_h est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \Phi_h : K_{hn} &\longrightarrow K_{hn} \\ \tilde{g}_{hn} &\longmapsto \tilde{\lambda}_{hn}, \end{aligned}$$

où $(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h)$ est la solution de $P(\tilde{g}_{hn})$.

Pour établir l'existence d'un point fixe de Φ_h , on utilise le théorème de Brouwer.

Etape 1. Tout d'abord, on prouve que l'application Φ_h est continue.

On pose $\tilde{\mathbf{V}}_h = \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h : v_{ht} = 0 \text{ sur } \Gamma_C\}$. De la définition de W_h , il est facile de vérifier que la définition de $\|\cdot\|_{-\frac{1}{2},h}$ donnée par :

$$\|\nu\|_{-\frac{1}{2},h} = \sup_{\mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h} \frac{\int_{\Gamma_C} I_h(\nu v_{hn}) d\Gamma}{\|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}},$$

est une norme sur W_h . Soient $(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\lambda}_{hn}, \tilde{\lambda}_{ht})$ et $(\overline{\mathbf{u}}_h, \overline{\lambda}_{hn}, \overline{\lambda}_{ht})$ les solutions de $P(\tilde{g}_{hn})$ et $P(\overline{g}_{hn})$ respectivement. D'une part, on a :

$$\begin{aligned} a(\tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_C} I_h(\tilde{\lambda}_{hn} v_{hn}) d\Gamma &= L(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h, \\ a(\overline{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_C} I_h(\overline{\lambda}_{hn} v_{hn}) d\Gamma &= L(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h. \end{aligned}$$

En soustrayant les égalités précédentes et en utilisant la continuité de la forme bilinéaire $a(.,.)$, on a

$$\int_{\Gamma_C} I_h((\tilde{\lambda}_{hn} - \overline{\lambda}_{hn}) v_{hn}) d\Gamma = a(\overline{\mathbf{u}}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) \lesssim \|\tilde{\mathbf{u}}_h - \overline{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega} \quad \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h.$$

Ainsi nous avons une première estimation

$$\|\tilde{\lambda}_{hn} - \overline{\lambda}_{hn}\|_{-\frac{1}{2},h} \lesssim \|\tilde{\mathbf{u}}_h - \overline{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega}. \tag{3.40}$$

D'autre part, (3.30) donne :

$$a(\tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_C} I_h(\tilde{\lambda}_{hn} v_{hn}) d\Gamma + \int_{\Gamma_C} I_h(\tilde{\lambda}_{ht} v_{ht}) d\Gamma = L(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad (3.41)$$

$$a(\overline{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_C} I_h(\overline{\lambda}_{hn} v_{hn}) d\Gamma + \int_{\Gamma_C} I_h(\overline{\lambda}_{ht} v_{ht}) d\Gamma = L(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h. \quad (3.42)$$

En choisissant $\mathbf{v}_h = \tilde{\mathbf{u}}_h - \overline{\mathbf{u}}_h$ dans (3.41) et $\mathbf{v}_h = \overline{\mathbf{u}}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h$ dans (3.42), on obtient par addition :

$$\begin{aligned} a(\tilde{\mathbf{u}}_h - \overline{\mathbf{u}}_h, \tilde{\mathbf{u}}_h - \overline{\mathbf{u}}_h) &= \int_{\Gamma_C} I_h((\overline{\lambda}_{hn} - \tilde{\lambda}_{hn})(\tilde{u}_{hn} - \overline{u}_{hn})) d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_C} I_h((\overline{\lambda}_{ht} - \tilde{\lambda}_{ht})(\tilde{u}_{ht} - \overline{u}_{ht})) d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Notons que l'inégalité dans (3.39) est équivalente aux deux conditions suivantes :

$$\int_{\Gamma_C} I_h((\nu_{hn} - \tilde{\lambda}_{hn})\tilde{u}_{hn}) d\Gamma \leq 0, \quad \forall \nu_{hn} \in K_{hn}, \quad (3.44)$$

$$\int_{\Gamma_C} I_h((\nu_{ht} - \tilde{\lambda}_{ht})\tilde{u}_{ht}) d\Gamma \leq 0, \quad \forall \nu_{ht} \in K_{ht}(\mu\tilde{g}_{hn}). \quad (3.45)$$

D'après la définition de K_{hn} , on peut choisir $\nu_{hn} = 0$ et $\nu_{hn} = 2\tilde{\lambda}_{hn}$ dans (3.44) ce qui aboutit à :

$$\int_{\Gamma_C} I_h(\tilde{\lambda}_{hn}\tilde{u}_{hn}) d\Gamma = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma_C} I_h(\nu_{hn}\tilde{u}_{hn}) d\Gamma \leq 0, \quad \forall \nu_{hn} \in K_{hn},$$

duquel on déduit que :

$$\int_{\Gamma_C} I_h((\overline{\lambda}_{hn} - \tilde{\lambda}_{hn})(\tilde{u}_{hn} - \overline{u}_{hn})) d\Gamma \leq 0.$$

Ainsi (3.43) devient :

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_h - \overline{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega}^2 \lesssim \int_{\Gamma_C} I_h((\overline{\lambda}_{ht} - \tilde{\lambda}_{ht})(\tilde{u}_{ht} - \overline{u}_{ht})) d\Gamma. \quad (3.46)$$

De la définition de $K_{ht}(\mu\tilde{g}_{hn})$, on a

$$\int_{\Gamma_C} I_h(\tilde{\lambda}_{ht}\overline{u}_{ht}) d\Gamma \leq \int_{\Gamma_C} I_h(|\tilde{\lambda}_{ht}||\overline{u}_{ht}|) d\Gamma \leq \int_{\Gamma_C} I_h(\mu\tilde{g}_{hn}|\overline{u}_{ht}|) d\Gamma.$$

Une expression similaire peut être obtenue en intégrant le terme $I_h(\overline{\lambda}_{ht}\tilde{u}_{ht})$. De plus (3.45) donne

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma_C} I_h(\tilde{\lambda}_{ht}\tilde{u}_{ht}) d\Gamma &\leq - \int_{\Gamma_C} I_h(\nu_{ht}\tilde{u}_{ht}) d\Gamma \\ &= - \sum_{i=1}^p \nu_{ht}(x_i)\tilde{u}_{ht}(x_i) \int_{\Gamma_C} \psi_{x_i} d\Gamma, \quad \forall \nu_{ht} \text{ tel que } |\nu_{ht}| \leq \mu\tilde{g}_{hn}. \end{aligned}$$

Si $\tilde{u}_{ht}(x_i) \geq 0$, on prend $\nu_{ht}(x_i) = \mu\tilde{g}_{hn}(x_i)$ et si $\tilde{u}_{ht}(x_i) \leq 0$, on choisit $\nu_{ht}(x_i) = -\mu\tilde{g}_{hn}(x_i)$. Ceci mène à la borne suivante :

$$-\int_{\Gamma_C} I_h(\tilde{\lambda}_{ht}\tilde{u}_{ht}) d\Gamma \leq -\mu \sum_{i=1}^p \tilde{g}_{hn}(x_i) |\tilde{u}_{ht}(x_i)| \int_{\Gamma_C} \psi_{x_i} d\Gamma = -\int_{\Gamma_C} I_h(\mu\tilde{g}_{hn} |\tilde{u}_{ht}|) d\Gamma.$$

Puis on obtient un résultat similaire en intégrant le terme $I_h(\overline{\lambda_{ht}\overline{u_{ht}}})$. Finalement, (3.46) devient

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{u}}_h - \overline{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega}^2 &\lesssim \mu \int_{\Gamma_C} I_h((\tilde{g}_{hn} - \overline{g_{hn}})(|\overline{u_{ht}}| - |\tilde{u}_{ht}|)) d\Gamma \\ &\leq \mu \int_{\Gamma_C} I_h(|\tilde{g}_{hn} - \overline{g_{hn}}| |\overline{u_{ht}} - \tilde{u}_{ht}|) d\Gamma \\ &= \mu \sum_{i=1}^p |(\tilde{g}_{hn} - \overline{g_{hn}})(x_i)| |(\overline{u_{ht}} - \tilde{u}_{ht})(x_i)| \int_{\Gamma_C} \psi_{x_i} d\Gamma \\ &\lesssim \mu \left(\sum_{i=1}^p |(\tilde{g}_{hn} - \overline{g_{hn}})(x_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^p |(\overline{u_{ht}} - \tilde{u}_{ht})(x_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \mu C(h) \|\tilde{g}_{hn} - \overline{g_{hn}}\|_{-\frac{1}{2},h} \|\overline{\mathbf{u}}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

où l'équivalence des normes en dimension finie a été utilisée ainsi que le théorème de trace. La combinaison de (3.47) et (3.40) implique qu'il existe une constante $C(h)$ telle que

$$\|\tilde{\lambda}_{hn} - \overline{\lambda_{hn}}\|_{-\frac{1}{2},h} \lesssim \mu C(h) \|\tilde{g}_{hn} - \overline{g_{hn}}\|_{-\frac{1}{2},h}. \quad (3.48)$$

Ainsi Φ_h est continue.

Etape 2. Soit $(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\lambda}_{hn}, \tilde{\lambda}_{ht})$ la solution de $P(\tilde{g}_{hn})$. En prenant $\mathbf{v}_h = \tilde{\mathbf{u}}_h$ dans (3.39) on a

$$a(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\mathbf{u}}_h) + \int_{\Gamma_C} I_h(\tilde{\lambda}_{hn}\tilde{u}_{hn}) d\Gamma + \int_{\Gamma_C} I_h(\tilde{\lambda}_{ht}\tilde{u}_{ht}) d\Gamma = L(\tilde{\mathbf{u}}_h). \quad (3.49)$$

Sachant que :

$$\int_{\Gamma_C} I_h(\tilde{\lambda}_{hn}\tilde{u}_{hn}) d\Gamma = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma_C} I_h(\tilde{\lambda}_{ht}\tilde{u}_{ht}) d\Gamma \geq 0,$$

on déduit de (3.49), de la \mathbf{V} -ellipticité de $a(\cdot, \cdot)$ et de la continuité de $L(\cdot)$:

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega}^2 \lesssim a(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\mathbf{u}}_h) \leq L(\tilde{\mathbf{u}}_h) \lesssim \|\tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega}.$$

On déduit alors que $\|\tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega}$ est borné. Par ailleurs

$$a(\tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) + \int_{\Gamma_C} I_h(\tilde{\lambda}_{hn}v_{hn}) d\Gamma = L(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h,$$

mène à

$$\int_{\Gamma_C} I_h(\tilde{\lambda}_{hn}v_{hn}) d\Gamma \lesssim \|\tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega} + \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \tilde{\mathbf{V}}_h.$$

C'est pourquoi $\|\Phi_h(\tilde{g}_{hn})\|_{-\frac{1}{2},h} = \|\tilde{\lambda}_{hn}\|_{-\frac{1}{2},h} \lesssim \|\tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega} + 1 \lesssim 1$, pour tout $\tilde{g}_{hn} \in M_{hn}$. La bornitude et la continuité de Φ_h prouvent qu'il existe au moins une solution au problème discret de contact avec frottement de Coulomb d'après le théorème de point fixe de Brouwer. ■

Proposition 3.4.3

La solution du problème (3.30) est unique lorsque $\mu C(h) < 1$.

Démonstration: De (3.48), on obtient un résultat d'unicité dépendant de la taille de maillage lorsque $\mu C(h) < 1$. Il y a donc unicité lorsque μ est suffisamment petit (où le terme "petit" dépend du paramètre de discrétisation).

Une étude plus détaillée montrerait que le critère d'unicité disparaît lorsque h tend vers 0 (i.e., $\lim_{h \rightarrow 0} C(h) = +\infty$). ■

3.5 Un second estimateur

3.5.1 Définition de l'estimateur par résidu associé à la seconde discrétisation

Comme pour la première discrétisation, le résidu est défini par $\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_h) + \mathbf{f} = \mathbf{f}$ sur T . La donnée \mathbf{f} est approchée par $\mathbf{f}_T \in (\mathbb{P}_k(T))^2$ et la différence $\mathbf{f} - \mathbf{f}_T$ est traitée comme une oscillation de données. De même \mathbf{g} est approchée par une quantité plus simple notée \mathbf{g}_E pour tout $E \in E_h^N$.

Définition 3.5.1

L'estimateur global par résidu $\tilde{\eta}$ et les contributions locales $\tilde{\eta}_T$ sont définis par

$$\begin{aligned} \tilde{\eta} &= \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \tilde{\eta}_T^2 \right)^{1/2}, \quad \tilde{\eta}_T = \left(\sum_{i=1}^6 \tilde{\eta}_{iT}^2 \right)^{1/2}, \\ \tilde{\eta}_{1T} &= h_T \|\mathbf{f}_T\|_T, \\ \tilde{\eta}_{2T} &= h_T^{1/2} \left(\sum_{E \in E_T^{int} \cup E_T^N} \|J_{E,n}(\tilde{\mathbf{u}}_h)\|_E^2 \right)^{1/2}, \\ \tilde{\eta}_{3T} &= h_T^{1/2} \|\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h)\|_{T \cap \Gamma_C}, \\ \tilde{\eta}_{4T} &= h_T^{1/2} \|\tilde{\lambda}_{ht} + \sigma_t(\tilde{\mathbf{u}}_h)\|_{T \cap \Gamma_C}, \\ \tilde{\eta}_{5T} &= \left(\int_{T \cap \Gamma_C} -\tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{hn} \right)^{1/2}, \\ \tilde{\eta}_{6T} &= \left(\int_{T \cap \Gamma_C} (\mu \tilde{\lambda}_{hn} |\tilde{u}_{ht}| - \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht}) \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

où l'on rappelle que $J_{E,n}(\tilde{\mathbf{u}}_h)$ est le saut de contrainte de $\tilde{\mathbf{u}}_h$ dans la direction normale défini par (3.6). Comme dans la section précédente, les termes local et global d'oscillation des données ζ_T et ζ sont définis par (3.7).

Remarque 3.5.1

D'après les définitions précédentes, on a $\tilde{\eta}_{1T} = \eta_{1T}$. On remarque l'absence de termes semblables à η_6 et η_8 pour $\tilde{\eta}$ car $\tilde{\lambda}_{hn} \geq 0$ et $|\tilde{\lambda}_{ht}| \leq \mu \tilde{\lambda}_{hn}$.

3.5.2 Borne supérieure

Comme pour l'énoncé du Théorème 2.4.3, on a besoin de supposer que la solution du problème continu satisfait le critère d'unicité de [203] afin d'obtenir la borne supérieure de l'erreur de discrétisation.

Théorème 3.5.1

Soit $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ la solution du problème (3.1) telle que $\lambda_t = \mu \lambda_n \xi$, avec $\xi \in M$, $\xi \in \text{Dir}_t(u_t)$ sur Γ_C et $\mu \|\xi\|_M$ est suffisamment petit. Soit $(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h)$ une solution du problème discret (3.30). Alors

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega} + \|\boldsymbol{\lambda} - \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_C} \lesssim \tilde{\eta} + \zeta.$$

Démonstration : On adopte les notations suivantes pour le terme de l'erreur dans le déplacement : $\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h$. Comme dans le Théorème 2.4.3, on obtient pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega}^2 &\lesssim \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) - \sum_{E \in E_h^{\text{int}} \cup E_h^N} \int_E J_{E,n}(\tilde{\mathbf{u}}_h) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \\ &+ \sum_{E \in E_h^N} \int_E (\mathbf{g} - \mathbf{g}_E) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \\ &+ \sum_{E \in E_h^C} \int_E (\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h))(v_{hn} - u_n) + \sum_{E \in E_h^C} \int_E (\tilde{\lambda}_{ht} + \sigma_t(\tilde{\mathbf{u}}_h))(v_{ht} - u_t) \\ &+ \int_{\Gamma_C} (I_h(\tilde{\lambda}_{hn}(v_{hn} - \tilde{u}_{hn})) - \tilde{\lambda}_{hn}(v_{hn} - \tilde{u}_{hn})) \\ &+ \int_{\Gamma_C} (I_h(\tilde{\lambda}_{ht}(v_{ht} - \tilde{u}_{ht})) - \tilde{\lambda}_{ht}(v_{ht} - \tilde{u}_{ht})) \\ &+ \int_{\Gamma_C} (\tilde{\lambda}_{hn} - \lambda_n)(u_n - \tilde{u}_{hn}) + \int_{\Gamma_C} (\tilde{\lambda}_{ht} - \lambda_t)(u_t - \tilde{u}_{ht}) \\ &= \tilde{I} + \tilde{II} + \tilde{III} + \tilde{IV} + \tilde{V} + \tilde{VI} + \tilde{VII} + \tilde{VIII} \\ &+ \int_{\Gamma_C} (\tilde{\lambda}_{ht} - \lambda_t)(u_t - \tilde{u}_{ht}). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Comme pour le Théorème 2.4.3, on prend \mathbf{v}_h de la forme (3.9). Ainsi

$$|\tilde{I}| + |\tilde{II}| + |\tilde{III}| + |\tilde{IV}| + |\tilde{V}| \lesssim (\tilde{\eta} + \zeta) \|\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega}. \quad (3.51)$$

Maintenant on estime les deux termes de (3.50) avec l'opérateur d'interpolation en utilisant une estimation d'erreur d'intégration numérique : la formule du trapèze :

$$\begin{aligned} |\tilde{VI}| &= \left| \int_{\Gamma_C} \left(I_h(\tilde{\lambda}_{hn}(\pi_h \tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}})_n) - \tilde{\lambda}_{hn}(\pi_h \tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}})_n \right) \right| \\ &= \left| \sum_{E \in E_h^C} \int_E \left(I_h(\tilde{\lambda}_{hn}(\pi_h \tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}})_n) - \tilde{\lambda}_{hn}(\pi_h \tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}})_n \right) \right| \\ &\lesssim \sum_{E \in E_h^C} h_E^3 |(\tilde{\lambda}_{hn}(\pi_h \tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}})_n)''| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\lesssim \sum_{E \in E_h^C} h_E^3 |\tilde{\lambda}'_{hn}((\pi_h \tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}})_n)'| \\
 &\leq \sum_{E \in E_h^C} h_E^2 \|\tilde{\lambda}'_{hn}\|_E \|((\pi_h \tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}})_n)'\|_E \\
 &\lesssim \sum_{E \in E_h^C} h_E^{3/2} \|\tilde{\lambda}'_{hn}\|_E \|\pi_h \tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}}\|_{1,T} \\
 &\lesssim \sum_{E \in E_h^C} h_E^{3/2} \|\tilde{\lambda}'_{hn}\|_E \|\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}}\|_{1,\omega_T} \\
 &= \sum_{E \in E_h^C} h_E^{3/2} \|(\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h))'\|_E \|\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}}\|_{1,\omega_T} \\
 &\lesssim \sum_{E \in E_h^C} h_E^{1/2} \|\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h)\|_E \|\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}}\|_{1,\omega_T} \\
 &\lesssim \tilde{\eta} \|\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega}, \tag{3.52}
 \end{aligned}$$

où T est l'élément contenant E . Ci-dessus, on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la stabilité H^1 de π_h , prouvée au Lemme 3.1 de [65] (ou [231]) et l'inégalité de trace sur un élément ([231]). D'une manière similaire, on obtient :

$$\left| V\tilde{II} \right| \lesssim \sum_{E \in E_h^C} h_E^{1/2} \|\tilde{\lambda}_{ht} + \sigma_t(\tilde{\mathbf{u}}_h)\|_E \|\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}}\|_{1,\omega_T} \leq \tilde{\eta} \|\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega}. \tag{3.53}$$

Remarquons que $\tilde{u}_{hn} \leq 0$ et $\tilde{\lambda}_{hn} \geq 0$ sur Γ_C , on a $\int_{\Gamma_C} \tilde{\lambda}_{hn} u_n \leq 0$, $\int_{\Gamma_C} \lambda_n u_n = 0$ et $\int_{\Gamma_C} \lambda_n \tilde{u}_{hn} \leq 0$. Par conséquent, on obtient :

$$V\tilde{III} \leq \int_{\Gamma_C} -\tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{hn} \leq \tilde{\eta}^2. \tag{3.54}$$

Il reste à estimer un terme dans (3.50) : celui provenant de l'approximation du frottement. Comme dans (3.18) et (3.19), on obtient

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Gamma_C} (\tilde{\lambda}_{ht} - \lambda_t)(u_t - \tilde{u}_{ht}) \\
 &= \int_{\Gamma_C} (\tilde{\lambda}_{ht} - \mu \tilde{\lambda}_{hn} \xi)(u_t - \tilde{u}_{ht}) + \int_{\Gamma_C} \mu (\tilde{\lambda}_{hn} - \lambda_n) \xi (u_t - \tilde{u}_{ht}) \tag{3.55}
 \end{aligned}$$

où $\xi \in M$, $\xi \in \text{Dir}_t(u_t)$, $\lambda_t = \mu \lambda_n \xi$, et

$$\left| \int_{\Gamma_C} \mu (\tilde{\lambda}_{hn} - \lambda_n) \xi (u_t - \tilde{u}_{ht}) \right| \lesssim (1 + \alpha) \mu \|\xi\|_M \|\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega}^2 + \frac{\mu \|\xi\|_M}{2\alpha} (\tilde{\eta}^2 + \zeta^2) \tag{3.56}$$

pour tout α positif. Le premier terme de (3.55) est écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_C} (\tilde{\lambda}_{ht} - \mu \tilde{\lambda}_{hn} \xi)(u_t - \tilde{u}_{ht}) &= \int_{\Gamma_C} \tilde{\lambda}_{ht} u_t - \int_{\Gamma_C} \mu \tilde{\lambda}_{hn} \xi u_t + \int_{\Gamma_C} \mu \tilde{\lambda}_{hn} \xi \tilde{u}_{ht} - \int_{\Gamma_C} \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht} \\
 &= \int_{\Gamma_C} (\tilde{\lambda}_{ht} u_t - \mu \tilde{\lambda}_{hn} |u_t|) + \int_{\Gamma_C} (\mu \tilde{\lambda}_{hn} \xi \tilde{u}_{ht} - \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \underbrace{\int_{\Gamma_C} (|\tilde{\lambda}_{ht}| - \mu\tilde{\lambda}_{hn}) |u_t|}_{\leq 0} + \int_{\Gamma_C} (-\tilde{\lambda}_{ht}\tilde{u}_{ht} + \mu\tilde{\lambda}_{hn}|\tilde{u}_{ht}|) \\
 &\leq \tilde{\eta}^2.
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

Par (3.56) et (3.57), on obtient pour tout α positif :

$$\int_{\Gamma_C} (\tilde{\lambda}_{ht} - \lambda_t)(u_t - \tilde{u}_{ht}) \lesssim (1 + \alpha)\mu\|\xi\|_M\|\tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega}^2 + \frac{\mu\|\xi\|_M + 2\alpha}{2\alpha}(\tilde{\eta}^2 + \zeta^2). \tag{3.58}$$

En regroupant les estimations (3.51), (3.52), (3.53), (3.54) et (3.58) dans (3.50) et en utilisant l'inégalité de Young, on aboutit à la conclusion que si $\mu\|\xi\|_M$ est suffisamment petit (voir aussi (3.22)) :

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega} \lesssim \tilde{\eta} + \zeta. \tag{3.59}$$

Maintenant on cherche la borne supérieure de l'erreur de discrétisation $\boldsymbol{\lambda} - \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h$ correspondant aux multiplicateurs. Soient $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ et $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$. Des équations d'équilibre (3.1) et (3.30) on déduit :

$$\begin{aligned}
 b(\boldsymbol{\lambda} - \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h, \mathbf{v}) &= b(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - b(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) + b(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}_h) + b(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h, \mathbf{v}_h) \\
 &= L(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - b(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) + a(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) \\
 &\quad + c(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h, \mathbf{v}_h) - b(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h, \mathbf{v}_h) \\
 &= L(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - a(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}) - a(\tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - b(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \\
 &\quad + c(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h, \mathbf{v}_h) - b(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h, \mathbf{v}_h).
 \end{aligned}$$

Une intégration par parties sur chaque élément T mène à :

$$\begin{aligned}
 b(\boldsymbol{\lambda} - \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h, \mathbf{v}) &\lesssim \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - a(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}) - \sum_{E \in E_h^{\text{int}} \cup E_h^N} \int_E J_{E,n}(\tilde{\mathbf{u}}_h) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \\
 &\quad - \sum_{E \in E_h^C} \int_E (\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h))(v_n - v_{hn}) - \sum_{E \in E_h^C} \int_E (\tilde{\lambda}_{ht} + \sigma_t(\tilde{\mathbf{u}}_h))(v_t - v_{ht}) \\
 &\quad + \int_{\Gamma_C} (I_h(\tilde{\lambda}_{hn}v_{hn}) - \tilde{\lambda}_{hn}v_{hn}) + \int_{\Gamma_C} (I_h(\tilde{\lambda}_{ht}v_{ht}) - \tilde{\lambda}_{ht}v_{ht}) \\
 &\quad + \sum_{E \in E_h^N} \int_E (\mathbf{g} - \mathbf{g}_E) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h).
 \end{aligned}$$

En choisissant $\mathbf{v}_h = \pi_h \mathbf{v}$ comme pour la preuve du Théorème 2.4.3, on obtient

$$\|\boldsymbol{\lambda} - \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_C} \lesssim \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega} + \tilde{\eta} + \zeta. \tag{3.60}$$

Les deux estimations (3.59) et (3.60) achèvent la démonstration. ■

3.5.3 Borne inférieure

Théorème 3.5.2

Soit $(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h)$ une solution du problème discret (3.30) et soit $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h)$ l'estimateur correspondant. Soit $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ une solution du problème (3.1) telle que $\boldsymbol{\lambda} \in (L^2(\Gamma_C))^2$. Pour tout élément T , les bornes inférieures locales suivantes ont lieu :

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_{1T} &\lesssim \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,T} + \zeta_T, \\ \tilde{\eta}_{2T} &\lesssim \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,\omega_T} + \zeta_T.\end{aligned}$$

Pour tout élément T ayant une côté dans Γ_C (i.e., $T \cap \Gamma_C = E$), les estimations locales inférieures suivantes ont lieu :

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_{iT} &\lesssim h_T^{1/2} \|\boldsymbol{\lambda} - \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h\|_E + \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,T} + \zeta_T, \quad i = 3, 4, \\ \tilde{\eta}_{5T} &\lesssim \tilde{\eta}_{3T}^{1/2} \|\tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,T}^{1/2},\end{aligned}\tag{3.61}$$

$$\tilde{\eta}_{6T} \lesssim (\mu \tilde{\eta}_{3T} + \tilde{\eta}_{4T})^{1/2} \|\tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,T}^{1/2}.\tag{3.62}$$

Démonstration : Comme pour le Théorème 3.3.3, on a besoin d'estimer $\tilde{\eta}_{3T}$, $\tilde{\eta}_{4T}$, $\tilde{\eta}_{5T}$ et $\tilde{\eta}_{6T}$. Les estimations de $\tilde{\eta}_{1T}$ et $\tilde{\eta}_{2T}$ sont standard. De plus, les bornes de $\tilde{\eta}_{3T}$, $\tilde{\eta}_{4T}$ sont obtenues comme dans le Théorème 3.3.3. Ainsi on considère $\tilde{\eta}_{5T}$. Si $E \in E_T^C$, on a d'après la formule d'intégration du trapèze, une inégalité inverse et l'inégalité de trace :

$$\begin{aligned}\int_E -\tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{hn} &= \int_E (I_h(\tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{hn}) - \tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{hn}) \\ &\lesssim h_E^3 |(\tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{hn})''| \\ &\lesssim h_E^3 |\tilde{\lambda}'_{hn} \tilde{u}'_{hn}| \\ &\leq h_E^2 \|\tilde{\lambda}'_{hn}\|_E \|\tilde{u}'_{hn}\|_E \\ &= h_E^2 \|(\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h))'\|_E \|\tilde{u}'_{hn}\|_E \\ &\lesssim h_E \|\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h)\|_E \|\tilde{u}'_{hn}\|_E \\ &\lesssim h_E^{1/2} \tilde{\eta}_{3T} \|\tilde{u}'_{hn}\|_E \\ &\lesssim \tilde{\eta}_{3T} \|\tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,T}.\end{aligned}$$

La dernière estimation implique (3.61) en prenant la racine carrée.

Finalemtent on considère $\tilde{\eta}_{6T}$. D'après la Proposition 3.4.1 on a pour tout nœud x_i de $\overline{\Gamma_C}$: $(\mu \tilde{\lambda}_{hn} |\tilde{u}_{ht}| - \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht})(x_i) = ((\mu \tilde{\lambda}_{hn} - |\tilde{\lambda}_{ht}|) |\tilde{u}_{ht}|)(x_i) = 0$. Soit $E \in E_T^C$; il est facile de voir que \tilde{u}_{ht} est soit d'un signe constant sur E (i.e., négatif ou positif) soit $\tilde{u}_{ht}(x_1) \tilde{u}_{ht}(x_2) < 0$ (où x_1 et x_2 sont les extrémités de E) et \tilde{u}_{ht} admet un zéro unique noté m dans E .

On commence par considérer le second cas : on note $E_1 = (x_1, m)$ et $E_2 = (m, x_2)$ et on suppose sans perte de généralité que $\tilde{u}_{ht} > 0$ sur E_1 et $\tilde{u}_{ht} < 0$ sur E_2 . On désigne par J_h l'opérateur d'interpolation de Lagrange affine par morceaux sur E aux points x_1, m, x_2 . Comme $(\mu \tilde{\lambda}_{hn} |\tilde{u}_{ht}| - \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht})(m) = 0$ et en utilisant les mêmes arguments que pour $\tilde{\eta}_{5T}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \int_E (\mu \tilde{\lambda}_{hn} |\tilde{u}_{ht}| - \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht}) \\
 = & \int_{E_1} (\mu \tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{ht} - \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht}) + \int_{E_2} (-\mu \tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{ht} - \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht}) \\
 = & \int_{E_1} \left((\mu \tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{ht} - \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht}) - J_h(\mu \tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{ht} - \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht}) \right) \\
 & + \int_{E_2} \left((-\mu \tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{ht} - \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht}) - J_h(-\mu \tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{ht} - \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht}) \right) \\
 \lesssim & h_{E_1}^3 |(\mu \tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{ht} - \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht})''|_{E_1} + h_{E_2}^3 |(-\mu \tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{ht} - \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht})''|_{E_2} \\
 \leq & h_E^3 |(\mu \tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{ht})''|_E + h_E^3 |(\tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht})''|_E \\
 \lesssim & h_E^3 \mu |\tilde{\lambda}'_{hn} \tilde{u}'_{ht}| + h_E^3 |\tilde{\lambda}'_{ht} \tilde{u}'_{ht}| \\
 \leq & h_E^2 \mu \|\tilde{\lambda}'_{hn}\|_E \|\tilde{u}'_{ht}\|_E + h_E^2 \|\tilde{\lambda}'_{ht}\|_E \|\tilde{u}'_{ht}\|_E \\
 = & h_E^2 \mu \|(\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h))'\|_E \|\tilde{u}'_{ht}\|_E + h_E^2 \|(\tilde{\lambda}_{ht} + \sigma_t(\tilde{\mathbf{u}}_h))'\|_E \|\tilde{u}'_{ht}\|_E \\
 \lesssim & h_E \mu \|\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h)\|_E \|\tilde{u}'_{ht}\|_E + h_E \|(\tilde{\lambda}_{ht} + \sigma_t(\tilde{\mathbf{u}}_h))'\|_E \|\tilde{u}'_{ht}\|_E \\
 \lesssim & h_E^{1/2} (\mu \tilde{\eta}_{3T} + \tilde{\eta}_{4T}) \|\tilde{u}'_{ht}\|_E \\
 \lesssim & (\mu \tilde{\eta}_{3T} + \tilde{\eta}_{4T}) \|\tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,T}.
 \end{aligned}$$

Ainsi découle (3.62) en prenant la racine carrée. Le premier cas (\tilde{u}_{ht} est soit négative ou positive sur E) se montre directement comme précédemment. \blacksquare

Remarque 3.5.2

En supposant que $\mathbf{u} \in (H^2(\Omega))^2$ (ainsi $\boldsymbol{\lambda} \in (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C))^2$), et que les estimations optimales a priori ont lieu (comme pour la première approximation, cette question est entièrement ouverte et le seul but de cette remarque est d'essayer d'illustrer notre résultat) on définit :

$$\tilde{\eta}_i = \left(\sum_{T \in T_h} \tilde{\eta}_{iT}^2 \right)^{1/2}, \quad 1 \leq i \leq 6.$$

Ainsi on peut vérifier que $\tilde{\eta}_i \lesssim h, 1 \leq i \leq 4; \eta_j \lesssim h^{1/2}, j = 5, 6$. Donc $\tilde{\eta} \lesssim h^{1/2}$.

Remarque 3.5.3

En supposant que $\mathbf{u} \in (H^2(\Omega))^2$ (ainsi $\boldsymbol{\lambda} \in (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_C))^2$) et $1 < q < \infty$, $\tilde{\eta}_{5T}$ peut être bornée de la manière suivante ([128], Remarque 5.7) :

$$\begin{aligned}
 & \int_E -\tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{hn} = \int_E (I_h(\tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{hn}) - \tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{hn}) \\
 \lesssim & h_E^3 |(\tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{hn})''| \lesssim h_E^3 |\tilde{\lambda}'_{hn} \tilde{u}'_{hn}| = h_E^2 \|\tilde{\lambda}'_{hn} \tilde{u}'_{hn}\|_{L^1(E)} \\
 \leq & h_E^2 \|\tilde{\lambda}'_{hn}(\tilde{u}_{hn} - \tilde{u}_n)'\|_{L^1(E)} + h_E^2 \|\tilde{\lambda}'_{hn} \tilde{u}'_n\|_{L^1(E)} \\
 \lesssim & h_E^2 \|\tilde{\lambda}'_{hn}\|_E \|(\tilde{u}_{hn} - \tilde{u}_n)'\|_E + h_E^2 \|\tilde{\lambda}'_{hn}\|_{L^{\frac{q}{q-1}}(E)} \|\tilde{u}'_n\|_{L^q(\Gamma_C)} \\
 \lesssim & h_E^2 \|(\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h))'\|_E \|(\tilde{u}_{hn} - \tilde{u}_n)'\|_E + h_E^2 \sqrt{q} \|(\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h))'\|_{L^{\frac{q}{q-1}}(E)} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{2,\Omega} \\
 \lesssim & h_E \|\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h)\|_E \|(\tilde{u}_{hn} - \tilde{u}_n)'\|_E + h_E^2 h_E^{\frac{q-2}{2q}} \sqrt{q} \|(\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h))'\|_E \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{2,\Omega}
 \end{aligned}$$

$$\lesssim h_E^{1/2} \tilde{\eta}_{3T} \|\tilde{u}_n - \tilde{u}_{hn}\|_{1,E} + h_E \sqrt{-\ln(h_E)} \tilde{\eta}_{3T} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{2,\Omega}$$

Pour $\tilde{\eta}_{6T}$, on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} & \int_E (\mu \tilde{\lambda}_{hn} |\tilde{u}_{ht}| - \tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht}) \\ & \leq h_E^3 |(\mu \tilde{\lambda}_{hn} \tilde{u}_{ht})''|_E + h_E^3 |(\tilde{\lambda}_{ht} \tilde{u}_{ht})''|_E \\ & \lesssim h_E^3 \mu |\tilde{\lambda}'_{hn} \tilde{u}'_{ht}| + h_E^3 |\tilde{\lambda}'_{ht} \tilde{u}'_{ht}| \\ & = h_E^2 \mu \|\tilde{\lambda}'_{hn} \tilde{u}'_{ht}\|_{L^1(E)} + h_E^2 \|\tilde{\lambda}'_{ht} \tilde{u}'_{ht}\|_{L^1(E)} \\ & \leq h_E^2 \mu \|\tilde{\lambda}'_{hn} (\tilde{u}_{ht} - \tilde{u}_t)'\|_{L^1(E)} + h_E^2 \mu \|\tilde{\lambda}'_{hn} \tilde{u}'_t\|_{L^1(E)} \\ & \quad + h_E^2 \|\tilde{\lambda}'_{ht} (\tilde{u}_{ht} - \tilde{u}_t)'\|_{L^1(E)} + h_E^2 \|\tilde{\lambda}'_{ht} \tilde{u}'_t\|_{L^1(E)} \\ & \lesssim h_E^2 \mu \|\tilde{\lambda}'_{hn}\|_E \|(\tilde{u}_{ht} - \tilde{u}_t)'\|_E + h_E^2 \mu \|_{L^{\frac{q}{q-1}}(E)} \|\tilde{u}'_t\|_{L^q(\Gamma_C)} \\ & \quad + h_E^2 \|\tilde{\lambda}'_{ht}\|_E \|(\tilde{u}_{ht} - \tilde{u}_t)'\|_E + h_E^2 \|\tilde{\lambda}'_{ht}\|_{L^{\frac{q}{q-1}}(E)} \|\tilde{u}'_t\|_{L^q(\Gamma_C)} \\ & \lesssim h_E^2 \mu \|(\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h))'\|_E \|(\tilde{u}_{ht} - \tilde{u}_t)'\|_E + h_E^2 \sqrt{q} \mu \|(\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h))'\|_{L^{\frac{q}{q-1}}(E)} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{2,\Omega} \\ & \quad + h_E^2 \|(\tilde{\lambda}_{ht} + \sigma_t(\tilde{\mathbf{u}}_h))'\|_E \|(\tilde{u}_{ht} - \tilde{u}_t)'\|_E + h_E^2 \sqrt{q} \|(\tilde{\lambda}_{ht} + \sigma_t(\tilde{\mathbf{u}}_h))'\|_{L^{\frac{q}{q-1}}(E)} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{2,\Omega} \\ & \lesssim h_E \mu \|\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h)\|_E \|(\tilde{u}_{ht} - \tilde{u}_t)'\|_E + h_E^2 h_E^{\frac{q-2}{2q}} \sqrt{q} \mu \|(\tilde{\lambda}_{hn} + \sigma_n(\tilde{\mathbf{u}}_h))'\|_E \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} \\ & \quad + h_E \|\tilde{\lambda}_{ht} + \sigma_t(\tilde{\mathbf{u}}_h)\|_E \|(\tilde{u}_{ht} - \tilde{u}_t)'\|_E + h_E^2 h_E^{\frac{q-2}{2q}} \sqrt{q} \|(\tilde{\lambda}_{ht} + \sigma_t(\tilde{\mathbf{u}}_h))'\|_E \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{2,\Omega} \\ & \lesssim h_E^{1/2} (\mu \tilde{\eta}_{3T} + \tilde{\eta}_{4T}) \|\tilde{u}_{ht} - \tilde{u}_t\|_{1,E} + h_E \sqrt{-\ln(h_E)} (\mu \tilde{\eta}_{3T} + \tilde{\eta}_{4T}) \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{2,\Omega} \end{aligned}$$

On a choisi $q = -\ln(h_E)$ (par minimisation d'une fonctionnelle) où h_E est supposé suffisamment petit et on a utilisé le fait que pour tout réel $p \in [1, \infty[$:

$$\|\mathbf{v}\|_{L^p(\Gamma_C)} \leq C \sqrt{p} \|\mathbf{v}\|_{H^{1/2}(\Gamma_C)}, \quad \forall \mathbf{v} \in H^{1/2}(\Gamma_C)$$

On a alors $\tilde{\eta}_i \lesssim h, 1 \leq i \leq 4$; $\eta_j \lesssim -\ln(h)^{1/4} h^{3/4}, j = 5, 6$. Donc on a l'estimation $\tilde{\eta} \lesssim (-\ln(h))^{1/4} h^{3/4}$.

3.6 Résultats numériques

Dans cette section, on s'occupe de l'implémentation numérique sous CAST3M des estimateurs par résidu issus des deux discrétisations par éléments finis. L'information donnée par les estimateurs d'erreur est couplée avec une procédure d'adaptation de maillage décrite au Chapitre 1. Dans ce qui suit, on suppose que les corps sont des matériaux homogènes isotropes et suivent la loi de Hooke (1) donnée par :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))I + \frac{E}{1+\nu} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$$

où I représente la matrice identité, tr est l'opérateur trace, E et ν désignent le module de Young et le coefficient de Poisson, respectivement avec $E > 0$ et $0 \leq \nu < 1/2$.

Notre but principal est de discuter les résultats théoriques en calculant les différentes contributions des estimateurs η et $\tilde{\eta}$ et leurs ordres de convergence lorsque h tend vers zéro. En particulier on s'intéresse aux termes suivants (où on adopte les notations des remarques 3.3.2 et 3.5.2) :

$$\eta_i = \left(\sum_{T \in T_h} \eta_{iT}^2 \right)^{1/2}, \quad 1 \leq i \leq 8, \quad \tilde{\eta}_i = \left(\sum_{T \in T_h} \tilde{\eta}_{iT}^2 \right)^{1/2}, \quad 1 \leq i \leq 6.$$

Dans ce type de problème, la gestion du contact occupe une proportion importante du temps de calcul. On note également les contributions au contact avec frottement :

$$\eta_C = \left(\sum_{i=3}^8 \eta_i^2 \right)^{1/2}, \quad \tilde{\eta}_C = \left(\sum_{i=3}^6 \tilde{\eta}_i^2 \right)^{1/2}.$$

Dans la suite, on désigne par N_C , le nombre d'éléments du maillage sur Γ_C . Dans le cas de maillages uniformes, ce paramètre mesure la taille du maillage. De plus, on suppose que le coefficient de frottement μ et la taille du maillage h sont tels que les deux problèmes discrets (3.3) et (3.30) admettent des solutions uniques $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h)$ et $(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h)$. En prenant $\mathbf{v}_h = \tilde{\mathbf{u}}_h$ dans (3.3) et $\mathbf{v}_h = \mathbf{u}_h$ dans (3.30) puis par différence, on vérifie que $\mathbf{u}_h = \tilde{\mathbf{u}}_h$ et que par conséquent $c(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_h, \mathbf{v}_h) = b(\boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{v}_h), \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ ce qui implique que $\eta_2 = \tilde{\eta}_2$.

3.6.1 Un premier exemple avec glissement et séparation

On considère le domaine $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ avec les caractéristiques matériaux $E = 10^6$ et $\nu = 0.3$. Le corps est fixé sur $\Gamma_D = \{0\} \times (0, 1)$,

```
rig1 = bloq depl l3;
tab1 . 'BLOCAGES_MECANIQUES' = rig1 et rig1s ;
```

il est initialement en contact avec $\Gamma_C = \{1\} \times (0, 1)$

```
rig2 = impo 'MAIL' l1 (inve l1s);
maf1 = impf rig2;
modf1 = modl maf1 frottement coulomb;
matf1 = matr modf1 mu mul;
tab1 . 'CARACTERISTIQUES' = (mat1 et mat1s et matf1);
tab1 . 'MODELE' = (mod1 et mod1s et modf1);
tab1 . 'CONTACT' = rig2;
tab1 . 'FROTTEMENT' = maf1;
```

et aucune force n'est appliquée sur $\Gamma_N = (0, 1) \times (\{0\} \cup \{1\})$. Le corps Ω est soumis à la force verticale uniforme $\mathbf{f} = (0, f_2)$ avec $f_2 = -76518$ et le coefficient de frottement μ vaut 0.2. On utilise des maillages en croisillons (i.e. le corps est partagé en carrés identiques, eux mêmes partagés en quatre triangles semblables). La Figure 3.2 représente les configurations initiale et déformée avec $N_C = 32$.

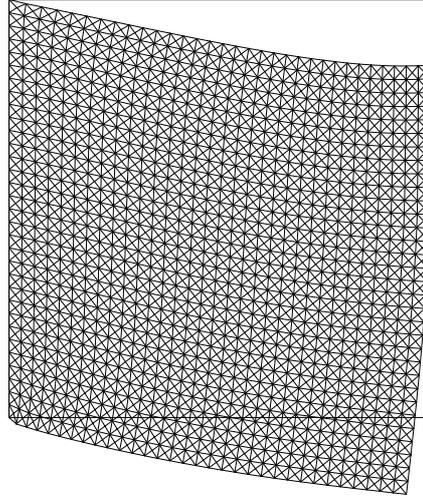


FIG. 3.2 – Premier exemple. Configurations initiale et déformée avec $\mu = 0.2$ et $N_C = 32$.

On observe que tous les nœuds de Γ_C ont un déplacement tangentiel négatif et que Γ_C est divisé en deux parties : une partie supérieure où le corps reste en contact avec l'axe $x = 1$ (nœuds glissants) et une partie inférieure de Γ_C où il se sépare de l'axe à partir du point $(1, 0.65)$ (Figure 3.3).

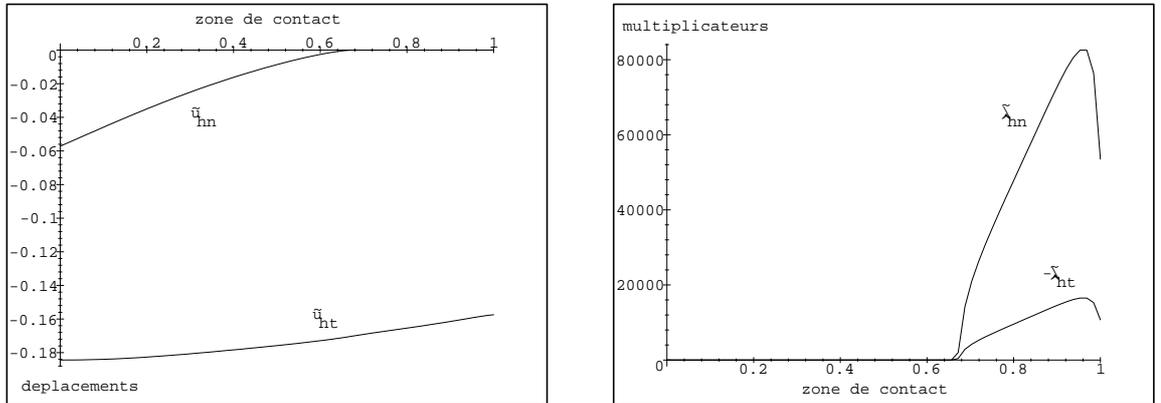


FIG. 3.3 – Premier exemple. A gauche : déplacements normal et tangentiel ($\tilde{u}_{hn}, \tilde{u}_{ht}$) sur Γ_C . A droite : multiplicateurs normal et tangentiel ($\tilde{\lambda}_{hn}, -\tilde{\lambda}_{ht}$) sur Γ_C .

Dans le Tableau 3.1, on reporte les taux de convergence en faisant la moyenne des taux entre $N_C = 2$ et $N_C = 64$. Notons que le taux de convergence des termes $\eta_1 = \tilde{\eta}_1 = h(\sum_{T \in T_h} \|\mathbf{f}_T\|_T^2)^{1/2} \sim h$ vaut 1.

Erreurs	$N_C = 1$	$N_C = 2$	$N_C = 4$	$N_C = 8$	$N_C = 16$	$N_C = 32$	$N_C = 64$	Taux de convergence
$\eta_2 = \tilde{\eta}_2$	71943	89950	72476	48412	29533	17687	12504	0.57
η_3	32980	21134	6826.6	2366.7	960.54	565.63	322.29	1.21
$\tilde{\eta}_3$	11092	8681.4	4165.7	1868.4	778.11	391.41	223.87	1.06
η_4	30028	15319	6299.3	2594.8	1012.5	457.45	244.01	1.19
$\tilde{\eta}_4$	29379	14325	6079.3	2542.3	997.58	448.78	239.20	1.18
η_5	13.674	8.1415	3.0994	1.5381	0.50073	0.21377	0.036429	1.56
$\tilde{\eta}_5$	14.503	3.9747	3.1219	0.77988	0.42660	0.13956	0.039897	1.33
η_6	12680	11242	1599.8	1945.9	416.70	385.61	79.730	1.43
$\tilde{\eta}_6$	0	0	0	0	0	0	0	-
η_7	12.121	13.619	4.8373	4.6372	1.8200	1.4717	0.54418	0.93
η_8	2535.9	2248.4	319.95	389.18	83.339	77.122	15.946	1.43

TAB. 3.1 – Contributions de η et $\tilde{\eta}$ pour le premier exemple.

Pour programmer la plupart des estimateurs, on a utilisé la formule d'intégration :

$$\int_a^b f = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right).$$

Voici l'exemple sur η_4 :

```
SI ( NBC EGA coa4 ) ;
pin1 = arei poin 1 ;
pin2 = arei poin 2 ;
SI ( coor 2 pin1 EGA 0 ) ;
SI ( coor 2 pin2 EGA 0 ) ;

SIG1 = REDU SIG ( ELEM 1 ELC2 ) ;
SXY = (EXTR SIG1 SMXY 1 1 1);
lamG = EXTR prlytan scal (POIN 1 PARE) ;
lamD = EXTR prlytan scal (POIN 2 PARE) ;
sautg = sxy+lamG ;
sautd = sxy+lamD ;
valg = sautg**2;
valm = ((sautg + sautd)**2)/4.;
vald = sautd**2;

ea4 = diam * (msur/6.) * (valg + vald + (4.*valm));
a4 = a4+ea4 ;

FINSI ;
FINSI ;
FINSI ;
```

Des calculs on observe que tous les termes η_i et $\tilde{\eta}_i$ convergent vers zéro lorsque h tend vers zéro et que $\eta_2 = \tilde{\eta}_2$ est évidemment le terme convergeant le plus lentement vers zéro. La partie principale de l'erreur dans η et $\tilde{\eta}$ se localise près des points singuliers $(0, 0)$ et $(0, 1)$. Les termes d'erreur pour lesquels l'analyse optimale de l'erreur n'est pas disponible

(i.e. $\eta_5, \eta_6, \eta_7, \eta_8, \tilde{\eta}_5, \tilde{\eta}_6$) convergent plus rapidement que les autres excepté η_7 . Notons que $\tilde{\eta}_6 = 0$ car $u_{ht} < 0$ et $\mu\tilde{\lambda}_{hn} = -\tilde{\lambda}_{ht}$ sur Γ_C . L'erreur $\tilde{\eta}_5$ est localisée sur l'élément proche du point de séparation alors que $\eta_5, \eta_6, \eta_7, \eta_8$ sont situées sur Γ_C , sur la zone de séparation.

On note par $(a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h))^{1/2}$ la norme en énergie de l'erreur de discrétisation qui est équivalente à la norme $(H^1(\Omega))^2$ de l'erreur. On reporte, dans le Tableau 3.2, les valeurs de $\eta, \tilde{\eta}, (a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h))^{1/2}$ et les indices d'efficacité $\xi = \frac{\eta}{(a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h))^{1/2}}$ et $\tilde{\xi} = \frac{\tilde{\eta}}{(a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h))^{1/2}}$. Comme on ne connaît pas la solution exacte \mathbf{u} du problème, on prend alors pour solution de référence la solution approchée correspondant au maillage le plus fin (ici $N_C = 64$).

	η	$\tilde{\eta}$	$(a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h))^{1/2}$	ξ	$\tilde{\xi}$
$N_C = 2$	94360	91496	38492	2.45	2.38
$N_C = 4$	73087	72850	25384	2.88	2.87
$N_C = 8$	48580	48515	16283	2.98	2.98
$N_C = 16$	29569	29560	10627	2.78	2.78
$N_C = 32$	17706	17697	6795.3	2.60	2.60

TAB. 3.2 – Estimateurs, erreur exacte et indices d'efficacité.

On voit les taux de convergence de $\eta, \tilde{\eta}$ et $(a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h))^{1/2}$ sur la Figure 3.4 (échelle log-log). Les courbes de η et $\tilde{\eta}$ sont confondues.

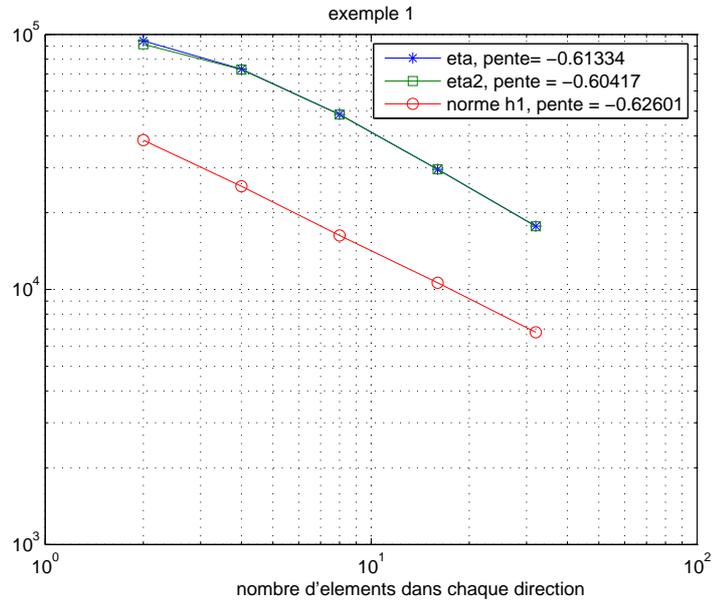


FIG. 3.4 – Premier exemple. Taux de convergence de $\eta, \tilde{\eta}$ et $(a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h))^{1/2}$.

On couple l'estimateur d'erreur avec la procédure adaptative décrite dans la section 1.1.2 :

```

*** construction de la carte des diametres***
NELEM = NBEL s1 ;
diamE = MANU CHAM MOD2 POSI GRAVITE 'CERR' 1 1 0. ;
* boucle sur les elements

REPETER ALGO5 NELEM ;

  IELE = &ALGO5 ;
  ELT = ELEM IELE s1 ;
  SUEL = CONT ELT ;

  ARE1 = ELEM 1 SUEL ;
  ARE2 = ELEM 2 SUEL ;
  ARE3 = ELEM 3 SUEL ;
  Md1 = MESU ARE1 ;
  Md2 = MESU ARE2 ;
  Md3 = MESU ARE3 ;
  toto = prog md1 md2 md3 ; *liste de md1 md2 md3
  diam = maxi toto ;

  m01 = MANU CHAM MOD2 POSI GRAVITE 'CERR' IELE 1 diam ;
  diamE = diamE + m01 ;
  fin algo5 ;
  TITRE 'Carte des diametres ' ;
  trac diamE mod2 ;

*** construction du maillage optimise ***
hetoileE = cerg * somepsE ;
hetoileE = (hetoileE)**0.5 ;
hetoileE = (hetoileE)**(-1) ;
hetoileE = hetoileE * diamE ;
hetoileE = hetoileE * (eta * coeffreduction) ;
hetoileE = chan chpo mod2 hetoileE ;
TITRE 'Carte de taille ' ;
trac hetoileE s1 ;

*****
NNNEL1 = nbel l1 ;
  ELT = ELEM 1 l1 ;
  pi = elt poin initial ;
  pf = elt poin final ;
  hi = redu hetoileE pi ;
  hi = maxi hi ;
  hf = redu hetoileE pf ;
  hf = maxi hf ;
  r11 = D pi pf 'DINI' hi 'DFIN' hf ;

REPETER ALGO6 (NNNEL1-1) ;
*
  IELE = &ALGO6+1 ;
  ELT = ELEM IELE l1 ;
  pi = elt poin initial ;
  pf = elt poin final ;
  hi = redu hetoileE pi ;
  hi = maxi hi ;
  hf = redu hetoileE pf ;
  hf = maxi hf ;
  dd = D pi pf 'DINI' hi 'DFIN' hf ; *droite avec densite associee aux points initial et final
  r11 = r11 et dd ;
FIN ALGO6 ;

l1 = r11 ;
**memes boucles sur les autres bords

***trace du maillage actualise***
nbbre = NBNO S1 ;
NBDOF = 2*nbbre ;
list nbdof ;
cont1 = l1 et 12 et 13 et 14 ;
s1 = surf hetoileE cont1 plan ;

```

On obtient une famille de maillages adaptés qui sont raffinés près des singularités $(0, 0)$ et $(0, 1)$ (voir Figure 3.5). On observe aussi que la différence entre les valeurs de η et $\tilde{\eta}$ n'est pas significative lorsqu'on raffine et on note que les contributions du contact η_C (respectivement $\tilde{\eta}_C$) sont dominées par η_3, η_4 (respectivement $\tilde{\eta}_3, \tilde{\eta}_4$), les autres termes étant petits (cette observation est aussi valable pour les exemples 2 et 3). Notons N le

nombre d'inconnues, on observe que les estimateurs η et $\tilde{\eta}$, calculés sur les maillages adaptés générés, se comporte comme $N^{-0.5}$ et que les contributions du contact se comportent approximativement comme $N^{-0.8}$. La Figure 3.5 montre $\tilde{\eta}$ et $\tilde{\eta}_C$ comme fonctions de N .

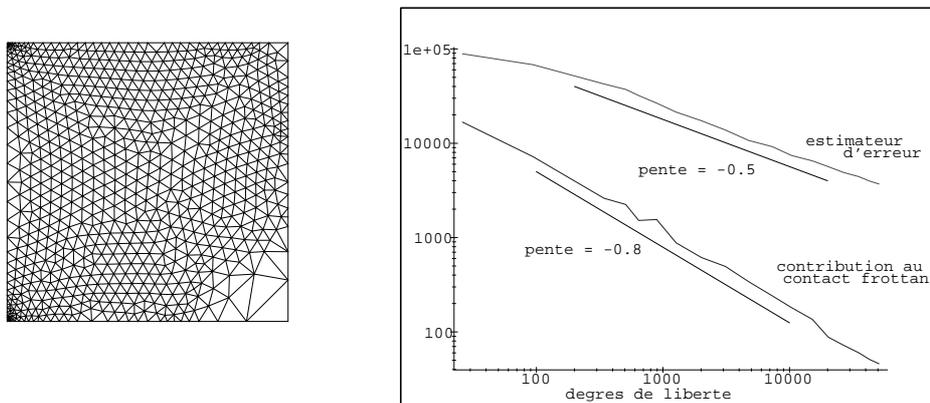


FIG. 3.5 – Premier exemple. A gauche : maillage adapté. A droite : Convergence de l'estimateur $\tilde{\eta}$ et de la contribution du contact frottant $\tilde{\eta}_C$ avec le raffinement adaptatif.

3.6.2 Un second exemple avec adhérence, glissement et séparation

On étudie maintenant un exemple où aucun terme η_i et $\tilde{\eta}_i$ ne s'annule ($i \geq 2$), où les trois différentes zones caractérisant le frottement (adhérence, glissement et séparation) sont présentes et des singularités de coin ne sont pas présentes contrairement à l'exemple précédent. On considère la géométrie $\hat{\Omega} = (0, 2) \times (0, 1)$ et on adopte des conditions de symétrie (i.e. $u_n = 0, \sigma_t(\mathbf{u}) = 0$) sur $\Gamma_S = \{1\} \times (0, 1)$. On effectue les calculs sur le carré $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$. On pose $\Gamma_C = (0, 1) \times \{0\}$ et $\Gamma_N = ((0, 1) \times \{1\}) \cup (\{0\} \times (0, 1))$. Un coefficient de Poisson de $\nu = 0.2$, un module de Young de $E = 10^4$ et un coefficient de frottement $\mu = 0.5$ sont choisis. Une densité de forces surfaciques \mathbf{F} d'amplitude $1N.m^{-2}$ orientée vers l'intérieur du corps Ω est appliqué sur $\{0\} \times (0.5, 1)$ et $(0.5, 1) \times \{1\}$. Une telle configuration correspond au cas **K**-elliptique (voir [112], Théorème 6.3). La Figure 3.6 représente les configurations initiale et après déformation du corps. La déformation est amplifiée par un facteur 2000. Le bord Γ_C présente également une partie en contact et une séparation à partir du point de transition $(0.26, 0)$. De plus, la partie en contact est divisée en une partie glissante (à gauche) et une partie adhérente (à droite) avec un point de séparation proche de $(0.47, 0)$ (voir Figure 3.7).

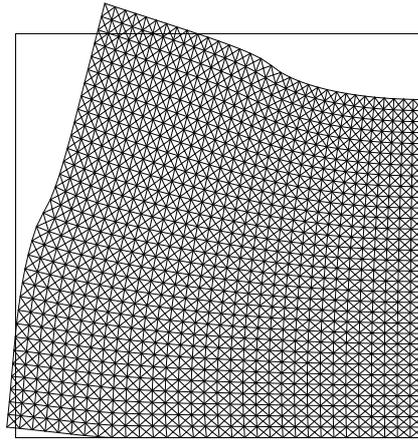


FIG. 3.6 – Second exemple. Configurations initiale et déformée avec $\mu = 0.5$ et $N_C = 32$.

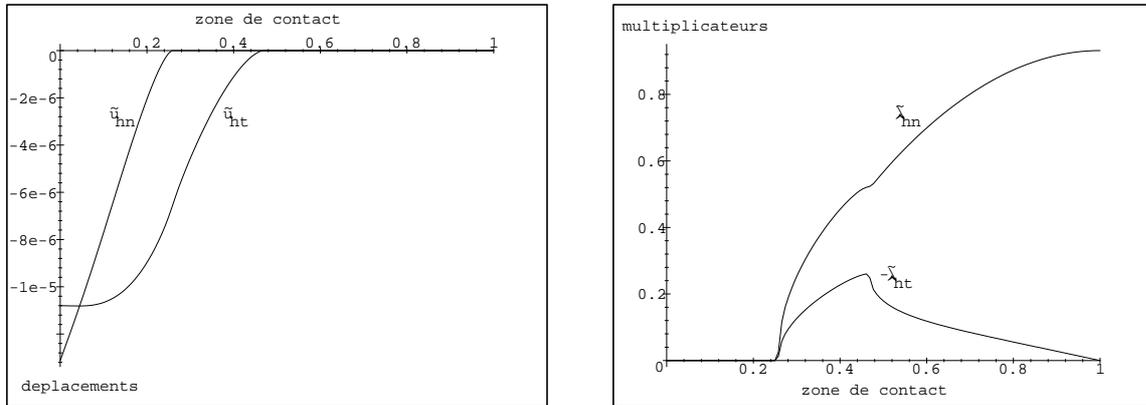


FIG. 3.7 – Second exemple. A gauche : déplacements normal et tangentiel ($\tilde{u}_{hn}, \tilde{u}_{ht}$) sur Γ_C . A droite : multiplicateurs normal et tangentiel ($\tilde{\lambda}_{hn}, -\tilde{\lambda}_{ht}$) sur Γ_C .

Il est facile de vérifier que les conditions de symétrie sur Γ_C mènent à des termes d'erreur supplémentaires semblables à ceux de η_4 et $\tilde{\eta}_4$ et on ajoute ces termes à $\eta_2 = \tilde{\eta}_2$:

```
SI ( NBC EGA coa2 ) ;
pin1 = arei poin 1 ;
pin2 = arei poin 2 ;
SI ( coor 1 pin1 EGA 1 ) ;
SI ( coor 1 pin2 EGA 1 ) ;

SIG1 = REDU SIG ( ELEM 1 ELC2 ) ;
SXY = ( EXTR SIG1 SMXY 1 1 1 ) ;

VSX = 0. SXY ;
VSY = SXY 0. ;
VSGN = ( VSX PSCA NOR1 ) ( VSY PSCA NOR1 ) ;

ea2 = ((norm VSGN)**2) * MSUR * diam ;
a2 = a2 + ea2 ;
FINSI ;
FINSI ;
FINSI ;
```

De plus on a $\eta_1 = \tilde{\eta}_1 = 0$. Les résultats concernant η et $\tilde{\eta}$ sont reportés dans le Tableau 3.3 où les taux de convergence sont moyennés entre $N_C = 2$ et $N_C = 128$.

Erreurs $\times 10^5$	$N_C = 2$	$N_C = 4$	$N_C = 8$	$N_C = 16$	$N_C = 32$	$N_C = 64$	$N_C = 128$	Taux de convergence
$\eta_2 = \tilde{\eta}_2$	87774	53444	32022	18577	10449	5740.85	3109.85	0.80
η_3	16925	5164.72	2111.32	857.613	359.365	113.333	43.3032	1.44
$\tilde{\eta}_3$	10176	4448.27	1665.89	642.493	256.814	93.1164	35.8664	1.36
η_4	17166	7553.27	3860.54	1818.65	848.092	388.834	184.881	1.09
$\tilde{\eta}_4$	9237.09	5292.69	2825.89	1376.62	631.021	278.175	127.115	1.03
η_5	39.1890	6.22418	3.65335	3.48613	2.18880	0.873704	0.113440	1.41
$\tilde{\eta}_5$	52.2094	24.4419	9.21759	2.94782	0.220389	0.544605	0.197534	1.34
η_6	8624.25	1500.79	228.240	505.892	647.810	226.079	8.07287	1.68
$\tilde{\eta}_6$	34.2719	16.9743	6.48435	1.95881	0.607762	0.212090	0.0769817	1.47
η_7	33.4342	19.1663	9.98284	7.51870	6.30249	3.09423	0.494072	1.01
η_8	4157.91	780.210	509.431	501.907	323.932	113.182	9.04330	1.47

TAB. 3.3 – Contributions de η et $\tilde{\eta}$ pour le second exemple.

On observe que les erreurs η et $\tilde{\eta}$ sont principalement localisées près des singularités $(0, 0.5)$ et $(0.5, 1)$ et aussi près du point de transition entre le contact et la séparation. L'erreur près du point de transition entre adhérence et glissement est plus petite. Comme dans l'exemple précédent, $\eta_2 = \tilde{\eta}_2$ est le terme principal de l'estimateur avec le plus petit taux de convergence (mais meilleur que précédemment) et les termes d'erreur pour lesquels aucun résultat de convergence optimale n'est disponible (i.e. $\eta_5, \eta_6, \eta_7, \eta_8, \tilde{\eta}_5, \tilde{\eta}_6$) convergent avec un meilleur taux que le taux théorique. La particularité dans cet exemple est que beaucoup de termes (en particulier η_6) convergent vers 0 avec un taux de convergence non uniforme.

Comme pour le premier exemple, les valeurs de η , $\tilde{\eta}$, $(a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h))^{1/2}$ et les indices d'efficacité $\xi = \frac{\eta}{(a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h))^{1/2}}$ et $\tilde{\xi} = \frac{\tilde{\eta}}{(a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h))^{1/2}}$ figurent dans le Tableau 3.4. Comme on ne connaît pas la solution exacte \mathbf{u} du problème, on prend alors pour solution de référence la solution approchée correspondant au maillage le plus fin (ici $N_C = 128$).

	η	$\tilde{\eta}$	$(a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h))^{1/2}$	ξ	$\tilde{\xi}$
$N_C = 2$	0.91526	0.88843	0.26068	3.51	3.41
$N_C = 4$	0.54248	0.53889	0.15376	3.53	3.50
$N_C = 8$	0.32328	0.32190	0.088040	3.67	3.66
$N_C = 16$	0.18699	0.18639	0.04863	3.84	3.83
$N_C = 32$	0.10514	0.10471	0.02576	4.08	4.06
$N_C = 64$	0.05760	0.05748	0.0122	4.72	4.71

TAB. 3.4 – Estimateurs, erreur exacte et indices d'efficacité.

On voit les taux de convergence de η , $\tilde{\eta}$ et $(a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h))^{1/2}$ sur la Figure 3.8 (échelle log-log) où les courbes pour les deux estimateurs sont encore confondues.

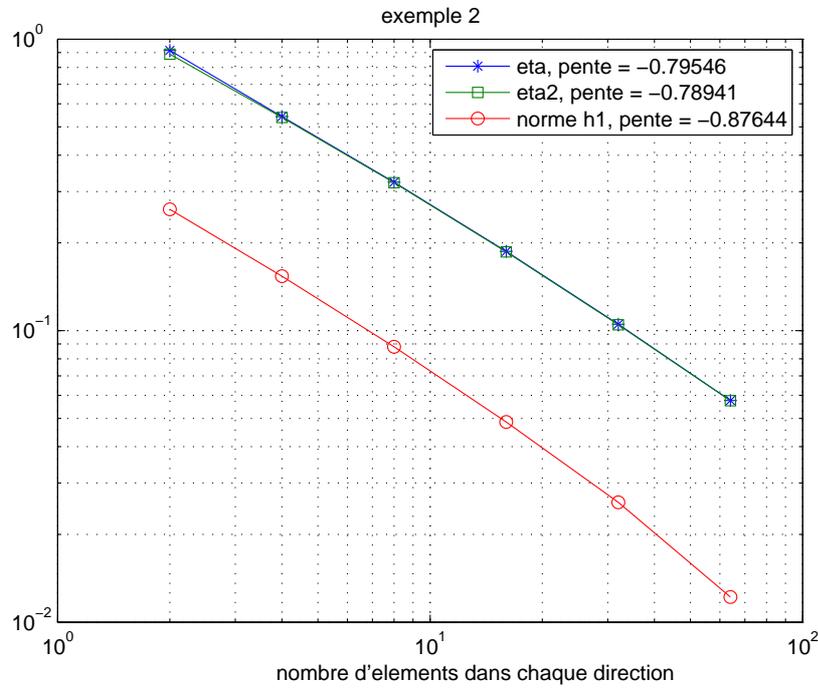


FIG. 3.8 – Second exemple. Taux de convergence de η , $\tilde{\eta}$ et $(a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h))^{1/2}$.

On applique la procédure d'adaptation décrite au Chapitre 1 et on reporte le maillage initial et deux maillages raffinés dans la Figure 3.9. Comme précédemment, en utilisant le raffinement, l'erreur décroît avec un taux de $N^{-0.5}$ et elle décroît un peu plus rapidement qu'avec le raffinement uniforme (proche de $N^{-0.45}$, voir Figure 3.10). La Figure 3.10 montre également la convergence de la contribution du contact $\tilde{\eta}_C$ et on observe que $\tilde{\eta}_C/\tilde{\eta} \sim N^{-0.2}$ qui s'annule lorsque $N \rightarrow \infty$. Les résultats sont similaires lorsqu'on considère η au lieu de $\tilde{\eta}$.

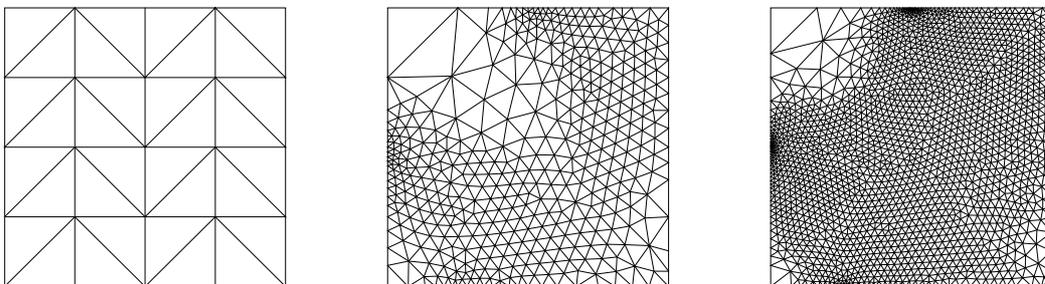


FIG. 3.9 – Second exemple. Maillages initial (à gauche) et raffinés

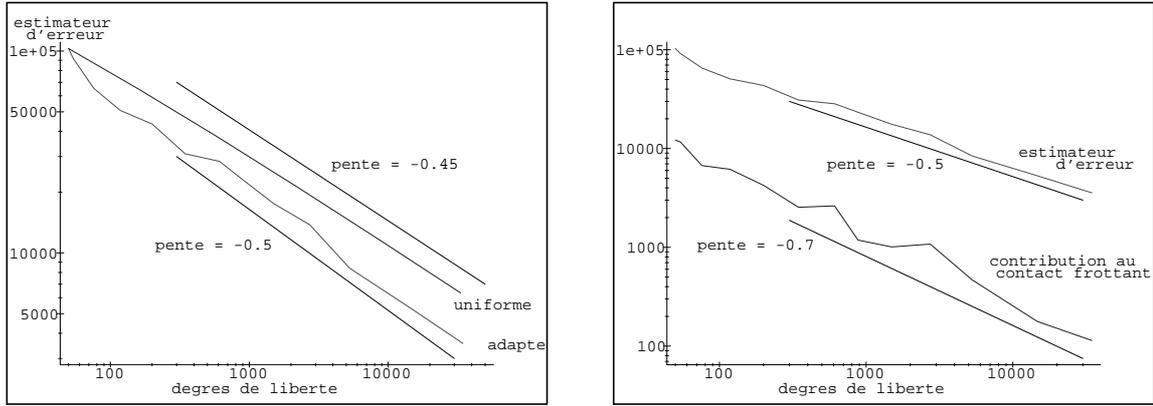


FIG. 3.10 – Second exemple. A gauche : Convergence de l'estimateur $\tilde{\eta}$ avec des raffinements uniforme et adapté. A droite : Convergence de l'estimateur $\tilde{\eta}$ et de sa contribution $\tilde{\eta}_C$ au contact frottant avec un raffinement adapté.

3.6.3 Troisième exemple : un cas avec peu de frottement ; comparaison avec un exemple de la littérature

Finalement on considère un exemple de la littérature (voir [234]) qui est quelque peu plus régulier que les précédents. En effet on considère la géométrie $\tilde{\Omega} = (0, 1) \times (0, 1)$ avec des conditions de symétrie sur $\Gamma_S = \{0.5\} \times (0, 1)$ et on calcule les solutions sur $\Omega = (0, 0.5) \times (0, 1)$. On pose $\Gamma_C = (0, 0.5) \times \{0\}$, $\Gamma_N = ((0, 0.5) \times \{1\}) \cup (\{0\} \times (0, 1))$, $\nu = 0.3$ et $E = 10^4$. Une densité de forces surfaciques dirigées vers l'intérieur $\mathbf{F}(x, y) = -x^2(1-x)^2$ (respectivement $\mathbf{F}(x, y) = 2y^2(1-y)^2$) est appliquée sur $(0, 0.5) \times \{1\}$ (respectivement $\{0\} \times (0, 1)$) :

```
x1 = coor 1 l3 ;
y1 = coor 2 l4 ;
xx1 = x1 * x1 * (1-x1) * (1-x1) ;
yy1 = y1 * y1 * (1-y1) * (1-y1) * 2 ;
ef1 = press mass mod1 xx1 ;
ef2 = press mass mod1 yy1 ;
ef = ef1 et ef2 ;
```

On choisit un petit coefficient de frottement $\mu = 0.1$ sachant que l'exemple numérique de [234] est sans frottement. La Figure 3.11 représente les configurations initiale et déformée du corps (avec $N_C = 64$). Le bord Γ_C présente un point de transition entre le contact et la séparation proche de $(0.08, 0)$. A cause du petit frottement, on observe que le dernier élément du contact près de $(0.5, 0)$ est collé à la fondation. La Figure 3.12 montre les déplacements et les forces sur Γ_C .

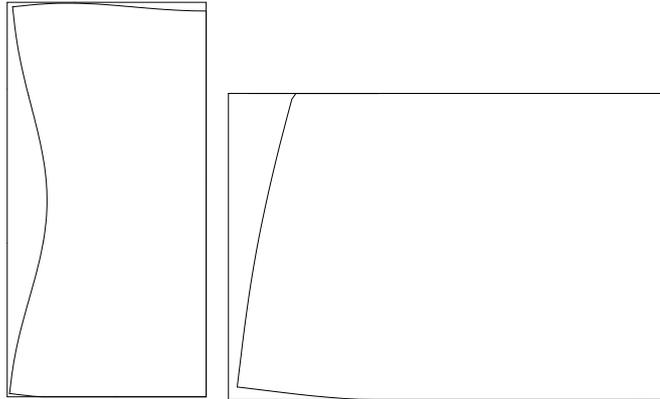


FIG. 3.11 – Troisième exemple. A gauche : configurations initiale et déformée avec $\mu = 0.1$. A droite : Zoom près de la zone de séparation.

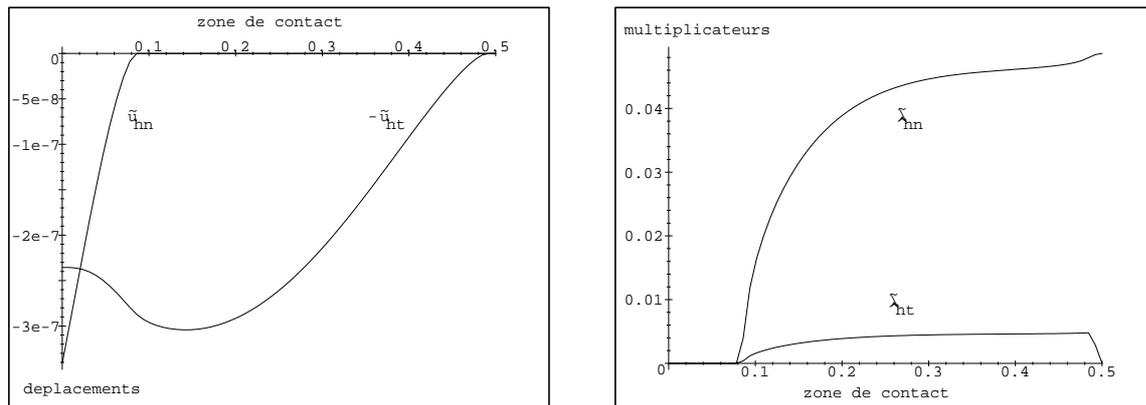


FIG. 3.12 – Troisième exemple. A gauche : déplacements normal et tangiel ($\tilde{u}_{hn}, -\tilde{u}_{ht}$) sur Γ_C . A droite : multiplicateurs normal et tangiel ($\tilde{\lambda}_{hn}, \tilde{\lambda}_{ht}$) sur Γ_C .

La procédure adaptative est résumée dans les Figures 3.13 et 3.14. Le maillage initial et les deux maillages raffinés apparaissent dans la Figure 3.13. Les maillages raffinés sont plus uniformes que dans les exemples précédents et contiennent plus de petits éléments près du bord (mis à part où il y a symétrie). Notons que le taux d'erreur est optimal (comme $N^{-0.5}$) pour les maillages uniformes et que la contribution au contact frottant dans l'estimateur se comporte approximativement comme $N^{-0.85}$, voir Figure 3.14. Ces résultats obtenus pour un petit coefficient de frottement présentent beaucoup de similitudes par rapport à ceux obtenus dans le cas sans frottement (voir Figures 3.15 et 3.16).

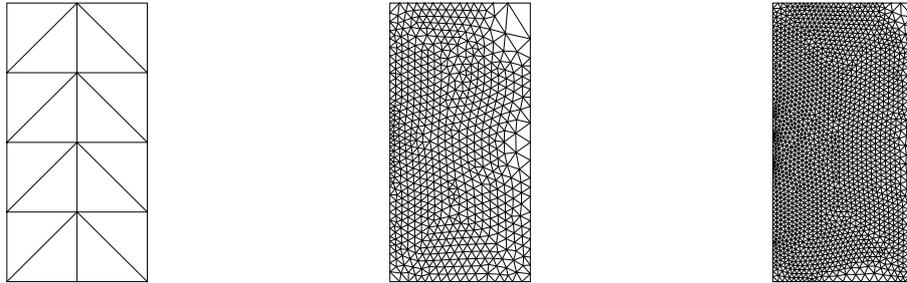
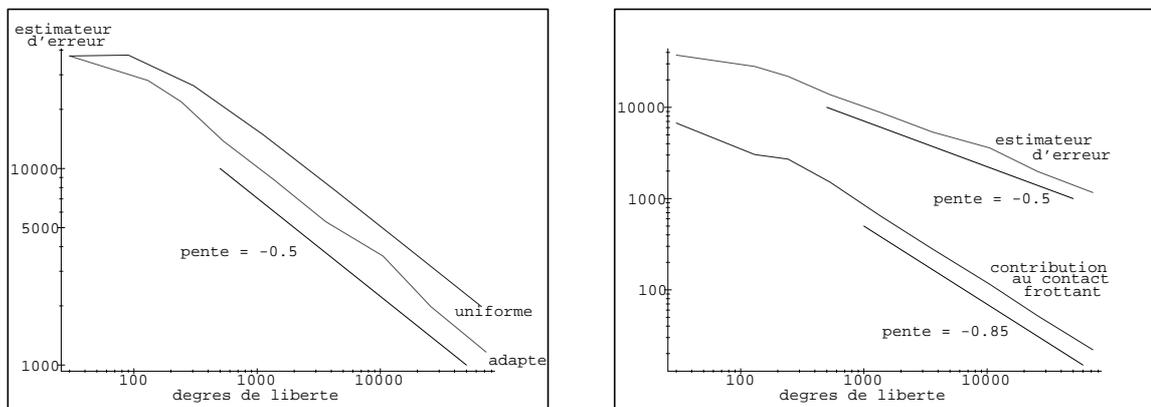


FIG. 3.13 – Troisième exemple. Maillages initial (à gauche) et raffinés

FIG. 3.14 – Troisième exemple. A gauche : Convergence de l'estimateur $\tilde{\eta}$ avec un raffinement uniforme et adapté. A droite : Convergence de l'estimateur $\tilde{\eta}$ et de sa contribution au contact $\tilde{\eta}_C$ avec un raffinement adapté.

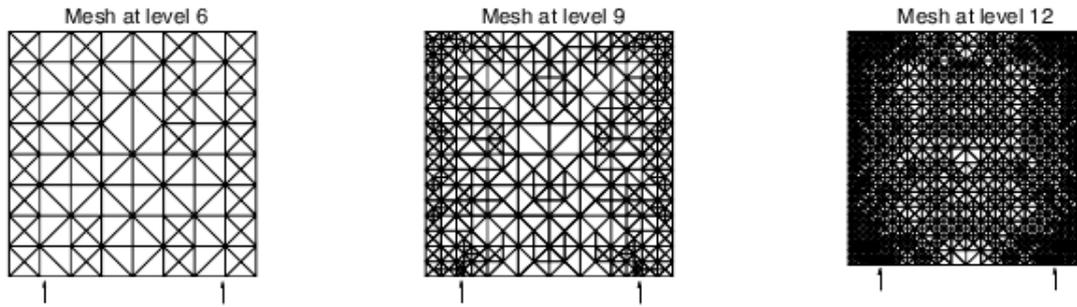


FIG. 3.15 – Maillages raffinés au niveau 6, 9 et 12 [234].

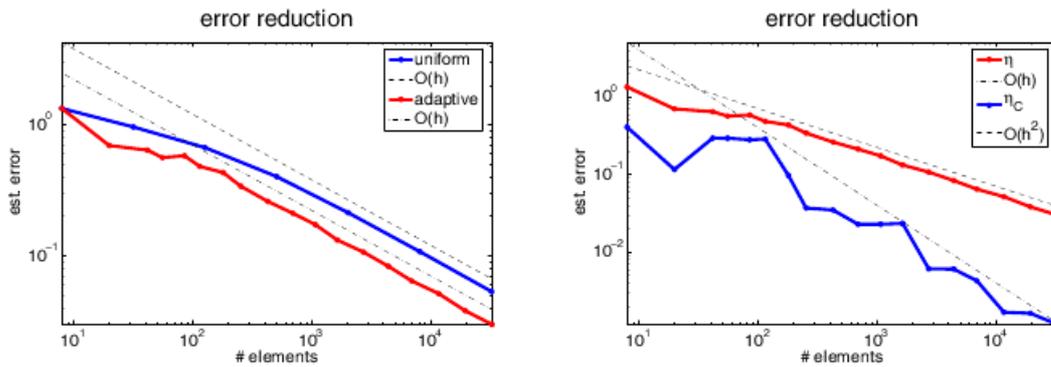


FIG. 3.16 – A gauche : Convergence de l’estimateur [234] avec un raffinement uniforme et adapté. A droite : Convergence de l’estimateur [234] et de sa contribution au contact avec un raffinement adapté.

3.7 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre on propose, analyse et implémente deux estimateurs d'erreur par résidu η et $\tilde{\eta}$ correspondant à deux discrétisations par éléments finis du problème statique de frottement de Coulomb en utilisant le résultat d'unicité partiel de [203]. On obtient des bornes supérieure et inférieure pour l'erreur de discrétisation. Des définitions et des estimations théoriques, on observe que $\tilde{\eta}$ est plus simple à définir et mène à de meilleures bornes. On tire des expériences numériques que tous les termes de η et $\tilde{\eta}$ pour lesquels aucun résultat théorique optimal n'a été prouvé se comportent mieux que théoriquement. On a ainsi élargi le résultat obtenu par Hild et Nicaise [128] pour le problème de Signorini au problème de contact avec frottement de Coulomb.

Une des perspectives possibles est d'obtenir un résultat d'unicité pour le problème quasi-statique en adaptant les techniques de [203] et de traiter l'analyse a posteriori (les résultats d'existence ont été obtenus dans [11, 206] pour les problèmes quasi-statiques de même type que le problème statique traité dans ce chapitre).

Pour l'instant, désirant étudier le contact pour la méthode XFEM, on se propose de formuler et d'analyser une méthode par éléments finis mixte stabilisée appliquée au problème de contact frottant. Elle nous permettra notamment de contourner la condition inf-sup de Babuška-Brezzi.