

---

# ELABORATION D'UN NOUVEAU MODELE DE PREVISION DES FROTTEMENTS GARNITURE-PUITS

## INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons présenter la modélisation du comportement mécanique de la garniture de forage dans un puits de forage. La méthode utilisée est basée sur un couplage entre le système des équations d'équilibre de la structure soumise aux actions extérieures (poids déjaugé et frottements) avec un algorithme de contact unilatéral avec frottement. La résolution du problème posé se fait grâce à une méthode originale d'intégration directe et sans faire appel à des méthodes de discrétisation coûteuses en temps de calcul type éléments finis.

Dans un premier temps, nous décrivons les propriétés géométriques des repères utilisés ainsi que les équations d'élasticités liants contraintes aux déformations dont nous avons besoin par la suite, dans la modélisation. Ensuite, nous passons à la formulation du modèle proprement dit. Dans cette partie, nous détaillons clairement les hypothèses adoptées et les étapes entreprises dans la modélisation (développement du formalisme complet, couplage avec l'algorithme de contact et incorporation des conditions aux limites) et nous finirons par expliciter la méthode de résolution du problème.

## III-1 REPERES DE TRAVAIL ET OUTILS GEOMETRIQUES

### III-1.1 Repère de Frénet

Etant donné une trajectoire tridimensionnelle d'un puits de forage pétrolier. Cette trajectoire est représentée dans l'espace du repère terrestre fixe  $(O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$  avec le vecteur  $\vec{k}$  vertical dirigé vers le bas et un repère mobile de Frénet  $(S, (\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}))$  (Figure 3.1).

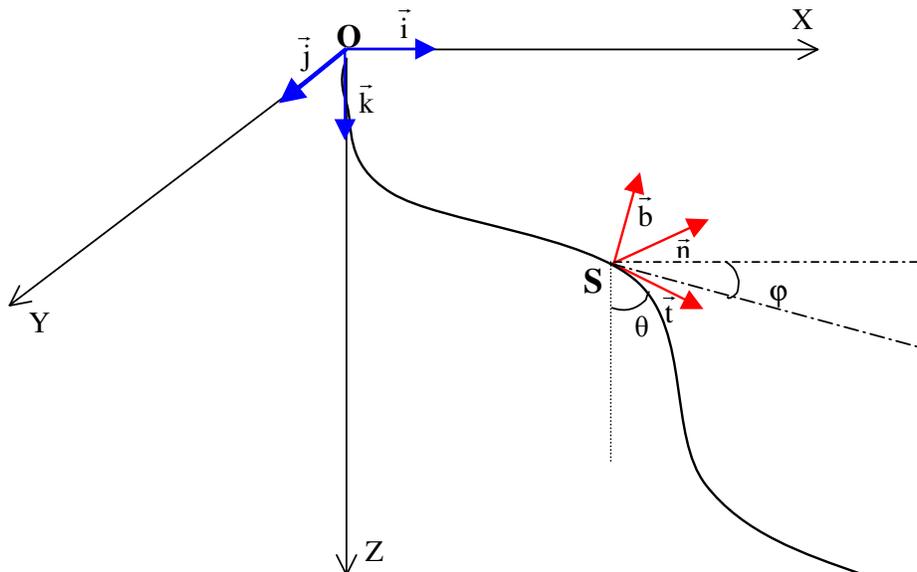


Figure 3.1 : Repère de Frénet et angles d'inclinaison et d'azimut

Les angles d'inclinaison et d'azimut sont représentés sur la figure 3.1. L'inclinaison  $\theta$  est l'angle que fait le vecteur tangent  $\vec{t}$  à un point courant de la trajectoire avec la verticale et l'azimut  $\varphi$  est l'angle que fait le plan vertical contenant  $\vec{t}$  avec une direction horizontale fixe généralement le Nord magnétique (sur le graphique, cette direction est l'axe des X).

Le vecteur unitaire mobile  $\vec{t}$  s'écrit dans le repère global  $(O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$ , en fonction des angles d'inclinaison et d'azimut  $\theta$  et  $\varphi$ , comme suit :

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

Si on note  $G_\theta = \frac{d\theta}{ds}$  et  $G_\varphi = \frac{d\varphi}{ds}$  respectivement les gradients d'inclinaison et d'azimut, alors

les vecteurs normal principal  $\vec{n}$  et normal bi-principal  $\vec{b}$  s'écrivent :

$$\vec{n} = \frac{1}{\beta} \begin{pmatrix} G_\theta \cos \theta \cos \varphi - G_\varphi \sin \theta \sin \varphi \\ G_\theta \cos \theta \sin \varphi + G_\varphi \sin \theta \cos \varphi \\ -G_\theta \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \frac{1}{\beta} \begin{pmatrix} -G_\theta \sin \varphi - G_\varphi \cos \theta \sin \theta \cos \varphi \\ G_\theta \cos \varphi - G_\varphi \cos \theta \sin \theta \sin \varphi \\ -G_\varphi \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Ces expressions montrent que les vecteurs  $\vec{n}$  et  $\vec{b}$  sont bien définis lorsque la courbure  $\beta$  est non nulle.

Les relations entre les vecteurs du repère de Frénet et leurs dérivés par rapport à  $s$  se mettent sous la forme suivante (formules de Serret Frénet) :

$$\begin{bmatrix} \frac{d\vec{t}}{ds} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 \\ -\beta & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{bmatrix}$$

$\beta$  étant la courbure et  $\tau$  la torsion géométrique (gauchissement) au point considéré de la trajectoire.

Ces relations sont des équations différentielles linéaires de premier ordre, d'où l'existence et l'unicité du trièdre mobile  $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$  le long d'une trajectoire donnée, une fois les courbures  $\beta(s)$  et les torsions  $\tau(s)$  connues ainsi que le trièdre d'origine  $(\vec{t}_0, \vec{n}_0, \vec{b}_0)$ .

Introduisant le vecteur  $\vec{e} = \tau\vec{t} + \beta\vec{b}$ , il vient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{e} \wedge \vec{t} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} = \vec{e} \wedge \vec{n} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} = \vec{e} \wedge \vec{b} \end{array} \right.$$

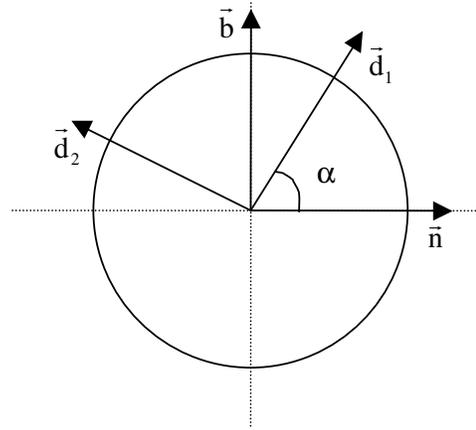
En fait, dans le passage de  $s$  à  $s+ds$  dans la trajectoire, le repère local  $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$  subit une rotation vectorielle de  $\vec{e} \cdot ds$  qui se manifeste par une rotation angulaire de  $\tau ds$  autour du vecteur tangent  $\vec{t}$  et d'une rotation angulaire de  $\beta ds$  autour du vecteur  $\vec{b}$  mais surtout sans rotation autour du vecteur  $\vec{n}$ . Ce dernier résultat est une conséquence mathématique qui est due uniquement à la manière avec laquelle le trièdre de Frénet a été construit. Nous verrons plus loin que cette propriété ne serait plus valable avec le trièdre physique d'inertie pour une tige.

### III-1.2 Repère d'inertie

Pour connaître les vraies déformations de la garniture au sein du trou de forage, l'utilisation du repère d'inertie est indispensable. En effet, ce repère est associé à la section courante de la structure et suit son mouvement dû aux contraintes extérieures. Ce repère, dit mécanique, diffère généralement du repère, dit mathématique, de Frénet. En effet, le premier change avec les sollicitations extérieures (torsion, flexion...) alors que le deuxième ne dépend que de la forme géométrique de la ligne moyenne de la structure.

Ce repère est constitué de deux vecteurs unitaires de la section courante et d'un troisième vecteur unitaire orthogonal au plan de la section.

Notons  $(\vec{d}_0, \vec{d}_1, \vec{d}_2)$  ce repère avec  $\vec{d}_0 = \vec{t}$  (le vecteur tangent) et  $(\vec{d}_1, \vec{d}_2)$  les deux vecteurs de la section courante. Appelons  $\alpha$  l'angle entre les deux vecteurs  $(\vec{n}, \vec{d}_1)$  avec  $\vec{n}$  le vecteur normal principal du trièdre de Frénet (voir Fig. 3.2)


**Figure 3.2 : Section courante de la tige**

Dans ces conditions nous avons :

$$\begin{cases} \bar{d}_0 = \bar{t} \\ \bar{d}_1 = \bar{n} \cos \alpha + \bar{b} \sin \alpha \\ \bar{d}_2 = -\bar{n} \sin \alpha + \bar{b} \cos \alpha \end{cases}$$

Cherchant le vecteur  $\bar{v}$  de la forme  $(\kappa_0 \bar{d}_0 + \kappa_1 \bar{d}_1 + \kappa_2 \bar{d}_2 = \sum_{i=0}^2 \kappa_i \bar{d}_i)$  tel que :

$$\forall i \in [0, 1, 2] \frac{d}{ds}(\bar{d}_i) = \bar{v} \wedge \bar{d}_i$$

Cette relation s'écrit, de manière matricielle, de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{ds}(\bar{d}_0) \\ \frac{d}{ds}(\bar{d}_1) \\ \frac{d}{ds}(\bar{d}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_2 & -\kappa_1 \\ -\kappa_2 & 0 & \kappa_0 \\ \kappa_1 & -\kappa_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d}_0 \\ \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \end{bmatrix}$$

En utilisant les relations de Frénet Serret et les relations exprimant le trièdre d'inertie en fonction du trièdre de Frénet, nous trouvons par identification :

$$\begin{cases} \kappa_0 = \tau + \frac{d\alpha}{ds} \\ \kappa_1 = \beta \sin \alpha \\ \kappa_2 = \beta \cos \alpha \end{cases}$$

Nous remarquons que lorsque le trièdre d'inertie est confondu avec le trièdre géométrique d'inertie (c-a-d l'angle  $\alpha$  est nul), ces relations deviennent :

$$\begin{cases} \kappa_0 = \tau \\ \kappa_1 = 0 \\ \kappa_2 = \beta \end{cases}$$

et par conséquent le vecteur  $\vec{v}$  vaut  $\tau\vec{t} + \beta\vec{b}$  c-a-d le vecteur de transformation  $\vec{e}$  propre au trièdre de Frenet.

En fait  $\kappa_0$ ,  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  sont les courbures généralisées associées au repère mécanique d'inertie  $(\vec{d}_0, \vec{d}_1, \vec{d}_2)$ .

Le vecteur de transformation  $\vec{v}$  égale à  $\sum_{i=0}^2 \kappa_i \vec{d}_i$  peut s'écrire aussi  $\frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 \frac{d\vec{d}_i}{ds} \wedge \vec{d}_i$  propriété également vraie pour le vecteur  $\vec{e}$  avec le trièdre de Frénet  $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ .

La théorie d'élasticité lie les contraintes internes en terme de moments aux courbures généralisées de la manière suivante :

$$\begin{cases} M_t = GI_0 \kappa_0 = GI_0 \left( \tau + \frac{d\alpha}{ds} \right) \\ M_1 = E I \kappa_1 = EI (\beta \sin \alpha) \\ M_2 = E I \kappa_2 = EI (\beta \cos \alpha) \end{cases}$$

avec :  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  et  $I_0 = 2I$

$G$  étant le module de cisaillement ;  $I_0$  le moment d'inertie selon  $\vec{d}_0$  et  $I$  le moment d'inertie identique selon  $\vec{d}_1$  et  $\vec{d}_2$  (car section circulaire).

Le moment  $M_t$  est le moment de torsion porté par  $\vec{t} = \vec{d}_0$  ;  $M_1$  et  $M_2$  sont les moments de flexion selon les vecteurs respectifs  $\vec{d}_1$  et  $\vec{d}_2$ .

Notons bien que, pour lier les valeurs des moments aux déformations, nous avons utilisé le repère mécanique d'inertie et non celui de Frénet. Maintenant, une fois ces moments connus, nous pouvons utiliser les relations liant le repère d'inertie en fonction du repère de Frénet pour exprimer les moments dans ce dernier repère.

Par un simple calcul nous trouvons :

$$\begin{cases} M_t = GI_0 \left( \tau + \frac{d\alpha}{ds} \right) \\ M_n = 0 \\ M_b = E I \beta \end{cases}$$

Ces dernières relations sont très intéressantes. En effet, d'abord toute une composante du moment est nulle (à savoir  $M_n$ ) réduisant le nombre des inconnues lors de la détermination des contraintes à l'intérieur de la structure (d'où l'utilité du repère géométrique de Frénet). Ensuite, contrairement aux moments de flexion  $M_n$  et  $M_b$  qui sont déterminés par la simple géométrie de la trajectoire de la structure (à savoir  $\beta$ ), le moment de torsion  $M_t$  ne sera connu à travers ces relations qu'une fois les paramètres d'inertie  $\alpha$  et de la géométrie de la trajectoire  $\tau$  déterminés. Pour les trajectoires gauches ( $\tau \neq 0$ ), le moment de torsion non nul  $GI_0\tau$  obtenu

en utilisant le trièdre de Frénet n'est pas physique (simple outil mathématique) car le vrai moment de torsion que subit la garniture est  $GI_0(\tau + \frac{d\alpha}{ds})$  faisant intervenir l'angle  $\alpha$ .

Ainsi, pour la résolution du problème du comportement mécanique de la structure de forage à l'intérieur du puits, deux approches sont possibles :

- La première consiste à utiliser le repère d'inertie avec l'inconnue supplémentaire  $\alpha$  qui sera déterminée en écrivant le formalisme des équations d'équilibre local avec frottements de la structure dans ce repère puis revenir aux relations précédentes pour déterminer  $M_t$ .
- La deuxième est plus simple et consiste à utiliser le repère de Frénet et les valeurs de moments de flexion déjà connues via la trajectoire de  $M_n$  et  $M_b$  et de déterminer le moment  $M_t$  ainsi que les efforts directement à partir des équations d'équilibre local avec frottement sans expliciter  $\alpha$ .

Nous allons opter pour la deuxième approche gagnant ainsi du temps lors de la résolution du problème.

### III-1.3 Décomposition du problème

Nous allons maintenant modéliser la structure de forage dans son puits. En fait, dans notre modèle final nous cherchons la vraie déformée statique de la structure dans le puits. Mais, pour résoudre ce problème réel, nous allons procéder en deux étapes. Dans la première étape, phase de formulation du problème, nous supposons connue la géométrie finale de la structure et nous établissons les équations du modèle d'abord avec l'hypothèse de contact continu uniquement, ensuite avec gestion des irrégularités et des contacts ponctuels afin d'établir un formalisme complet. Dans la deuxième et dernière étape, phase de résolution du problème, nous abordons le problème d'incertitude sur la géométrie de la déformée et des conditions aux limites afin de les intégrer dans la procédure de résolution finale. Un aperçu sur l'algorithme de contact utilisé sera aussi présenté dans cette étape.

## III-2 FORMULATION DU PROBLEME

### III-2.1 Introduction

Dans ce paragraphe nous allons mettre en équations le problème physique du comportement mécanique d'une structure de forage à l'intérieur d'un puits pétrolier. La formulation théorique du problème devrait intégrer au maximum la complexité de la réalité physique (caractère tridimensionnel de la trajectoire, complexité de la géométrie de la structure de forage, recherche des points de contact et les forces qui en résultent). Pour y parvenir, nous devons d'abord identifier clairement toutes les forces qui rentrent en jeu ainsi que tous les paramètres géométriques (courbure, torsion, diamètre de trou, etc,...) et les paramètres mécaniques (coefficients de frottements, densité de la boue, poids linéique de la structure, etc,...). Ensuite, utiliser les équations d'équilibre local d'un tronçon de la structure couplées aux lois d'élasticité sur les moments et aux lois de frottement afin d'obtenir le système final d'équations à résoudre. Enfin, nous devons compléter notre formulation par la gestion des points de contact et des liaisons entre les différents tronçons de la structure et par l'incorporation des conditions aux limites. La nouvelle formulation complète ainsi établie sera détaillée.

### III-2.2 Principales hypothèses de travail

La structure de forage pétrolier est assimilée à une poutre ayant les propriétés mécaniques suivantes :

- Elle est constituée d'un matériau élastique (réversibilité) linéaire de module de Young  $E$ , de module de cisaillement  $G$  et de coefficient de poisson  $\nu$ .
- En l'absence de toute action externe, elle prend la forme d'un segment de droite où chaque point (centre de la section droite) est repéré par une abscisse curviligne  $s$ .
- La section droite est circulaire caractérisée par un rayon extérieur et un rayon intérieur constants par morceaux.
- Le puits est assimilé à un cylindre à parois rigides (partie tubée comme partie puits ouvert) de diamètre constant par morceaux.
- Lorsque la structure est dans le puits de forage, elle est soumise à des actions aux extrémités ( $s=0$  : surface ;  $s=L$  : outil de forage), à la pesanteur, à la boue de forage et à des efforts de contact avec la paroi du trou (conditions de liaison unilatérale avec ou sans frottement) sachant que les coefficients de frottement sont des fonctions de  $s$  constants par morceaux et que , tout en tenant compte de l'existence de la rotation (couple de frottement), on néglige les forces d'inertie (travail en statique).
- Les lois de frottement utilisées sont celles de Coulomb (force de frottement axiale proportionnelle à la force normale de contact via un coefficient de frottement  $\mu_a$  ; couple de frottement tangentiel proportionnel à la force normale de contact et au rayon extérieur de la structure via un coefficient de frottement  $\mu_r$ ).
- La structure étant dans le trou , la partie en aval ( $s^+$ ) exerce sur la partie en amont ( $s^-$ ), à travers la section droite à l'abscisse curviligne  $s$ , des contraintes dont la résultante est

$\vec{T}$  et dont le moment résultant est  $\vec{M}$  sachant que le nombre  $\frac{\|\vec{T}\|}{EA_s}$  est petit devant

l'unité ( $\frac{\|\vec{T}\|}{EA_s} \ll 1$ ) . Ainsi, la longueur varie peu et la section droite reste droite.

- Le trou de forage a une trajectoire définie par  $\bar{x}(s)$  avec  $s$  variant de 0 à  $L$  ( $L$  : longueur totale du puits) et la structure est l'ensemble des points  $\bar{x}(s) + \bar{u}(s)$  où le vecteur déplacement  $\bar{u}(s)$  est tel que  $\|\bar{u} - (\bar{u} \cdot \bar{t})\bar{t}\| \leq J$  ( $J$  étant le jeu entre la structure et la paroi du puits ; différence entre le rayon du puits et le rayon extérieur de la structure) et que  $\left(\frac{J}{L} \ll 1\right)$  de telle sorte que  $\bar{x}(s)$  qui est une donnée du problème puisse être considérée comme une approximation au premier ordre de la géométrie déformée du système de forage dans le trou.

### III-2.3 : Formulation avec contact continu

Dans ce paragraphe, nous nous concentrons uniquement sur la première étape. Désignons par  $\bar{x}(s)$  cette géométrie supposée connue de la déformée finale et par  $\bar{t}(s)$  le vecteur tangent courant le long de  $\bar{x}(s)$ . L'arc  $\bar{x}(s)$  est orienté de haut en bas (de la surface vers l'outil de forage, figure 3.3). Les équations du modèle seront établies dans le repère de Frénet ( $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$ )

qui suit l'arc  $\bar{x}(s)$ . Nous supposons évidemment que la trajectoire de la structure est suffisamment régulière pour que ce trièdre soit bien défini.

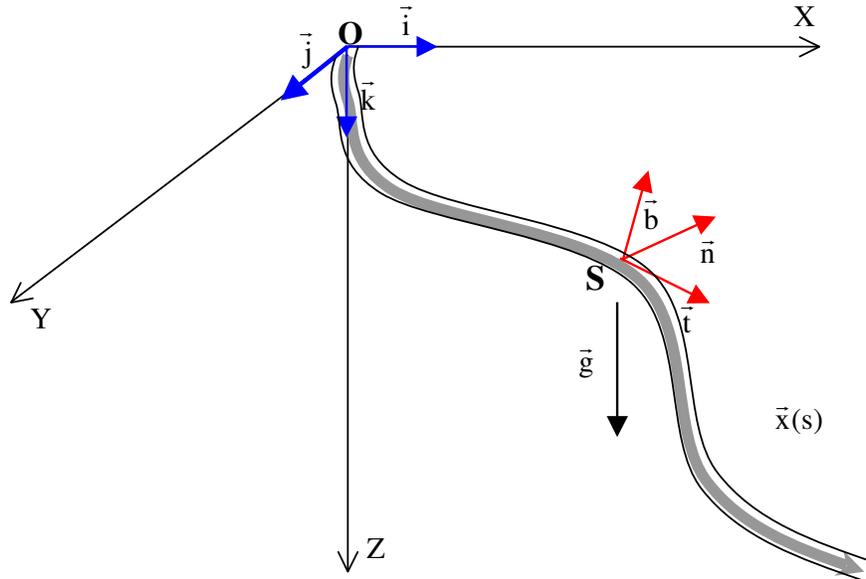


Figure 3.3 : Élément de structure  $\bar{x}(s)$  dans le puits de forage

Nous allons d'abord identifier les forces extérieures appliquées sur notre élément de structure.

### III-2.3.1 poids linéique déjaugé

La structure de forage est soumise à son poids porté par le vecteur de gravitation  $\vec{g}$  ( $= g\vec{k}$ ) ainsi qu'à la poussée d'Archimède (sens contraire du poids) due à la présence de la boue. Si on note  $A_s$  la surface de la section courante de l'élément de la structure,  $\rho_a$  la masse volumique du métal de la structure,  $\rho_b$  le poids volumique de la boue, alors chaque élément est soumis au poids linéique déjaugé linéique suivant :

$$\vec{w}_b = \rho_a A_s \vec{g} - \rho_b A_s \vec{g} = \rho_a A_s \left(1 - \frac{\rho_b}{\rho_a}\right) \vec{g} = \rho_a A_s \left(1 - \frac{\rho_b}{\rho_a}\right) g \vec{k} = w_b \vec{k}$$

Dans la suite, nous posons :

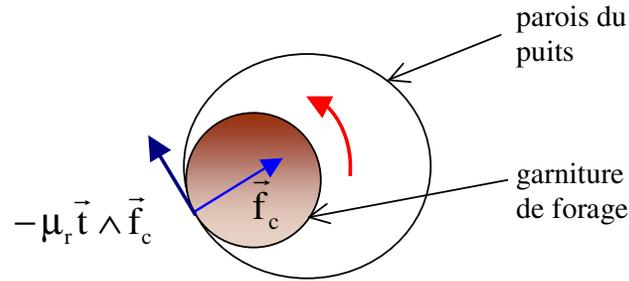
$$\vec{w}_b = w_{bt} \vec{t} + w_{bn} \vec{n} + w_{bb} \vec{b}$$

### III-2.3.2 force de contact linéique et forces de frottement induites

Nous notons  $\vec{f}_c$  la force de contact linéique qu'exerce la paroi du puits sur l'élément de la structure. Cette force est normale à la surface de contact.

Le mouvement axial de la structure (remonté ou descente) engendre une force de frottement axiale  $\mu_a \|\vec{f}_c\| \vec{t}$  où le coefficient de frottement axial  $\mu_a$  est positif en remonté (PUW), négatif en descente (SOW) et nul en position neutre (STW).

La rotation de l'élément de la structure autour de son axe  $\vec{t}$  conduit à une force de frottement tangentielle égale à  $(-\mu_r \vec{t} \wedge \vec{f}_c)$  et à un couple de torsion  $\mu_r r_e \|\vec{f}_c\| \vec{t}$  où le coefficient de frottement radial  $\mu_r$  est positif lorsque l'élément tourne dans le sens représenté dans la figure 3.4, négatif dans le sens contraire et nul en l'absence de rotation ( $r_e$  étant le rayon extérieur de l'élément de structure). Rappelons que le terme de force de frottement tangentielle induit par la rotation n'a pas été pris en compte dans le modèle semi-analytique rigide de HO (1987).



**Figure 3.4 : Frottement tangentiel induit par la rotation de la garniture**

Dans la suite, nous posons :

$\vec{f}_c = f_{cn} \vec{n} + f_{cb} \vec{b}$  et  $f_c = \sqrt{f_{cn}^2 + f_{cb}^2}$  : la force normale de contact par unité de longueur.

Ainsi, l'unité de longueur de la structure est soumise à la force suivante :

$$\vec{f} = (w_{bt} + \mu_r f_c) \vec{t} + (w_{bn} + f_{cn} + \mu_r f_{cb}) \vec{n} + (w_{bn} + f_{cb} - \mu_r f_{cn}) \vec{b}$$

et au couple :

$$\vec{m} = \mu_r r_e f_c \vec{t}$$

Les équations d'équilibre locale de la structure s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{f} = \vec{0} \\ \frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{t} \wedge \vec{T} + \vec{m} = \vec{0} \end{cases}$$

avec :  $\vec{T} = T_t \vec{t} + T_n \vec{n} + T_b \vec{b}$  : l'effort intérieur dans la structure

$\vec{M} = M_t \vec{t} + M_n \vec{n} + M_b \vec{b}$  : le moment intérieur dans la structure

$\vec{f}$  et  $\vec{m}$  sont explicités plus haut

Ce système de deux équations vectorielles nous fournit six équations différentielles. Les variables à déterminer sont au nombre de huit, à savoir les efforts intérieurs  $T_n, T_b, M_t, M_n, M_b$  mais aussi les forces de contact  $f_{cn}$  et  $f_{cb}$ . Sachant que  $M_n$  et  $M_b$  sont connues d'avance ( $M_n=0$  et  $M_b=EI\beta$ : voir fin paragraphe 1.2), il ne reste que six inconnues pour six équations et le système est bien inversible.

La projection de ces deux équations vectorielles dans le repère de Frénet, permet d'exprimer facilement  $T_n$  et  $T_b$  en fonction de  $M_b$  et de  $M_t$ .

Nous trouvons :

$$\begin{cases} T_n = -\frac{dM_b}{ds} = -EI \frac{d\beta}{ds} \\ T_b = \beta M_t - \tau M_b = \beta M_t - EI\beta\tau \end{cases}$$

En remplaçant  $T_n$  et  $T_b$  par leurs valeurs dans les quatre équations restantes, nous obtenons un système plus réduit de quatre équations à quatre inconnues :

$$\begin{cases} \frac{dM_t}{ds} + \mu_r r_c f_c = 0 & (1) \\ \frac{dT_t}{ds} + EI\beta \frac{d\beta}{ds} + w_{bt} + \mu_a f_c = 0 & (2) \\ \beta(T_t - \tau M_t) + EI(\beta\tau^2 - \frac{d^2\beta}{ds^2}) + w_{bn} + f_{cn} + \mu_r f_{cb} = 0 & (3) \\ \beta \frac{dM_t}{ds} + M_t \frac{d\beta}{ds} - EI(2\tau \frac{d\beta}{ds} + \beta \frac{d\tau}{ds}) + w_{bb} + f_{cb} - \mu_r f_{cn} = 0 & (4) \end{cases}$$

### III-2.4 Insuffisances de la formulation

Tel que le problème mathématique a été énoncé dans les équations précédentes, il contient quelques insuffisances que nous devons signaler :

- ✓ Les équations différentielles sont établies dans chaque tronçon de la structure à rigidité constant, mais nous n'avons pas précisé les conditions de raccordement entre deux tronçons ayant des EI différents (variation de l'inertie lors du passage de la BHA aux tiges, passage du stabilisateur aux masses tiges, etc, ...).
- ✓ Les forces de contact considérées jusqu'à maintenant sont des forces de contact continues (forces par unité de longueur) et la présence de contacts ponctuels donnant lieu à des forces de contact ponctuelles de type Dirac (forces concentrées) n'a pas été abordée. Nous devons donc compléter l'énoncé du problème aux points de discontinuité.
- ✓ Nous avons admis que la fonction donnée  $\vec{t}(s)$  est dérivable au moins trois fois dans chaque tronçon de la structure (car pour que  $\beta$  soit bien définie, il faut au moins que  $\vec{t}(s)$  soit dérivable et notre système d'équations comprend des termes en  $\frac{d^2\beta}{ds^2}$ ).

Pour palier à ces insuffisances, nous devons étudier la régularité des efforts et moments aux points de discontinuités ainsi que la régularité géométrique de la trajectoire locale de la structure.

### III-2.5 Gestion des irrégularités

#### III-2.5.1 irrégularités du moment et de l'effort

Les contraintes sur une section droite de la structure étant finies, leur résultante  $\vec{T}$  et leur moment  $\vec{M}$  le sont aussi. Nous admettons que  $\vec{T}$  et  $\vec{M}$  sont presque partout continus et peuvent présenter des discontinuités en un nombre fini de points.

Soit P un point de discontinuité de la structure (figure 3.5). Notons  $\vec{T}(P^+)$  et  $\vec{M}(P^+)$ , l'effort et le moment juste après le point de discontinuité dans le sens de l'arc (structure assimilée à un arc orienté de la surface vers l'outil). De même, notons  $\vec{T}(P^-)$  et  $\vec{M}(P^-)$ , l'effort et le moment juste avant le point de discontinuité dans le sens de l'arc.

Le saut d'effort  $\vec{T}(P) = \vec{T}(P^+) - \vec{T}(P^-)$  est régi par le théorème de la résultante qui s'énonce comme suit :

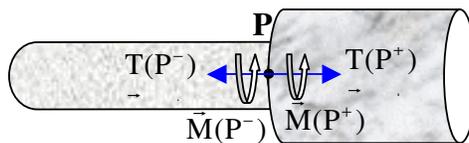
$\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{f} = \vec{0}$  est vérifiée pour tout s au voisinage de P excluant seulement le point P. La densité linéique de force f étant continue sur chacun de deux voisinages en amont et en aval de P. En  $s = s(P)$ , l'extérieur exerce sur la structure une force ponctuelle  $\vec{F}(P)$  tel que :

$$\vec{T}(P) + \vec{F}(P) = \vec{0}$$

Quand au moment, nous avons de la même façon l'égalité au point de discontinuité :

$$\vec{M}(P) + \vec{C}(P) = \vec{0}$$

avec  $\vec{M}(P) = \vec{M}(P^+) - \vec{M}(P^-)$  le saut de moment et  $\vec{C}(P)$  est un couple ponctuel exercé au point de discontinuité P.



**Figure 3.5 : Point de discontinuité dans la transition entre deux sections à deux rigidités différentes**

Compte tenu du problème physique traité, nous ne rencontrons d'actions ponctuelles concentrées ( $\vec{F}, \vec{C}$ ) qu'aux deux extrémités (conditions aux limites à l'outil et en surface) et en d'éventuels points de contacts ponctuels le long de la structure avec la paroi du forage. Sachant que pour les extrémités, les conditions aux limites sont supposées connues, le problème de discontinuité ne se pose qu'aux points de contacts ponctuels.

Pour ces points, nous avons les quatre relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} ]\vec{T}[ + \vec{F} = \vec{0} \\ ]\vec{M}[ + \vec{C} = \vec{0} \end{array} \right.$$

avec :

$$\vec{F} = \mu_a F_c \vec{t} + (F_{cn} + \mu_r F_{cb}) \vec{n} + (F_{cb} - \mu_r F_{cn}) \vec{b}$$

$$\vec{C} = \mu_r r_c F_c \vec{t} \quad \text{et} \quad F_c = \sqrt{(F_{cn}^2 + F_{cb}^2)}$$

Les deux dernières relations découlent en fait des mêmes équations de contact avec frottement déjà vues plus haut pour le cas continu sauf que cette fois, les forces de contact sont concentrées.

Nous allons voir que ces équations couplées aux équations liant les actions internes à la géométrie de la trajectoire permettent d'obtenir à la fois les valeurs des actions internes (efforts et moments) aux points de discontinuités et les forces de contact ponctuelles  $F_{cn}$  et  $F_{cb}$ .

### III-2.5.2 irrégularités de la géométrie de la trajectoire

Nous admettons que la structure de forage (initialement droite), une fois introduite dans le puits de forage prend une forme  $\vec{x}(s)$  continue (pas de rupture) avec une tangente  $\vec{t}(s)$  partout continue (pas de rotule plastique). Nous allons même admettre que  $\vec{t}$  est dérivable presque partout avec la dérivée  $\frac{d\vec{t}}{ds}$  pouvant présenter des discontinuités en un nombre fini de points.

La dérivabilité de  $\vec{t}$  par morceau nous permet d'écrire dans chaque tronçon :

$$\vec{M} = EI \vec{t} \wedge \frac{d\vec{t}}{ds} + M_t \vec{t}$$

Pour un point de singularité, cette relation devient en tenant compte de la continuité de  $\vec{t}$  :

$$] \vec{M} [= \vec{t} \wedge ] EI \frac{d\vec{t}}{ds} [ + ] M_t [ \vec{t}$$

Or, d'après le paragraphe précédent, nous avons :

$$] \vec{M} [ + \mu_r r_c F_c \vec{t} = \vec{0}$$

Par substitution, nous obtenons successivement :

$$\begin{cases} ]M_t[ + \mu_r F_c = 0 \\ \vec{t} \wedge ]EI \frac{d\vec{t}}{ds}[ = \vec{0} \end{cases}$$

La première équation nous servira à connaître le saut en moment de torsion aux points de discontinuités. En utilisant les propriétés mathématiques du trièdre de Frénet, la deuxième équation vectorielle conduit facilement aux égalités suivantes :

- $]EI\beta[ = 0$  : la quantité  $EI\beta$  est continue partout dans la structure ;  $\beta$  étant la courbure de la trajectoire de la structure.
- $]\vec{n}[ = \vec{0}$  : continuité du vecteur normal principal  $\vec{n}$  et par la suite de tout le trièdre de Frénet vu que  $\vec{t}$  est déjà continu et que  $\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}$ .

Ainsi, nous venons d'obtenir deux résultats intéressants : le premier est la continuité de la base de Frenêt le long de la structure et le deuxième est la continuité de la quantité  $EI\beta$ . Le dernier résultat signifie que la courbure  $\beta$  ne subit de discontinuité qu'au passage entre deux tronçons ayant des rigidités différentes ( BHA-tiges, etc,...).

Quant à la discontinuité de l'effort interne  $\vec{T}$ , nous avons d'après la partie précédente la relation suivante liant l'effort à la géométrie :

$$\vec{T} = T_t \vec{t} + T_n \vec{n} + T_b \vec{b} = T_t \vec{t} - EI \frac{d\beta}{ds} \vec{n} + (\beta M_t - EI\beta\tau) \vec{b}$$

D'où, en utilisant la continuité du repère de Frénet :

$$]\vec{T}[ = ]T_t[ \vec{t} - ]EI \frac{d\beta}{ds}[ \vec{n} + (]\beta M_t[-]EI\beta\tau]) \vec{b}$$

Et finalement, en remplaçant  $]\vec{T}[$  par sa valeur en fonction de la force de contact  $\vec{F}$ , établie dans le paragraphe précédent, nous obtenons par projection les trois relations :

$$\begin{cases} ]T_t[ + \mu_a F_c = 0 \\ ]EI \frac{d\beta}{ds}[ = F_{cn} + \mu_r F_{cb} \\ ]\beta M_t[-]EI\beta\tau[ = -\mu_r F_{cn} + F_{cb} \end{cases}$$

En conséquence, dans tout tronçon de la structure où la rigidité  $EI$  est continue (constante par exemple) et qui n'est soumis à aucune action ponctuelle (autres que celles aux extrémités), les paramètres géométriques  $\beta$ ,  $\frac{d\beta}{ds}$  et  $\tau$  sont continus et donc  $\frac{d^2\vec{t}}{ds^2}$  est continu aussi.

Plus précisément, la fonction vecteur tangent  $\vec{t}(s)$  est dérivable jusqu'au troisième ordre et les éventuelles discontinuités de sa dérivée tierce sont associées aux discontinuités de la force linéique extérieure  $\vec{f}$ . Ainsi, l'hypothèse sur la régularité du vecteur tangent dans la formulation continue est valide et les équations contenant les termes en  $\frac{d^2\beta}{ds^2}$  sont valables.

Notons enfin que les trois dernières équations avec l'équation sur le saut de moment de torsion nous fournissent quatre équations algébriques pour quatre inconnues qui sont  $F_{cn}$ ,  $F_{cb}$  et les deux sauts de  $T_t$  et de  $M_t$ . Ces quatre équations constituent les équations de raccordements.

### III-2.6 : Formulation complète

Pour obtenir la formulation complète du problème, nous devons coupler la formulation continue (problème de contact continu structure- paroi) avec les équations de raccordement aux points de contact ponctuels que nous venons juste d'établir.

Les inconnues du problème sont les fonctions de l'abscisse curviligne  $s$  :  $T_t$ ,  $M_t$ ,  $f_{cn}$  et  $f_{cb}$  ainsi que les quantités scalaires  $F_n$  et  $F_b$  (deux inconnues par point de contact). Il nous faut donc dans chaque tronçon quatre équation différentielles (les équations de la formulation continue) et en chaque point de contact quatre équations algébriques (les équations de raccordement).

Les quatre équations de la formulation continue (fin paragraphe 2.3) peuvent être transformées en seulement deux équations différentielles ordinaires de premier ordre avec les inconnues  $T_t$  et  $M_t$  de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dT_t}{ds} = -EI\beta \frac{d\beta}{ds} - w_{bt} - \mu_a f_c \\ \frac{dM_t}{ds} = -\mu_r r_c f_c \end{array} \right.$$

Sachant que :

$$f_c = \frac{\left[ \sqrt{Q_1(Q_2^2 + Q_3^2) + (\mu_r \beta r_c Q_2)^2} - \mu_r \beta r_c Q_2 \right]}{Q_1}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 = 1 + \mu_r^2 (1 - \beta^2 r_c^2) \\ Q_2 = M_t \frac{d\beta}{ds} - EI \left( 2\tau \frac{d\beta}{ds} + \beta \frac{d\tau}{ds} \right) + w_{bb} \\ Q_3 = \beta (T_t - \tau M_t) + EI \left( \beta \tau^2 - \frac{d^2\beta}{ds^2} \right) + w_{bn} \end{array} \right.$$

Les forces de contact linéique  $f_{cn}$  et  $f_{cb}$  sont obtenues par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} f_{cn} = -\frac{\mu_r(\mu_r\beta r_c f_c - Q_2) + Q_3}{1 + \mu_r^2} \\ f_{cb} = \frac{\mu_r\beta r_c f_c - Q_2 - \mu_r Q_3}{1 + \mu_r^2} \end{cases}$$

Aux points de contact, nous devons rajouter les quatre équations de raccordement :

$$\begin{cases} ]T_t[ + \mu_a F_c = 0 \\ ]EI \frac{d\beta}{ds}[ = F_{cn} + \mu_r F_{cb} \\ ]\beta M_t[- ]EI\beta\tau[ = -\mu_r F_{cn} + F_{cb} \\ ]M_t[ + \mu_r r_c F_c = 0 \end{cases}$$

Le système différentiel en  $T_t$  et  $M_t$  associé à ces équations de raccordement constitue le système décrivant le comportement de la structure de forage à l'intérieur du puits avec gestion de contacts ponctuels.

### III-3 RESOLUTION DU PROBLEME

#### III-3.1 Géométrie connue

Nous avons vu que lorsque la géométrie de la structure (arc  $\bar{x}(s)$ ) est connue, nous obtenons un système différentiel de premier ordre à deux équations et deux inconnues  $M_t$  et  $T_t$  (problème de Cauchy) qui peut être résolu dès lors que nous connaissons la tension  $T_t$  et le moment de torsion  $M_t$  à une extrémité (par exemple à l'outil). Le système différentiel peut être intégré par voie numérique (méthode de Runge Kutta, ou autre ...). Dans certains cas particuliers (arc homogène en géométrie bidimensionnelle simple) on peut même exhiber une solution analytique donnant l'évolution de  $T_t$  et  $M_t$  en fonction de  $s$  [Aadnoy, 2000].

Dans tous les cas, il est nécessaire de ne pas perdre de vue qu'une fois que les fonctions  $T_t(s)$  et  $M_t(s)$  sont déterminées, le reste des efforts et moments sera connu par les deux relations déjà établies auparavant :

$$\begin{cases} \vec{M} = EI\vec{t} \wedge \frac{d\vec{t}}{ds} + M_t \vec{t} \\ \vec{T} = -EI \frac{d^2\vec{t}}{ds} + M_t \vec{t} \wedge \frac{d\vec{t}}{ds} + (T_t - EI \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \frac{d\vec{t}}{ds})\vec{t} \end{cases}$$

Par conséquent, si nous connaissons la vraie géométrie déformée et si à l'extrémité basse de la structure nous connaissons  $T_t$  et  $M_t$  alors forcément nous connaissons à l'avance à cette même extrémité tous les efforts et moments (vecteurs  $\vec{T}$  et  $\vec{M}$ ) exercés sur l'arc par l'extérieur. Cela nous amène donc à préciser davantage les conditions aux limites dans le cas réel (conditions au niveau du crochet en surface et conditions en bas à l'outil de forage).

### III-3.2 Conditions aux limites

La structure étudiée peut subir un mouvement de corps solide (translation et rotation) sans modifications du champs de contraintes donc sans modification des actions internes  $\bar{T}$  et  $\bar{M}$ . Par conséquent, la géométrie  $\bar{x}(s)$  de l'arc déformé possède six degrés de liberté (trois en translation et trois en rotation) que nous pouvons fixer arbitrairement.

Une approche possible consiste à choisir l'extrémité ( $s=0$  : surface) comme origine de l'arc  $\bar{x}(0) = \bar{0}$  et à y imposer que le vecteur tangent  $\bar{t}(0)$  soit connu. Ces données complétées par la nullité de l'angle de vrillage  $\alpha(0)$  correspondent aux conditions d'encastrement.

En ce qui concerne l'extrémité basse, nous devons obligatoirement y connaître six conditions scalaires indépendantes :

- conditions de chargement :  $\bar{T}$  et  $\bar{M}$  connus
- conditions de liaison :  $\bar{x}$ ,  $\bar{t}$  et  $\alpha$  connus
- conditions mixtes : dans une direction on impose un chargement et dans l'autre une liaison.

Pour notre problème (calcul des efforts de tension et de couple de torsion en surface dûs aux frottements "*Torque & Drag*"), les conditions aux limites seront établies de la manière suivante :

En surface :

Encastrement : tous les déplacements et les rotations sont bloqués et il s'agit de déterminer les contraintes à cet endroit.

A l'outil :

Les déplacements latéraux et les rotations (selon les vecteurs  $\bar{n}$  et  $\bar{b}$ ) sont bloqués et le déplacement ainsi que la rotation selon le vecteur tangent  $\bar{t}$  sont libres (encastrement latéral uniquement).

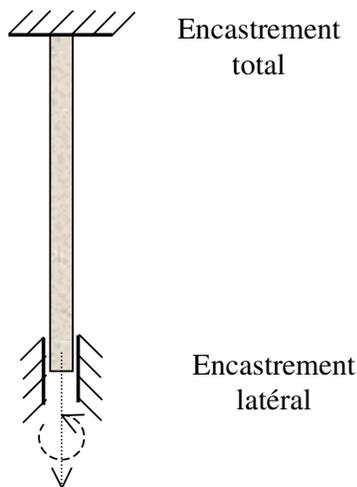


Figure 3.6 : Conditions aux limites au point bas et au point haut de la garniture

Remarque : les conditions établies plus haut correspondent au cas de manœuvres de la garniture (remontée, descente, statique).  
 Pour simuler la garniture pendant la phase de forage, il suffit d'ajouter à ces conditions un chargement en  $\vec{T}$  égal au poids sur l'outil et un chargement en  $\vec{M}$  égal au couple à l'outil, tout deux portés par le vecteur  $(-\vec{t})$ .

### III-3.3 Incertitude sur la géométrie

Comme nous l'avons vu, la structure étudiée, initialement droite, est introduite dans un puits de forage à parois rigides dont nous connaissons la trajectoire  $\vec{x}(s)$ . Mais la vraie géométrie finale de la structure est  $\vec{x}(s) + \vec{u}(s)$  où  $\vec{u}$  (déplacement) est tel que :

$$\|\vec{u} - u_t \vec{t}\| \leq J \text{ et où } J \text{ est le jeu entre la structure et la paroi.}$$

En posant  $\vec{t} = \frac{d\vec{x}}{ds}$ , le vrai vecteur tangent à l'arc déformé est  $(\vec{t} + \frac{d\vec{u}}{ds})$  tenant compte ainsi du mouvement de la structure à l'intérieur du trou. Trois nouvelles inconnues (composantes du vecteur déplacement  $\vec{u}$ ) doivent donc être déterminées. Bien sûr, nous retrouvons le problème ci-dessus (géométrie connue) en posant le vecteur  $\vec{u}$  nul.

Le nouveau problème doit être mieux défini et à cette fin nous avons deux démarches possibles qui utilisent toutes les deux le fait que le terme  $\left\| \frac{d\vec{u}}{ds} \right\|$  est un nombre petit devant l'unité (infiniment petit de premier ordre).

### III-3.4 Formulation générale

La vraie géométrie déformée de l'arc est supposée se déduire de la trajectoire du puits  $\vec{x}(s)$  par une transformation élastique linéaire infinitésimale caractérisée par un déplacement  $\vec{u}(s)$  et une rotation de la section droite  $\vec{\omega}(s)$ .

En plus des conditions aux limites explicitées auparavant, nous supposons que nous connaissons :

- toutes les forces extérieures y compris les efforts et couples de contact (effort  $\vec{f}$  et couple  $\vec{c}$  par unité de longueur)
- pour chaque section droite, le module d'Young E, de cisaillement G, la rigidité I, l'aire  $A_s$ , le coefficient de réduction k qui intervient dans l'effet de l'effort tranchant
- l'effort  $\vec{T}^0(s)$  et le moment  $\vec{M}^0(s)$  à l'état de référence  $\vec{x}(s)$  (structure confondue avec la trajectoire du puits, ce qui correspond à  $\vec{u} = \vec{0}$  et  $\vec{\omega} = \vec{0}$ )

Concernant les valeurs de  $\vec{T}^0$  et  $\vec{M}^0$ , celles-ci peuvent être déterminées directement à partir de la trajectoire connue du puits par les relations déjà établies suivantes :

$$\begin{cases} \vec{T}^0 = -EI \frac{d^2 \vec{t}}{ds} + M^0_t \vec{t} \wedge \frac{d\vec{t}}{ds} + (T^0_t - EI \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \frac{d\vec{t}}{ds}) \vec{t} \\ \vec{M}^0 = EI \vec{t} \wedge \frac{d\vec{t}}{ds} + M^0_t \vec{t} \end{cases}$$

à condition que les valeurs scalaires de  $T_t^0$  et  $M_t^0$  soient fournies.

Une fois ces condition remplies, nous aboutissons à un problème classique d'élasticité linéaire avec contraintes initiales qui s'énonce comme suit :

1) équations d'équilibre local

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{f} = \vec{0} \\ \frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{t} \wedge \vec{T} + \vec{c} = \vec{0} \end{array} \right.$$

2) équations d'élasticité (Timoshenko)

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{T} = \vec{T}^0 + EA_s \left( \vec{t} \cdot \frac{d\vec{u}}{ds} \right) \vec{t} + kGA_s \left[ \frac{d\vec{u}}{ds} - \left( \vec{t} \cdot \frac{d\vec{u}}{ds} \right) \vec{t} - \vec{\omega} \wedge \vec{t} \right] \\ \vec{M} = \vec{M}^0 + 2GI \left( \vec{t} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{ds} \right) \vec{t} + EI \left[ \frac{d\vec{\omega}}{ds} - \left( \vec{t} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{ds} \right) \vec{t} \right] \end{array} \right.$$

(k étant le facteur de réduction de l'effort tranchant dans la théorie de Timoshenko ).

Cette formulation locale (équilibre et élasticité) peut être transformée en une formulation variationnelle qui peut être abordée par une méthode numérique telle que la méthode des éléments finis.

Ceci dit, une telle formulation peut être abordée numériquement par une voie plus directe (sans passer par la formulation variationnelle) en profitant du caractère isostatique du problème (arc simple sans points doubles).

Avant d'expliciter la nouvelle approche, nous inversons les deux équations d'élasticité de la façon suivante (exprimer les déplacements en fonctions des actions internes) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{\omega}}{ds} = \frac{1}{EI} [(\vec{M} - \vec{M}^0) - \{(\vec{M} - \vec{M}^0) \cdot \vec{t}\} \vec{t}] + \frac{1}{2GI} [(\vec{M} - \vec{M}^0) \cdot \vec{t}] \vec{t} \\ \frac{d\vec{u}}{ds} = \frac{1}{kGA_s} [(\vec{T} - \vec{T}^0) - \{(\vec{T} - \vec{T}^0) \cdot \vec{t}\} \vec{t}] + \vec{\omega} \wedge \vec{t} + \frac{1}{EA_s} [(\vec{T} - \vec{T}^0) \cdot \vec{t}] \vec{t} \end{array} \right.$$

La nouvelle approche se fait en quatre étapes d'intégration simple : deux pour les déplacements ( $\vec{u}, \vec{\omega}$ ) en intégrant par rapport à s les deux derniers second membres, et deux pour les actions internes ( $\vec{T}, \vec{M}$ ) en intégrant les deux équations d'équilibre local.

Par cette méthode, on évite l'utilisation de la méthode des éléments finis, ce qui permet un gain de temps de calcul (CPU) non négligeable.

Il n'en demeure point que la formulation générale présente deux inconvénients que la nouvelle formulation tâche de palier :

- le fait de prendre en compte dans les équations d'élasticité les termes utilisant  $kGA_s$  (effet de l'effort tranchant) et de  $EA_s$  (effet de la déformation longitudinale) est en contradiction avec nos hypothèse de départ ( la section droite reste droite et la

longueur de la structure ne subit pas de variation). Ainsi, pour la compatibilité avec ces hypothèses, l'équation donnant l'évolution de  $\frac{d\bar{u}}{ds}$  doit être remplacée simplement par :  $\frac{d\bar{u}}{ds} = \bar{\omega} \wedge \bar{t}$ .

- la démarche classique pour la formulation générale impose la connaissance des actions à l'état de référence  $\bar{M}^0$  et  $\bar{T}^0$  et notamment  $M_t^0$  qui apparaît dans le second membre de  $\frac{d\bar{\omega}}{ds}$  et qui doit être connu pour pouvoir résoudre le problème. Cette démarche peut être remplacée avantageusement par l'hypothèse qui consiste à dire que ( $M_t^0 = M_t$ ), négligeant ainsi tout vrillage éventuel supplémentaire entre l'état approximatif  $\bar{x}(s)$  et la déformée finale.

### III-3.5 La Nouvelle formulation

La nouvelle formulation est déduite de la formulation générale en la modifiant afin de garder une cohérence avec les hypothèses de départ (longueur constante et absence de gauchissement de la section droite) et qui ne nécessite pas de deviner l'état initial des actions internes  $\bar{T}$  et  $\bar{M}$ .

Les équations de cette nouvelle formulation sont donc les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{T}}{ds} + \bar{f} = \bar{0} \\ \frac{d\bar{M}}{ds} + \bar{t} \wedge \bar{T} + \bar{c} = \bar{0} \\ \frac{d\bar{\omega}}{ds} = \frac{1}{EI} [\bar{M} - (\bar{M} \cdot \bar{t}) \bar{t}] - \bar{t} \wedge \frac{d\bar{t}}{ds} \\ \frac{d\bar{u}}{ds} = \bar{\omega} \wedge \bar{t} \end{array} \right.$$

Le nouveau second membre de  $\frac{d\bar{\omega}}{ds}$  est obtenu à partir de son expression dans la formulation générale en imposant la condition ( $M_t^0 = M_t$ ). Le second membre de  $\frac{d\bar{u}}{ds}$  est obtenu à partir de son expression dans la formulation générale en négligeant les termes utilisant  $kGA_s$  (effet d'effort tranchant) et les termes utilisant  $EA_s$  (effet de la déformation longitudinale).

La résolution de cette formulation permet la détermination des actions internes  $\bar{T}$  et  $\bar{M}$  et des déplacements  $(\bar{u}, \bar{\omega})$  et donc de décrire le comportement mécanique de la structure à l'intérieur du trou. Comme condition au limite sur les déplacements en surface (au crochet), nous avons pris la condition d'encastrement ( $\bar{u} = \bar{0}, \bar{\omega} = \bar{0}$ ).

### III-3.6 Algorithme de Contact

Dans les formulations que nous avons établies, nous avons supposé que les efforts linéiques extérieurs  $(\vec{f}, \vec{c})$  sont connus y compris les forces de contact avec la paroi du puits de forage. Mais en réalité les forces de contact sont à déterminer lors du processus de résolution.

Le processus de contact se manifeste de la manière suivante : le déplacement latéral  $\vec{u}_L(s)$ , égal à  $[\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{t})\vec{t}]$ , peut être écrit symboliquement de la forme suivante  $\vec{u}_L^1 + L(\vec{f}_c)$  où  $\vec{u}_L^1$  est le déplacement (imposé par la courbure et par la pesanteur) qu'aurait la structure en l'absence de force de contact  $\vec{f}_c$ . L'opérateur linéaire  $L$  est la réponse de la structure lorsqu'on lui applique les forces de contact  $\vec{f}_c$  ainsi que toutes les autres actions (forces et couples) qui en découlent par frottement.

Pour compléter l'énoncé, nous devons expliciter les conditions de contact :

- Si  $\|\vec{u}_L\| < J$  ( $J$  le jeu structure-paroi) alors  $\vec{f}_c = \vec{0}$  (ainsi que toutes les actions qui en résultent)
- Si  $\|\vec{u}_L\| \geq J$  alors  $\|\vec{u}_L\| = J$  (condition de contact avec les actions de frottement) et  $\frac{\vec{f}_c}{\|\vec{f}_c\|} = -\frac{\vec{u}_L}{J}$  (l'effort de contact s'oppose au mouvement latéral  $\vec{u}_L$ ).

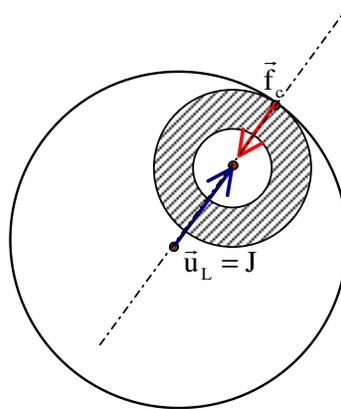
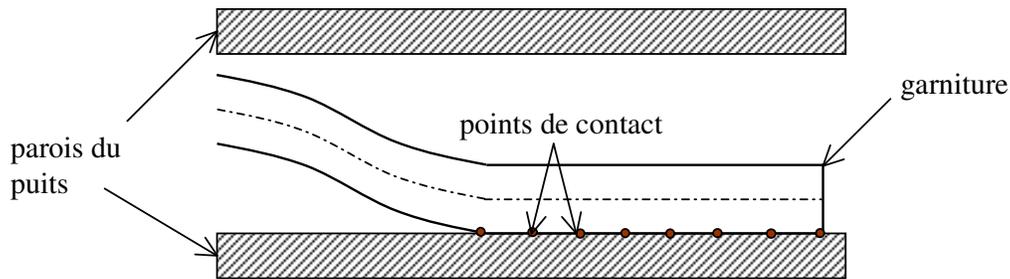


Figure 3.7 : La force de contact s'oppose au déplacement latéral

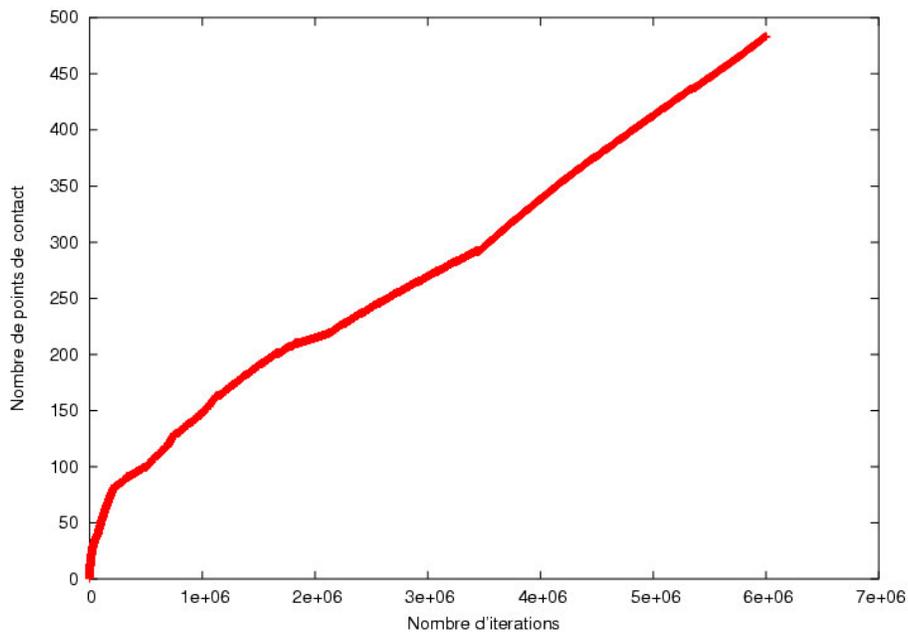
L'ensemble de ces conditions de contact conduisent à un problème non linéaire qui peut être résolu par un procédé itératif. Le principe général consiste à introduire les points de contact les uns après les autres (en prenant à chaque fois le point pour lequel la condition  $\|\vec{u}_L\| < J$  est la moins respectée). L'ensemble des points de contact (à un moment donné du processus itératif) étant trouvé, on cherche les directions des vecteurs  $\vec{f}_c$  pour assurer le mieux possible la condition  $\vec{f}_c$  et  $-(\vec{u}_L)$  parallèles et de même sens.



**Figure 3.8 : Recherche de points de contact entre la garniture et les parois du puits**

Notons que le processus de recherche de points de contact est un processus très complexe notamment pour les garnitures très élancées (plusieurs milliers de mètres), comportant plusieurs éléments de section différentes et se déformant dans un puits à trajectoire complexe (présence des courbures et des gauchissements). Ainsi l'établissement de la convergence du processus de contact pour de tels cas nécessite un nombre élevé d'itérations dans l'algorithme (voir figure 3.8 pour le cas d'un puits d'environ 5000 mètres de longueur).

Ceci dit, l'expérience montre que l'algorithme de contact utilisé dans ce modèle mécanique est beaucoup plus rapide que celui utilisé auparavant dans un modèle utilisant la méthode des éléments finis. Ceci s'explique par le fait que dans le nouveau modèle l'intégration s'effectue de manière directe accélérant ainsi le temps attribué à chaque itération.



**Figure 3.9 : Exemple de recherche de points de contact entre la garniture et les parois du puits par l'algorithme de contact**

En outre, afin d'accélérer la convergence de l'algorithme itératif de contact, des améliorations ont été apportées. Ces améliorations consistent notamment à :

- trouver un « bon départ » de l'algorithme itératif sur la direction de  $\vec{f}_c$  en tenant compte des coefficients de frottement.
- tenir compte des limitations de l'arithmétique en « flottant » de l'ordinateur.

### III-3.7 Code de calcul ABIS

Le nouveau modèle de comportement mécanique de la garniture à l'intérieur du puits de forage a été implanté dans un code de calcul qui s'appelle *ABIS*. Ce code succède à un ancien code (*STEL*) basé sur la méthode des éléments finis. Comparé à l'ancien, le nouveau code vient apporter un gain important dans le temps de calcul notamment lors du traitement de garnitures très élancées (plusieurs milliers de mètres). En effet, avec *ABIS* la résolution du problème mécanique s'effectue par une intégration directe des équations différentielles et algébriques, alors qu'avec *STEL*, la construction de la matrice de rigidité (associée à l'énergie de déformation) et son inversion sont obligatoires à chaque itération de l'algorithme de contact.

Le fichier de données d'*ABIS* se présente de la manière suivante :

- données générales (conditions aux limites, chargements, nombre d'itérations, précisions)
- données détaillées par tronçon de la garniture (abscisse curviligne, tangente, section, inertie, jeu, coefficients de frottements axial et radial)

Le fichier résultats comporte deux parties :

- les points de contact (recherchés par l'algorithme de contact) ainsi que l'intensité et la direction des forces de contact.
- forces, moments, déplacements et rotations en chaque point discrétisé de la garniture

### III-4 CONCLUSION

Nous avons explicité dans ce chapitre les étapes principales dans la modélisation du comportement mécanique de la garniture à l'intérieur d'un puits de forage.

Cette modélisation s'appuie sur un couplage entre les équations d'équilibre de la structure soumise aux chargements extérieurs et un algorithme itératif de contact unilatéral garniture-puits avec frottement. Contrairement à la majorité des modèles rencontrés dans la littérature sur le calcul de frottement, dans ce nouveau modèle, les points de contact sont aussi des inconnus du problème à résoudre.

La modélisation se fait en deux étapes. Dans la première, phase de formulation théorique du problème, nous supposons connue la géométrie finale de la structure et nous établissons les équations du modèle d'abord avec l'hypothèse du contact continu uniquement, ensuite avec gestion des irrégularités (de la trajectoire et de la garniture) et des contacts ponctuels afin d'établir un formalisme complet. Dans la deuxième étape, phase de résolution du problème, nous abordons le problème d'incertitude sur la géométrie de la déformée (à cause de sa déformation à l'intérieur du puits) et des conditions aux limites afin de les intégrer dans le procédé de résolution finale. La résolution se fait de manière directe sans faire appel à la méthode des éléments finis gagnant ainsi en temps de calcul. Un code de calcul appelé ABIS a été développé au CGES et le nouveau modèle y a été implanté et validé. L'algorithme de contact du code a subi beaucoup d'améliorations afin d'accélérer la convergence du processus itératif et de pouvoir simuler des garnitures très élancées (plusieurs milliers de mètres) en un temps réduit.

## **CHAPITRE IV**

### **APPLICATION DU NOUVEAU MODELE A LA PREDICTION DES PERTES EN FROTTEMENT DANS LES PUITTS PETROLIERS**