

Équations multiples en univers stationnaire

Équations multiples en univers stationnaire

1. Régressions simultanées et méthode SUR	127
2. Systèmes d'équations simultanées et identification	129
3. Méthode des doubles moindres carrés	131
4. Méthode des triples moindres carrés	134
5. Méthode du maximum de vraisemblance	135
Problèmes et exercices	137
1. Modèle macroéconomique et méthode 2MC	137
2. Modèle macroéconomique et méthode 3MC	140
3. Modèle macroéconomique et méthode MV	143

Ce chapitre traite des modèles économétriques à plusieurs équations. Il s'intéresse d'abord aux régressions simultanées et à la méthode SUR, puis aborde les modèles à équations simultanées, définit les notions importantes de forme structurelle et de forme réduite, avant de décrire les conditions d'identification des paramètres. Il passe ensuite en revue quelques méthodes d'estimation des modèles à équations simultanées : les doubles moindres carrés, les triples moindres carrés et le maximum de vraisemblance à information complète.

1 Régressions simultanées et méthode SUR

L'objectif de cette section est d'étudier l'estimation d'un modèle à plusieurs équations, ayant chacune des variables explicatives différentes, et dont les termes d'erreur contemporains sont corrélés entre eux, mais indépendants des variables explicatives. Un tel modèle est composé de m équations de type :

$$Y_i = X_i\beta_i + u_i \quad (4.1)$$

$$\text{où } Y_i = \begin{pmatrix} Y_{i1} \\ Y_{i2} \\ \vdots \\ Y_{in} \end{pmatrix}, \beta_i = \begin{pmatrix} \beta_{i1} \\ \beta_{i2} \\ \vdots \\ \beta_{ik_i} \end{pmatrix}, u_i = \begin{pmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ \vdots \\ u_{in} \end{pmatrix} \text{ et } X_i = \begin{pmatrix} 1 & X_{i21} & \cdots & X_{ik_i1} \\ 1 & X_{i22} & \cdots & X_{ik_i2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{i2n} & \cdots & X_{ik_in} \end{pmatrix} \text{ pour tout } i = 1 \dots m.$$

Les termes d'erreur contemporains des différentes équations sont corrélés entre eux : $\text{Cov}(u_{it}, u_{jt}) = \sigma_{ij}$ pour tout $i = 1 \dots m$ et $j = 1 \dots m$. En revanche, pris à des périodes différentes, ils ne sont pas corrélés entre eux : $\text{Cov}(u_{it}, u_{jt-\theta}) = 0$ pour tout $i = 1 \dots m$, $j = 1 \dots m$ et pour tout $\theta \geq 1$.

Le terme d'erreur de chaque équation est supposé homoscédastique et non autocorrélé : $\text{Cov}(u_{it}, u_{it-\theta}) = 0$ et $V(u_{it}) = \sigma_i^2$ pour tout $i = 1 \dots m$. Ces hypothèses impliquent que :

$$\Sigma_{u_i u_j} = E(u_i u_j') = \begin{pmatrix} \sigma_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{ij} \end{pmatrix} = \sigma_{ij} I_n$$

et

$$\Sigma_{u_i} = E(u_i u_i') = \begin{pmatrix} \sigma_i^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_i^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_i^2 \end{pmatrix} = \sigma_i^2 I_n \quad (4.2)$$

Ces équations sont appelées « équations SUR » (Seemingly Unrelated Regression) par Zellner [ZEL 1962]. La méthode SUR permet d'obtenir des estimations plus précises des coefficients que celles obtenues en appliquant simplement les MCO à chaque équation. En « raccordant bout à bout » les vecteurs Y_i des m équations, on obtient une variable dépendante composite ayant $m \times n$ lignes et 1 colonne :

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_m \end{pmatrix} = (Y_{11} Y_{12} \dots Y_{1n} Y_{21} Y_{22} \dots Y_{2n} \dots Y_{m1} Y_{m2} \dots Y_{mn})'$$

Le système d'équations initial peut s'écrire sous la forme d'une seule équation linéaire :

$$Y = X\beta + u \quad (4.3)$$

$$\text{où } X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_m \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \text{ et } u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}.$$

La matrice X a $m \times n$ lignes et $k_1 + k_2 + \dots + k_m$ colonnes. Le vecteur β a $k_1 + k_2 + \dots + k_m$ lignes et 1 colonne. Le vecteur u a $m \times n$ lignes et 1 colonne. La matrice de variance et

covariance du terme d'erreur u est :

$$\Sigma_u = E(uu_i') = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \cdots & \sigma_m^2 \end{pmatrix} \otimes I_n = \Sigma \otimes I_n \quad (4.4)$$

Dans l'équation (4.4), on utilise le produit de Kronecker (ou produit tensoriel). Si les valeurs des σ_i^2 et σ_{ij} sont connues, il est logique d'estimer ce modèle par la méthode des moindres carrés généralisés, dite MCG (voir chapitre 3). Toutefois, elles ne sont pas connues dans la réalité. Zellner [ZEL 1962] propose d'estimer d'abord chaque équation séparément par MCO :

$$Y_i = X_i \hat{\beta}_i^{MCO} + e_i \quad (4.5)$$

et d'utiliser les résidus de ces équations pour obtenir des estimations des σ_i^2 et σ_{ij} :

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{e_i' e_i}{n - k_i} \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}_{ij} = \frac{e_i' e_j}{\sqrt{n - k_i} \sqrt{n - k_j}} \quad (4.6)$$

Ces estimations forment une matrice $\hat{\Sigma}$ estimée, utilisable dans la formule des MCG. On obtient ainsi les estimateurs SUR des coefficients :

$$\hat{\beta}^{SUR} = \left(X' \left(\hat{\Sigma}^{-1} \otimes I_n \right) X \right)^{-1} X' \left(\hat{\Sigma}^{-1} \otimes I_n \right) Y \quad (4.7)$$

On montre que ces estimateurs sont plus précis (variance plus faible) que ceux que l'on obtient en estimant chaque équation indépendamment par MCO. L'explication est simple : la méthode SUR tient compte des corrélations contemporaines entre les termes d'erreur des différentes équations. Toutefois, si les covariances contemporaines sont toutes nulles, ou si les variables explicatives sont les mêmes dans les m équations ($X_1 = X_2 = \cdots = X_m$), les estimateurs SUR et les estimateurs de MCO de chaque équation prise indépendamment sont égaux.

2 Systèmes d'équations simultanées et identification

Pour comprendre ce qu'est un modèle à équations simultanées, il faut distinguer les variables **endogènes** des variables **exogènes**. Les premières sont telles que leur valeur en t est déterminée par le modèle alors que les secondes ne sont pas déterminées par le modèle : elles sont données telles quelles et, conditionnellement à leur valeur, le modèle détermine les valeurs des variables endogènes. Les variables exogènes et endogènes retardées sont dites **prédéterminées**.

Un modèle à équations simultanées décrit la manière dont se déterminent simultanément les valeurs de G variables endogènes à la période t , en fonction des valeurs contemporaines ou retardées de certaines variables exogènes, et d'éventuelles valeurs retardées des variables endogènes. Certaines variables endogènes sont fonction d'autres variables endogènes et cette simultanéité produit des **équations apparemment linéaires**, où le terme d'erreur est lié aux variables explicatives.

Un modèle à équations simultanées est décrit par G **équations structurelles** de la façon suivante :

$$\beta_{i1}Y_{1t} + \beta_{i2}Y_{2t} + \cdots + \beta_{iG}Y_{Gt} + \gamma_{i1}X_{1t} + \gamma_{i2}X_{2t} + \cdots + \gamma_{iK}X_{Kt} = u_{it} \quad (4.8)$$

pour tout $i = 1 \dots G$, et pour tout $t = 1 \dots n$, où les Y_j sont les G variables endogènes et les X_l sont les K variables prédéterminées. Souvent, dans les équations, le coefficient de l'un des Y_j est normalisé à 1 (par exemple $\beta_{ii} = 1$ pour tout $i = 1 \dots G$) et la variable explicative X_{1t} vaut 1, pour tout t , de sorte qu'elles peuvent s'écrire :

$$Y_{it} = -\gamma_{i1} + \sum_{l \neq i} (-\beta_{il}) Y_{lt} + (-\gamma_{i2}) X_{2t} + \cdots + (-\gamma_{iK}) X_{Kt} + u_{it} \quad (4.9)$$

Dans la suite du chapitre, on utilisera la formulation précédente.

Des **identités** qui relient certaines variables du modèle, sans faire intervenir des coefficients inconnus et sans terme d'erreur, remplacent parfois certaines équations structurelles. Si on a G_1 équations structurelles et G_2 identités, $G = G_1 + G_2$. Il faut G équations ou identités pour pouvoir déterminer G variables endogènes.

Une équation structurelle ne fait pas nécessairement intervenir toutes les variables : parmi les endogènes et les prédéterminées, certaines peuvent être absentes (leurs coefficients peuvent être nuls). Des restrictions *a priori* peuvent en outre relier certains coefficients. Généralement, on pose la condition que la première variable prédéterminée x_1 est exogène et vaut 1 à toute période t , de manière à avoir une constante dans les équations. Le système formé par les équations structurelles et les identités s'appelle **forme structurelle** et peut s'exprimer de manière matricielle :

$$By_t + \Gamma x_t = u_t \quad (4.10)$$

pour tout $t = 1 \dots n$, où $y_t = \begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ \vdots \\ Y_{Gt} \end{pmatrix}$, $x_t = \begin{pmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \\ \vdots \\ X_{Kt} \end{pmatrix}$, $u_t = \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ \vdots \\ u_{Gt} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1G} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2G} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{G1} & \beta_{G2} & \cdots & \beta_{GG} \end{pmatrix}$ et $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1K} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{G1} & \gamma_{G2} & \cdots & \gamma_{GK} \end{pmatrix}$. La matrice B a G colonnes

et G lignes. La matrice Γ a G lignes et K colonnes. Si l'équation i est une identité, $u_{it} = 0$ et les coefficients β_{ij} et γ_{ij} ont des valeurs connues dès le départ. Si toutes les équations ou identités sont normalisées, $\beta_{ii} = 1$ pour tout i . Si une constante figure dans certaines équations, $X_{1t} = 1$ pour tout t .

La théorie économique, financière, ou marketing, suggère des restrictions *a priori* sur les paramètres de B et Γ . Sans ces restrictions, les G équations seraient similaires et il serait impossible d'estimer leurs coefficients. Quand on fixe les valeurs des éléments de B et G , la forme structurelle est un système de G équations permettant de déterminer les valeurs des G variables endogènes Y_{it} en fonction des K variables prédéterminées X_{jt} . Si la matrice B n'est pas singulière, la solution du système s'appelle **forme réduite** et s'exprime de la façon suivante :

$$y_t = -B^{-1}\Gamma x_t + B^{-1}u_t = \Pi x_t + v_t \quad (4.11)$$

où $\Pi = -B^{-1}\Gamma$ et $v_t = B^{-1}u_t$.

Si l'on multiplie le système $By_t + \Gamma x_t = u_t$ par une matrice F non singulière à G lignes et G colonnes, on obtient un nouveau système équivalent : $FBy_t + F\Gamma x_t = Fu_t$. Si les hypothèses sur la distribution des u_{it} restent inchangées, on montre que le nouveau système et l'ancien ont exactement la même fonction de vraisemblance. Il manque donc des informations dans les données pour déterminer si les coefficients « vrais inconnus » valent B et Γ , ou bien FB et $F\Gamma$. Les deux formes structurelles sont équivalentes en observation. On montre qu'elles ont exactement la même forme réduite. Sans restrictions, les coefficients de B et Γ ne sont donc pas identifiés : plusieurs valeurs de B et Γ impliquent les mêmes valeurs des coefficients Π de la forme réduite. Si l'on connaît les valeurs des coefficients de Π , on ne peut donc pas trouver de manière unique les coefficients de B et Γ . Pour identifier certains paramètres de B et Γ , il faut imposer des restrictions valables à la fois sur les coefficients des matrices B et Γ et sur les coefficients des matrices FB et $F\Gamma$ résultant de toute transformation de la forme structurelle.

Les coefficients d'une équation structurelle sont identifiés quand seules des valeurs uniques, compatibles avec des valeurs fixées des coefficients de la forme réduite, sont en jeu. Par conséquent, les restrictions posées *a priori* sur B et Γ , et qui doivent être conservées par des transformations FB et $F\Gamma$, doivent impliquer suffisamment de restrictions sur toute matrice de transformations F pour que les coefficients contenus dans FB et $F\Gamma$ soient identiques à ceux contenus dans B et Γ .

Le lien entre les coefficients de la forme structurelle et les coefficients de la forme réduite est bien résumé par la relation $AW = 0$ où $A = [B \ \Gamma]$ et $W = \begin{bmatrix} \Pi \\ I_K \end{bmatrix}$. La matrice A a G lignes et $(G+K)$ colonnes. La matrice W a $(G+K)$ lignes et G colonnes. Chaque ligne de A est notée α_i , pour $i = 1 \dots G$. Une telle ligne est une matrice à 1 ligne et $(G+K)$ colonnes. Évidemment, $\alpha_i W = 0$ pour tout $i = 1 \dots G$. Imposer r_i restrictions aux coefficients de α_i implique qu'il existe une matrice φ_i , avec $(G+K)$ lignes et r_i colonnes, telle que $\alpha_i \varphi_i = 0$. La ligne α_i doit donc respecter la condition générale $\alpha_i [W \ \varphi_i] = 0$. La matrice $[W \ \varphi_i]$ a $(G+K)$ lignes et $(G+r_i)$ colonnes. Si, en plus, on normalise α_i en posant qu'un de ses coefficients est égal à 1, il faut, pour que l'équation $\alpha_i [W \ \varphi_i] = 0$ ait une solution α_i unique, que le rang de $[W \ \varphi_i]$ soit égal à $G+K-1$, ce qui est réalisé si et seulement si le rang de $A\varphi_i$ est égal à $G-1$. Il faut pour cela que r_i soit supérieur ou égal à $G-1$. En d'autres termes, on peut identifier les coefficients d'une équation structurelle si le nombre de restrictions *a priori* sur lesdits coefficients est au moins égal à $G-1$, où G est le nombre d'équations et identités du système (ou de variables endogènes). Quand seules des restrictions d'exclusion portant sur les variables de l'équation sont posées, il faut, pour opérer cette identification, que le nombre r_i de variables exclues soit au moins égal à $G-1$, c'est-à-dire que le nombre de variables prédéterminées exclues soit au moins égal à celui des variables endogènes présentes dans l'équation moins une.

Une équation est « exactement identifiée » quand le nombre de restrictions est égal au minimum requis pour l'identification ; quand il est supérieur à ce minimum, on dit qu'elle est « suridentifiée ».

3 Méthode des doubles moindres carrés

Abstraction faite d'éventuelles identités, chaque équation structurelle se présente encore de la manière suivante :

$$Y_i = Y^i \beta_i + X_i \gamma_i + u_i \tag{4.12}$$

pour tout $i = 1 \dots G_1$. En l'absence d'identités, $G_1 = G$. La notation Y_i représente le vecteur des n observations de la i^{e} variable endogène. Les vecteurs d'observation des g_i autres variables endogènes présentes dans l'équation i forment les colonnes de la matrice Y^i , à n lignes et g_i colonnes. Les vecteurs d'observation des k_i variables prédéterminées forment la matrice X_i , à n lignes et k_i colonnes. Bien entendu, $g_i \leq G - 1$ et $k_i \leq K$. Le vecteur colonne β_i est composé des valeurs non nulles $-\beta_{ij}$ ($j = 1 \dots G$ et $j \neq i$), où les β_{ij} sont les éléments non nuls de la ligne i de la matrice B (dans laquelle les β_{ii} valent 1). Le vecteur colonne γ_i est formé des valeurs non nulles $-\gamma_{ij}$ ($j = 1 \dots K$), où les γ_{ij} sont les éléments non nuls de la ligne i de la matrice Γ . Chaque équation i se représente encore de la manière suivante :

$$Y_i = (Y^i X_i) \begin{pmatrix} \beta_i \\ \gamma_i \end{pmatrix} + u_i = Z_i \lambda_i + u_i \quad (4.13)$$

où $Z_i = (Y^i X_i)$ est une matrice à n lignes et $(g_i + k_i)$ colonnes, et où $\begin{pmatrix} \beta_i \\ \gamma_i \end{pmatrix} = \lambda_i$.

Le choix d'une méthode d'estimation d'un modèle structurel dépend évidemment des hypothèses faites sur la distribution du terme d'erreur. Généralement, on suppose que les termes d'erreur contemporains des différentes équations sont corrélés entre eux : $\text{Cov}(u_{it}, u_{jt}) = \sigma_{ij}$ pour tout $i = 1 \dots m$ et $j = 1 \dots m$, et que les termes d'erreur non contemporains (de périodes différentes) ne sont pas corrélés entre eux : $\text{Cov}(u_{it}, u_{jt-\theta}) = 0$ pour tout $i = 1 \dots m$ et $j = 1 \dots m$ et pour tout $\theta \geq 1$. Le terme d'erreur de chaque équation est supposé homoscédastique et non autocorrélé : $\text{Cov}(u_{it}, u_{it-\theta}) = 0$ et $V(u_{it}) = \sigma_i^2$ pour tout $i = 1 \dots m$. Ces hypothèses impliquent que :

$$\Sigma_{u_i u_j} = E(u_i u_j') = \begin{pmatrix} \sigma_{ij} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{ij} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{ij} \end{pmatrix} = \sigma_{ij} I_n$$

et

$$\Sigma_{u_i} = E(u_i u_i') = \begin{pmatrix} \sigma_i^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_i^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_i^2 \end{pmatrix} = \sigma_i^2 I_n \quad (4.14)$$

On peut néanmoins choisir d'ignorer les liens entre les termes d'erreur des différentes équations, et estimer chacune d'entre elles individuellement. Ce faisant, on produit des estimateurs moins précis que ceux obtenus lorsque l'on tient compte de la corrélation contemporaine entre les termes d'erreur des différentes équations. Toutefois, de tels estimateurs peuvent être au moins non biaisés ou convergents, à condition que l'on tienne compte de la simultanéité. Effectivement, la présence de variables endogènes comme variables explicatives d'autres variables endogènes implique que le terme d'erreur de chaque équation n'est généralement pas indépendant de toutes les variables explicatives de cette équation (voir chapitre 2). Par conséquent, l'estimation de chaque équation par la méthode des MCO est exclue : on obtiendrait des estimateurs biaisés et non convergents. Il faut donc recourir à une méthode de variables instrumentales.

La méthode des doubles moindres carrés, dite 2MC, notée 2SLS en anglais (2 Stages Least Squares), est l'estimation séparée de chaque équation du système par la méthode des variables instrumentales, qui sont en l'occurrence toutes les variables prédéterminées du système (au-delà de l'équation i) qui forment la matrice X_T telle que :

$$X_T = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{K1} \\ X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{K2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{1n} & X_{2n} & \cdots & X_{Kn} \end{pmatrix}$$

L'estimateur des doubles moindres carrés de λ_i est donc :

$$\hat{\lambda}_i^{2MC} = (Z_i' X_T (X_T' X_T)^{-1} X_T' Z_i) Z_i X_T (X_T' X_T)^{-1} X_T' Y_i \quad (4.15)$$

On peut aussi obtenir cet estimateur en deux étapes :

1) On estime une régression de chaque variable Y_j^i de Y^i ($j = 1 \dots g_i$) sur toutes les variables prédéterminées du système, par la méthode des moindres carrés ordinaires : $Y_j^i = X_T \hat{w}_j^{iMCO} + e_j$ avec $\hat{w}_j^{iMCO} = (X_T' X_T)^{-1} (X_T')' Y_j^i$, et l'on garde les valeurs calculées ainsi obtenues : $\hat{Y}_j^i = X_T \hat{w}_j^{iMCO} = X_T (X_T' X_T)^{-1} (X_T')' Y_j^i$. On les rassemble dans une matrice $\hat{Y}^i = (\hat{Y}_1^i \hat{Y}_2^i \dots \hat{Y}_{g_i}^i) = X_T (X_T' X_T)^{-1} (X_T')' Y^i$. On définit alors la matrice $\hat{Z}_i = (\hat{Y}^i X_i)$.

2) On estime une régression de Y_i sur les variables \hat{Y}_j^i et sur les variables de X_i par MCO. Il s'agit donc d'une régression de Y_i sur les variables de $\hat{Z}_i = (\hat{Y}^i X_i)$: $Y_i = \hat{Z}_i \hat{\lambda}_i^{2MC} + E_i$.
où

$$\hat{\lambda}_i^{2MC} = (\hat{Z}_i' \hat{Z}_i)^{-1} \hat{Z}_i' Y_i \quad (4.16)$$

On peut encore présenter l'estimateur des doubles moindres carrés en agrégeant les différentes équations de la manière suivante :

$$Y = Z\lambda + u \quad (4.17)$$

$$\text{où } Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{G_1} \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} Z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Z_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Z_{G_1} \end{pmatrix}, \quad \hat{\lambda}^{2MC} = \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1^{2MC} \\ \hat{\lambda}_2^{2MC} \\ \vdots \\ \hat{\lambda}_{G_1}^{2MC} \end{pmatrix} \quad \text{et } u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{G_1} \end{pmatrix}.$$

La matrice de variance et de covariance de u est :

$$\Sigma_u = E(uu_i') = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \cdots & \sigma_m^2 \end{pmatrix} \otimes I_n = \Sigma \otimes I_n$$

Après projection des variables endogènes de droite sur les variables instrumentales (toutes les variables endogènes du modèle), on peut définir le modèle agrégé estimé suivant :

$$Y = \hat{Z}\hat{\lambda}^{2MC} + E \quad (4.18)$$

$$\text{où } \hat{Z} = \begin{pmatrix} \hat{Z}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{Z}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{Z}_{G_1} \end{pmatrix}, \hat{\lambda}^{2MC} = \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1^{2MC} \\ \hat{\lambda}_2^{2MC} \\ \vdots \\ \hat{\lambda}_{G_1}^{2MC} \end{pmatrix} \text{ et } E = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_{G_1} \end{pmatrix}, \text{ et où}$$

$$\hat{\lambda}^{2MC} = (\hat{Z}'\hat{Z})^{-1} \hat{Z}'Y = (\hat{Z}'Z)^{-1} \hat{Z}'Y \quad (4.19)$$

\hat{B}^{2MC} et $\hat{\Gamma}^{2MC}$ sont donc les estimateurs de B et Γ . Une estimation de la matrice de variance et de covariance de $\hat{\lambda}_i^{2MC}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{\hat{\lambda}_i^{2MC}} &= (\hat{Z}'_i\hat{Z}_i)^{-1} \frac{(Y_i - Z_i\hat{\lambda}_i^{2MC})(Y_i - Z_i\hat{\lambda}_i^{2MC})'}{n} \\ &= (Z'_iZ_i)^{-1} \frac{(Y_i - Z_i\hat{\lambda}_i^{2MC})(Y_i - Z_i\hat{\lambda}_i^{2MC})'}{n} \end{aligned}$$

On montre que les estimateurs des doubles moindres carrés sont convergents. Toutefois, ils présentent un biais de petit échantillon ; ils sont asymptotiquement normaux. Comme ils ne tiennent pas compte des corrélations entre les termes d'erreur (ou des perturbations) des différentes équations, ils sont en général asymptotiquement inefficients, au sens où leur précision est moindre que celle des estimateurs que l'on obtient en tenant compte de ces corrélations. En contrepartie de cette insuffisance, ils présentent l'avantage ne pas être affectés par d'éventuelles erreurs de spécification dans les différentes autres équations puisqu'ils n'en tiennent pas compte.

4 Méthode des triples moindres carrés

La méthode des triples moindres carrés, dite 3MC, notée en anglais 3SLS (3 Stages Least Squares), est à information complète. L'estimateur des triples moindres carrés est l'estimateur 2MC avec une correction du type des moindres carrés généralisés, qui tient compte des corrélations contemporaines entre les termes d'erreur des équations structurelles du modèle.

Il s'agit donc d'une nouvelle manière d'estimer les G_1 équations (4.12), qui peuvent être agrégées en la formule (4.17), et dont les termes d'erreur contemporains sont corrélés, comme indiqué par la matrice Σ . On réalise les étapes 1 et 2 de la méthode des doubles moindres carrés, puis on utilise les résidus E_i ainsi obtenus pour estimer les éléments de la matrice Σ :

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{E'_iE_i}{n - k_i} \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}_{ij} = \frac{E'_iE_j}{\sqrt{n - k_i}\sqrt{n - k_j}} \quad (4.20)$$

Ces estimations forment une matrice $\hat{\Sigma}$ estimée, qui peut être utilisée dans la formule des MCG. On obtient ainsi les estimateurs 3MC des coefficients :

$$\hat{\lambda}^{3MC} = \left(\hat{Z}' \left(\hat{\Sigma}^{-1} \otimes I_n \right) \hat{Z} \right)^{-1} \hat{Z}' \left(\hat{\Sigma}^{-1} \otimes I_n \right) Y \quad (4.21)$$

\hat{B}^{3MC} et $\hat{\Gamma}^{3MC}$ sont donc les estimateurs de B et Γ . Lorsque toutes les équations sont exactement identifiées, les estimateurs des triples moindres carrés sont identiques aux estimateurs des doubles moindres carrés : $\hat{\lambda}^{3MC} = \hat{\lambda}^{2MC}$.

Une estimation de la matrice de variance et de covariance de $\hat{\lambda}^{3MC}$ est donnée par :

$$\hat{\Sigma}_{\hat{\lambda}^{3MC}} = \left(\hat{Z}' \left(\hat{\Sigma}^{-1} \otimes I_n \right) \hat{Z} \right)^{-1} \quad (4.22)$$

On constate que les estimateurs des triples moindres carrés sont convergents. Toutefois, ils présentent un biais de petit échantillon ; ils sont asymptotiquement normaux. Lorsque certaines équations du modèle sont suridentifiées, ils sont plus efficaces que les estimateurs 2MC.

5 Méthode du maximum de vraisemblance

La méthode du maximum de vraisemblance, notée FIML (Full Information Maximum Likelihood), est à information complète. Contrairement aux méthodes 2MC et 3MC, elle nécessite de faire des hypothèses explicites sur la distribution. En général, on suppose que le modèle structurel $By_t + \Gamma x_t = u_t$ est tel que $u_t \sim N(0, \Sigma)$.

Pour $G_1 = G$, cette distribution normale du terme d'erreur implique que la fonction de densité de y_t , conditionnellement à x_t , est donnée par :

$$(2\pi)^{-\frac{G}{2}} |\det B| \left(\det \Sigma \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} (By_t + \Gamma x_t)' \Sigma^{-1} (By_t + \Gamma x_t)} \quad (4.23)$$

L'hypothèse d'indépendance intertemporelle implique alors que le logarithme de la fonction de vraisemblance est :

$$\begin{aligned} \ln(L(B, \Gamma, \Sigma)) &= -\frac{Gn}{2} \ln(2\pi) + n \ln(|\det B|) \\ &\quad - \frac{n}{2} \ln \left(\det \Sigma \right) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (By_t + \Gamma x_t)' \sum_{t=1}^{-1} (By_t + \Gamma x_t) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Les estimateurs de maximum de vraisemblance B^{MV} , Γ^{MV} et Σ^{MV} sont les valeurs de B , Γ et Σ pour lesquelles cette fonction est maximale. Ils sont convergents et asymptotiquement efficaces, à condition que le choix de la distribution soit correct. Ils sont asymptotiquement distribués selon une normale.

Résumé

Les systèmes de régressions simultanées regroupent des équations qui expliquent chacune une variable endogène, en fonction de variables explicatives différentes, qui ne comportent aucune variable endogène. Les perturbations ou termes d'erreur sont indépendants des variables explicatives. Les équations sont liées pour la simple raison que les termes d'erreur contemporains sont corrélés entre eux. La méthode SUR permet d'obtenir des estimateurs plus précis que ceux que l'on a en appliquant les MCO à chaque équation. Les modèles à équations simultanées regroupent des équations qui expliquent chacune une variable endogène en fonction de variables prédéterminées et souvent aussi d'autres variables endogènes, qui sont elles-mêmes expliquées par d'autres équations du modèle. Cette simultanéité implique que les termes d'erreur sont liés aux variables explicatives. On ne peut estimer les coefficients que sous certaines conditions d'identification. La méthode des doubles moindres carrés, qui est à information limitée, et celles des triples moindres carrés et du maximum de vraisemblance, qui sont à information complète, sont des outils d'estimation appropriés.

Problèmes et exercices

EXERCICE 1 MODÈLE MACROÉCONOMIQUE ET MÉTHODE 2MC

Énoncé

Le fichier FR.xls, téléchargeable sur le site Internet afférent à cet ouvrage, contient les variables suivantes, sur une période allant de 1978 à 2002 :

- CF* : consommation des ménages à prix constants ;
- I* : investissement ou formation brute de capital fixe à prix constants ;
- X* : exportations à prix constants ;
- M* : importations à prix constants ;
- PIB* : produit intérieur brut à prix constants ;
- RPA* : revenu primaire réel des autres secteurs que les ménages ;
- PRELN* : prélèvements d'impôts et cotisations sociales sur les ménages en termes réels, nets de prestations reçues par les ménages ;
- P* : indice des prix de la consommation ;
- PM* : indice des prix des importations.

Sur la base de ces données, on peut définir les variables suivantes :

- RDR* : revenu disponible réel des ménages, égal à $RPR - PRELN$;
- RES* : autres composantes de la demande domestique à prix constants, égales à $PIB - (CF + I + X - M)$;
- RPR* : revenu primaire réel des ménages, égal à $PIB - RPA$;
- PMR* : prix relatif des importations, égal à PM/P ;
- INF* : taux d'inflation égal à la variation logarithmique de *P*.

On spécifie un modèle macroéconomique dont les équations structurelles sont les suivantes :

$$CF_t = \alpha_1 + \alpha_2 RDR_t + \alpha_3 RDR_{t-1} + \alpha_4 CF_{t-1} + \alpha_5 INF_t + u_{1t}$$

$$I_t = \beta_1 + \beta_2 PIB_t + \beta_3 PIB_{t-1} + \beta_4 I_{t-1} + u_{2t}$$

$$M_t = \gamma_1 + \gamma_2 PIB_t + \gamma_3 PMR_t + \gamma_4 M_{t-1} + u_{3t}$$

Les identités sont :

$$PIB_t = CF_t + I_t + RES_t + X_t - M_t$$

$$RPR_t = PIB_t - RPA_t$$

$$RDR_t = RPR_t - PRELN_t$$

Les variables endogènes sont CF_t , RDR_t , I_t , PIB_t , M_t et RPR_t . Les variables exogènes sont INF_t et PMR_t . Les variables prédéterminées sont CF_{t-1} , RDR_{t-1} , I_{t-1} , PIB_{t-1} , INF_t , PMR_t et M_{t-1} . Estimez ce modèle par la méthode des doubles moindres carrés. Travaillez avec TSP.

Solution

Il faut d'abord vérifier que les conditions d'identification de chaque équation sont respectées. La première équation contient deux variables endogènes : CF_t et RDR_t , et en exclut quatre prédéterminées : I_{t-1} , PIB_{t-1} , PMR_t et M_{t-1} . L'équation est identifiée, et même suridentifiée, puisque $4 > 2 - 1$. La deuxième équation contient deux variables endogènes : I_t et PIB_t , et en exclut cinq prédéterminées : CF_{t-1} , RDR_{t-1} , INF_t , PMR_t et M_{t-1} . L'équation est identifiée, et même suridentifiée, puisque $5 > 2 - 1$. La troisième équation contient deux variables endogènes : M_t et PIB_t , et en exclut cinq prédéterminées : CF_{t-1} , RDR_{t-1} , I_{t-1} , PIB_{t-1} et INF_t . L'équation est identifiée, et même suridentifiée, puisque $5 > 2 - 1$.

Le programme d'instructions TSP est le suivant :

```

OPTIONS MEMORY=25;
FREQ A;
SMPL 1978 2002;
READ(FILE='C : \FRC.XLS');
PMR=PM/P;
RES=PIB-(CF+I+X-M);
RPR=PIB-RPA;
RDR=RPR-PRELN;
SMPL 1979 2002;
INF=LOG(P)-LOG(P(-1));
2SLS(INST=(C,CF(-1),INF,PIB(-1) I(-1) PMR M(-1) RPÀ PRELN)) CF C RDR RDR(-1) CF(-1) INF;
2SLS(INST=(C,CF(-1),INF,PIB(-1) I(-1) PMR M(-1) RPÀ PRELN)) I C PIB PIB(-1) I(-1);
2SLS(INST=(C,CF(-1),INF,PIB(-1) I(-1) PMR M(-1) RPÀ PRELN)) M C PIB PMR M(-1);

```

Les résultats sont :

Equation 1

=====

Method of estimation = Instrumental Variable

Dependent variable: CF
 Endogenous variables: RDR RDR(-1)
 Included exogenous variables: C CF(-1) INF
 Excluded exogenous variables: PIB(-1) I(-1) PMR M(-1) RP À PRELN
 Current sample: 1979 to 2002
 Number of observations: 24

Mean of dep. var. = 613.704 R-squared = .996999
 Std. dev. of dep. var. = 75.2243 Adjusted R-squared = .996368
 Sum of squared residuals = 390.795 Durbin-Watson = 2.89278 [.541,1.00]
 Variance of residuals = 20.5682 E'PZ*E = 125.497
 Std. error of regression = 4.53521

Variable	Estimated Coefficient	Standard Error	t-statistic	P-value
C	75.3664	19.9505	3.77767	[.000]
RDR	.889724	.148381	5.99621	[.000]
RDR(-1)	-.616957	.147234	-4.19030	[.000]

CF(-1)	.566376	.144285	3.92541	[.000]
INF	-182.553	63.2190	-2.88762	[.004]

Equation 2

=====

Method of estimation = Instrumental Variable

Dependent variable: I
 Endogenous variables: PIB
 Included exogenous variables: C PIB(-1) I(-1)
 Excluded exogenous variables: CF(-1) INF PMR M(-1) RPÀ PRELN
 Current sample: 1979 to 2002
 Number of observations: 24

Mean of dep. var. = 214.343	R-squared = .992031
Std. dev. of dep. var. = 36.6089	Adjusted R-squared = .990835
Sum of squared residuals = 246.240	Durbin-Watson = 1.93225 [.002,.992]
Variance of residuals = 12.3120	E'PZ*E = 40.9836
Std. error of regression = 3.50884	

Variable	Estimated Coefficient	Standard Error	t-statistic	P-value
C	-3.80473	5.21909	-.729004	[.466]
PIB	.642299	.059717	10.7558	[.000]
PIB(-1)	-.623924	.065328	-9.55064	[.000]
I(-1)	.875597	.075301	11.6280	[.000]

Equation 3

=====

Method of estimation = Instrumental Variable

Dependent variable: M
 Endogenous variables: PIB
 Included exogenous variables: C PMR M(-1)
 Excluded exogenous variables: CF(-1) INF PIB(-1) I(-1) RPA
 PRELN
 Current sample: 1979 to 2002
 Number of observations: 24

Mean of dep. var. = 221.583	R-squared = .984135
Std. dev. of dep. var. = 78.6838	Adjusted R-squared = .981755
Sum of squared residuals = 2259.10	Durbin-Watson = 1.52590 [.000,.880]
Variance of residuals = 112.955	E'PZ*E = 1614.40
Std. error of regression = 10.6280	

Variable	Estimated Coefficient	Standard Error	t-statistic	P-value
C	-79.5457	93.2394	-.853133	[.394]
PIB	.117524	.083857	1.40149	[.161]
PMR	1.41185	25.9975	.054307	[.957]
M(-1)	.804479	.143033	5.62442	[.000]

EXERCICE 2 MODÈLE MACROÉCONOMIQUE ET MÉTHODE 3MC

Énoncé

Sur la base des données de l'exercice 1, estimez le même modèle que celui de l'exercice précédent, en utilisant cette fois la méthode des triples moindres carrés. Travaillez avec TSP.

Solution

Le programme d'instructions TSP est le suivant :

```
OPTIONS MEMORY=25;
FREQ A;
SMPL 1978 2002;
READ(FILE='C :\FR.XLS');
PMR=PM/P;
RES=PIB-(CF+I+X-M);
RPR=PIB-RPA;
RDR=RPR-PRELN;
SMPL 1979 2002;
INF=LOG(P)-LOG(P(-1));
FORM(VARPREF=A) CON CF C RDR RDR(-1) CF(-1) INF;
FORM(VARPREF=B) INV I C PIB PIB(-1) I(-1);
FORM(VARPREF=C) IMP M C PIB PMR M(-1);
3SLS(INST=(C,CF(-1),INF,PIB(-1) I(-1) PMR M(-1) RPÀ PRELN)) CON INV IMP;
```

Les résultats sont :

THREE STAGE LEAST SQUARES

EQUATIONS: CON INV IMP

INSTRUMENTS: C CF(-1) INF PIB(-1) I(-1) PMR M(-1) RPÀ PRELN

MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS ON V--COV MATRIX OF RESIDUALS = 0

NOTE => The model is linear in the parameters.

Working space used: 5025

STARTING VALUES

	A0	ARDR	ARDR1	ACF1	AINF
VALUE	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

	B0	BPIB	BPIB1	BI1	C0
VALUE	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

	CPIB	CPMR	CM1
VALUE	0.00000	0.00000	0.00000

F= 0.11622E+08 FNEW= 1780.9 ISQZ= 0 STEP= 1.0000 CRIT= 0.11621E+08

CONVERGENCE ACHIEVED AFTER 1 ITERATION

2 FUNCTION EVALUATIONS.

END OF TWO STAGE LEAST SQUARES ITERATIONS (SIGMA=IDENTITY). THREE STAGE
LEAST SQUARES ESTIMATES WILL BE OBTAINED USING THIS ESTIMATE OF SIGMA:

RESIDUAL COVARIANCE MATRIX

	CON	INV	IMP
CON	16.28313		
INV	0.072019	10.25999	
IMP	2.37859	-1.17726	94.12937

WEIGHTING MATRIX

	CON	INV	IMP
CON	0.24782	-0.0013808	-0.015148
INV		0.31220	0.011964
IMP			0.10334

Working space used: 5025

F= 28.337 FNEW= 28.284 ISQZ= 0 STEP= 1.0000 CRIT= 0.53014E-01

CONVERGENCE ACHIEVED AFTER 1 ITERATION

4 FUNCTION EVALUATIONS.

THREE STAGE LEAST SQUARES

Residual Covariance Matrix

	CON	INV	IMP
CON	16.07974		
INV	-0.017320	10.37265	
IMP	3.45061	-2.00440	94.29357

Weighting Matrix

	CON	INV	IMP
CON	0.24782	-0.0013808	-0.015148
INV		0.31220	0.011964
IMP			0.10334

Covariance Matrix of Transformed Residuals

	CON	INV	IMP
CON	23.70022		
INV	-0.16422	24.26539	
IMP	0.67084	-0.62395	23.91249

Number of observations = 24 E'PZ*E = 28.2839

Parameter	Estimate	Standard Error	t-statistic	P-value
A0	73.4501	17.7272	4.14337	[.000]
ARDR	.872145	.131794	6.61746	[.000]
ARDR1	-.610985	.130769	-4.67223	[.000]
ACF1	.583227	.128190	4.54971	[.000]
AINF	-177.335	56.1668	-3.15729	[.002]
B0	-3.84120	4.76406	-.806288	[.420]
BPIB	.648311	.054476	11.9009	[.000]
BPIB1	-.629440	.059594	-10.5621	[.000]
B11	.872549	.068693	12.7022	[.000]
C0	-72.2268	84.9437	-.850291	[.395]
CPIB	.113072	.076427	1.47948	[.139]
CPMR	-1.05115	23.6783	-.044393	[.965]
CM1	.807163	.130411	6.18939	[.000]

Standard Errors computed from quadratic form of analytic first derivatives (Gauss)

Equation: CON
Dependent variable: CF

Mean of dep. var. = 613.704
Std. dev. of dep. var. = 75.2243
Sum of squared residuals = 385.914
Variance of residuals = 16.0797
Std. error of regression = 4.00996
R-squared = .997037
Durbin-Watson = 2.87331 [.517,1.00]

Equation: INV
Dependent variable: I

Mean of dep. var. = 214.343
Std. dev. of dep. var. = 36.6089
Sum of squared residuals = 248.944
Variance of residuals = 10.3727
Std. error of regression = 3.22066
R-squared = .991944
Durbin-Watson = 1.95254 [.003,.994]

Equation: IMP
Dependent variable: M

Mean of dep. var. = 221.583
Std. dev. of dep. var. = 78.6838
Sum of squared residuals = 2263.05
Variance of residuals = 94.2936
Std. error of regression = 9.71049
R-squared = .984108
Durbin-Watson = 1.53330 [.000,.884]

EXERCICE 3 MODÈLE MACROÉCONOMIQUE ET MÉTHODE MV

Énoncé

On spécifie un modèle macroéconomique dont les équations structurelles sont les suivantes :

$$\ln(CF_t) - \ln(CF_{t-1}) = \alpha_1 + \alpha_2(\ln(RDR_t) - \ln(RDR_{t-1})) + \alpha_3 \ln(RDR_{t-1}) + \alpha \ln(CF_{t-1}) + \alpha(\ln(P_t) - \ln(P_{t-1})) + u_{1t}$$

$$\ln(I_t) - \ln(I_{t-1}) = \alpha_1 + \alpha_2(\ln(PIB_t) - \ln(PIB_{t-1})) + \alpha_3 \ln(I_{t-1}) + \alpha \ln(PIB_{t-1}) + \alpha \ln(CF_{t-1}) + \alpha(\ln(P_t) - \ln(P_{t-1})) + u_{2t}$$

$$\ln(M_t) - \ln(M_{t-1}) = \alpha_1 + \alpha_2 \ln(PIB_t) - \ln(PIB_{t-1}) + \alpha_3 \ln(PMR_t) - \ln(PMR_{t-1}) + \alpha \ln(PIB_{t-1}) + \alpha \ln(PMR_{t-1}) + \alpha \ln(M_{t-1}) + u_{3t}$$

Les identités sont :

$$PIB_t = CF_t + I_t + RES_t + X_t - M_t$$

$$RPR_t = PIB_t - RPA_t$$

$$RDR_t = RPR_t - PRELN_t$$

Sur la base des données de l'exercice 1, estimez ce modèle macroéconomique par la méthode FIML. Travaillez avec TSP.

Solution

Le programme d'instructions TSP est le suivant :

```

OPTIONS MEMORY=25;
FREQ A;
SMPL 1978 2002;
READ(FILE='C:\FRC.XLS');
LP=LOG(P);
LPM=LOG(PM);
PMR=PM/P;
LPMR=LPM-LP;
LPB=LOG(PIB);
LM=LOG(M);
LPB=LOG(PIB);
RES=PIB-(CF+I+X-M);
RPR=PIB-RPA;
RDR=RPR-PRELN;
LI=LOG(I);
LC=LOG(CF);
LY=LOG(RDR);
SMPL 1979 2002;
DLC=LC-LC(-1);
DLY=LY-LY(-1);
DLPMR=LOG(PMR)-LOG(PMR(-1));
DLM=LM-LM(-1);
DLP=LOG(P)-LOG(P(-1));

```

```

DLPIB=LPB-LPB(-1);
DLI=LI-LI(-1);
PARAM A1 A2 A3 A4 A5 B1 B2 B3 B5 B4 C1 C2 C4 C5 C3 C6;
OLSQ DLC C DLY LY(-1) LC(-1) DLP;
SET A1=@CoeF(1);
SET A2=@CoeF(2);
SET A3=@CoeF(3);
SET A4=@CoeF(4);
SET A5=@CoeF(5);
OLSQ DLI C DLPIB LI(-1) LPB(-1) DLP;
SET B1=@CoeF(1);
SET B2=@CoeF(2);
SET B3=@CoeF(3);
SET B4=@CoeF(4);
OLSQ DLM C DLPIB DLPMR LPMR(-1) LPB(-1) LM(-1);
SET C1=@CoeF(1);
SET C2=@CoeF(2);
SET C3=@CoeF(3);
SET C4=@CoeF(4);
SET C5=@CoeF(5);
SET C6=@CoeF(6);
IDENT IDRDR RDR=RPR-PRELN;
IDENT IDDL C DLC=LC-LC(-1);
IDENT IDDLY DLY=LY-LY(-1);
IDENT ILC LC=LOG(CF);
IDENT ILY LY=LOG(RDR);
IDENT IDDLI DLI=LI-LI(-1);
IDENT IDLPB LPB=LOG(PIB);
IDENT IDLPIB DLPIB=LPB-LPB(-1);
IDENT IDPIB PIB=CF+I-M+X+RES;
IDENT IDRPR RPR=PIB-RPA;
IDENT IDDL M DLM=LM-LM(-1);
IDENT ILM LM=LOG(M);
IDENT ILI LI=LOG(I);
FRML EQC DLC=A1+A2*DLY+A3*LY(-1)+A4*LC(-1)+A5*DLP;
FRML EQI DLI=B1+B2*DLPIB+B3*LI(-1)+B4*LPB(-1)+B5*DLP;
FRML EQM DLM=C1+C2*DLPIB+C3*DLPMR+C4*LPMR(-1)+C5*LPB(-1)+C6*LM(-1);
FIML(maxit=1000, HCOV=G, ENDOG=(CF,I,M,LC,LI,LM,DLC,DLI,DLM,RDR,
LY,DLY,RPR,LPB,DLPIB,PIB)) EQC EQI EQM IDRDR IDDL C IDDLY ILC ILY
IDLPB IDLPIB IDPIB IDRPR IDDL M ILM ILI IDDLI;

```

Il faut d'abord générer toutes les variables contenues dans les équations structurelles et les identités, à partir des données du fichier FR.xls. Ensuite, on définit les paramètres à estimer avec l'instruction PARAM : les A_i correspondent aux α_i , les B_i aux β_i et les C_i aux γ_i . On estime chaque équation du modèle par MCO et l'on utilise les valeurs estimées des coefficients, qui sont des valeurs de départ convenables, pour les paramètres à estimer par FIML. Après chaque estimation par MCO, TSP garde en mémoire le vecteur des coefficients estimés dans une variable appelée @CoeF. Les instructions SET affectent les valeurs successives de ce vecteur aux paramètres correspondants. Les instructions IDENT

définissent chaque identité en lui donnant un nom. Les instructions FRML définissent chaque équation structurelle en lui donnant un nom. L'instruction FIML demande l'estimation d'un système d'équations par la méthode du maximum de vraisemblance à information complète. Elle doit être suivie des noms de toutes les équations et identités : EQC, EQI, EQM, IDRDR, IDDL, IDDLY, ILC, ILY, IDLPB, IDLPB, IDPIB, IDRPR, IDDL, ILM, ILI, IDDLI. L'option `maxit=1000` limite TSP à un maximum de 1 000 itérations, dans ses tentatives d'obtenir la convergence des valeurs estimées. L'option `HCOV=G` requiert une méthode spécifique pour le calcul de la matrice de variance et de covariance estimées des coefficients estimés, qui détermine les valeurs des écarts types (ou standard errors) de ces derniers. La liste des variables endogènes doit être mentionnée : CF, I, M, LC, LI, LM, DLC, DLI, DLM, RDR, LY, DLY, RPR, LPB, DLPIB, PIB.

Les résultats de l'instruction FIML sont les suivants :

```

Information Maximum Likelihood
=====

Equations: EQC EQI EQM

Identities: IDDLI ILI ILM IDDLM IDRPR IDPIB IDLPB IDLPB ILY
            ILC IDDLY IDDLI IDRDR

Endogenous variables: CF I M LC LI LM DLC DLI DLM RDR LY DLY
                    RPR LPB DLPIB PIB

NOTE => The model is linear in the parameters.
Working space used: 9939

STARTING VALUES

VALUE          A1          A2          A3          A4
0.67685        0.81852        0.32262       -0.43377

VALUE          A5          B1          B2          B3
-0.34865      -0.061901      2.83055      -0.12893

VALUE          B4          B5          C1          C2
0.10334        0.00000       -1.03046      2.85777

VALUE          C3          C4          C5          C6
-0.048439     -0.19344      0.32068      -0.22365

F= 232.06  FNEW= 206.29  ISQZ= 3 STEP= 4.0000  CRIT= 20.690
F= 206.29  FNEW= 202.59  ISQZ= 1 STEP= 0.50000  CRIT= 15.929
F= 202.59  FNEW= 198.19  ISQZ= 2 STEP= 2.0000  CRIT= 6.4935
F= 198.19  FNEW= 198.10  ISQZ= 1 STEP= 1.0000  CRIT= 3.4928
F= 198.10  FNEW= 196.95  ISQZ= 1 STEP= 1.0000  CRIT= 2.4203
F= 196.95  FNEW= 196.88  ISQZ= 2 STEP= 2.0000  CRIT= 0.69374E-01
F= 196.88  FNEW= 196.86  ISQZ= 1 STEP= 1.0000  CRIT= 0.38891E-01
F= 196.86  FNEW= 196.84  ISQZ= 2 STEP= 2.0000  CRIT= 0.13301E-01
F= 196.84  FNEW= 196.83  ISQZ= 1 STEP= 1.0000  CRIT= 0.12607E-01
F= 196.83  FNEW= 196.83  ISQZ= 2 STEP= 2.0000  CRIT= 0.44010E-02
F= 196.83  FNEW= 196.83  ISQZ= 1 STEP= 1.0000  CRIT= 0.45739E-02
F= 196.83  FNEW= 196.83  ISQZ= 2 STEP= 2.0000  CRIT= 0.14973E-02
F= 196.83  FNEW= 196.82  ISQZ= 1 STEP= 1.0000  CRIT= 0.16746E-02
F= 196.82  FNEW= 196.82  ISQZ= 2 STEP= 2.0000  CRIT= 0.51582E-03
F= 196.82  FNEW= 196.82  ISQZ= 1 STEP= 1.0000  CRIT= 0.61612E-03

```

F=	196.82	FNEW=	196.82	ISQZ=	2 STEP=	2.0000	CRIT=	0.17904E-03
F=	196.82	FNEW=	196.82	ISQZ=	1 STEP=	1.0000	CRIT=	0.22777E-03
F=	196.82	FNEW=	196.82	ISQZ=	2 STEP=	2.0000	CRIT=	0.62537E-04
F=	196.82	FNEW=	196.82	ISQZ=	1 STEP=	1.0000	CRIT=	0.84587E-04
F=	196.82	FNEW=	196.82	ISQZ=	2 STEP=	2.0000	CRIT=	0.21967E-04
F=	196.82	FNEW=	196.82	ISQZ=	1 STEP=	1.0000	CRIT=	0.31545E-04
F=	196.82	FNEW=	196.82	ISQZ=	2 STEP=	2.0000	CRIT=	0.77583E-05
F=	196.82	FNEW=	196.82	ISQZ=	1 STEP=	1.0000	CRIT=	0.11809E-04
F=	196.82	FNEW=	196.82	ISQZ=	1 STEP=	1.0000	CRIT=	0.27549E-05

CONVERGENCE ACHIEVED AFTER 24 ITERATIONS

105 FUNCTION EVALUATIONS.

Full Information Maximum Likelihood

Residual Covariance Matrix

	EQC	EQI	EQM
EQC	0.000097038		
EQI	0.00015629	0.00043666	
EQM	-0.00021264	-0.00016227	0.0010587

Number of observations = 24 Log likelihood = -196.823
 Schwarz B.I.C. = 222.248

Parameter	Estimate	Standard Error	t-statistic	P-value
A1	.532522	.205085	2.59658	[.009]
A2	.209422	.128189	1.63370	[.102]
A3	.385103	.085915	4.48235	[.000]
A4	-.473620	.101261	-4.67721	[.000]
A5	-.360606	.110658	-3.25875	[.001]
B1	-.244347	.473062	-.516522	[.605]
B2	1.73283	.283057	6.12182	[.000]
B3	-.252597	.074006	-3.41320	[.001]
B4	.227535	.108505	2.09700	[.036]
B5	-.225663	.226928	-.994428	[.320]
C1	-2.21637	1.37875	-1.60752	[.108]
C2	4.87888	.520245	9.37804	[.000]
C3	-.091867	.154722	-.593753	[.553]
C4	-.023498	.071327	-.329438	[.742]
C5	.460320	.277728	1.65745	[.097]
C6	-.197906	.116505	-1.69869	[.089]

Standard Errors computed from quadratic form of analytic first derivatives (Gauss)

Equation: EQC
 Dependent variable: DLC

Mean of dep. var. = .018001	Std. error of regression = .985081E-02
Std. dev. of dep. var. = .011672	R-squared = .257131
Sum of squared residuals = .232892E-02	Durbin-Watson = .846172
Variance of residuals = .970385E-04	

Equation: EQI

Dependent variable: DLI

Mean of dep. var. = .022827	Std. error of regression = .020896
Std. dev. of dep. var. = .039421	R-squared = .743255
Sum of squared residuals = .010480	Durbin-Watson = .834280
Variance of residuals = .436658E-03	

Equation: EQM

Dependent variable: DLM

Mean of dep. var. = .046139	Std. error of regression = .032538
Std. dev. of dep. var. = .043833	R-squared = .664563
Sum of squared residuals = .025409	Durbin-Watson = 1.31892
Variance of residuals = .105871E-02	

Références bibliographiques

- [DAV 2003] R. Davidson, J.G. Mackinnon, *Estimation And Inference In Econometrics*, Oxford University Press, 2003.
- [GRE 2003] W.Greene, *Econometric Analysis*, 5th Edition, Prentice Hall, 2003.
- [HAM 1994] J. Hamilton, *Time Series Analysis*, Princeton University Press, 1994
- [JOH 1997] J. Johnston, J. DiNardo, *Econometric Methods*, 4th ed., McGraw Hill International Editions, 1997.
- [ZEL 1962] A. Zellner, An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions, and Tests for Aggregation Bias, dans *Journal of the American Statistical Association*, 57, p. 348–368, 1962.