

Énergie d'un milieu poreux

Sommaire

6.1	Introduction	156
6.2	Milieu élastique troué	156
6.2.1	Milieu étudié	156
6.2.2	Chargement et tenseurs de localisation	157
6.2.3	Écriture abstraite de l'énergie avec les tenseurs de localisation	158
6.2.4	Calcul des termes de la fonction énergie élastique	158
6.2.5	Deux applications du théorème de réciprocité de Betti	161
6.2.6	Conclusion sur l'écriture de l'énergie élastique	161
6.2.7	Écriture du potentiel adapté à notre chargement et loi de comportement	162
6.3	Matériau poreux homogène équivalent	164
6.4	Milieu continu poreux hétérogène	166
6.4.1	Description du milieu continu poreux hétérogène	166
6.4.2	Chargement macroscopique et écriture des énergies élastiques et potentielles	167
6.4.3	Deux applications du théorème de réciprocité de Betti	169
6.4.4	Conclusion sur les énergies du milieu poreux hétérogène	170
6.5	Conclusion	171

6.1 Introduction

Dans cette partie nous précisons un point de microporomécanique, en complément de la présentation qui a été faite au § 3.4. Nous faisons ici une description détaillée de l'écriture de l'énergie d'un milieu poreux. Les matériaux étant tous considérés comme élastiques linéaires, l'énergie macroscopique est nécessairement quadratique en fonction des paramètres de chargement macroscopiques que sont les pressions dans les différentes familles de pores, et les déformations ou contraintes macroscopiques. Il s'agit dans cette partie d'établir clairement les écritures des énergies en fonction des propriétés poromécaniques à l'échelle macroscopique.

On fait tout d'abord ce travail pour un milieu élastique troué. Dans un second temps, on imagine que notre milieu poreux peut avoir plusieurs échelles imbriquées les unes dans les autres et qu'il peut donc être intéressant d'avoir deux étapes d'homogénéisation successives. On explique alors comment on introduit un milieu poreux équivalent pour l'échelle intermédiaire. On rassemble enfin ces informations pour écrire l'énergie d'un milieu poreux hétérogène.

6.2 Milieu élastique troué

On appelle milieu élastique troué un milieu formé d'une matrice solide de rigidité connue et variable, comportant un certain nombre de trous sous pression. On écrit dans cette partie les énergies d'un tel milieu, sans notion de changement d'échelle, puisque l'on n'essaie pas de représenter un matériau réel mais simplement d'étudier ce cas modèle du milieu élastique troué. La présentation que nous faisons a de nombreux points communs avec l'approche de Dormieux [11].

6.2.1 Milieu étudié

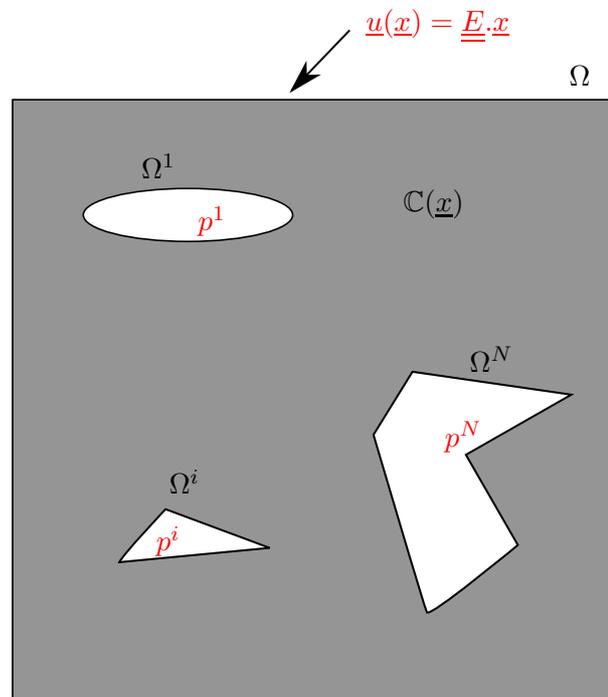


FIGURE 6.1 – Solide troué

Il s'agit d'un milieu élastique troué (Fig. 6.1). La frontière extérieure est appelée $\partial\Omega$. Chaque pore occupe un volume Ω^k , $k = 1..N$, avec N le nombre de pores. Le volume occupé par le

solide est appelé Ω^s . Ainsi, le domaine complet est $\Omega = \Omega^s \cup (\cup_{k=1}^N \Omega^k)$. Le milieu élastique est caractérisé par un tenseur de rigidité variable $\mathbb{C}(\underline{x})$ que l'on prend par convention nul dans la porosité $\Omega \setminus \Omega^s$.

6.2.2 Chargement et tenseurs de localisation

Notre milieu est chargé de deux façons :

- par une condition aux limites sur la frontière extérieure $\partial\Omega$ en déformation uniforme. Cela signifie que sur cette frontière le déplacement imposé vaut $\underline{u}(\underline{x}) = \underline{E} \cdot \underline{x}$.
- par des pressions dans les pores. Il y a autant de pressions que de pores, elles sont donc des paramètres de chargement indépendants pour notre problème. Le pore k , qui occupe le volume Ω^k , est donc soumis à une pression p^k , pour $k = 1..N$.

Utilisons maintenant le principe de superposition pour séparer cet unique problème à multiples chargements simultanés en $N + 1$ problèmes à un seul paramètre de chargement. Notre problème de départ est la somme :

- d'un problème à déplacement imposé $\underline{u}(\underline{x}) = \underline{E} \cdot \underline{x}$ sur la frontière extérieure $\partial\Omega$ et pression nulle dans les pores. On note les tenseurs des contraintes, déformations et le vecteur déplacement solution de ce problème posé sur Ω^s en rappelant le chargement en exposant : $(\underline{\underline{\sigma}}^E(\underline{x}), \underline{\underline{\varepsilon}}^E(\underline{x}), \underline{u}^E(\underline{x}))$.
- de N problèmes à déplacement nul sur $\partial\Omega$, mais tels que pour chaque problème, une des pressions p^k (appliquée sur la frontière $\partial\Omega^k$ du solide) seulement est non nulle. On note les champs de contrainte, déformation et le vecteur déplacement solutions de ce problème sur Ω^s : $(\underline{\underline{\sigma}}^k(\underline{x}), \underline{\underline{\varepsilon}}^k(\underline{x}), \underline{u}^k(\underline{x}))$.

La linéarité de la solution par rapport à ces chargements nous amène à écrire les déformations solutions de ces problèmes de la manière suivante :

- pour le problème à déformation imposée, on définit un tenseur de localisation en déformation (d'ordre 4, ayant la symétrie mineure mais pas nécessairement symétrie majeure) $\mathbb{A}(\underline{x})$ qui permet d'écrire la déformation :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^E(\underline{x}) = \mathbb{A}(\underline{x}) : \underline{E} \quad (6.1)$$

Ce tenseur est avant tout défini pour $\underline{x} \in \Omega^s$. Il est étendu par continuité du champ de déplacement associé à la déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}^E$. Ce prolongement n'est pas unique, mais existe. On peut prendre la déformation de n'importe quel matériau qui remplirait l'espace poreux en considérant le déplacement de sa frontière comme imposé. Ainsi la continuité du champ de déplacement associé est assurée. Le champ de tenseur de localisation $\mathbb{A}(\underline{x})$ est ainsi prolongé de manière naturelle à l'espace poreux par son lien avec le tenseur de déformation (équation 6.1).

- de même pour chaque chargement en pression dans le pore k , on introduit un tenseur de localisation en pression $\underline{\underline{A}}^k(\underline{x})$ qui est lui d'ordre 2 et symétrique, tel que la déformation du problème où seule la pression p^k est non nulle s'écrit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^k(\underline{x}) = \underline{\underline{A}}^k(\underline{x}) p^k \quad (6.2)$$

Ce tenseur est encore une fois défini pour $\underline{x} \in \Omega^s$. Il est étendu de la même façon que le tenseur de localisation en déformation.

Ainsi la déformation et la contrainte du problème de départ s'écrivent pour $\underline{x} \in \Omega^s$:

$$\begin{cases} \underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \underline{\varepsilon}^E(\underline{x}) + \sum_{k=1}^N \underline{\varepsilon}^k(\underline{x}) = \mathbb{A}(\underline{x}) : \underline{E} + \sum_{k=1}^N \underline{A}^k(\underline{x}) p^k \\ \underline{\sigma}(\underline{x}) = \underline{\sigma}^E(\underline{x}) + \sum_{k=1}^N \underline{\sigma}^k(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x}) : \underline{E} + \mathbb{C}(\underline{x}) : \sum_{k=1}^N \underline{A}^k(\underline{x}) p^k \end{cases} \quad (6.3)$$

6.2.3 Écriture abstraite de l'énergie avec les tenseurs de localisation

On peut maintenant écrire l'énergie élastique volumique de notre solide poreux, qui est une fonction quadratique de nos paramètres de chargement $(\underline{E}, (p^k)_{k=1:N})$, ce qui viendra naturellement par l'introduction de l'écriture de la déformation sous forme superposée en fonction des tenseurs de localisation en déformation et en pression (équation 6.3).

$$E^{el}(\underline{E}, (p^k)_{k=1:N}) = \frac{1}{2\Omega} \int_{\Omega^s} \underline{\sigma}(\underline{x}) : \underline{\varepsilon}(\underline{x}) dV = \frac{1}{2\Omega} \int_{\Omega^s} \underline{\varepsilon}(\underline{x}) : \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\varepsilon}(\underline{x}) dV \quad (6.4)$$

Où l'on peut exprimer les déformations avec les tenseurs de localisation :

$$\begin{aligned} E^{el}(\underline{E}, (p^k)_{k=1:N}) &= \frac{1}{2\Omega} \underline{E} : \left\{ \int_{\Omega^s} \mathbb{A}^t(\underline{x}) : \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x}) dV \right\} : \underline{E} \\ &+ \frac{1}{\Omega} \sum_{k=1}^N p^k \left\{ \int_{\Omega^s} \underline{A}^k(\underline{x}) : \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x}) dV \right\} : \underline{E} \\ &+ \frac{1}{2\Omega} \sum_{k=1}^N \sum_{\lambda=1}^N p^k \left\{ \int_{\Omega^s} \underline{A}^k(\underline{x}) : \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{A}^\lambda(\underline{x}) dV \right\} p^\lambda \end{aligned} \quad (6.5)$$

Cette expression théorique fait intervenir l'ensemble des couplages possibles. Elle n'est cependant pas facile à manipuler. En particulier, il est plus habituel d'effectuer les intégrations par parties (IPP) sur les déformations et les contraintes, en repartant d'une expression en fonction de ces quantités comme donnée dans le terme central de l'Eq 6.4.

6.2.4 Calcul des termes de la fonction énergie élastique

Décomposons notre énergie élastique en deux termes principaux. On s'appuie sur les superpositions données en équation 6.3 pour les tenseurs des contraintes et des déformations. On appelle :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Omega^s} \underline{\sigma}^E(\underline{x}) : \left(\underline{\varepsilon}^E(\underline{x}) + \sum_{k=1}^N \underline{\varepsilon}^k(\underline{x}) \right) dV \\ I_2 &= \sum_{q=1}^N \int_{\Omega^s} \underline{\sigma}^q(\underline{x}) : \left(\underline{\varepsilon}^E(\underline{x}) + \sum_{\lambda=1}^N \underline{\varepsilon}^\lambda(\underline{x}) \right) dV \end{aligned} \quad (6.6)$$

On a alors :

$$E^{el}(\underline{E}, (p^k)_{k=1:N}) = \frac{1}{2\Omega} [I_1 + I_2] \quad (6.7)$$

Dans tous nos calculs, les normales \underline{n} sont prises sortantes par rapport au domaine Ω^s . Ce sont donc des normales entrantes pour les pores, ce qui entraîne des changements de signes

lors d'intégrations par parties où l'intégrale volumique est posée sur un pore. Commençons par l'intégrale I_1 . On effectue une première IPP, qui remplace notre intégrale volumique sur Ω^s par $N+1$ intégrales surfaciques. On utilise ici la propriété que le champ de contrainte est statiquement admissible, donc à divergence nulle, ce qui s'écrit $\sigma_{ij,j} = 0$. On repère quelques termes qui sont nuls : le déplacement dû à un chargement en pression dans un pore est nul sur la frontière extérieure, le vecteur contrainte sur la surface d'un pore dans le chargement déplacement imposé sur la frontière extérieure est nul lui aussi.

$$\begin{aligned}
 I_1 = & \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}^E(\underline{x}) u_i^E(\underline{x}) n_j(\underline{x}) dS + \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}^E(\underline{x}) \sum_{q=1}^N \cancel{u_i^q(\underline{x})} n_j(\underline{x}) dS \\
 & + \sum_{k=1}^N \left\{ \sum_{q=1}^N \int_{\partial\Omega^k} \cancel{\sigma_{ij}^E(\underline{x})} n_j(\underline{x}) u_i^E(\underline{x}) dS + \int_{\partial\Omega^k} \cancel{\sigma_{ij}^E(\underline{x})} n_j(\underline{x}) \sum_{q=1}^N u_i^q(\underline{x}) dS \right\}
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Seule la première intégrale du terme I_1 reste donc à évaluer. On exprime d'abord le déplacement imposé sur la frontière extérieure, que l'on connaît :

$$I_1 = \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}^E(\underline{x}) E_{\alpha i} x_{\alpha} n_j(\underline{x}) dS \tag{6.9}$$

On sort de l'intégrale le tenseur des déformations qui nous sert à définir le déplacement imposé, qui est constant, puis on intègre de nouveau par parties. On retombe alors sur un terme nul puisqu'apparaît le vecteur contrainte sur la surface de pores dans le chargement déplacement extérieur imposé :

$$I_1 = E_{\alpha i} \left(\int_{\Omega^s} \sigma_{ij}^E(\underline{x}) \delta_{\alpha j} dV - \sum_{q=1}^N \int_{\partial\Omega^q} \cancel{\sigma_{ij}^E(\underline{x})} n_j(\underline{x}) x_{\alpha} dS \right) \tag{6.10}$$

On effectue enfin les sommations possibles, puis on réexprime le résultat utilisant notre tenseur de localisation en déformation :

$$I_1 = E_{ij} \int_{\Omega^s} \sigma_{ij}^E(\underline{x}) dV = \underline{\underline{E}} : \int_{\Omega^s} \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x}) dV : \underline{\underline{E}} \tag{6.11}$$

Le second terme I_2 est plus complexe à traiter. Comme pour le premier terme, on commence par ramener nos intégrales sur les bords du solide par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
 I_2 = & \sum_{q=1}^N \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}^q(\underline{x}) u_i^E(\underline{x}) n_j(\underline{x}) dS + \sum_{q=1}^N \sum_{\lambda=1}^N \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}^q(\underline{x}) \cancel{u_i^{\lambda}(\underline{x})} n_j(\underline{x}) dS \\
 & + \sum_{k=1}^N \left\{ \sum_{q=1}^N \int_{\partial\Omega^k} \sigma_{ij}^q(\underline{x}) u_i^E(\underline{x}) n_j(\underline{x}) dS + \sum_{q=1}^N \sum_{\lambda=1}^N \int_{\partial\Omega^k} \sigma_{ij}^q(\underline{x}) u_i^{\lambda}(\underline{x}) n_j(\underline{x}) dS \right\}
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

On remarque que le deuxième terme est nul, puisque le déplacement sur le bord extérieur est nul dans les problèmes à pression imposée. On exprime ensuite la valeur du déplacement imposé sur la frontière extérieure dans la première intégrale, puis la valeur du vecteur contrainte sur la surface des pores dans les deuxième et troisième intégrales. En particulier, le vecteur contrainte

est nul dans le pore k lorsque l'on impose la pression dans le pore q , si $q \neq k$, ce qui explique la disparition de la somme sur q :

$$I_2 = \sum_{q=1}^N \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij}^q(\underline{x}) E_{is} x_s n_j(\underline{x}) dS + \sum_{k=1}^N \left\{ -p^k \int_{\partial\Omega^k} u_i^E(\underline{x}) n_i(\underline{x}) dS - p^k \sum_{\lambda=1}^N \int_{\partial\Omega^k} u_i^\lambda(\underline{x}) n_i(\underline{x}) dS \right\} \quad (6.13)$$

On intègre de nouveau par parties chacun de ces termes. Pour le premier, on fait apparaître des intégrales sur le volume de solide, tandis que pour le second on fait volontairement apparaître des intégrales sur le volume poreux.

$$I_2 = \sum_{q=1}^N E_{is} \left(\int_{\Omega^s} \sigma_{ij}^q(\underline{x}) \delta_{js} dV - \sum_{\lambda=1}^N \int_{\partial\Omega^\lambda} \sigma_{ij}^q(\underline{x}) n_j(\underline{x}) x_s dS \right) + \sum_{k=1}^N \left\{ p^k \int_{\Omega^k} \underline{\mathbb{1}} : \underline{\varepsilon}^E(\underline{x}) dV + \sum_{\lambda=1}^N p^k \int_{\Omega^k} \underline{\mathbb{1}} : \underline{\varepsilon}^\lambda(\underline{x}) dV \right\} \quad (6.14)$$

On simplifie la deuxième somme d'intégrales en exprimant le vecteur contrainte sur la surface des pores, comme deux étapes plus tôt, et pour les deux dernières intégrales on fait apparaître la moyenne des tenseurs de localisation en déformation et pression sur les pores :

$$I_2 = \sum_{q=1}^N E_{is} \left(\int_{\Omega^s} \sigma_{ij}^q(\underline{x}) \delta_{js} dV + p^q \int_{\partial\Omega^q} n_i(\underline{x}) x_s dS \right) + \sum_{k=1}^N \left\{ p^k \int_{\Omega^k} \underline{\mathbb{1}} : \underline{\mathbb{A}}(\underline{x}) dV : \underline{\underline{E}} + \sum_{\lambda=1}^N p^k \int_{\Omega^k} \underline{\mathbb{1}} : \underline{\underline{A}}^\lambda(\underline{x}) dV p^\lambda \right\} \quad (6.15)$$

Enfin on effectue les sommations dans le premier terme et on intègre par partie le second terme de façon à obtenir une intégrale qui fait apparaître les volumes des pores :

$$I_2 = \sum_{q=1}^N \underline{\underline{E}} : \left(\int_{\Omega^s} \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\underline{A}}^q(\underline{x}) dV - \Omega^q \underline{\mathbb{1}} \right) p^q + \sum_{k=1}^N \left\{ p^k \int_{\Omega^k} \underline{\mathbb{1}} : \underline{\mathbb{A}}(\underline{x}) dV : \underline{\underline{E}} + \sum_{\lambda=1}^N p^k \int_{\Omega^k} \underline{\mathbb{1}} : \underline{\underline{A}}^\lambda(\underline{x}) dV p^\lambda \right\} \quad (6.16)$$

On a ainsi, pour récapituler, l'expression suivante pour notre énergie élastique (exploitant la symétrie du tenseur de localisation en pression et la symétrie mineure du tenseur de localisation en déformation) :

$$E^{el}(\underline{\underline{E}}, (p^k)_{k=1:N}) = \frac{1}{2\Omega} \underline{\underline{E}} : \int_{\Omega^s} \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\mathbb{A}}(\underline{x}) dV : \underline{\underline{E}} + \frac{1}{2\Omega} \sum_{q=1}^N \underline{\underline{E}} : \left(\int_{\Omega^s} \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\underline{A}}^q(\underline{x}) dV - \Omega^q \underline{\mathbb{1}} + \int_{\Omega^q} \underline{\mathbb{1}} : \underline{\mathbb{A}}(\underline{x}) dV \right) p^q + \frac{1}{2\Omega} \sum_{k=1}^N \sum_{\lambda=1}^N p^k \int_{\Omega^k} \underline{\mathbb{1}} : \underline{\underline{A}}^\lambda(\underline{x}) dV p^\lambda \quad (6.17)$$

6.2.5 Deux applications du théorème de réciprocité de Betti

6.2.5.1 Déformation extérieure et un pore sous pression

Nous calculons les travaux réciproques de deux chargements : déformation imposée $\underline{u}(\underline{x}) = \underline{E} \cdot \underline{x}$ sur la surface extérieure du solide $\partial\Omega$, et pression p^j dans le pore j . Les intégrales portent donc sur la surface extérieure et la surface du pore j . Les vecteurs contrainte sont notés \underline{T} :

$$\int_{\partial\Omega} \underline{T}^E(\underline{x}) \cdot \underline{u}^j(\underline{x}) dS + \int_{\partial\Omega^j} \underline{T}^E(\underline{x}) \cdot \underline{u}^j(\underline{x}) dS = \int_{\partial\Omega} \underline{T}^j(\underline{x}) \cdot \underline{u}^E(\underline{x}) dS + \int_{\partial\Omega^j} \underline{T}^j(\underline{x}) \cdot \underline{u}^E(\underline{x}) dS \quad (6.18)$$

Les deux termes du membre de gauche dans l'équation 6.18 sont nuls car le déplacement sur la surface extérieure dans le chargement pression imposée est nul. Traitons, pour tout j , le membre de droite par intégration par parties :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} \sigma_{rs}^j(\underline{x}) n_s(\underline{x}) E_{rv} x_v dS - p^j \int_{\partial\Omega^j} n_i(\underline{x}) \cdot u_i^E(\underline{x}) dS \\ &= E_{rv} \left(\int_{\Omega^s} \sigma_{rv}^j(\underline{x}) dV + p^j \int_{\partial\Omega^j} n_r(\underline{x}) x_v dS \right) + p^j \int_{\Omega^j} \varepsilon_{ii}^E(\underline{x}) dS \end{aligned} \quad (6.19)$$

Ce qui, par introduction des tenseurs de localisation, une dernière IPP et simplifications par la déformation et la pression qui sont quelconques, nous donne :

$$\int_{\Omega^s} \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\underline{A}}^j(\underline{x}) dV - \Omega^j \underline{\underline{1}} = - \int_{\Omega^j} \underline{\underline{1}} : \mathbb{A}(\underline{x}) dV \quad (6.20)$$

Rappelons que le choix du prolongement des tenseurs de localisation dans les trous n'a pas d'importance lorsque l'on calcule ce type d'intégrales (équation 6.20), puisque par intégration par partie on peut passer à une intégrale sur le bord du trou qui ne dépend donc pas du prolongement choisi.

6.2.5.2 Deux pressions dans les pores

Supposons que l'on n'ait pas de déformation imposée sur la frontière extérieure, mais que deux pores, j et k soient sous pression. Le théorème de réciprocité nous donne (nous n'écrivons ici directement que les termes non nuls) :

$$\int_{\partial\Omega^j} \underline{T}^j \cdot \underline{u}^k dS = \int_{\partial\Omega^k} \underline{T}^k \cdot \underline{u}^j dS \quad (6.21)$$

Ce dont on déduit, par IPP et simplification par les pressions qui sont quelconques :

$$\int_{\Omega^j} \underline{\underline{A}}^k(\underline{x}) dS = \int_{\Omega^k} \underline{\underline{A}}^j(\underline{x}) dS \quad (6.22)$$

6.2.6 Conclusion sur l'écriture de l'énergie élastique

6.2.6.1 Résumé des contributions

Les simplifications apportées par l'utilisation du résultat issu du théorème de réciprocité de Betti (équation 6.20) dans l'expression de l'énergie (équation 6.17) permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}
 E^{el} \left(\underline{\underline{E}}, (p^k)_{k=1:N} \right) &= \frac{1}{2\Omega} \underline{\underline{E}} : \int_{\Omega^s} \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x}) dV : \underline{\underline{E}} \\
 &+ \frac{1}{2\Omega} \sum_{k=1}^N \sum_{\lambda=1}^N p^k \int_{\Omega^k} \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{A}}^\lambda(\underline{x}) dV p^\lambda
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

La deuxième utilisation du théorème de Betti (équation 6.22) nous assurant que le dernier terme de notre nouvelle écriture de l'énergie (équation 6.23) est bien symétrique. On voit donc disparaître de l'énergie élastique les termes de couplage entre les chargements en pression et la déformation extérieure.

6.2.6.2 Remarques et comparaison avec la forme quadratique de départ

On remarque dans l'équation 6.23 que les couplages entre la déformation extérieure et les pressions dans les pores ont disparu, ce qui n'était pas à priori attendu au regard de l'écriture de départ (équation 6.5). On peut en fait déduire de cette comparaison trois résultats :

- le premier résultat est une application du Lemme de Hill (mentionné au § 3.4), classique en micromécanique, que l'on peut aussi voir simplement comme une intégration par parties tirant avantage de la forme linéaire du déplacement imposé sur la frontière extérieure :

$$\int_{\Omega^s} \mathbb{A}^t(\underline{x}) : \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x}) dV = \int_{\Omega^s} \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x}) dV \tag{6.24}$$

- vient ensuite la nullité des termes de couplage, qui s'écrit pour tout k :

$$\int_{\Omega^s} \underline{\underline{A}}^k(\underline{x}) : \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x}) dV = \underline{\underline{0}} \tag{6.25}$$

- enfin un troisième résultat, concernant la localisation en pression pour tous j, k :

$$\int_{\Omega^s} \underline{\underline{A}}^k(\underline{x}) : \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\underline{A}}^j(\underline{x}) dV = \int_{\Omega^k} \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{A}}^j(\underline{x}) dV \tag{6.26}$$

Nous disposons donc de l'énergie élastique, que nous allons maintenant utiliser pour écrire l'énergie potentielle, puis la loi de comportement de notre solide troué.

6.2.7 Écriture du potentiel adapté à notre chargement et loi de comportement

Nous devons exprimer le potentiel à partir de l'énergie élastique. L'énergie élastique est le potentiel à variation de volume de pores et déformation imposées. Nous devons donc faire une transformée de Legendre sur les couples pression imposée/variation de volume de pore dans le même pore mais due à tous les chargements possibles. Nous appelons ψ^* l'énergie potentielle par unité de volume poreux Ω et ΔV_k la variation de volume poreux par unité de volume poreux Ω du pore k . Cette variation de volume est due à tous les types de chargements et est liée à la déformation du pore k par la relation :

$$\Delta V_k = \int_{\Omega^k} \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{\varepsilon}} dV \tag{6.27}$$

On écrit donc :

$$\begin{aligned}\psi^* \left(\underline{\underline{E}}, (p^k)_{k=1:N} \right) &= E^{el} \left(\underline{\underline{E}}, (p^k)_{k=1:N} \right) - \sum_{k=1}^N p^k \Delta V_k \\ &= E^{el} \left(\underline{\underline{E}}, (p^k)_{k=1:N} \right) - \sum_{k=1}^N p^k \left(\Delta V_k^E + \sum_{\lambda=1}^N \Delta V_k^\lambda \right)\end{aligned}\quad (6.28)$$

On peut ensuite exprimer ces variations de volume poreux comme l'intégrale de la trace de la déformation dans chacun des problèmes sur l'espace poreux :

$$\psi^* \left(\underline{\underline{E}}, (p^k)_{k=1:N} \right) = E^{el} \left(\underline{\underline{E}}, (p^k)_{k=1:N} \right) - \frac{1}{\Omega} \sum_{k=1}^N p^k \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \int_{\Omega^k} \left(\underline{\underline{\mathbb{E}}}^E + \sum_{\lambda=1}^N \underline{\underline{\mathbb{E}}}^\lambda \right) dV \quad (6.29)$$

Si l'on exprime tout avec les tenseurs de localisation cela donne :

$$\begin{aligned}\psi^* \left(\underline{\underline{E}}, (p^k)_{k=1:N} \right) &= \frac{1}{2\Omega} \underline{\underline{E}} : \int_{\Omega^s} \mathbb{C}(\underline{\underline{x}}) : \mathbb{A}(\underline{\underline{x}}) dV : \underline{\underline{E}} \\ &\quad - \frac{1}{2\Omega} \sum_{k=1}^N \sum_{\lambda=1}^N p^k \int_{\Omega^k} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \underline{\underline{A}}^\lambda(\underline{\underline{x}}) dV p^\lambda \\ &\quad - \frac{1}{\Omega} \sum_{k=1}^N p^k \int_{\Omega^k} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \mathbb{A}(\underline{\underline{x}}) dV : \underline{\underline{E}}\end{aligned}\quad (6.30)$$

On peut de là déduire les équations traditionnelles de la microporomécanique, par dérivation. La contrainte macroscopique $\underline{\underline{\Sigma}}$, que l'on peut par définition exprimer comme une moyenne sur l'ensemble du milieu poreux (solide et pores) de la contrainte locale, s'exprime de manière équivalente par dérivation de l'énergie potentielle macroscopique par rapport à la déformation macroscopique :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{\partial \psi^*}{\partial \underline{\underline{E}}} = \left\{ \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega^s} \mathbb{C}(\underline{\underline{x}}) : \mathbb{A}(\underline{\underline{x}}) dV \right\} : \underline{\underline{E}} - \sum_{k=1}^N p^k \left\{ \frac{1}{\Omega^k} \int_{\Omega^k} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \mathbb{A}(\underline{\underline{x}}) dV \right\} \quad (6.31)$$

De même, la variation de volume poreux qui est définie par l'intégrale de la trace de la déformation sur l'espace poreux, s'exprime de manière équivalente par dérivation de l'énergie potentielle macroscopique par rapport à la pression dans le pore considéré. Nous l'écrivons pour le pore k :

$$\Delta V_k = - \frac{\partial \psi^*}{\partial p^k} = \left\{ \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega^s} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \mathbb{A}(\underline{\underline{x}}) dV \right\} : \underline{\underline{E}} + \sum_{\lambda=1}^N \left\{ \frac{1}{\Omega^k} \int_{\Omega^k} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \underline{\underline{A}}^\lambda(\underline{\underline{x}}) dV \right\} p^\lambda \quad (6.32)$$

On peut, par analogie avec ce qui est fait dans le cadre de modélisations microporomécaniques (§ 3.4), relier chacun de ces termes aux modules d'un milieu poroélastique. Remarquons qu'on a l'identification suivante qui se fait pour le tenseur des modules élastiques homogénéisés \mathbb{C}^{hom} , le coefficient de Biot de l'inclusion k $\underline{\underline{B}}^k$, le module croisé de Biot des inclusions k, λ $M^{k\lambda}$ (on rappelle les conséquence du théorème de Betti) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}^{hom} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega^s} \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x}) dV \\ \underline{\underline{B}}^k = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega^k} \underline{\underline{1}} : \mathbb{A}(\underline{x}) dV = \frac{\Omega^k}{\Omega} \underline{\underline{1}} - \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega^s} \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\underline{A}}^k(\underline{x}) dV \\ M^{k\lambda} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega^k} \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{A}}^\lambda(\underline{x}) dV = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega^\lambda} \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{A}}^k(\underline{x}) dV \end{array} \right. \quad (6.33)$$

On a alors la loi de comportement suivante à l'échelle macroscopique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^{hom} : \underline{\underline{E}} - \sum_{k=1}^N p^k \underline{\underline{B}}^k \\ \Delta V_k = \underline{\underline{B}}^k : \underline{\underline{E}} + \sum_{\lambda=1}^N M^{k\lambda} p^\lambda \end{array} \right. \quad (6.34)$$

On veut maintenant aller un peu plus loin. Plutôt que d'appliquer une pression dans chaque trou indépendamment, on va avoir des familles de trous à la même pression qui sont rassemblés dans une même zone géométrique, et représenter cela par un milieu poreux équivalent.

6.3 Introduction du matériau poreux homogène équivalent

Rappelons notre situation de départ : un solide troué occupe le domaine Ω , dont la partie Ω^s est occupée par un solide de tenseur des modules d'élasticité $\mathbb{C}(\underline{x})$, tandis que les N pores occupent chacun un volume Ω^k , sous pression p^k , de telle façon que $\Omega = \Omega^s \cup (\cup_{k=1}^N \Omega^k)$.

Supposons maintenant que l'on simplifie un peu notre problème :

- Il existe N^z zones Ω_z^k où le tenseur des modules d'élasticité est constant sur la partie solide de la zone $\Omega_{z,s}^k$ et vaut \mathbb{C}^k , et où la pression appliquée dans les pores $\Omega_{z,p}^k$ est également constante (p^k).
- Ces zones sont toutes d'extension beaucoup plus grande que la taille des pores

On peut donc traiter chaque zone indépendamment de façon à trouver ses propriétés poromécaniques équivalentes.

On doit alors résoudre autant de problèmes *élémentaires* que de zones. Pour le problème élémentaire k , il est nécessaire d'extraire un *VER* de notre microstructure de départ (au sens expliqué au § 3.2), dans la zone Ω_z^k . Il s'agit d'un sous domaine d' Ω_z^k qui est statistiquement représentatif de son ensemble. C'est pour cela qu'on doit n'avoir que des pores très petits devant la taille du domaine. Appelons le Ω_e^k où le e signifie élémentaire. Le solide occupe le domaine $\Omega_e^{sk} \subset \Omega_e^k$.

On lui applique une démarche de micromécanique traditionnelle pour déterminer ses propriétés homogénéisées. Sa frontière extérieure $\partial\Omega_e^k$ est soumise à une déformation uniforme $\underline{\underline{E}}$, ses pores, qui occupent l'espace Ω_e^{pk} à la pression p .

On définit deux tenseurs de localisation (l'un en déformation \mathbb{A}_e , l'autre en pression $\underline{\underline{A}}_e^p$) liés à ces chargements, qui nous permettent d'exprimer en tout point la déformation (y compris dans les pores, par prolongement de la déformation de façon à ce que le déplacement associé soit continu) :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \mathbb{A}_e(\underline{x}) : \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{A}}_e^p(\underline{x}) p \quad (6.35)$$

Il s'agit ensuite de construire une loi de comportement de milieu poreux pour ce matériau, en calculant un certain nombre de moyennes sur le domaine. Nos variables d'état macroscopiques pour ce milieu étant les deux quantités imposées (déformation moyenne sur l'ensemble et pression), et les quantités duales associées :

- contrainte moyenne sur l'ensemble $\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{1}{\Omega_e^k} \int_{\Omega_e^k} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) dV$
- variation de volume de l'espace poreux par unité de volume de matériau poreux : $\phi - F = \frac{1}{\Omega_e^k} \int_{\Omega_e^{pk}} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) dV$

qu'il faut donc calculer.

Exprimons tout d'abord la déformation moyenne sur l'ensemble (la déformation moyenne associée au chargement pression étant nulle). On en profite pour introduire une notation pour les moyennes : pour toute quantité g définie sur un domaine Ω , on écrit sa moyenne de la façon suivante, en omettant la dépendance en (\underline{x}) lorsqu'on utilise la notation de moyenne :

$$\langle g \rangle_{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} g(\underline{x}) dV \quad (6.36)$$

On a alors pour la moyenne de la déformation :

$$\underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_{\Omega_e^k} = \frac{1}{\Omega_e^k} \int_{\Omega_e^k} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) dV = \frac{1}{\Omega_e^k} \int_{\Omega_e^k} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) dV + \frac{1}{\Omega_e^k} \int_{\Omega_e^{sk}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) dV \quad (6.37)$$

Tandis que la contrainte macroscopique peut se décomposer de la manière suivante (en notant $f_e^p = \Omega_e^{pk} / \Omega_e^k$ la fraction volumique de pores dans le problème élémentaire) :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Sigma}} &= \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\Omega_e^k} = \frac{1}{\Omega_e^k} \int_{\Omega_e^k} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) dV = \frac{1}{\Omega_e^k} \int_{\Omega_e^{sk}} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) dV + f_e^p p \underline{\underline{\mathbb{1}}} \\ &= \frac{1}{\Omega_e^k} \mathbb{C}^k \left(\int_{\Omega_e^{sk}} \mathbb{A}_e(\underline{x}) dV \underline{\underline{E}} + \int_{\Omega_e^{sk}} \underline{\underline{A}}_e^p(\underline{x}) dV p \right) + f_e^p p \underline{\underline{\mathbb{1}}} \end{aligned} \quad (6.38)$$

Soit, en utilisant la relation 6.37 :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathbb{C}^k : \left(\mathbb{I} - f_e^p \langle \mathbb{A}_e \rangle_{\Omega_e^{pk}} \right) : \underline{\underline{E}} - \left(f_e^p \underline{\underline{\mathbb{1}}} - (1 - f_e^p) \langle \mathbb{C} : \underline{\underline{A}}_e^p \rangle_{\Omega_e^{pk}} \right) p \quad (6.39)$$

Ce qui nous fournit la première équation de notre loi de comportement macroscopique. Pour avoir la seconde, calculons la déformation volumique des pores rapportée au volume poreux total :

$$\phi - F = \frac{1}{\Omega_e^k} \int_{\Omega_e^{pk}} \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) dV = f_e^p \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \langle \mathbb{A}_e \rangle_{\Omega_e^{pk}} : \underline{\underline{E}} + f_e^p \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \langle \underline{\underline{A}}_e^p \rangle_{\Omega_e^{pk}} p \quad (6.40)$$

Ce qui nous fournit notre deuxième équation de loi de comportement. Pour résumer, les propriétés poromécaniques homogénéisées associées à ce problème équivalent peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \mathbb{C}_e^{hom} = \mathbb{C}^k : \left(\mathbb{I} - f_e^p \langle \mathbb{A}_e \rangle_{\Omega_e^{pk}} \right) \\ \underline{\underline{B}}_e^k = f_e^p \underline{\underline{\mathbb{1}}} - (1 - f_e^p) \langle \mathbb{C} : \underline{\underline{A}}_e^p \rangle_{\Omega_e^{pk}} = f_e^p \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \langle \mathbb{A}_e \rangle_{\Omega_e^{pk}} \\ \underline{\underline{M}}_e^k = f_e^p \underline{\underline{\mathbb{1}}} : \langle \underline{\underline{A}}_e^p \rangle_{\Omega_e^{pk}} \end{cases} \quad (6.41)$$

Ces équations nous permettent donc à partir d'un solide élastique troué, de définir (si certaines propriétés de séparation d'échelle sont vérifiées) un milieu poreux homogène équivalent. Nous souhaitons maintenant refaire le même travail que dans la première partie (§ 6.2), pour un milieu poreux hétérogène, puisque c'est sur ce milieu-là que nous allons travailler grâce à la transformation expliquée dans ce paragraphe.

6.4 Milieu continu poreux hétérogène

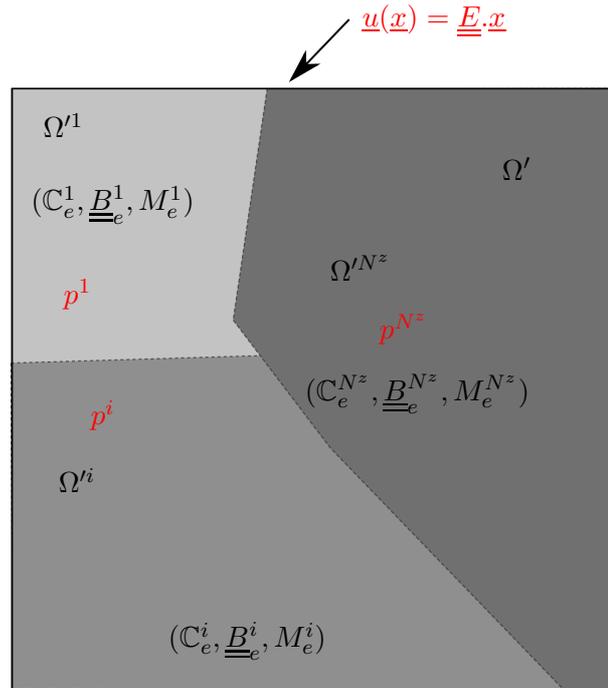


FIGURE 6.2 – Solide poreux hétérogène

Nous souhaitons maintenant nous appuyer sur la technique montrée dans la section précédente qui permet de définir un milieu poreux équivalent pour remplacer un solide élastique troué, et faire le même travail que dans la première section sur ce milieu poreux équivalent, tel que représenté sur la Fig. 6.2.

Pour passer du problème évoqué au § 6.2 au problème tel que représenté sur la Fig. 6.2, on applique la démarche expliquée au § 6.3 à chaque zone de notre solide élastique troué initial.

6.4.1 Description du milieu continu poreux hétérogène

Ce problème sur le milieu continu poreux hétérogène équivalent est posé sur un domaine Ω' semblable à notre domaine de départ Ω , dans lequel on a remplacé le solide élastique et ses trous par un milieu poreux équivalent. On utilise la notation $'$ pour différencier les quantités associées à ce problème plutôt qu'à celui de la partie précédente (§ 6.2). Notre milieu continu est divisé en N^z zones Ω'^i caractérisées par un tenseur des modules d'élasticité, un coefficient de Biot et un module de Biot $(\mathbb{C}_e^i, \underline{\underline{B}}_e^i, M_e^i)$ où le e rappelle que ces modules sont issus d'un calcul à une échelle plus fine du type de ce qui a été expliqué dans le paragraphe 6.3, qui suivent chacune la loi de comportement suivante :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C}_e^i : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{B}}_e^i p \\ \varphi - f = \underline{\underline{B}}_e^i : \underline{\underline{\varepsilon}} + M_e^i p \end{cases} \quad (6.42)$$

Où l'on voit apparaître la contrainte locale $\underline{\underline{\sigma}}$, la déformation locale $\underline{\underline{\varepsilon}}$, la pression dans l'espace poreux au point considéré p , et la variation de volume de l'espace poreux au point considéré, par rapport au volume de la phase dans laquelle on se trouve ($\varphi - f$). Les zones ainsi définies occupent tout l'espace : $\Omega' = \cup_i \Omega'^i$.

6.4.2 Chargement macroscopique et écriture des énergies élastiques et potentielles

En cohérence avec cette loi de comportement on peut écrire l'énergie potentielle locale, par unité de volume du matériau dans lequel on se trouve, repéré par l'indice i :

$$\phi(\underline{\underline{\varepsilon}}, p) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbb{C}_e^i : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{B}}_e^i p - \frac{1}{2} p M_e^i p \quad (6.43)$$

Et l'énergie élastique locale, calculée par transformée de Legendre à partir de l'énergie potentielle :

$$e(\underline{\underline{\varepsilon}}, p) = \phi(\underline{\underline{\varepsilon}}, p) + p(\varphi - f) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}} : \mathbb{C}_e^i : \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{1}{2} p M_e^i p \quad (6.44)$$

Le chargement appliqué à ce milieu est le suivant :

- déformation moyenne imposée, c'est-à-dire déplacement de la forme $\underline{u}(\underline{x}) = \underline{E} \cdot \underline{x}$ imposé sur la frontière extérieure $\partial\Omega'$. On y associe un tenseur de localisation d'ordre 4 ayant la symétrie mineure $\underline{A}'(\underline{x})$;
- pression p^i dans chaque zone Ω'^i , et tenseur de localisation en pression associé \underline{A}^i qui est un tenseur d'ordre deux symétrique.

Remarquons que la question du prolongement de ces tenseurs ne se pose plus puisque maintenant il y a du solide poreux partout.

À partir de ces énergies locales et en connaissance du chargement macroscopique on peut construire l'énergie potentielle globale par unité de volume du solide poreux Ω :

$$\begin{aligned} \psi'(\underline{E}, (p^i)_{i=1:N^z}) &= \frac{1}{\Omega} \sum_{i=1}^{N^z} \int_{\Omega'^i} \left(\frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) : \mathbb{C}_e^i : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) - \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) : \underline{\underline{B}}_e^i p^i - \frac{1}{2} p^i M_e^i p^i \right) dV \\ &= \frac{1}{\Omega} \sum_{i=1}^{N^z} \int_{\Omega'^i} \left[\frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) : \mathbb{C}_e^i - \underline{\underline{B}}_e^i p^i \right) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) - \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) : \underline{\underline{B}}_e^i + p^i M_e^i \right) p^i \right] dV \\ &= \frac{1}{\Omega} \sum_{i=1}^{N^z} \int_{\Omega'^i} \left[\frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) - \frac{1}{2} (\varphi - f)(\underline{x}) p^i \right] dV \end{aligned} \quad (6.45)$$

Où la dernière ligne est obtenue en utilisant la loi de comportement locale. Cela nous servira plus tard, car il est utile de faire apparaître le tenseur des contraintes étant donné qu'il est à divergence nulle, ce qui est très pratique lors de la manipulation de ces expressions par intégration par parties. Définissons deux termes pour continuer ce calcul :

$$\begin{cases} A_1 = \sum_{i=1}^{N^z} \int_{\Omega'^i} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) dV \\ A_2 = \sum_{i=1}^{N^z} \int_{\Omega'^i} (\varphi - f)(\underline{x}) p^i dV \end{cases} \quad (6.46)$$

De sorte que :

$$\psi'(\underline{\underline{E}}, (p^i)_{i=1:Nz}) = \frac{1}{2\Omega} [A_1 - A_2] \quad (6.47)$$

Nous travaillons tout d'abord sur A_1 , en faisant une intégration par parties qui fait apparaître une intégrale sur le bord du domaine. On utilise le fait que la contrainte est à divergence nulle :

$$A_1 = \int_{\partial\Omega'} \sigma_{ij}(\underline{x}) u_i(\underline{x}) n_j dS \quad (6.48)$$

On exprime ensuite le déplacement imposé sur le bord du domaine :

$$A_1 = E_{ki} \int_{\partial\Omega'} \sigma_{ij}(\underline{x}) x_k n_j(\underline{x}) dS \quad (6.49)$$

Ce qui permet de faire apparaître la moyenne de la contrainte locale, encore par intégration par parties :

$$A_1 = \underline{\underline{E}} : \int_{\Omega'} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) dV \quad (6.50)$$

On transforme ensuite ce terme en y introduisant la loi de comportement :

$$A_1 = \sum_{i=1}^{Nz} \underline{\underline{E}} : \int_{\Omega^i} \mathbb{C}_e^i : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) dV - \sum_{i=1}^{Nz} \underline{\underline{E}} : \int_{\Omega^i} \underline{\underline{B}}_e^i p^i dV \quad (6.51)$$

Puis les tenseurs de localisation :

$$A_1 = \underline{\underline{E}} : \sum_{i=1}^{Nz} \left(\int_{\Omega^i} \mathbb{C}_e^i : \underline{\underline{A}}'(\underline{x}) dV : \underline{\underline{E}} + \sum_{k=1}^{Nz} \int_{\Omega^i} \mathbb{C}_e^i : \underline{\underline{A}}'^k(\underline{x}) dV p^k \right) - \underline{\underline{E}} : \sum_{i=1}^{Nz} \Omega^i \underline{\underline{B}}_e^i p^i \quad (6.52)$$

Notre second terme, A_2 , s'exprime plus directement grâce à la loi de comportement :

$$A_2 = \sum_{i=1}^{Nz} \int_{\Omega^i} \left(\underline{\underline{B}}_e^i : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) + M_e^i p^i \right) p^i dV \quad (6.53)$$

Pour finir on y introduit les tenseurs de localisation :

$$A_2 = \sum_{i=1}^{Nz} p^i \underline{\underline{B}}_e^i : \int_{\Omega^i} \underline{\underline{A}}'(\underline{x}) dV : \underline{\underline{E}} + \sum_{i=1}^{Nz} \sum_{k=1}^{Nz} p^i \underline{\underline{B}}_e^i : \int_{\Omega^i} \underline{\underline{A}}'^k(\underline{x}) dV p^k + \sum_{i=1}^{Nz} \Omega^i M_e^i : (p^i)^2 \quad (6.54)$$

Si bien qu'en rassemblant des ceux termes on obtient :

$$\begin{aligned} \psi'(\underline{\underline{E}}, (p^i)_{i=1:Nz}) &= \frac{1}{2\Omega} \underline{\underline{E}} : \left\{ \sum_{i=1}^{Nz} \int_{\Omega^i} \mathbb{C}_e^i : \underline{\underline{A}}'(\underline{x}) dV \right\} : \underline{\underline{E}} \\ &+ \frac{1}{2\Omega} \underline{\underline{E}} : \left\{ \sum_{k=1}^{Nz} \left(\sum_{i=1}^{Nz} \int_{\Omega^i} \mathbb{C}_e^i : \underline{\underline{A}}'^k(\underline{x}) dV - \Omega'^k \underline{\underline{B}}_e^k - \underline{\underline{B}}_e^k : \int_{\Omega'^k} \underline{\underline{A}}'(\underline{x}) dV \right) \right\} p^k \\ &- \frac{1}{2\Omega} \sum_{i=1}^{Nz} \sum_{k=1}^{Nz} p^i \left\{ \underline{\underline{B}}_e^i : \int_{\Omega^i} \underline{\underline{A}}'^k(\underline{x}) dV + \Omega'^i M_e^i \delta_{ik} \right\} p^k \end{aligned} \quad (6.55)$$

Nous suivons encore la même démarche que dans le § 6.2 en donnant deux résultats obtenus par le théorème de réciprocité de Betti.

6.4.3 Deux applications du théorème de réciprocité de Betti

6.4.3.1 Déformation macroscopique et pression dans la zone k non nulles

Nous appliquons encore en fois le théorème de réciprocité de Betti au cas suivant : le matériau poreux est soumis à un déplacement imposé de la forme $\underline{u}(\underline{x}) = \underline{E} \cdot \underline{x}$ sur sa frontière extérieure $\partial\Omega'$, et à la pression p^k dans la zone k uniquement. Il s'agit alors d'écrire l'égalité des travaux réciproques. On écrit directement les travaux de pression dans le pore k dans la déformation due à la déformation macroscopique (membre de gauche), égaux aux travaux des efforts dus à la déformation macroscopique dans le champ de déformation dû à la pression dans le pore k , omettant les intégrales sur les bords des autres pores (on note \underline{T} le vecteur contrainte) :

$$\int_{\Omega'^k} p^k (\varphi - f)^E(\underline{x}) dS + \int_{\partial\Omega'} T_i^k(\underline{x}) u_i^E(\underline{x}) dS = \int_{\Omega'^k} p^k (\varphi - f)^k(\underline{x}) dS + \int_{\partial\Omega'} T_i^E(\underline{x}) u_i^k(\underline{x}) dS \quad (6.56)$$

Les deux termes du membre de droite sont nuls car le déplacement sur le bord extérieur est nul dans le problème à pression imposée et la pression est nulle dans la zone k dans le problème à déplacement imposé. Introduisant dans la première intégrale le tenseur de localisation en déformation, on a :

$$\int_{\Omega'^k} p^k \underline{B}_e^k : \mathbb{A}'(\underline{x}) dV : \underline{E} + \int_{\partial\Omega'} \sigma_{ij}^k(\underline{x}) n_j(\underline{x}) u_i^E(\underline{x}) dS = 0 \quad (6.57)$$

Avec $\underline{\sigma}^k$ le champ de contrainte dû à la pression dans la zone k , dans tout le solide. Transformons le second terme en procédant à l'expression du déplacement sur la frontière extérieure et à une première intégration par parties :

$$\int_{\partial\Omega'} \sigma_{ij}^k(\underline{x}) n_j(\underline{x}) u_i^E(\underline{x}) dS = E_{ki} \int_{\partial\Omega'} \sigma_{ij}^k(\underline{x}) n_j(\underline{x}) x_k dS = E_{ki} \int_{\Omega'} \sigma_{ij}^k(\underline{x}) \delta_{kj} dV = \underline{E} : \int_{\Omega'} \underline{\sigma}^k(\underline{x}) dV \quad (6.58)$$

On exprime ensuite notre contrainte en utilisant la loi de comportement. L'intégrale porte sur tout le domaine. Nous différencions dans un premier temps le cas où l'on se trouve dans la zone où la pression est non nulle du cas où on ne s'y trouve pas :

$$\int_{\partial\Omega'} \sigma_{ij}^k(\underline{x}) n_j(\underline{x}) u_i^E(\underline{x}) dS = \underline{E} : \sum_{(i \neq k)=1}^{Nz} \int_{\Omega'^i} \mathbb{C}_e^i : \underline{\varepsilon}^k(\underline{x}) dV + \underline{E} : \int_{\Omega'^i} \left(\mathbb{C}_e^k : \underline{\varepsilon}^k(\underline{x}) - \underline{B}_e^k p^k \right) dV \quad (6.59)$$

On rassemble finalement ces deux expressions :

$$\int_{\partial\Omega'} \sigma_{ij}^k(\underline{x}) n_j(\underline{x}) u_i^E(\underline{x}) dS = \underline{E} : \sum_{i=1}^{Nz} \mathbb{C}_e^i : \int_{\Omega'^i} \underline{A}'^k(\underline{x}) dV p^k - \underline{E} : \int_{\Omega'^k} \underline{B}_e^k p^k \quad (6.60)$$

Puis on conclut pour trouver notre identité issue du théorème de Betti (après simplification par la pression et la déformation qui sont arbitraires). Pour tout k :

$$\int_{\Omega'^k} \underline{B}_e^k : \mathbb{A}'(\underline{x}) dV + \sum_{i=1}^{Nz} \mathbb{C}_e^i : \int_{\Omega'^i} \underline{A}'^k(\underline{x}) dV - \int_{\Omega'^k} \underline{B}_e^k p^k = 0 \quad (6.61)$$

6.4.3.2 Pression dans deux zones différentes

Dans le même esprit que dans le paragraphe précédent, on écrit l'égalité des travaux d'une part de la pression dans la zone k dans la variation de volume de la phase poreuse de la zone k sous la pression dans la zone i , et d'autre part de quantité réciproque. On obtient en n'écrivant pas les termes nuls :

$$\int_{\Omega'^k} p^k (\varphi - f)^i(\underline{x}) dV = \int_{\Omega'^i} p^i (\varphi - f)^k(\underline{x}) dV \quad (6.62)$$

Par utilisation de la loi de comportement on a :

$$\int_{\Omega'^k} p^k \underline{\underline{B}}_e^k : \underline{\underline{A}}^i(\underline{x}) p^i dV = \int_{\Omega'^i} p^i \underline{\underline{B}}_e^i : \underline{\underline{A}}^k(\underline{x}) p^k dV \quad (6.63)$$

Ce qui par simplification des pressions nous donne l'identité :

$$\underline{\underline{B}}_e^k : \int_{\Omega'^k} \underline{\underline{A}}^i(\underline{x}) dV = \underline{\underline{B}}_e^i : \int_{\Omega'^i} \underline{\underline{A}}^k(\underline{x}) dV \quad (6.64)$$

6.4.4 Conclusion sur les énergies du milieu poreux hétérogène

On reprend maintenant l'expression 6.55 en y utilisant le résultat trouvé par le théorème de réciprocité 6.61. On obtient pour l'énergie potentielle par unité de volume poreux suivante :

$$\begin{aligned} \psi'(\underline{\underline{E}}, (p^i)_{i=1:N^z}) &= \frac{1}{2\Omega'} \underline{\underline{E}} : \left\{ \sum_{i=1}^{N^z} \int_{\Omega'^i} \mathbb{C}_e^i : \mathbb{A}'(\underline{x}) dV \right\} : \underline{\underline{E}} \\ &\quad - \frac{1}{\Omega'} \underline{\underline{E}} : \left\{ \sum_{i=1}^{N^z} \underline{\underline{B}}_e^i : \int_{\Omega'^i} \mathbb{A}'(\underline{x}) dV \right\} p^i \\ &\quad - \frac{1}{2\Omega'} \sum_{i=1}^{N^z} \sum_{k=1}^{N^z} p^i \left\{ \underline{\underline{B}}_e^i : \int_{\Omega'^i} \underline{\underline{A}}^k(\underline{x}) dV + \Omega'^i M_e^i \delta_{ik} \right\} p^k \end{aligned} \quad (6.65)$$

Écrivons maintenant l'énergie élastique E'_{el} . Par intégration de l'énergie élastique locale (équation 6.44) on a que :

$$E'_{el}(\underline{\underline{E}}, (p^i)_{i=1:N^z}) = \frac{1}{2\Omega'} [A_1 + A_2] \quad (6.66)$$

D'où l'on tire, en utilisant notre résultat du théorème de Betti de la même façon que pour l'énergie potentielle, l'expression de l'énergie élastique par unité de volume poreux :

$$\begin{aligned} E'_{el}(\underline{\underline{E}}, (p^i)_{i=1:N^z}) &= \frac{1}{2\Omega'} \underline{\underline{E}} : \left\{ \sum_{i=1}^{N^z} \int_{\Omega'^i} \mathbb{C}_e^i : \mathbb{A}'(\underline{x}) dV \right\} : \underline{\underline{E}} \\ &\quad + \frac{1}{2\Omega'} \sum_{i=1}^{N^z} \sum_{k=1}^{N^z} p^i \left\{ \underline{\underline{B}}_e^i : \int_{\Omega'^i} \underline{\underline{A}}^k(\underline{x}) dV + \Omega'^i M_e^i \delta_{ik} \right\} p^k \end{aligned} \quad (6.67)$$

L'expression 6.65 nous permet de définir les propriétés poroélastiques homogénéisées de ce solide poreux hétérogène :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathbb{C}}^{hom} = \frac{1}{\Omega'} \sum_{i=1}^{Nz} \int_{\Omega^i} \underline{\mathbb{C}}_e^i : \underline{\mathbb{A}}'(\underline{x}) dV \\ \underline{\underline{B}}^i = \frac{1}{\Omega'} \underline{\underline{B}}_e^i : \int_{\Omega^i} \underline{\mathbb{A}}'(\underline{x}) dV = \frac{\Omega'^i}{\Omega'} \underline{\underline{B}}_e^i - \frac{1}{\Omega'} \sum_{k=1}^{Nz} \underline{\mathbb{C}}_e^k : \int_{\Omega^k} \underline{\underline{A}}'^i(\underline{x}) dV \\ \underline{M}^{'ki} = \frac{1}{\Omega'} \underline{\underline{B}}_e^i : \int_{\Omega^i} \underline{\underline{A}}'^k(\underline{x}) dV + \delta_{ki} \frac{\Omega'^i}{\Omega'} M_e^i = \frac{1}{\Omega'} \underline{\underline{B}}_e^k : \int_{\Omega^k} \underline{\underline{A}}'^i(\underline{x}) dV + \delta_{ki} \frac{\Omega'^i}{\Omega'} M_e^i \end{array} \right. \quad (6.68)$$

Ces expressions sont donc les propriétés homogénéisées d'un matériau poreux hétérogène sous pression, avec une pression différente dans chaque phase. Nous avons également montré la forme de l'énergie potentielle, que l'on souhaite utiliser avec le critère de Francfort-Marigo pour faire évoluer la microstructure de notre béton attaqué.

6.5 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de détailler l'écriture de l'énergie d'un milieu poreux. Nous avons redémontré les résultats de microporomécanique du § 3.4 et les avons étendus au cas où le matériau que l'on veut homogénéiser est composé de zones elles-mêmes poreuses, décrites par leurs propriétés poromécaniques, ces propriétés pouvant être calculées par une procédure d'homogénéisation à une échelle inférieure.

On est donc maintenant dans la capacité d'écrire l'énergie nécessaire à l'utilisation du critère de fissuration énergétique que l'on a choisi. Un dernier point reste à traiter avant de passer à l'étude de la réaction alcali-silice. C'est la question de la discrétisation des différentes tailles de grains ou trous que l'on trouve dans notre milieu poreux. On va donc y consacrer le prochain chapitre, en donnant quelques exemples qui nous permettront de discrétiser correctement les tailles de grains en différentes familles sans que cela soit trop difficile à gérer en temps de calcul.

