

# ÉTUDE DU PROBLÈME SCALAIRE PAR LA MÉTHODE DE LA T-COERCIVITÉ

---

Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet de la publication :

- [18] A.-S. BONNET-BEN DHIA, L. CHESNEL et P. CIARLET JR. : *T*-coercivity for scalar interface problems between dielectrics and metamaterials. *Math. Mod. Num. Anal.*, 46(06):1363–1387, 2012.
- 

## Sommaire

---

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>1.1 Notations et résultat préliminaire</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>1.2 Étude de cas élémentaires : des conditions globales</b> . . . . .	<b>16</b>
1.2.1 Domaine symétrique . . . . .	16
1.2.2 Sommet intérieur . . . . .	17
1.2.3 Sommet extérieur . . . . .	18
1.2.4 Interface de classe $\mathcal{C}^1$ . . . . .	19
<b>1.3 Localisation pour une interface quelconque</b> . . . . .	<b>20</b>
1.3.1 Description de la géométrie . . . . .	20
1.3.2 Énoncé du résultat . . . . .	21
1.3.3 Construction de la partition de l'unité . . . . .	22
1.3.4 Une estimation <i>a priori</i> pour les solutions de $(\mathcal{P})$ . . . . .	24
1.3.5 Conclusion . . . . .	25
<b>1.4 Applications</b> . . . . .	<b>25</b>
1.4.1 Coefficients réguliers par morceaux . . . . .	25
1.4.2 Coefficients constants par morceaux . . . . .	25
<b>1.5 Discussion sur les hypothèses portant sur <math>\sigma</math></b> . . . . .	<b>27</b>
1.5.1 Domaine symétrique . . . . .	27
1.5.2 Interface localement droite et contraste égal à $-1$ . . . . .	27
1.5.3 Critère pour les sommets . . . . .	29
1.5.4 Autres cas . . . . .	31
<b>1.6 Domaines de <math>\mathbb{R}^3</math></b> . . . . .	<b>32</b>
1.6.1 Domaine symétrique . . . . .	32
1.6.2 Arête prismatique . . . . .	32
1.6.3 Arête axisymétrique . . . . .	33
1.6.4 Pointe conique . . . . .	34
1.6.5 Coin de Fichera . . . . .	36
1.6.6 Géométries générales de $\mathbb{R}^3$ . . . . .	37
<b>1.7 Conditions aux limites de type Neumann</b> . . . . .	<b>38</b>

1.7.1	Géométries particulières . . . . .	39
1.7.2	Interface quelconque en 2D . . . . .	40
1.7.3	Travail dans l'espace des fonctions à moyenne nulle . . . . .	41
<b>1.8</b>	<b>Calculs manquants . . . . .</b>	<b>42</b>
1.8.1	Calculs utilisés dans la Section 1.5 . . . . .	42
1.8.2	Coordonnées toroïdales . . . . .	42

## Introduction

**D**n électromagnétisme, pour certaines applications, on aimerait travailler avec des composites qui se comportent comme des matériaux homogènes à permittivité diélectrique  $\varepsilon$  et/ou perméabilité magnétique  $\mu$  réelle(s) et négative(s). Comme nous l'avons déjà mentionné, les métaux et les tout récents métamatériaux négatifs peuvent entrer, en première approximation, dans cette catégorie pour certaines plages de fréquences. La modélisation de tels objets soulèvent des questions relativement inhabituelles. Considérons une structure hétérogène composée d'un diélectrique classique et d'un matériau négatif. En raison du changement de signe des paramètres physiques, il n'est pas évident de prouver l'existence et l'unicité du champ électromagnétique pour un terme source donné. Dans ce chapitre, nous commencerons par nous intéresser au cas d'un problème bidimensionnel dans un domaine  $\Omega$  représentant la structure hétérogène, en régime harmonique en temps avec une excitation de pulsation  $\omega > 0$ . Dans une telle configuration, de façon classique et comme nous le verrons dans le Chapitre 7, les équations de Maxwell se ramènent à des problèmes scalaires de la forme

$$\operatorname{div}(\sigma \nabla u) + \omega^2 \varsigma u = f \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.1)$$

avec  $(\sigma, \varsigma)$  égal à  $(\varepsilon^{-1}, \mu)$  ou  $(\mu^{-1}, \varepsilon)$ . Ci-dessus,  $f$  désigne le terme source. Nous compléterons cette équation aux dérivées partielles par une condition aux limites sur la frontière. Dans ce chapitre, nous étudierons également le cas de figure  $(\sigma, \varsigma) = (\varepsilon, 0)$  modélisant typiquement un problème d'électrostatique en deux ou trois dimensions.

De façon plus mathématique, nous supposons que  $\Omega$  est partitionné en deux ouverts  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  avec  $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$  et  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ . Nous faisons l'hypothèse que  $\Omega$  est un domaine de  $\mathbb{R}^d$  tandis que  $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^d$  sont à frontière lipschitzienne ( $d = 2, 3$ ). Nous rappelons qu'un domaine est, par définition, un sous-ensemble ouvert borné et connexe de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$  ici) à frontière lipschitzienne. Introduisons  $\sigma_k \in L^\infty(\Omega_k)$ ,  $k = 1, 2$ , deux fonctions à valeurs réelles telles que

$$\sigma_1 \geq c_1 > 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega_1 \quad \text{et} \quad \sigma_2 \leq c_2 < 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega_2,$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes. Définissons  $\sigma \in L^\infty(\Omega)$  de la façon suivante :  $\sigma := \sigma_k$  dans  $\Omega_k$ ,  $k = 1, 2$ . Par ailleurs, prenons  $\varsigma \in L^\infty(\Omega)$ . Ainsi, nous étudions une situation pour laquelle il y a un diélectrique classique dans  $\Omega_1$  et un matériau négatif dans  $\Omega_2$ . Sur la frontière, nous imposerons dans un premier temps, une condition de Dirichlet homogène, *i.e.*  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ . Nous effectuerons la plupart de notre étude avec cette condition. Nous montrerons dans la Section 1.7 comment on peut traiter le cas de la condition de Neumann. Les résultats que nous allons obtenir pour le problème (1.1) avec condition de Neumann différeront dans certaines configurations de ceux pour le problème (1.1) avec condition de Dirichlet. Par contre, la méthode que nous allons mettre en œuvre, elle, sera la même.

Dans la suite, pour le problème avec condition de Dirichlet, nous prendrons un terme source  $f$  dans  $H^{-1}(\Omega)$ , et nous chercherons la solution  $u$  dans  $H_0^1(\Omega)$ . Dans ce chapitre, comme dans tout ce document d'ailleurs,  $H_0^1(\Omega)$  désignera l'ensemble des fonctions de  $H^1(\Omega)$  dont la trace est nulle

sur  $\partial\Omega$ . L'espace  $H^{-1}(\Omega)$  est quant à lui constitué des formes linéaires continues sur  $H_0^1(\Omega)$ . Puisque l'injection de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $H^{-1}(\Omega)$  est compacte, il est suffisant d'étudier la partie principale de l'opérateur associé à (1.1). En d'autres termes, nous nous intéresserons au problème

$$(\mathcal{P}) \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

De façon usuelle,  $u$  est solution du problème  $(\mathcal{P})$  si, et seulement si,  $u$  vérifie « trouver  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que  $a(u, v) = l(v)$  pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$  », avec

$$a(u, v) = (\sigma \nabla u, \nabla v)_\Omega, \quad \text{et} \quad l(v) = \langle f, v \rangle_\Omega.$$

Ci-dessus,  $(\cdot, \cdot)_\Omega$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$  désignent respectivement le produit scalaire de  $(L^2(\Omega))^d$  et le crochet de dualité  $H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ . Introduisons alors l'opérateur linéaire continu  $A : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  défini par

$$\langle Au, v \rangle_\Omega = a(u, v), \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Nous noterons  $\mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$  l'ensemble des opérateurs continus de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $H^{-1}(\Omega)$ .

Notre objectif est de déterminer un critère sur  $\sigma$  pour garantir que le problème  $(\mathcal{P})$  possède une et une seule solution, et plus généralement, pour assurer que  $A : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  définit un isomorphisme. Bien entendu, en raison du changement de signe de  $\sigma$  sur  $\Omega$ , la forme  $a$  n'est pas coercive<sup>1</sup> sur  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ . En particulier, on ne peut pas appliquer le théorème de Lax-Milgram. Pour autant, cela ne signifie pas que l'opérateur  $A$  n'est jamais un isomorphisme. Pour étudier le problème  $(\mathcal{P})$ , nous utiliserons la méthode de la T-coercivité introduite dans [25, 155]. Présentons-en l'idée. Supposons qu'il existe un isomorphisme  $T$  de  $H_0^1(\Omega)$  tel que la forme bilinéaire  $(u, v) \mapsto a(u, Tv)$  soit coercive. Alors le problème  $(\mathcal{P})$  est bien posé, au sens où il possède une unique solution, en vertu du théorème de Lax-Milgram. En effet, dans ce cas, le problème « trouver  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que  $a(u, Tv) = l(Tv)$  pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$  » est bien posé. Puisque  $T$  est un isomorphisme de  $H_0^1(\Omega)$ , ceci prouve que le problème initial « trouver  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que  $a(u, v) = l(v)$  pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$  » est bien posé. Dès lors, toute l'astuce dans cette technique consiste à construire ces fameux opérateurs  $T$ . Dans [25, 155], il est prouvé que  $A : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  constitue un isomorphisme lorsque  $\max(\inf_{\Omega_1} \sigma_1 / \sup_{\Omega_2} |\sigma_2|, \inf_{\Omega_2} |\sigma_2| / \sup_{\Omega_1} \sigma_1) > I_\Sigma \geq 1$ , où  $I_\Sigma$  est une constante qui ne dépend que de la géométrie de l'interface  $\Sigma$  entre  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . Mais la valeur de  $I_\Sigma$  n'est pas connue. Ceci vient du fait que les  $T$  sont construits à partir d'un opérateur de relèvement abstrait pour lequel on ne peut pas calculer explicitement la norme. Ici, nous nous proposons de compléter les résultats de [25, 155] de deux façons. Tout d'abord, nous obtenons des valeurs explicites des constantes. D'autre part, nous localisons ces résultats, au sens où nous proposons un critère pour assurer le caractère bien posé de  $(\mathcal{P})$ , quitte à avoir un noyau et un conoyau de même dimension finie, qui ne dépend que des valeurs des paramètres physiques au voisinage de l'interface entre les deux matériaux. Pour obtenir ces résultats, nous prouvons que  $A$  est de type Fredholm d'indice zéro, au moyen d'opérateurs  $T$  simples, définis de façon géométrique. Dans ce cas, si l'on possède un résultat d'unicité pour le problème  $(\mathcal{P})$  alors il est bien posé. Mais il peut également apparaître un noyau de dimension finie comme nous le verrons plus loin, dans le Chapitre 2, §2.2.2. Bien sûr, si l'opérateur  $A : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  est de type Fredholm d'indice zéro, alors l'opérateur associé au problème  $\operatorname{div}(\sigma \nabla u) + \omega^2 \zeta u = f$  dans  $\Omega$  avec  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$  est également de type Fredholm d'indice zéro. Nous précisons dans le Chapitre 2, comment se situe cette technique de la T-coercivité par rapport aux approches classiquement utilisées pour montrer qu'un problème est bien posé. Plus précisément, nous verrons que cette méthode n'est autre qu'une formulation très simple de la théorie *inf-sup* [32].

1. Plus généralement, on ne peut pas trouver  $\theta \in [0; 2\pi[$  tel que  $(u, v) \mapsto e^{2i\pi\theta} a(u, v)$  soit coercive sur  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ . Pour montrer ce résultat, introduisons deux fonctions non nulles  $\varphi_1 \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_1)$  et  $\varphi_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_2)$ . Définissons  $\varphi$  telle que  $\varphi|_{\Omega_1} = \varphi_1$  et  $\varphi|_{\Omega_2} = \alpha\varphi_2$ , avec  $\alpha := (\int_{\Omega_1} \sigma_1 |\nabla \varphi_1|^2 / \int_{\Omega_2} |\sigma_2| |\nabla \varphi_2|^2)^{1/2}$ . On a alors  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\varphi \neq 0$  et  $a(\varphi, \varphi) = 0$ .

Dans le cas où  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont des nombres constants, il existe dans la littérature au moins deux autres approches pour étudier le problème  $(\mathcal{P})$ . À l'aide de techniques d'équations d'intégrales, il a d'abord été prouvé dans [66] par Costabel et Stephan que lorsque l'interface  $\Sigma$  est régulière (de classe  $\mathcal{C}^2$ ), le problème  $(\mathcal{P})$  est bien posé au sens de Fredholm si, et seulement si, le contraste  $\kappa_\sigma := \sigma_2/\sigma_1$  est différent de  $-1$ . Postérieurement à cela, l'influence des coins dans l'interface a été spécifiquement étudiée dans [72] (voir également [26, 138]). Les auteurs prouvent que lorsque l'interface présente un angle droit, le problème  $(\mathcal{P})$ , avec un second membre  $f$  dans  $L^2(\Omega)$ , n'est pas de type Fredholm si, et seulement si,  $\kappa_\sigma \in [-3; -1/3]$  (des résultats similaires peuvent être obtenus pour des valeurs quelconques d'angle). Nous retrouverons ces résultats au cours de notre étude par la technique de la T-coercivité.

Ce chapitre s'organise de la façon suivante. Après avoir introduit quelques notations et prouvé un résultat préliminaire, nous étudions des cas élémentaires, pour des géométries simples de  $\mathbb{R}^2$  ( $d = 2$ ). Dans la Section 1.3, nous combinons les résultats obtenus à une technique de localisation pour pouvoir traiter des problèmes de transmission de  $\mathbb{R}^2$  mettant en jeu des interfaces plus générales. Nous donnons alors des exemples lorsque  $\sigma$  est régulier ou constant par morceaux. En particulier, nous obtenons un critère reposant uniquement sur les valeurs du contraste à l'interface. Dans la Section 1.5, nous discutons l'optimalité de ces résultats pour les domaines de  $\mathbb{R}^2$ . Nous fournissons ensuite des éléments de preuve pour des géométries simples de  $\mathbb{R}^3$  qui ne se ramènent pas nécessairement à des géométries 2D. Le cas du coin de Fichera en constitue l'exemple le plus illustratif. Enfin, nous présentons une démarche possible pour étudier le problème  $(\mathcal{P})$  avec une condition aux limites de Neumann plutôt qu'une condition de Dirichlet.

## 1.1 Notations et résultat préliminaire

Avant d'entrer dans le vif du sujet, introduisons quelques notations qui serviront tout au long de ce chapitre.

Étant donné un domaine  $\mathcal{O}$  de  $\mathbb{R}^d$ , nous noterons sans distinction  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{O}}$  (resp.  $\|\cdot\|_{\mathcal{O}}$ ) les produits scalaires (resp. les normes) de  $L^2(\mathcal{O})$  et  $(L^2(\mathcal{O}))^d$ . De même, pour  $p \in [1; \infty] \setminus \{2\}$ ,  $\|\cdot\|_{L^p(\mathcal{O})}$  désignera à la fois la norme de  $L^p(\mathcal{O})$  et celle de  $(L^p(\mathcal{O}))^d$ . Nous munirons  $H_0^1(\mathcal{O})$  de la norme  $\|\cdot\|_{H_0^1(\mathcal{O})} := \|\nabla \cdot\|_{\mathcal{O}}$ . Nous notons  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{O}}$  le crochet de dualité  $H^{-1}(\mathcal{O}) \times H_0^1(\mathcal{O})$ , et nous définissons la norme

$$\|f\|_{H^{-1}(\mathcal{O})} := \sup_{v \in H_0^1(\mathcal{O}) \setminus \{0\}} \frac{|\langle f, v \rangle_{\mathcal{O}}|}{\|v\|_{H_0^1(\mathcal{O})}}, \quad \forall f \in H^{-1}(\mathcal{O}).$$

Pour  $k = 1, 2$ , introduisons  $\Gamma_k := \partial\Omega \cap \partial\Omega_k$ . Nous appelons interface l'ensemble  $\Sigma := \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_1 = \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_2$ . Les normes  $L^p$  ( $p \in [1; \infty]$ ) sur  $\Sigma$  sont notées comme ci-dessus en remplaçant  $\mathcal{O}$  par  $\Sigma$ . D'autre part,  $\cdot|_{\Sigma}$  désignera l'opérateur de trace sur  $\Sigma$ .

Si  $v$  est une fonction mesurable sur  $\Omega$ , nous utilisons la notation  $v_k := v|_{\Omega_k}$ ,  $k = 1, 2$ . Introduisons ensuite<sup>2</sup>

$$\sigma_1^+ := \sup_{\Omega_1} \sigma_1, \quad \sigma_2^+ := \sup_{\Omega_2} |\sigma_2|, \quad \sigma_1^- := \inf_{\Omega_1} \sigma_1 \quad \text{et} \quad \sigma_2^- := \inf_{\Omega_2} |\sigma_2|.$$

Lorsque c'est possible, nous définissons le contraste  $\kappa_\sigma := \sigma_2/\sigma_1$  sur  $\Sigma$ . C'est une constante lorsque  $\sigma_1, \sigma_2$  sont des fonctions constantes, ou un élément de  $\mathcal{C}^0(\Sigma)$  lorsque  $\sigma_1 \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega_1})$ ,  $\sigma_2 \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega_2})$ .

Pour  $k = 1, 2$ , introduisons l'espace des restrictions des éléments de  $H_0^1(\Omega)$  à  $\Omega_k$  :

$$H_{0, \Gamma_k}^1(\Omega_k) := \left\{ v|_{\Omega_k}, v \in H_0^1(\Omega) \right\}.$$

Si  $X$  et  $Y$  sont deux espaces vectoriels normés,  $\mathcal{L}(X, Y)$  (resp.  $\mathcal{L}(X)$ ) désignera l'espace des opérateurs linéaires et continus de  $X$  dans  $Y$  (resp. de  $X$  dans  $X$ ). Enfin, dans tout ce chapitre, si  $R_1 \in$

2. Partout dans la suite, nous écrirons sup pour sup ess, respectivement inf pour inf ess.

$\mathcal{L}(H_{0,\Gamma_1}^1(\Omega_1), H_{0,\Gamma_2}^1(\Omega_2))$  et  $R_2 \in \mathcal{L}(H_{0,\Gamma_2}^1(\Omega_2), H_{0,\Gamma_1}^1(\Omega_1))$ , nous notons

$$\|R_1\| := \sup_{v \in H_{0,\Gamma_1}^1(\Omega_1), \|\nabla v\|_{\Omega_1}=1} \|\nabla(R_1 v)\|_{\Omega_2} \quad \text{et} \quad \|R_2\| := \sup_{v \in H_{0,\Gamma_2}^1(\Omega_2), \|\nabla v\|_{\Omega_2}=1} \|\nabla(R_2 v)\|_{\Omega_1}.$$

Commençons par démontrer le théorème ci-dessous. Ce sera la brique de base dans l'approche que nous allons développer tout au long de ce chapitre.

**Théorème 1.1.1** *Soit  $R_1 \in \mathcal{L}(H_{0,\Gamma_1}^1(\Omega_1), H_{0,\Gamma_2}^1(\Omega_2))$  un opérateur vérifiant la condition de raccord  $(R_1 u_1)|_{\Sigma} = u_1|_{\Sigma}$  pour tout  $u_1 \in H_{0,\Gamma_1}^1(\Omega_1)$ . Définissons*

$$T_1 u = \begin{cases} u_1 & \text{dans } \Omega_1 \\ -u_2 + 2R_1 u_1 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}. \quad (1.2)$$

Si  $\sigma_1^-/\sigma_2^+ > \|R_1\|^2$ , alors la forme  $a$  est  $T_1$ -coercive : il existe une constante  $C > 0$  telle que  $a(u, T_1 u) \geq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$  pour tout  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Dans ce cas,  $A : u \mapsto -\operatorname{div}(\sigma \nabla u)$  est un isomorphisme de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $H^{-1}(\Omega)$ .

Soit  $R_2 \in \mathcal{L}(H_{0,\Gamma_2}^1(\Omega_2), H_{0,\Gamma_1}^1(\Omega_1))$  un opérateur vérifiant la condition de raccord  $(R_2 u_2)|_{\Sigma} = u_2|_{\Sigma}$  pour tout  $u_2 \in H_{0,\Gamma_2}^1(\Omega_2)$ . Définissons

$$T_2 u = \begin{cases} u_1 - 2R_2 u_2 & \text{dans } \Omega_1 \\ -u_2 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}. \quad (1.3)$$

Si  $\sigma_2^-/\sigma_1^+ > \|R_2\|^2$ , alors la forme  $a$  est  $T_2$ -coercive : il existe une constante  $C > 0$  telle que  $a(u, T_2 u) \geq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$  pour tout  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Dans ce cas,  $A : u \mapsto -\operatorname{div}(\sigma \nabla u)$  est un isomorphisme de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $H^{-1}(\Omega)$ .

**Preuve.** Par construction,  $T_1 u$  appartient à  $H_0^1(\Omega)$  pour tout  $u \in H_0^1(\Omega)$  et  $T_1 : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$  est continu. De plus, pour tout  $u \in H_0^1(\Omega)$ , on a d'une part  $T_1(T_1 u) = u$  sur  $\Omega_1$  et, d'autre part,  $T_2(T_2 u) = -(-u_2 + 2R_1 u_1) + 2R_1 u_1 = u_2 = u$  sur  $\Omega_2$ . On déduit  $T_1 \circ T_1 = \operatorname{Id}$ . Ceci prouve que  $T_1$  est un isomorphisme de  $H_0^1(\Omega)$ . Calculons maintenant  $a(u, T_1 u)$ , pour  $u \in H_0^1(\Omega)$ . L'inégalité de Young permet d'écrire, pour tout  $\eta > 0$ ,

$$\begin{aligned} a(u, T_1 u) &= (\sigma_1 \nabla u_1, \nabla u_1)_{\Omega_1} + (|\sigma_2| \nabla u_2, \nabla u_2)_{\Omega_2} - 2(|\sigma_2| \nabla u_2, \nabla(R_1 u_1))_{\Omega_2} \\ &\geq (\sigma_1 \nabla u_1, \nabla u_1)_{\Omega_1} + (|\sigma_2| \nabla u_2, \nabla u_2)_{\Omega_2} \\ &\quad - \eta (|\sigma_2| \nabla u_2, \nabla u_2)_{\Omega_2} - 1/\eta (|\sigma_2| \nabla(R_1 u_1), \nabla(R_1 u_1))_{\Omega_2} \\ &\geq ((\sigma_1 - \|R_1\|^2 \sigma_2^+/\eta) \nabla u_1, \nabla u_1)_{\Omega_1} + (|\sigma_2| (1 - \eta) \nabla u_2, \nabla u_2)_{\Omega_2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, si  $\sigma_1^-/\sigma_2^+ > \|R_1\|^2$ , alors il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq a(u, T_1 u), \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Autrement dit,  $a$  est  $T_1$ -coercive.

De la même façon, on a  $T_2 \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega))$ ,  $T_2 \circ T_2 = \operatorname{Id}$  et donc  $T_2$  est un isomorphisme de  $H_0^1(\Omega)$ . Pour  $u \in H_0^1(\Omega)$ , nous obtenons pour tout  $\eta > 0$ ,

$$a(u, T_2 u) \geq (\sigma_1 (1 - \eta) \nabla u_1, \nabla u_1)_{\Omega_1} + ((|\sigma_2| - \|R_2\|^2 \sigma_1^+/\eta) \nabla u_2, \nabla u_2)_{\Omega_2}.$$

Ainsi, si  $\sigma_2^-/\sigma_1^+ > \|R_2\|^2$ , alors il existe  $C > 0$  telle que

$$C \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq a(u, T_2 u), \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

*i.e.*  $a$  est  $T_2$ -coercive.

Pour terminer la preuve, supposons qu'il existe un isomorphisme  $T$  de  $H_0^1(\Omega)$ , tel que la forme bilinéaire continue  $(u, v) \mapsto \tilde{a}(u, v) = a(u, Tv)$  soit coercive sur  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ . Bien sûr,  $v \mapsto \tilde{l}(v) = l(Tv)$  est une forme linéaire continue sur  $H_0^1(\Omega)$ . En vertu du théorème de Lax-Milgram, nous pouvons affirmer qu'il existe une et une seule fonction  $u \in H_0^1(\Omega)$  telle que  $\tilde{a}(u, v) = \tilde{l}(v)$  pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ . De plus, cette fonction dépend continûment de la donnée  $\tilde{l}$ . Comme  $T$  est un isomorphisme de  $H_0^1(\Omega)$ , cela montre qu'il existe un unique  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que  $a(u, v) = l(v)$  pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ ,  $u$  dépendant continûment de  $l$ . Cela prouve bien que  $A$  définit un isomorphisme. ■

Nous pouvons voir  $R_1$  (resp.  $R_2$ ) comme un « opérateur de transfert », transformant les fonctions définies sur  $\Omega_1$  (resp.  $\Omega_2$ ) en des fonctions définies sur  $\Omega_2$  (resp.  $\Omega_1$ ) et préservant la valeur à l'interface ainsi que la condition de Dirichlet sur la frontière. Dans l'énoncé du Théorème 1.1.1, nous avons supposé  $R_1, R_2$  donnés mais ces opérateurs sont en réalité des paramètres. Définissons les espaces d'« opérateurs de transfert »

$$\mathcal{R}_1 := \{R_1 \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_{0,\Gamma_1}^1(\Omega_1), \mathbf{H}_{0,\Gamma_2}^1(\Omega_2)) \mid R_1 v_1|_{\Sigma} = v_1|_{\Sigma}, \forall v_1 \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_1}^1(\Omega_1)\}$$

et  $\mathcal{R}_2 := \{R_2 \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_{0,\Gamma_2}^1(\Omega_2), \mathbf{H}_{0,\Gamma_1}^1(\Omega_1)) \mid R_2 v_2|_{\Sigma} = v_2|_{\Sigma}, \forall v_2 \in \mathbf{H}_{0,\Gamma_2}^1(\Omega_2)\}.$

En reprenant la preuve du Théorème 1.1.1, on obtient le

**Théorème 1.1.2** *Supposons  $\sigma_1^-/\sigma_2^+ > (\inf_{R_1 \in \mathcal{R}_1} \|R_1\|^2)$  ou  $\sigma_2^-/\sigma_1^+ > (\inf_{R_2 \in \mathcal{R}_2} \|R_2\|^2)$ . Alors, l'opérateur  $A : u \mapsto -\operatorname{div}(\sigma \nabla u)$  est un isomorphisme de  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$  dans  $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ .*

Dans la suite du chapitre,  $R_1$  sera toujours un opérateur de  $\mathcal{R}_1$ ,  $R_2$  un opérateur  $\mathcal{R}_2$ . Par ailleurs,  $T_1$  et  $T_2$  seront les éléments de  $\mathcal{L}(\mathbf{H}_0^1(\Omega))$  définis respectivement par (1.2) et (1.3).

**Remarque 1.1.3** *Notre objectif maintenant consiste à construire des opérateurs de transfert de norme minimale. Nous verrons, au moins en  $2D$ , que ce sont des opérateurs très simples, géométriques, qui réalisent ce minimum.*

**Remarque 1.1.4** *Nous aurions pu considérer des isomorphismes  $T_1$  et  $T_2$  autres que ceux définis en (1.2) et (1.3). Rien n'impose d'utiliser les opérateurs de transfert  $R_1, R_2$ . Cependant, pour étudier le problème ( $\mathcal{P}$ ), nous nous rendrons compte a posteriori que ce choix est judicieux.*

## 1.2 Étude de cas élémentaires : des conditions globales

Nous construisons à présent de façon explicite ces opérateurs qui assurent la T-coercivité. Nous travaillons d'abord sur une série de géométries particulières. Dans un second temps, (voir §1.3), nous nous servirons de ces cas particuliers pour traiter des géométries plus générales. Rappelons que nous souhaitons obtenir un critère sur les valeurs de  $\sigma$  pour assurer que  $A$  est un isomorphisme de  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$  dans  $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ .

### 1.2.1 Domaine symétrique

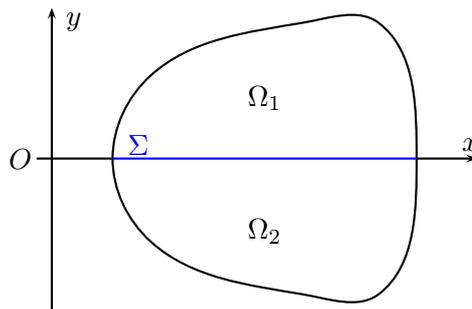


FIGURE 1.1 – Une géométrie symétrique.

Soit  $\Omega$  un domaine *symétrique*, au sens où  $\Omega_1$  est l'image de  $\Omega_2$  par une symétrie. Sans perte de généralité et pour fixer les idées, nous supposons que l'interface  $\Sigma$  est un sous-ensemble de la droite d'équation  $y = 0$  (cf. Figure 1.1). Dans ce cas, nous pouvons prouver le

**Théorème 1.2.1** (DOMAINE SYMÉTRIQUE) *Supposons*

$$\max(\sigma_1^-/\sigma_2^+, \sigma_2^-/\sigma_1^+) > 1.$$

*Alors, il existe un isomorphisme  $T \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_0^1(\Omega))$  tel que la forme  $a$  soit T-coercive. Par conséquent,  $A : u \mapsto -\operatorname{div}(\sigma \nabla u)$  est un isomorphisme de  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$  dans  $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ .*

**Preuve.** Considérons les opérateurs  $R_1$  et  $R_2$  définis respectivement par  $(R_1 u_1)(x, y) = u_1(x, -y)$  et  $(R_2 u_2)(x, y) = u_2(x, -y)$ . Clairement, on a la condition de raccord  $(R_k u_k)|_\Sigma = u_k|_\Sigma$  pour tout  $u_k \in H_{0, \Gamma_k}^1(\Omega_k)$  et donc  $R_k \in \mathcal{R}_k$ ,  $k = 1, 2$ . De plus,  $\|R_k\| = 1$ , pour  $k = 1, 2$ . La conclusion est alors apportée par le Théorème 1.1.1. ■

**Remarque 1.2.2** Dans le cas où  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont des constantes, le Théorème 1.2.1 indique que  $A$  est un isomorphisme dès lors que le contraste  $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1$  n'est pas égal à  $-1$ .

### 1.2.2 Sommet intérieur

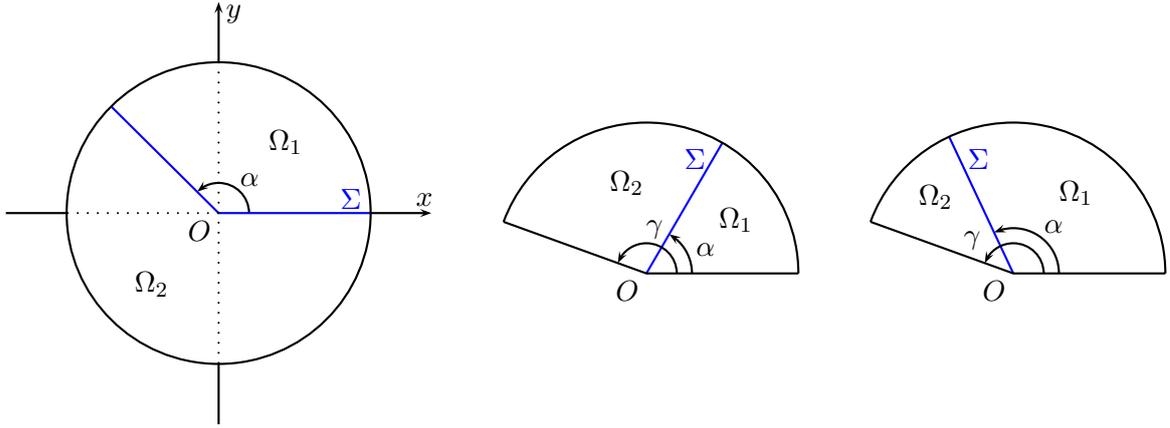


FIGURE 1.2 – Géométrie du sommet intérieur (à gauche). Géométrie du sommet extérieur (au milieu, à droite).

Considérons la géométrie de la Figure 1.2, à gauche. Plus précisément, notons  $(r, \theta)$  les coordonnées polaires centrées en  $O$  avec  $\theta = 0$  sur la demi-droite  $(Ox)$  (pour les  $x$  positifs). Étant donné  $R > 0$  et  $\alpha \in ]0; 2\pi[$ , définissons

$$\begin{aligned}\Omega_1 &:= \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \mid 0 < r < R, 0 < \theta < \alpha\}; \\ \Omega_2 &:= \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \mid 0 < r < R, \alpha < \theta < 2\pi\}.\end{aligned}$$

**Théorème 1.2.3** (SOMMET INTÉRIEUR) *Supposons*

$$\max(\sigma_1^-/\sigma_2^+, \sigma_2^-/\sigma_1^+) > I_\alpha, \quad \text{avec} \quad I_\alpha := \max\left(\frac{2\pi - \alpha}{\alpha}, \frac{\alpha}{2\pi - \alpha}\right).$$

Alors, il existe un isomorphisme  $T \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega))$  tel que la forme  $a$  soit  $T$ -coercive. Par conséquent,  $A : u \mapsto -\operatorname{div}(\sigma \nabla u)$  est un isomorphisme de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $H^{-1}(\Omega)$ .

**Preuve.** Nous utilisons la même notation pour les fonctions exprimées en coordonnées cartésiennes ou polaires. Considérons les opérateurs  $R_1$  et  $R_2$  définis respectivement par  $(R_1 u_1)(\rho, \Theta) = u_1(\rho, \frac{\alpha}{\alpha-2\pi}(\Theta - 2\pi))$  et  $(R_2 u_2)(\rho, \Theta) = u_2(\rho, \frac{\alpha-2\pi}{\alpha}\Theta + 2\pi)$ . Par construction, on a les conditions de raccord  $(R_1 u_1)(\rho, \alpha) = u_1(\rho, \alpha)$  et  $(R_1 u_1)(\rho, 2\pi) = u_1(\rho, 0)$ , pour tout  $u_1 \in H_{0, \Gamma_1}^1(\Omega_1)$ . À présent, calculons la norme de  $R_1$ . Pour cela, donnons-nous  $u_1 \in H_{0, \Gamma_1}^1(\Omega_1)$ . En effectuant le changement de variables  $(r, \theta) = (\rho, \frac{\alpha}{\alpha-2\pi}(\Theta - 2\pi))$ , on obtient

$$\begin{aligned}\|\nabla(R_1 u_1)\|_{\Omega_2}^2 &= \int_{\Omega_2} \left(\frac{\partial(R_1 u_1)}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial(R_1 u_1)}{\partial \Theta}\right)^2 \rho d\rho d\Theta \\ &\leq \frac{2\pi - \alpha}{\alpha} \int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)^2 r dr d\theta + \frac{\alpha}{2\pi - \alpha} \int_{\Omega_1} \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta}\right)^2 r dr d\theta \\ &\leq I_\alpha \|\nabla u_1\|_{\Omega_1}^2; \\ \text{donc } \|R_1\|^2 &\leq I_\alpha.\end{aligned}$$

De façon similaire, les conditions de raccord sur l'interface sont vérifiées pour  $R_2$ . De plus,  $\|R_2\|^2 \leq I_\alpha$ .

Le Théorème 1.1.1 permet alors de conclure.  $\blacksquare$

**Remarque 1.2.4** *On a toujours  $-1 \in [-I_\alpha; -1/I_\alpha]$ . D'autre part, si  $\alpha = \pi$ , cet intervalle se réduit à  $\{-1\}$ , ce qui est consistant avec le résultat que nous avons obtenu pour la géométrie symétrique (voir le §1.2.1).*

**Remarque 1.2.5** *Lorsque  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont des constantes, le Théorème 1.2.3 indique que  $A$  est un isomorphisme lorsque  $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 \notin [-I_\alpha; -1/I_\alpha]$ . Par exemple, si  $\alpha = \pi/2$ , on a  $[-I_\alpha; -1/I_\alpha] = [-3; -1/3]$ . Dans ce cas, étant donné  $\kappa_\sigma \in ]-\infty; -3[ \cup ]-1/3; 0[$ , nous savons que  $A$  est un isomorphisme.*

**Remarque 1.2.6** *Plus généralement, nous pourrions considérer un opérateur  $R_1^\dagger$  défini par  $(R_1^\dagger u_1)(\rho, \Theta) = u_1(\rho, g_1(\Theta))$  où  $g_1$  est un  $\mathcal{C}^1$  difféomorphisme de  $[\alpha; 2\pi]$  dans  $[0; \alpha]$  tel que  $g_1(2\pi) = 0$  et  $g_1(\alpha) = \alpha$ . On obtient alors  $\|R_1^\dagger\|^2 = \max(\|g_1'\|_{L^\infty([\alpha; \pi])}, \|1/(g_1')\|_{L^\infty([\alpha; \pi])})$ . Avec le théorème des accroissements finis, on déduit qu'on a toujours  $\|R_1^\dagger\|^2 \geq I_\alpha$ . Ainsi, notre choix  $g_1(\Theta) = \frac{\alpha}{\alpha - 2\pi}(\Theta - 2\pi)$  est optimal pour cette configuration. Ce ne sera pas toujours le cas en 3D (voir le §1.6.4).*

### 1.2.3 Sommet extérieur

Réintroduisons les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  comme dans le paragraphe précédent. Étant données trois constantes  $R, \alpha, \gamma$  avec  $R > 0$  et  $0 < \alpha < \gamma < 2\pi$ , définissons :

$$\begin{aligned}\Omega_1 &:= \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \mid 0 < r < R, 0 < \theta < \alpha\}; \\ \Omega_2 &:= \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \mid 0 < r < R, \alpha < \theta < \gamma\}.\end{aligned}$$

**Théorème 1.2.7** (SOMMET EXTÉRIEUR) *Supposons*

$$\begin{cases} \sigma_1^-/\sigma_2^+ > 1 & \text{ou} & \sigma_2^-/\sigma_1^+ > \frac{\gamma - \alpha}{\alpha} & \text{si} & \alpha \leq \gamma/2; \\ \sigma_2^-/\sigma_1^+ > 1 & \text{ou} & \sigma_1^-/\sigma_2^+ > \frac{\gamma - \alpha}{\alpha} & \text{si} & \alpha \geq \gamma/2. \end{cases}$$

Alors, il existe un isomorphisme  $T \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega))$  tel que la forme  $a$  soit  $T$ -coercive. Par conséquent,  $A : u \mapsto -\operatorname{div}(\sigma \nabla u)$  est un isomorphisme de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $H^{-1}(\Omega)$ .

**Preuve.** Intéressons-nous d'abord au cas  $\alpha \leq \gamma/2$  (Figure 1.2, au milieu). Introduisons les opérateurs  $R_1$  et  $R_2$  définis respectivement par

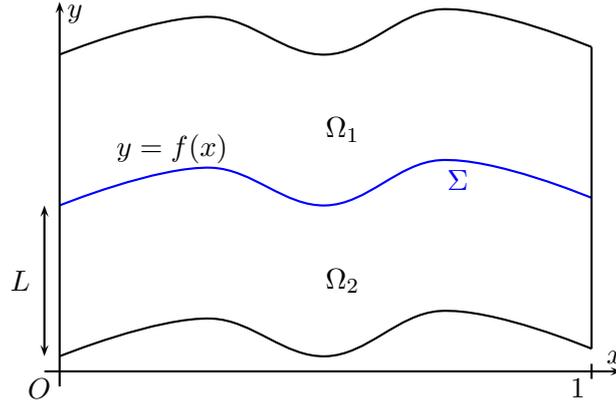
$$(R_1 u_1)(\rho, \Theta) = \begin{cases} u_1(\rho, 2\alpha - \Theta) & \text{si } \Theta \leq 2\alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad ; \quad (R_2 u_2)(\rho, \Theta) = u_2(\rho, \frac{\alpha - \gamma}{\alpha} \Theta + \gamma).$$

Pour obtenir le résultat de ce théorème, on travaille avec  $R_1$  comme dans le Théorème 1.2.1, et avec  $R_2$  comme dans le Théorème 1.2.3.

Pour traiter le cas  $\alpha \geq \gamma/2$  (Figure 1.2, à droite), il suffit d'inverser le rôle de  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .  $\blacksquare$

**Remarque 1.2.8** *Lorsque  $\alpha = \gamma/2$ , nous retrouvons le résultat des domaines symétriques (cf. Théorème 1.2.1).*

**Remarque 1.2.9** *Lorsque  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont des constantes, par exemple pour  $\gamma = \pi$  et  $\alpha = \pi/4$ , le résultat précédent indique que  $A$  est un isomorphisme, dès que  $\kappa_\sigma \in ]-\infty; -3[ \cup ]-1; 0[$ .*

FIGURE 1.3 – Géométrie d'une interface de classe  $\mathcal{C}^1$ .

### 1.2.4 Interface de classe $\mathcal{C}^1$

Terminons ce tour d'horizon des géométries particulières 2D par l'étude du cas où l'interface  $\Sigma$  est régulière mais non nécessairement égale à un segment de droite. Considérons  $g$  une fonction à valeurs réelles appartenant à  $\mathcal{C}^1([0; 1])$ , et  $L > 0$  une constante. Définissons (voir la Figure 1.3)

$$\begin{aligned}\Omega &:= \{(x, y) \mid 0 < x < 1, g(x) - L < y < g(x) + L\}; \\ \Omega_1 &:= \{(x, y) \mid 0 < x < 1, g(x) < y < g(x) + L\}; \\ \Omega_2 &:= \{(x, y) \mid 0 < x < 1, g(x) - L < y < g(x)\}.\end{aligned}$$

**Théorème 1.2.10** *Supposons*

$$\max(\sigma_1^- / \sigma_2^+, \sigma_2^- / \sigma_1^+) > (1 + 2 \|g'\|_{L^\infty(\Sigma)} + 4 \|g'\|_{L^\infty(\Sigma)}^2).$$

Alors, il existe un isomorphisme  $T \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega))$  tel que la forme  $a$  soit  $T$ -coercive. Par conséquent,  $A : u \mapsto -\operatorname{div}(\sigma \nabla u)$  est un isomorphisme de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $H^{-1}(\Omega)$ .

**Preuve.** Définissons les opérateurs  $R_1$  et  $R_2$  respectivement par  $(R_1 u_1)(s, t) = u_1(s, 2g(s) - t)$  et  $(R_2 u_2)(s, t) = u_2(s, 2g(s) - t)$ . Notons que si  $(s, t) \in \Sigma$ , alors  $t = g(s)$  et  $(R_1 u_1)(s, t) = u_1(s, 2g(s) - t) = u_1(s, t)$ , pour tout  $u_1 \in H_{0, \Gamma_1}^1(\Omega_1)$ . Ainsi, nous avons bien  $R_1 \in \mathcal{R}_1$ . Déterminons ensuite une borne supérieure pour la norme de  $R_1$ . Pour  $u_1 \in H_{0, \Gamma_1}^1(\Omega_1)$ , en utilisant le changement de variables  $(x, y) = (s, 2g(s) - t)$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}\|\nabla(R_1 u_1)\|_{\Omega_2}^2 &= \int_{\Omega_2} \left( \frac{\partial(R_1 u_1)}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial(R_1 u_1)}{\partial t} \right)^2 ds dt \\ &\leq \int_{\Omega_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + 2g'(x) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 dx dy \\ &\leq \int_{\Omega_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + 4|g'(x)| \left| \frac{\partial u_1}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial u_1}{\partial y} \right| + 4|g'(x)|^2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 dx dy \\ &\leq (1 + 2 \|g'\|_{L^\infty(\Sigma)} + 4 \|g'\|_{L^\infty(\Sigma)}^2) \|\nabla u_1\|_{\Omega_1}^2.\end{aligned}$$

Il suit  $\|R_1\|^2 \leq (1 + 2 \|g'\|_{L^\infty(\Sigma)} + 4 \|g'\|_{L^\infty(\Sigma)}^2)$ .

En inversant les rôles de  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , on observe que la condition de raccord à l'interface est également vérifiée par  $R_2$ . De plus, on a  $\|R_2\|^2 \leq (1 + 2 \|g'\|_{L^\infty(\Sigma)} + 4 \|g'\|_{L^\infty(\Sigma)}^2)$ .

Encore une fois, on peut alors conclure en utilisant le Théorème 1.1.1. ■

**Remarque 1.2.11** Dans le cas particulier où  $g'$  est uniformément égal à 0, le domaine  $\Omega$  est symétrique par rapport à l'interface et l'on retrouve le résultat du Théorème 1.2.1.

**Remarque 1.2.12** Dans la suite, le Théorème 1.2.10 apparaîtra uniquement comme un outil pour démontrer le résultat plus général concernant les interfaces quelconques. La version que nous avons proposée sera suffisante pour nos besoins et c'est pourquoi nous n'avons pas cherché à affiner la condition sur le contraste.

### 1.3 Étude pour une interface quelconque par un procédé de localisation

Nous dirons que le problème ( $\mathcal{P}$ ) est bien posé au sens de Fredholm lorsque l'opérateur  $A \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$  est Fredholm d'indice 0. Pour faciliter la lecture, et puisque c'est la première fois que nous rencontrons cette notion dans ce document, rappelons la définition d'un opérateur de type Fredholm ou opérateur à indice (voir notamment [98, 151, 116]).

**Définition 1.3.1** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach, et  $B$  un opérateur de  $\mathcal{L}(X, Y)$ . L'opérateur  $B$  est de type Fredholm si

- i)  $\dim \ker B < \infty$ ,  $\text{im } B$  est fermée.
- ii)  $\dim \text{coker } B < \infty$ , où  $\text{coker } B := Y/\text{im } B$ .

Lorsque  $B$  est un opérateur de type Fredholm, son indice est défini par  $\text{ind } B := \dim \ker B - \dim \text{coker } B$ .

Pour énoncer et démontrer notre résultat, nous avons besoin de décrire précisément la géométrie du domaine. C'est ce que nous allons faire maintenant.

#### 1.3.1 Description de la géométrie

Nous rappelons que  $\Omega$  est un domaine de  $\mathbb{R}^2$ , c'est-à-dire, un sous-ensemble ouvert borné et connexe de  $\mathbb{R}^2$  à frontière lipschitzienne. Nous supposons  $\Omega$  divisé en deux ouverts  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  avec  $\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2} = \overline{\Omega}$ ,  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ . Nous faisons l'hypothèse que  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont à frontière lipschitzienne. Nous avons introduit  $\Gamma_1 = \partial\Omega \cap \partial\Omega_1$ ,  $\Gamma_2 = \partial\Omega \cap \partial\Omega_2$  et défini l'interface  $\Sigma = \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_1 = \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_2$ . On a alors  $\overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2} = \overline{\Sigma}$ . Notons  $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire normal à  $\Sigma$ , dirigé de  $\Omega_1$  vers  $\Omega_2$ . Ci-dessous, nous nous intéressons plus particulièrement à la géométrie de l'interface :

- L'interface  $\Sigma$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , mis à part en un nombre fini de *sommets intérieurs*  $\mathcal{S}_{int} = \{\mathbf{x}^i, 1 \leq i \leq N_{int}\}$ . Pour  $1 \leq i \leq N_{int}$ , les sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  coïncident avec des cônes dans un voisinage  $\mathcal{V}^i$  de  $\mathbf{x}^i$  :

$$\begin{aligned} \Omega_1 \cap \mathcal{V}^i &= \mathcal{K}_1(\mathbf{x}^i) \cap \mathcal{V}^i \text{ et } \Omega_2 \cap \mathcal{V}^i = \mathcal{K}_2(\mathbf{x}^i) \cap \mathcal{V}^i, \\ \text{où } \mathcal{K}_1(\mathbf{x}^i) \text{ et } \mathcal{K}_2(\mathbf{x}^i) &\text{ sont des cônes ouverts centrés en } \mathbf{x}^i. \end{aligned} \quad (1.4)$$

- Il y a exactement 0 ou 2 points limites, appelés *sommets extérieurs* :  $\mathcal{S}_{ext} := \overline{\Sigma} \cap \partial\Omega = \{\mathbf{x}^i, N_{int} + 1 \leq i \leq N_{int} + N_{ext}\}$ , avec  $N_{ext} \in \{0, 2\}$ . Et pour  $N_{int} + 1 \leq i \leq N_{int} + N_{ext}$ , les sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  coïncident avec des cônes ouverts dans un voisinage  $\mathcal{V}^i$  de  $\mathbf{x}^i$  : *i.e.*, (1.4) est vérifié.

Pour chaque indice  $i$ , nous introduisons l'ouverture  $\alpha_k^i \in ]0; 2\pi[$  des cônes  $\mathcal{K}_k(\mathbf{x}^i)$ ,  $k = 1, 2$ . Nous définissons  $\gamma^i := \alpha_1^i + \alpha_2^i$  et  $\alpha^i := \min(\alpha_1^i, \alpha_2^i)$ . Bien entendu, on a  $\gamma^i = 2\pi$  pour les sommets intérieurs, et  $\gamma^i < 2\pi$  pour les sommets extérieurs. D'autre part, au niveau d'un sommet intérieur  $\mathbf{x}^i$ ,  $\Sigma$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^1$ , donc  $0 < \alpha^i < \pi$ .

Nous notons  $(r^i, \theta^i)$  les coordonnées polaires centrées en  $\mathbf{x}^i$  où le paramètre angulaire  $\theta^i$  est tel que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1(\mathbf{x}^i) &\text{ est isométrique à } \{(r^i \cos \theta^i, r^i \sin \theta^i) \mid r^i > 0, 0 < \theta^i < \alpha_1^i\}; \\ \mathcal{K}_2(\mathbf{x}^i) &\text{ est isométrique à } \{(r^i \cos \theta^i, r^i \sin \theta^i) \mid r^i > 0, \alpha_1^i < \theta^i < \gamma^i\}. \end{aligned}$$

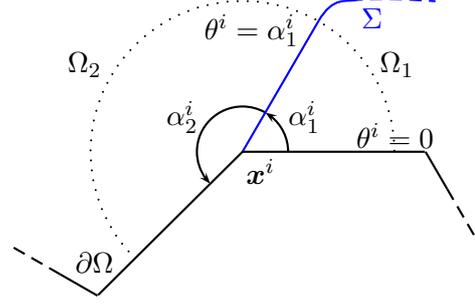
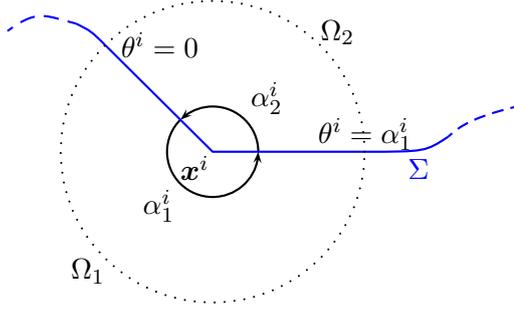


FIGURE 1.4 – Notations pour  $\mathbf{x}^i \in \mathcal{S}_{int}$  -  $\alpha^i = \alpha_2^i$ . FIGURE 1.5 – Notations pour  $\mathbf{x}^i \in \mathcal{S}_{ext}$  -  $\alpha^i = \alpha_1^i$ .

Définissons  $\mathcal{S}_{ext}^1 := \{\mathbf{x}^i \in \mathcal{S}_{ext} \mid \alpha_1^i \leq \alpha_2^i\}$ ,  $\mathcal{S}_{ext}^2 := \{\mathbf{x}^i \in \mathcal{S}_{ext} \mid \alpha_2^i < \alpha_1^i\}$  et  $\mathcal{S} := \mathcal{S}_{int} \cup \mathcal{S}_{ext}$ . Le cardinal de l'ensemble  $\mathcal{S}$  est noté  $N$ .

Enfin, introduisons

$$I_{\alpha^i} := \frac{\gamma^i - \alpha^i}{\alpha^i} \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq N.$$

**Remarque 1.3.2** *Pour tout sommet intérieur, on a  $I_{\alpha^i} > 1$ . Ceci est également vrai pour les sommets extérieurs appartenant à  $\mathcal{S}_{ext}^2$ . Par contre, pour un sommet extérieur de  $\mathcal{S}_{ext}^1$ , on a seulement  $I_{\alpha^i} \geq 1$  (il peut arriver que  $I_{\alpha^i} = 1$ ).*

### 1.3.2 Énoncé du résultat

Nous allons prouver que  $A$  est Fredholm d'indice 0, sous certaines hypothèses portant sur la géométrie du domaine et sur  $\sigma$ . Nous noterons  $B(\mathbf{x}, d)$  la boule ouverte centrée en  $\mathbf{x}$  et de rayon  $d$ .

**Théorème 1.3.3** *Supposons que l'une des deux hypothèses, 1. ou 2., ci-dessous, soit vérifiée.*

$$\begin{array}{l}
 1. \left\{ \begin{array}{l}
 \forall \mathbf{x} \in \Sigma \setminus \mathcal{S} \text{ (partie régulière de l'interface)} : \exists d > 0, \quad \inf_{B(\mathbf{x}, d) \cap \Omega_1} \sigma_1 > \sup_{B(\mathbf{x}, d) \cap \Omega_2} |\sigma_2| \\
 \forall \mathbf{x}^i \in \mathcal{S}_{int} \cup \mathcal{S}_{ext}^2 : \exists d > 0, \quad \inf_{B(\mathbf{x}^i, d) \cap \Omega_1} \sigma_1 > I_{\alpha^i} \sup_{B(\mathbf{x}^i, d) \cap \Omega_2} |\sigma_2| \\
 \forall \mathbf{x}^i \in \mathcal{S}_{ext}^1 : \exists d > 0, \quad \inf_{B(\mathbf{x}^i, d) \cap \Omega_1} \sigma_1 > \sup_{B(\mathbf{x}^i, d) \cap \Omega_2} |\sigma_2|
 \end{array} \right. ; \\
 \\
 2. \left\{ \begin{array}{l}
 \forall \mathbf{x} \in \Sigma \setminus \mathcal{S} \text{ (partie régulière de l'interface)} : \exists d > 0, \quad \inf_{B(\mathbf{x}, d) \cap \Omega_2} |\sigma_2| > \sup_{B(\mathbf{x}, d) \cap \Omega_1} \sigma_1 \\
 \forall \mathbf{x}^i \in \mathcal{S}_{int} \cup \mathcal{S}_{ext}^1 : \exists d > 0, \quad \inf_{B(\mathbf{x}^i, d) \cap \Omega_2} |\sigma_2| > I_{\alpha^i} \sup_{B(\mathbf{x}^i, d) \cap \Omega_1} \sigma_1 \\
 \forall \mathbf{x}^i \in \mathcal{S}_{ext}^2 : \exists d > 0, \quad \inf_{B(\mathbf{x}^i, d) \cap \Omega_2} |\sigma_2| > \sup_{B(\mathbf{x}^i, d) \cap \Omega_1} \sigma_1
 \end{array} \right. .
 \end{array}$$

Alors, l'opérateur  $A : u \mapsto -\operatorname{div}(\sigma \nabla u)$  de  $\mathcal{L}(\mathbf{H}_0^1(\Omega), \mathbf{H}^{-1}(\Omega))$  est Fredholm d'indice 0.

**Remarque 1.3.4** *Sous les hypothèses du Théorème 1.3.3,  $A$  est injectif si et seulement si  $A$  est un isomorphisme de  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$  dans  $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ . Toujours sous l'hypothèse du Théorème 1.3.3, lorsque  $A$  n'est pas injectif, et il existe de telles situations (cf. Chapitre 2, §2.2.2),  $\ker A$  est de dimension finie :  $\ker A = \operatorname{vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ , pour  $p \geq 1$ . Dans ce cas, le problème  $(\mathcal{P})$  possède une solution (unique à une combinaison linéaire de  $\varphi_1, \dots, \varphi_p$  près) si, et seulement si le terme source satisfait les conditions de compatibilité  $\langle f, \varphi_k \rangle_\Omega = 0$  pour  $k = 1 \dots p$  (voir, classiquement, [116, théorème 2.27]).*

La localisation constitue une démarche classique dans la théorie des équations elliptiques. Pour notre problème, bien que l'opérateur  $A$  ne soit pas elliptique, nous allons pouvoir mettre en œuvre ce procédé grâce à la T-coercivité qui permet de retrouver une certaine ellipticité. Nous suivrons la méthode présentée dans [109, chapitre 2, §5] (voir également [102, §6.3] ou [119, §4.1.2]). Nous diviserons notre travail en plusieurs étapes. Dans un premier temps, nous introduirons une partition de l'unité adaptée à la géométrie du domaine, et notamment à celle de l'interface. Puis, nous établirons une estimation *a priori* pour les solutions de  $(\mathcal{P})$ . Pour ce faire, nous utiliserons les résultats obtenus dans la section précédente pour les géométries particulières. Enfin, nous conclurons grâce à un lemme classique dû à Peetre.

### 1.3.3 Construction de la partition de l'unité

Soit  $\mathbf{x}^i \in \mathcal{S}$ . D'après l'une des deux hypothèses (cas 1. ou cas 2.) du Théorème 1.3.3, il existe  $d^i > 0$  tel que  $(B(\mathbf{x}^i, d^i) \cap \Omega) \subset \mathcal{V}^i$ , où  $\mathcal{V}^i$  est le voisinage de  $\mathbf{x}^i$  introduit dans (1.4), et

$$\left. \begin{array}{l} \inf_{B(\mathbf{x}^i, d^i) \cap \Omega_1} \sigma_1 > I_{\alpha^i} \sup_{B(\mathbf{x}^i, d^i) \cap \Omega_2} |\sigma_2| \quad \text{si } \mathbf{x}^i \in \mathcal{S}_{int} \cup \mathcal{S}_{ext}^2 \\ \inf_{B(\mathbf{x}^i, d^i) \cap \Omega_1} \sigma_1 > \sup_{B(\mathbf{x}^i, d^i) \cap \Omega_2} |\sigma_2| \quad \text{si } \mathbf{x}^i \in \mathcal{S}_{ext}^1 \end{array} \right\} \text{ dans le cas 1. ;}$$

$$\left. \begin{array}{l} \inf_{B(\mathbf{x}^i, d^i) \cap \Omega_2} |\sigma_2| > I_{\alpha^i} \sup_{B(\mathbf{x}^i, d^i) \cap \Omega_1} \sigma_1 \quad \text{si } \mathbf{x}^i \in \mathcal{S}_{int} \cup \mathcal{S}_{ext}^1 \\ \inf_{B(\mathbf{x}^i, d^i) \cap \Omega_2} |\sigma_2| > \sup_{B(\mathbf{x}^i, d^i) \cap \Omega_1} \sigma_1 \quad \text{si } \mathbf{x}^i \in \mathcal{S}_{ext}^2 \end{array} \right\} \text{ dans le cas 2. .}$$

Pour  $1 \leq i \leq N$ , considérons  $\zeta^i \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}, [0; 1])$  une fonction de troncature, égale à 1 sur  $\overline{B(\mathbf{x}^i, d^i/2)} \cap \Omega$ , de support inclus dans  $(B(\mathbf{x}^i, d^i) \cap \Omega) \subset \mathcal{V}^i$ , et telle que  $\zeta^i$  ne dépende que de la coordonnée radiale  $r^i$ .

Définissons ensuite  $\Sigma_r := \Sigma \setminus \bigcup_{i=1}^N \overline{B(\mathbf{x}^i, d^i/2)}$ , et considérons  $\mathbf{x} \in \overline{\Sigma}_r$ . D'après l'hypothèse sur la partie régulière de  $\Sigma$ , il existe  $d^{\mathbf{x}} > 0$  tel que  $B(\mathbf{x}, d^{\mathbf{x}}) \subset \Omega \setminus \mathcal{S}$ , et

$$\inf_{B(\mathbf{x}, d^{\mathbf{x}}) \cap \Omega_1} \sigma_1 > \sup_{B(\mathbf{x}, d^{\mathbf{x}}) \cap \Omega_2} |\sigma_2| \quad \text{ou} \quad \inf_{B(\mathbf{x}, d^{\mathbf{x}}) \cap \Omega_2} |\sigma_2| > \sup_{B(\mathbf{x}, d^{\mathbf{x}}) \cap \Omega_1} \sigma_1. \quad (1.5)$$

D'autre part, puisque  $\Sigma$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, elle coïncide localement avec le graphe d'une fonction  $f^{\mathbf{x}}$  de  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  (voir l'annexe C de [78]). Soit  $s_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $\mathbf{x} = (s_0, f^{\mathbf{x}}(s_0))$ . À une rotation du système de coordonnées près, on peut supposer que  $f^{\mathbf{x}'}(s_0) = 0$ .

Considérons ensuite trois nombres réels  $a^{\mathbf{x}}$ ,  $b^{\mathbf{x}}$  et  $\delta^{\mathbf{x}} > 0$  tels que l'ensemble

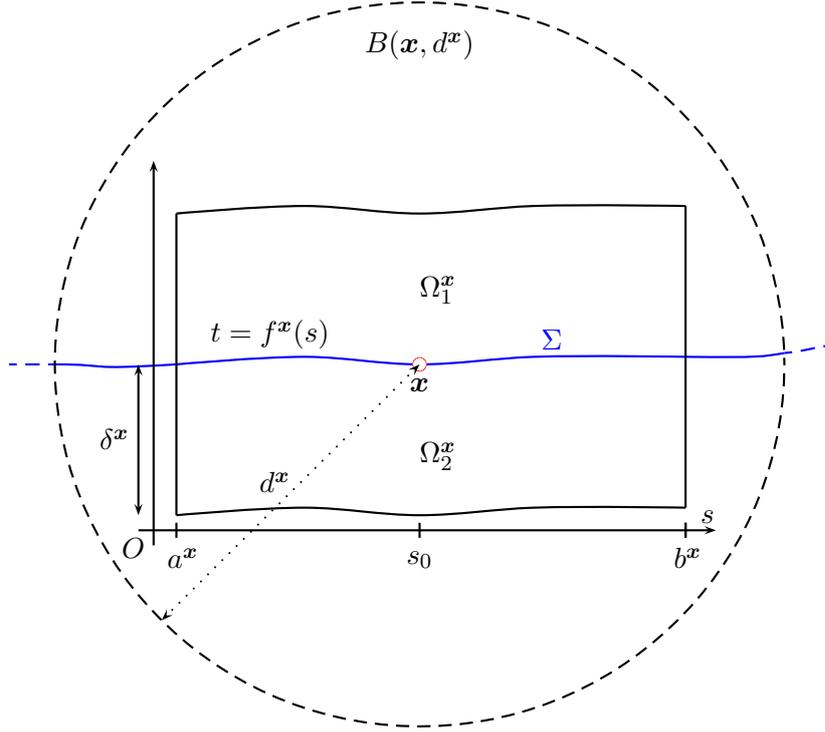
$$\Omega^{\mathbf{x}} := \left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid a^{\mathbf{x}} < s < b^{\mathbf{x}}, f^{\mathbf{x}}(s) - \delta^{\mathbf{x}} < t < f^{\mathbf{x}}(s) + \delta^{\mathbf{x}} \right\} \quad (1.6)$$

soit inclus dans  $B(\mathbf{x}, d^{\mathbf{x}})$ , et tels que  $a^{\mathbf{x}} < s_0 < b^{\mathbf{x}}$  (de sorte que  $\mathbf{x}$  appartient à  $\Omega^{\mathbf{x}}$ ). On peut choisir le système de coordonnées pour que  $\Omega^{\mathbf{x}} \cap \Omega_1$  et  $\Omega^{\mathbf{x}} \cap \Omega_2$  coïncident respectivement avec  $\Omega_1^{\mathbf{x}}$  et  $\Omega_2^{\mathbf{x}}$  définis par

$$\begin{aligned} \Omega_1^{\mathbf{x}} &:= \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid a^{\mathbf{x}} < s < b^{\mathbf{x}}, f^{\mathbf{x}}(s) < t < f^{\mathbf{x}}(s) + \delta^{\mathbf{x}}\}; \\ \Omega_2^{\mathbf{x}} &:= \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid a^{\mathbf{x}} < s < b^{\mathbf{x}}, f^{\mathbf{x}}(s) - \delta^{\mathbf{x}} < t < f^{\mathbf{x}}(s)\}. \end{aligned}$$

Mais puisque  $f^{\mathbf{x}'}$  est continue en  $s = s_0$  et s'y annule, d'après (1.5), on peut prendre  $a^{\mathbf{x}}$  et  $b^{\mathbf{x}}$  suffisamment proches de  $s_0$  pour avoir

$$\begin{aligned} &\inf_{\Omega_1^{\mathbf{x}}} \sigma_1 > \sup_{\Omega_2^{\mathbf{x}}} |\sigma_2| (1 + 2 \|f'\|_{L^\infty([a^{\mathbf{x}}; b^{\mathbf{x}}])} + 4 \|f'\|_{L^\infty([a^{\mathbf{x}}; b^{\mathbf{x}}])}^2) \\ \text{ou} &\inf_{\Omega_2^{\mathbf{x}}} |\sigma_2| > \sup_{\Omega_1^{\mathbf{x}}} \sigma_1 (1 + 2 \|f'\|_{L^\infty([a^{\mathbf{x}}; b^{\mathbf{x}}])} + 4 \|f'\|_{L^\infty([a^{\mathbf{x}}; b^{\mathbf{x}}])}^2). \end{aligned} \quad (1.7)$$

FIGURE 1.6 – Situation dans un voisinage de  $\mathbf{x}$ .

Définissons alors

$$\tilde{\Omega}^x := \left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid a^x + (s_0 - a^x)/2 < s < b^x - (b^x - s_0)/2, f^x(s) - \delta^x/2 < t < f^x(s) + \delta^x/2 \right\}.$$

Par construction,  $\tilde{\Omega}^x$  est un voisinage de  $\mathbf{x}$ , et  $\tilde{\Omega}^x \subset \Omega^x$ .

L'ensemble  $\overline{\Sigma}_r$  est compact, donc on peut extraire de l'ensemble  $(\tilde{\Omega}^x)_{x \in \overline{\Sigma}_r}$  un sous-ensemble fini, noté  $(\tilde{\mathcal{O}}^i)_{i=1}^{N_\Sigma}$ , dont l'union constitue un recouvrement de  $\overline{\Sigma}_r$ . Pour  $1 \leq i \leq N_\Sigma$ , nous notons  $\mathcal{O}^i$  l'ouvert  $\Omega^x$  associé à  $\tilde{\Omega}^x = \tilde{\mathcal{O}}^i$ . Il est alors possible d'introduire un ouvert borné  $\mathcal{O}^0$  (de  $\mathbb{R}^2$ ) qui ne rencontre pas  $\Sigma$ , et tel que

$$\Omega \subset \left( \mathcal{O}^0 \cup \left( \bigcup_{i=1}^{N_\Sigma} \tilde{\mathcal{O}}^i \right) \cup \left( \bigcup_{i=1}^N B(\mathbf{x}^i, d^i/2) \right) \right).$$

Considérons ensuite

- une fonction  $\chi^0 \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}, [0; 1])$ , égale à 1 dans  $\mathcal{O}^0$ , dont le support n'intersecte pas  $\overline{\Sigma}$ ;
- pour  $1 \leq i \leq N_\Sigma$ , une fonction  $\chi^i \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}, [0; 1])$ , égale à 1 dans  $\tilde{\mathcal{O}}^i$ , dont le support est inclus dans  $\mathcal{O}^i$ .

Pour tout  $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ , on a

$$\sum_{i=0}^{N_\Sigma} \chi^i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N \zeta^i(\mathbf{x}) \geq 1.$$

D'autre part, pour tout  $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ , il existe un indice  $i_0$  tel que  $\chi^{i_0}(\mathbf{x}) = 1$  ou  $\zeta^{i_0}(\mathbf{x}) = 1$ .

Le décor étant planté, nous pouvons commencer la démonstration de l'estimation *a priori* pour les solutions de  $(\mathcal{P})$ . Ce sera l'étape clé de la preuve du Théorème 1.3.3.

### 1.3.4 Une estimation *a priori* pour les solutions de $(\mathcal{P})$

Pour tout  $u \in H_0^1(\Omega)$ , définissons  $f := Au = -\operatorname{div}(\sigma \nabla u) \in H^{-1}(\Omega)$ . Prouvons qu'il existe une constante  $C > 0$ , indépendante de  $u$ , telle que

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \left( \|Au\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|u\|_{\Omega} \right). \quad (1.8)$$

Pour  $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ , définissons  $\operatorname{supp}^1 \chi := \{ \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \mid \chi(\mathbf{x}) = 1 \}$ , de sorte que

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq \|u\|_{H_0^1(\operatorname{supp}^1 \chi^0)}^2 + \sum_{i=1}^{N_\Sigma} \|u\|_{H_0^1(\operatorname{supp}^1 \chi^i)}^2 + \sum_{i=1}^N \|u\|_{H_0^1(\operatorname{supp}^1 \zeta^i)}^2 \\ &\leq \|\chi^0 u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^{N_\Sigma} \|\chi^i u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N \|\zeta^i u\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Estimons chacun des trois termes du membre de droite de (1.9).

Le support de  $\chi^0 u$  ne rencontre pas l'interface. Le terme  $\|\chi^0 u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$  est donc relativement simple à traiter car l'opérateur  $A$  est « localement elliptique » de part et d'autre de l'interface. Nous pouvons ainsi écrire

$$\begin{aligned} &\|\chi^0 u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &\leq C \left( |\sigma| \nabla(\chi^0 u), \nabla(\chi^0 u) \right)_\Omega \\ &\leq C \left( |(\sigma|u \nabla \chi^0, \nabla(\chi^0 u))_\Omega| + |(\sigma| \nabla u, \nabla((\chi^0)^2 u))_\Omega| + |(\sigma| \nabla u, \chi^0 u \nabla \chi^0)_\Omega| \right) \\ &\leq C \left( \|u\|_{\Omega} \|\chi^0 u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|(\chi^0)^2 u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|u\|_{\Omega} \right) \\ &\leq C \left( \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u\|_{\Omega} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Pour traiter les termes  $\|\chi^i u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$ ,  $i = 1 \dots N_\Sigma$ , nous allons utiliser les opérateurs de T-coercivité de la section précédente. Suivant l'hypothèse que nous souhaitons traiter, cas 1. ou cas 2., définissons  $T := T_1$  ou  $T := T_2$ , où  $T_1$  et  $T_2$  sont les opérateurs utilisés dans la preuve du Théorème 1.2.10. Dans cette dernière preuve, nous ne travaillons que sur  $R_1$  et  $R_2$ , mais le lecteur doit se souvenir que  $T_1$  et  $T_2$  sont définis par (1.2) et (1.3). D'autre part, ici, il faut considérer  $T_1$  et  $T_2$  comme des éléments de  $\mathcal{L}(H_0^1(\mathcal{O}^i))$ . On trouve

$$\begin{aligned} &\|\chi^i u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &\leq C \left| (\sigma \nabla(\chi^i u), \nabla(T(\chi^i u)))_{\mathcal{O}^i} \right| \\ &\leq C \left( |(\sigma u \nabla \chi^i, \nabla(T(\chi^i u)))_{\mathcal{O}^i}| + |(\sigma \nabla u, \nabla(\chi^i T(\chi^i u)))_{\mathcal{O}^i}| + |(\sigma \nabla u, T(\chi^i u) \nabla \chi^i)_{\mathcal{O}^i}| \right) \\ &\leq C \left( \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u\|_{\Omega} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \right). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Dans le calcul ci-dessus, nous nous sommes servis du fait que l'opérateur  $T$  constitue également un élément de  $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{O}^i))$ .

On travaille de la même façon pour traiter les termes  $\|\zeta^i u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$ ,  $i = 1 \dots N$ . Cette fois, on utilise  $T_1$  et  $T_2$  définis dans les preuves des Théorèmes 1.2.3 et 1.2.7, en les considérant comme des opérateurs de  $\mathcal{L}(H_0^1(B(\mathbf{x}^i, d^i) \cap \Omega)) \cap \mathcal{L}(L^2(B(\mathbf{x}^i, d^i) \cap \Omega))$ . On obtient

$$\|\zeta^i u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C \left( \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u\|_{\Omega} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \right). \quad (1.12)$$

Finalement, en regroupant les estimations (1.9), (1.10), (1.11) et (1.12), on aboutit à l'estimation *a priori* (1.8).

### 1.3.5 Conclusion

Rappelons un lemme classique dû à J. Peetre [133] (voir également le lemme 5.1 de [109, Ch. 2], ou le lemme 3.4.1 de [102]).

**Lemme 1.3.5** *Soient  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  trois espaces de Banach réflexifs, tels que  $X$  s'injecte de façon compacte dans  $Z$ . Soit  $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i)  $\dim \ker B < \infty$ , et  $\text{im } B$  est fermée dans  $Y$  ;
- ii) il existe une constante  $C > 0$  telle que
 
$$\|x\|_X \leq C (\|Bx\|_Y + \|x\|_Z), \quad \forall x \in X.$$

Pour notre problème, d'après le théorème de Rellich,  $H_0^1(\Omega)$  s'injecte de façon compacte dans  $L^2(\Omega)$ , car  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ . Avec le Lemme 1.3.5, on déduit que  $A$  a un noyau de dimension finie et est à image fermée dans  $H^{-1}(\Omega)$ . Puisque la forme  $a$  est symétrique, le théorème 2.13 de [116] indique que  $\text{coker } A$  est isomorphe à  $\ker A$ . Par conséquent,  $\text{coker } A$  est également de dimension finie et  $\text{ind } A = \dim \ker A - \dim \text{coker } A = 0$ . Ceci termine la preuve du Théorème 1.3.3.

## 1.4 Applications

### 1.4.1 Coefficients réguliers par morceaux

Dans le cas où  $\sigma_k \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}_k)$ ,  $k = 1, 2$ , l'énoncé du Théorème 1.3.3 se simplifie quelque peu. Le contraste  $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1$  peut être considéré comme un élément de  $\mathcal{C}^0(\overline{\Sigma})$ .

**Théorème 1.4.1** (COEFFICIENTS CONTINUS) *Supposons que l'on ait*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall \mathbf{x} \in \Sigma \setminus \mathcal{S}, & \kappa_\sigma(\mathbf{x}) < -1 \\ \forall \mathbf{x}^i \in \mathcal{S}_{int} \cup \mathcal{S}_{ext}^2, & \kappa_\sigma(\mathbf{x}) < -I_{\alpha^i}, \\ \forall \mathbf{x}^i \in \mathcal{S}_{ext}^1, & \kappa_\sigma(\mathbf{x}) < -1 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \forall \mathbf{x} \in \Sigma \setminus \mathcal{S}, & \kappa_\sigma(\mathbf{x}) > -1 \\ \forall \mathbf{x}^i \in \mathcal{S}_{int} \cup \mathcal{S}_{ext}^1, & \kappa_\sigma(\mathbf{x}) > -1/I_{\alpha^i} \\ \forall \mathbf{x}^i \in \mathcal{S}_{ext}^2, & \kappa_\sigma(\mathbf{x}) > -1 \end{array} \right. .$$

Alors, l'opérateur  $A : u \mapsto -\text{div}(\sigma \nabla u)$  de  $\mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$  est Fredholm d'indice 0.

### 1.4.2 Coefficients constants par morceaux

Lorsque  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont des constantes, définissons

$$\hat{R}_\Sigma := \max \left( \max_{\mathbf{x}^i \in \mathcal{S}_{int} \cup \mathcal{S}_{ext}^1} I_{\alpha^i}, 1 \right), \quad \check{R}_\Sigma := \max \left( \max_{\mathbf{x}^i \in \mathcal{S}_{int} \cup \mathcal{S}_{ext}^2} I_{\alpha^i}, 1 \right).$$

On a le

**Théorème 1.4.2** (COEFFICIENTS CONSTANTS) *Supposons  $\sigma_2/\sigma_1 \in \mathbb{R}_-^* \setminus [-\hat{R}_\Sigma; -1/\check{R}_\Sigma]$ . Alors, l'opérateur  $A : u \mapsto -\text{div}(\sigma \nabla u)$  de  $\mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$  est Fredholm d'indice 0.*

**Remarque 1.4.3** *Avec le théorème de Lax-Milgram, on prouve facilement que l'opérateur  $A$  est un isomorphisme de  $\mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$  lorsque  $\kappa_\sigma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ . On déduit que lorsque  $\sigma_2/\sigma_1 \in \mathbb{C}^* \setminus [-\hat{R}_\Sigma; -1/\check{R}_\Sigma]$ , l'opérateur  $A$  est Fredholm d'indice 0.*

Nous donnons quelques illustrations de ces résultats sur les Figures 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11, 1.12, 1.13 et 1.14.

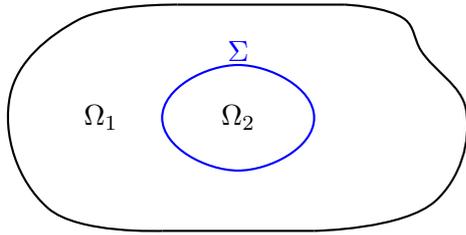


FIGURE 1.7 –  $A$  est Fredholm d'indice 0 lorsque  $\sigma_2/\sigma_1 \in \mathbb{R}_-^* \setminus \{-1\}$ .

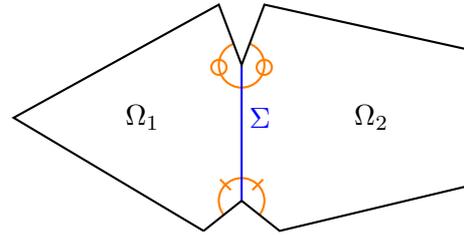


FIGURE 1.8 –  $A$  est Fredholm d'indice 0 lorsque  $\sigma_2/\sigma_1 \in \mathbb{R}_-^* \setminus \{-1\}$ .

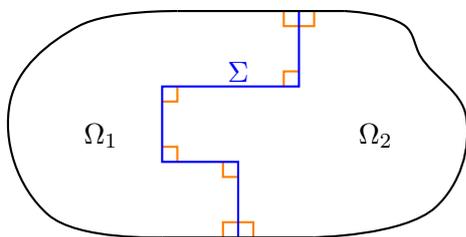


FIGURE 1.9 –  $A$  est Fredholm d'indice 0 lorsque  $\sigma_2/\sigma_1 \in \mathbb{R}_-^* \setminus [-3; -1/3]$ .

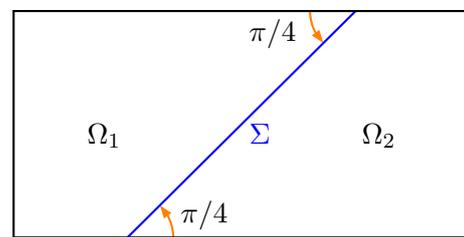


FIGURE 1.10 –  $A$  est Fredholm d'indice 0 lorsque  $\sigma_2/\sigma_1 \in \mathbb{R}_-^* \setminus [-3; -1/3]$ .

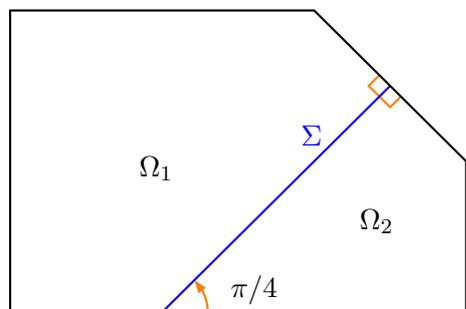


FIGURE 1.11 –  $A$  est Fredholm d'indice 0 lorsque  $\sigma_2/\sigma_1 \in \mathbb{R}_-^* \setminus [-1; -1/3]$ .

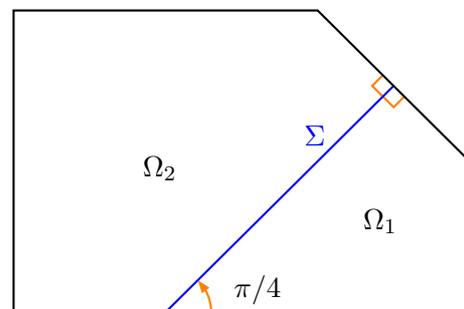


FIGURE 1.12 –  $A$  est Fredholm d'indice 0 lorsque  $\sigma_2/\sigma_1 \in \mathbb{R}_-^* \setminus [-3; -1]$ .

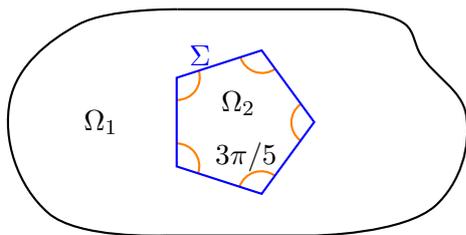


FIGURE 1.13 –  $A$  est Fredholm d'indice 0 lorsque  $\sigma_2/\sigma_1 \in \mathbb{R}_-^* \setminus [-7/3; -3/7]$ .

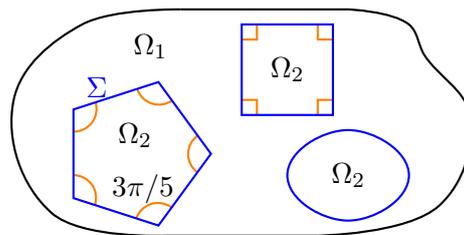


FIGURE 1.14 –  $A$  est Fredholm d'indice 0 lorsque  $\sigma_2/\sigma_1 \in \mathbb{R}_-^* \setminus [-3; -1/3]$ .

## 1.5 Discussion sur les hypothèses portant sur $\sigma$

Dans cette section, nous établissons des résultats sur l'opérateur  $A : u \mapsto -\operatorname{div}(\sigma \nabla u)$  appartenant à  $\mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ , lorsque  $\sigma$  ne satisfait pas les hypothèses du Théorème 1.3.3. Nous prenons  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  constants et nous définissons donc le contraste  $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1$ . Nous montrons que si l'interface présente une portion droite au voisinage de laquelle le contraste est égal à  $-1$ , alors l'opérateur  $A$  n'est pas de type Fredholm, en raison d'une *distribution de singularités linéique*. En effet, nous prouvons qu'en tout point  $x_0$  de la portion droite (ouverte) de  $\Sigma$ , on peut construire une suite de fonctions  $(u_n)_n$  pour montrer que  $A$  n'est pas un opérateur de type Fredholm (voir le Théorème 1.5.3 ci-dessous). Lorsque  $\kappa_\sigma \neq -1$ , l'opérateur  $A$  peut ne pas être de type Fredholm en raison de *singularités ponctuelles* au niveau des sommets extérieurs ou intérieurs de l'interface. Cette situation se produit lorsque le contraste est situé dans un intervalle, appelé *intervalle critique*, contenant  $-1$  (voir le Théorème 1.5.5 ci-dessous). Dans ce dernier cas, mentionnons ici que le cadre Fredholm peut être recouvert en travaillant dans un autre cadre fonctionnel que  $H^1$  (cf. Chapitre 5). Enfin, nous présentons deux configurations plus exotiques dans le §1.5.4.

### 1.5.1 Domaine symétrique

Ci-dessous, nous travaillons de nouveau sur le domaine *symétrique*  $\Omega$  décrit dans le §1.2.1.

**Théorème 1.5.1** (DOMAINE SYMÉTRIQUE & COEFFICIENTS CONSTANTS)

- Si  $\kappa_\sigma \neq -1$  alors  $A$  est un isomorphisme ;
- Si  $\kappa_\sigma = -1$  alors  $A$  n'est pas un opérateur de type Fredholm ( $\dim \ker A = \infty$ ).

**Preuve.** Sans perte de généralité, nous supposons que l'interface  $\Sigma$  est contenue dans la droite d'équation  $y = 0$  (voir la Figure 1.1).

Le Théorème 1.2.1 prouve que  $A$  est un isomorphisme lorsque  $\kappa_\sigma \neq -1$ .

Maintenant, supposons  $\kappa_\sigma = -1$ . Nous souhaitons montrer que  $\ker A$  est de dimension infinie. Pour ce faire, considérons  $g \in \tilde{H}^{1/2}(\Sigma)$ , c'est-à-dire un élément de  $H^{1/2}(\Sigma)$  dont le prolongement par 0 à la droite d'équation  $y = 0$  appartient à  $H^{1/2}(\mathbb{R})$ . Pour  $k = 1, 2$ , définissons alors  $u_k$  l'unique fonction de  $H_{0, \Gamma_k}^1(\Omega_k)$  vérifiant

$$\begin{cases} \Delta u_k = 0 & \text{dans } \Omega_k \\ u_k = 0 & \text{sur } \Gamma_k \\ u_k = g & \text{sur } \Sigma \end{cases} .$$

Par unicité de la solution, on montre que  $u_2(x, y) = u_1(x, -y)$  p.p. dans  $\Omega_2$ . Il suit

$$\sigma_1 \partial_n u_1 - \sigma_2 \partial_n u_2 = -\sigma_1 (\partial_y u_1 + \partial_y u_2) = 0 \text{ p.p. sur } \Sigma.$$

L'élément  $u$  de  $H_0^1(\Omega)$  défini par  $u|_{\Omega_k} = u_k$  pour  $k = 1, 2$  satisfait  $\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = 0$  dans  $\Omega$ , et donc  $Au = 0$ . Puisque  $\tilde{H}^{1/2}(\Sigma)$  est un espace vectoriel de dimension infinie, on déduit que  $\ker A$  est également un espace vectoriel de dimension infinie. ■

**Remarque 1.5.2** *Bien entendu, ce résultat reste vrai si l'on suppose seulement  $\sigma_1 \in L^\infty(\Omega_1)$  et  $\sigma_2(x, y) = -\sigma_1(x, -y)$  pour presque tout  $(x, y) \in \Omega_2$ .*

### 1.5.2 Interface localement droite et contraste égal à $-1$

Ici,  $\Omega$  est un domaine de  $\mathbb{R}^2$  qui vérifie les hypothèses du paragraphe §1.3.1.

**Théorème 1.5.3** (INTERFACE LOCALEMENT DROITE & COEFFICIENTS CONSTANTS) *Si  $\kappa_\sigma = -1$ , et s'il existe une partie non vide de l'interface  $\Sigma$  qui est droite, alors l'opérateur  $A$  n'est pas de type Fredholm.*

**Remarque 1.5.4** Ce résultat reste vrai si l'on suppose seulement  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  localement constants avec des valeurs opposées dans un voisinage de la partie droite de  $\Sigma$ .

**Preuve.** D'après le Lemme 1.3.5, si  $A$  est un opérateur de type Fredholm, alors il existe  $C > 0$  telle que

$$\|u\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \leq C \left( \|Au\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} + \|u\|_{\Omega} \right), \quad \forall u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \quad (1.13)$$

En nous inspirant du contre exemple d'Hadamard pour prouver que le problème de Cauchy dans le demi-plan n'est pas bien posé, classiquement (voir par exemple [127, 128]), nous allons montrer notre résultat en contredisant (1.13).

Soit  $\mathbf{x}_0$  un point appartenant à la partie droite (ouverte) de  $\Sigma$ . À une rotation près du système de coordonnées, nous pouvons supposer que  $\Sigma$  est localement incluse dans la droite d'équation  $s = 0$ , autour de  $\mathbf{x}_0$ . Considérons ensuite  $b > 0$  suffisamment petit, de sorte que  $D := ]-b; b[ \times ]-b; b[ \subset \Omega$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , définissons

$$u_n(s, t) := \begin{cases} \frac{\sinh n(b+s) \sin nt}{e^{nb}} & \text{dans } [-b; 0] \times [-b; b]; \\ \frac{\sinh n(b-s) \sin nt}{e^{nb}} & \text{dans } [0; b] \times [-b; b]. \end{cases} \quad (1.14)$$

Soit  $\chi_0 \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}, [0; 1])$  une fonction de troncature paire, égale à 1 dans un voisinage de 0 et de support inclus dans  $]-b; b[$ . Définissons  $\chi(s, t) := \chi_0(s) \chi_0(t)$ . Le prolongement de  $\chi u_n$  par 0 à  $\Omega$ , également noté  $\chi u_n$ , constitue un élément de  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ . Prouvons l'estimation ci-dessous, avec  $C$  indépendant de  $n$  :

$$\|A(\chi u_n)\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} \leq C (\|Au_n\|_{\mathbf{H}^{-1}(D)} + \|u_n\|_D). \quad (1.15)$$

Rappelons que

$$\|A(\chi u_n)\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} = \sup_{v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \|v\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}=1} |(\sigma \nabla(\chi u_n), \nabla v)_\Omega|.$$

Pour  $v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , on a

$$(\sigma \nabla(\chi u_n), \nabla v)_\Omega = (\sigma \nabla u_n, \nabla(\chi v))_\Omega + (\sigma u_n \nabla \chi, \nabla v)_\Omega - (\nabla u_n, \sigma v \nabla \chi)_\Omega. \quad (1.16)$$

Étudions chacun des membres du terme de droite de (1.16) séparément.

– Premier terme :

$$|(\sigma \nabla u_n, \nabla(\chi v))_\Omega| \leq C \|\operatorname{div}(\sigma \nabla u_n)\|_{\mathbf{H}^{-1}(D)} \|v\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}. \quad (1.17)$$

– Pour le second terme, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut écrire :

$$|(\sigma u_n \nabla \chi, \nabla v)_\Omega| \leq C \|u_n\|_D \|v\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}. \quad (1.18)$$

– En intégrant par parties dans le troisième terme, on obtient :

$$(\nabla u_n, \sigma v \nabla \chi)_\Omega = (u_n, \operatorname{div}(\sigma v \nabla \chi))_D. \quad (1.19)$$

Remarquons que  $\operatorname{div}(\sigma v \nabla \chi)$  appartient à  $L^2(\Omega)$  (et donc à  $L^2(D)$ ), car on a  $\sigma v \nabla \chi|_{\Omega_1} \in \mathbf{H}^1(\Omega_1)$ ,  $\sigma v \nabla \chi|_{\Omega_2} \in \mathbf{H}^1(\Omega_2)$ , et enfin  $\partial_n \chi = 0$  sur  $\Sigma$ . De plus,  $\|\operatorname{div}(\sigma v \nabla \chi)\|_D \leq C \|v\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}$ . Par conséquent, de (1.19), on déduit

$$|(\nabla u_n, \sigma v \nabla \chi)_\Omega| \leq C \|u_n\|_D \|v\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}. \quad (1.20)$$

On obtient alors (1.15) en utilisant (1.17), (1.18) et (1.20) pour borner le terme de droite de (1.16).

Mais l'on peut vérifier par un calcul direct que  $Au_n = 0$  dans  $D$ . En effet, sur  $] - b; 0[ \times ] - b; b[$  et sur  $]0; b[ \times ] - b; b[$ , on a  $\Delta u_n = 0$ . Sur l'interface, la trace de  $u_n$  se raccorde. De plus, puisque  $u_n$  est symétrique par rapport à l'interface et que le contraste est égale à  $-1$ , la trace normale  $\sigma \partial_n u_n$  se raccorde également.

Remarquons que  $\|u_n\|_D \leq 2b \|u_n\|_{L^\infty(D)} < C$ , avec  $C$  indépendante de  $n$ . Par conséquent, d'après (1.15),  $(A(\chi u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est bornée dans  $H^{-1}(\Omega)$ . Mais l'on peut vérifier, toujours par le calcul (voir les détails avec le Lemme 1.8.1), que

$$\|\chi u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Ainsi (1.13) n'est pas vérifiée. Avec le Lemme 1.3.5, on déduit que  $A$  n'est pas de type Fredholm. ■

### 1.5.3 Critère pour les sommets

Ici,  $\Omega$  est un domaine de  $\mathbb{R}^2$  qui vérifie les hypothèses du paragraphe §1.3.1.

**Théorème 1.5.5** (SOMMET & COEFFICIENTS CONSTANTS) *Supposons que l'on soit dans l'une des trois configurations suivantes :*

1. *il existe  $\mathbf{x}^i \in \mathcal{S}_{int}$  tel que  $\kappa_\sigma \in ] - I_{\alpha^i}; -1/I_{\alpha^i}[$ ;*
2. *il existe  $\mathbf{x}^i \in \mathcal{S}_{ext}^1$  tel que  $\kappa_\sigma \in ] - I_{\alpha^i}; -1]$ ;*
3. *il existe  $\mathbf{x}^i \in \mathcal{S}_{ext}^2$  tel que  $\kappa_\sigma \in [-1; -1/I_{\alpha^i}[$ .*

*Alors l'opérateur  $A : u \mapsto -\operatorname{div}(\sigma \nabla u)$  de  $\mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$  n'est pas de type Fredholm.*

**Remarque 1.5.6** *S'il existe  $\mathbf{x}^i \in \mathcal{S}_{int} \cup \mathcal{S}_{ext}^1$  tel que  $\kappa_\sigma = -I_{\alpha^i}$  ou s'il existe  $\mathbf{x}^i \in \mathcal{S}_{int} \cup \mathcal{S}_{ext}^2$  tel que  $\kappa_\sigma = -1/I_{\alpha^i}$ , une singularité logarithmique apparaît (au lieu d'une singularité en  $r^{i\eta}$  comme dans la suite). La conjecture est alors que le problème  $A$  n'est pas de type Fredholm dans ces cas.*

**Preuve.** Concentrons-nous sur la preuve du Théorème dans le cas 1.. Dans le reste de la démonstration, nous omettons l'indice  $i$ . Si  $\kappa_\sigma = -1$ , le Théorème 1.5.3 permet de conclure que  $A$  n'est pas de type Fredholm. Maintenant, supposons  $\kappa_\sigma \in ] - I_{\alpha^i}; -1/I_{\alpha^i}[ \setminus \{-1\}$  : nous montrons dans ce cas que l'estimation (1.13) ne peut être vraie, en utilisant une idée classique de la théorie des opérateurs elliptiques dans des domaines non réguliers (voir par exemple la partie V de la preuve du théorème 1.2 de [119, page 104] ou le lemme 6.3.3 de [102]). Pour un contraste situé dans l'intervalle critique  $] - I_{\alpha^i}; -1/I_{\alpha^i}[ \setminus \{-1\}$ , on prouve (utiliser le paragraphe §7.3.3 de [138]) qu'il existe une fonction singulière  $S(r, \theta) = r^{i\eta} \varphi(\theta)$ , avec  $\eta \in \mathbb{R}^*$  et  $\varphi$  régulière par morceaux<sup>3</sup>, telle que  $\operatorname{div}(\sigma \nabla S) = 0$ . Cette fonction singulière appartient à  $L^2(\Omega)$  mais pas à  $H^1(\Omega)$ . Introduisons ensuite la fonction de troncature  $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+)$ , telle que  $\chi(r) = 1$  pour  $r < d/2$  et  $\chi(r) = 0$  pour  $r > d$ , avec  $d = d^i$  défini dans le paragraphe §1.3.3. Définissons finalement  $S_n(r, \theta) := r^{i\eta+1/n} \varphi(\theta)$  et  $u_n(r, \theta) := \chi(r) S_n(r, \theta)$ . Par construction, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n$  appartient à  $H_0^1(\Omega)$ , et, d'après le lemme 1.8.2,

$$\exists C > 0, \forall n, \|u_n\|_\Omega < C \quad \text{et} \quad \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty. \quad (1.21)$$

Pour contredire l'estimation (1.13), il reste à prouver que la suite  $(\operatorname{div}(\sigma \nabla u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est bornée dans  $H^{-1}(\Omega)$ , ce qui est la partie qui nécessite le plus de travail.

Définissons  $H_{0^\star}^1(\Omega) := \{u \in H_0^1(\Omega) \mid u = 0 \text{ dans un voisinage de } \mathbf{x}^i\}$ . Puisque  $H_{0^\star}^1(\Omega)$  est dense dans  $H_0^1(\Omega)$  (voir le lemme 1.2.2 dans [55]), on a

$$\|\operatorname{div}(\sigma \nabla u_n)\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{v \in H_{0^\star}^1(\Omega), \|v\|_{H_0^1(\Omega)}=1} |(\sigma \nabla u_n, \nabla v)_\Omega|.$$

3. Précisément, on trouve  $\varphi|_{\Omega_1} = a_1 \sinh(\eta\theta) + b_1 \cosh(\eta\theta)$  et  $\varphi|_{\Omega_2} = a_2 \sinh(\eta\theta) + b_2 \cosh(\eta\theta)$ , où les constantes  $a_1, a_2, b_1, b_2$  sont choisies pour assurer les conditions de raccord pour la trace et le flux sur l'interface  $\Sigma$ .

Comme précédemment, écrivons

$$\begin{aligned} (\sigma \nabla u_n, \nabla v)_\Omega &= (\sigma S_n \nabla \chi, \nabla v)_\Omega - (\nabla S_n, \sigma v \nabla \chi)_\Omega + (\sigma \nabla S_n, \nabla(\chi v))_\Omega \\ &= (\sigma S_n \nabla \chi, \nabla v)_\Omega + (S_n, \operatorname{div}(\sigma v \nabla \chi))_\Omega - (\operatorname{div}(\sigma \nabla S_n), \chi v)_\Omega. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Encore une fois, remarquons que  $\operatorname{div}(\sigma v \nabla \chi)$  est un élément de  $L^2(\Omega)$  car on a  $\sigma v \nabla \chi|_{\Omega_1} \in H^1(\Omega_1)$ ,  $\sigma v \nabla \chi|_{\Omega_2} \in H^1(\Omega_2)$  et  $\partial_n \chi = 0$  sur  $\Sigma$ . On vérifie facilement que

$$|(\sigma S_n \nabla \chi, \nabla v)_\Omega + (S_n, \operatorname{div}(\sigma v \nabla \chi))_\Omega| \leq C \|S_n\|_\Omega \|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \quad (1.23)$$

Maintenant, étudions le troisième terme du membre de droite de (1.22). Par un calcul direct, on obtient

$$\operatorname{div}(\sigma \nabla S_n) = \sigma (2i\eta + 1/n) r^{i\eta-2+1/n} \varphi(\theta)/n.$$

En intégrant par parties par rapport à la variable  $r$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} -(\operatorname{div}(\sigma \nabla S_n), \chi v)_\Omega &= -(1/n) \int_0^{2\pi} \int_0^d \sigma (2i\eta + 1/n) r^{i\eta-2+1/n} \varphi(\theta) (\overline{\chi v}) r dr d\theta \\ &= (1/n) \int_0^{2\pi} \int_0^d \sigma (2i\eta + 1/n) \frac{r^{i\eta-1+1/n}}{i\eta + 1/n} \varphi(\theta) \frac{\partial(\overline{\chi v})}{\partial r} r dr d\theta. \end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz conduit à

$$|(\sigma \nabla S_n, \nabla(\chi v))_\Omega| \leq (C/n) \left( \int_0^{2\pi} \int_0^d |\sigma (2i\eta + 1/n)|^2 \frac{r^{-2+2/n}}{|i\eta + 1/n|^2} |\varphi(\theta)|^2 r dr d\theta \right)^{1/2} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Mais,

$$(1/n)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^d |\sigma (2i\eta + 1/n)|^2 \frac{r^{-2+2/n}}{|i\eta + 1/n|^2} |\varphi(\theta)|^2 r dr d\theta \leq C (1/n)^2 \int_0^d r^{-2+2/n} r dr \leq C/n.$$

Ainsi,

$$|(\sigma \nabla S_n, \nabla(\chi v))_\Omega| \leq C \|v\|_{H_0^1(\Omega)} / \sqrt{n}. \quad (1.24)$$

En injectant (1.23) et (1.24) dans (1.22), on obtient finalement

$$\|\operatorname{div}(\sigma \nabla u_n)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C (\|S_n\|_\Omega + 1/\sqrt{n}). \quad (1.25)$$

Rappelons que  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est bornée dans  $L^2(\Omega)$ . Par conséquent, la limite (1.21) et l'inégalité (1.25), ainsi que le Lemme 1.3.5, prouvent que  $A$  n'est pas un opérateur de type Fredholm dans le cas où  $\kappa_\sigma \in ]-I_{\alpha^i}; -1/I_{\alpha^i}[ \setminus \{-1\}$ .

Les cas 2. et 3. du Théorème 1.5.5 se traitent de façon similaire.  $\blacksquare$

**Remarque 1.5.7** *Faisons écho aux Remarques 1.1.3 et 1.1.4 relatives à l'optimalité de la méthode de la T-coercivité. Considérons le cas du sommet intérieur décrit dans le §1.2.3, avec, pour fixer les idées,  $\alpha \in ]0; \pi[$ . Supposons  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  constants. La technique de la T-coercivité permet de montrer que  $A : u \mapsto -\operatorname{div}(\sigma \nabla u)$  constitue un isomorphisme de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $H^{-1}(\Omega)$  (Théorème 1.2.3) lorsque  $\kappa_\sigma \in ]-\infty; -(2\pi - \alpha)/\alpha[ \cup ]-\alpha/(2\pi - \alpha); 0[$ . D'un autre côté, le Théorème 1.5.5 indique que  $A$  n'est pas de type Fredholm lorsque  $\kappa_\sigma \in ]-(2\pi - \alpha)/\alpha; -\alpha/(2\pi - \alpha)[$ . Avec le Théorème 1.1.2, nous déduisons  $\inf_{R_1 \in \mathcal{R}_1} \|R_1\|^2 = \inf_{R_2 \in \mathcal{R}_2} \|R_2\|^2 = (2\pi - \alpha)/\alpha$ , résultat qui, de prime abord, n'avait rien d'évident. Autrement dit, nous ne pouvons pas être plus efficaces avec la technique de la T-coercivité.*

## 1.5.4 Autres cas

Présentons ici deux cas qui ne sont pas couverts par le Théorème 1.3.3.

Tout d'abord, définissons le domaine  $\Omega := ]-1; 1[ \times ]-1; 1[$  et les sous-domaines  $\Omega_1 := ]-1; 0[ \times ]-1; 1[$  et  $\Omega_2 := ]0; 1[ \times ]-1; 1[$  (voir la Figure 1.15, à gauche). Supposons  $\sigma = 1$  dans  $\Omega_1$ ,  $\sigma = -2$  dans  $]0; 1[ \times ]0; 1[$  et  $\sigma = \beta \in \mathbb{R}_-^*$  dans  $]0; 1[ \times ]-1; 0[$ . Pour  $\beta > -1$ , on a, pour tout  $d > 0$ ,

$$\inf_{B(O,d) \cap \Omega_1} \sigma_1 < \sup_{B(O,d) \cap \Omega_2} |\sigma_2| \quad \text{et} \quad \inf_{B(O,d) \cap \Omega_2} |\sigma_2| < \sup_{B(O,d) \cap \Omega_1} \sigma_1.$$

Par conséquent, les hypothèses du Théorème 1.3.3 ne sont pas vérifiées et l'on ne peut conclure que l'opérateur  $A \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$  est de type Fredholm.

**Remarque 1.5.8** *Cependant, on peut construire à la main, pour cette configuration simple, un opérateur  $T$ , parmi d'autres, qui permette de recouvrir la  $T$ -coercivité pour certains  $\beta > -1$ . Pour  $u \in H_0^1(\Omega)$ , définissons l'action de  $T$  de la façon suivante :*

$$(Tu)(x, y) := \begin{cases} u_a(x, y) - 2u_d(-x, y) & \text{dans } \Omega_a := ]-1; 0[ \times ]0; 1[ \\ u_b(x, y) - 2u_d(-x, -y) & \text{dans } \Omega_b := ]-1; 0[^2 \\ -2u_a(-x, -y) + 2u_b(-x, y) - u_c(x, y) & \text{dans } \Omega_c := ]0; 1[ \times ]-1; 0[ \\ -u_d(x, y) & \text{dans } \Omega_d := ]0; 1[^2 \end{cases},$$

avec  $u_k := u|_{\Omega_k}$ , pour  $k = a, b, c, d$ . Nous n'écrivons pas les valeurs de  $\beta$  pour lesquelles on peut prouver que  $A$  est un isomorphisme à l'aide de cet opérateur  $T$  car il n'est pas du tout certain que cette construction soit optimale.

Pour  $\beta < -1$ , on a

$$\inf_{B(O,d) \cap \Omega_2} |\sigma_2| > \sup_{B(O,d) \cap \Omega_1} \sigma_1,$$

et le Théorème 1.3.3 permet de conclure que  $A$  est Fredholm d'indice 0.

Présentons maintenant un deuxième cas non couvert par le Théorème 1.3.3. Considérons le domaine  $\Omega$  défini par  $\Omega := ]-1; 1[ \times ]-1; 1[$  et les sous-domaines  $\Omega_1 := ]-1; 0[ \times ]0; 1[ \cup ]0; 1[ \times ]-1; 0[$  et  $\Omega_2 := ]-1; 0[ \times ]-1; 0[ \cup ]0; 1[ \times ]0; 1[$  (voir la Figure 1.15, à droite). Ici, on ne peut utiliser le Théorème 1.3.3, car les frontières  $\partial\Omega_1$  et  $\partial\Omega_2$  ne sont pas lipschitziennes (voir [25, Corrigendum]).

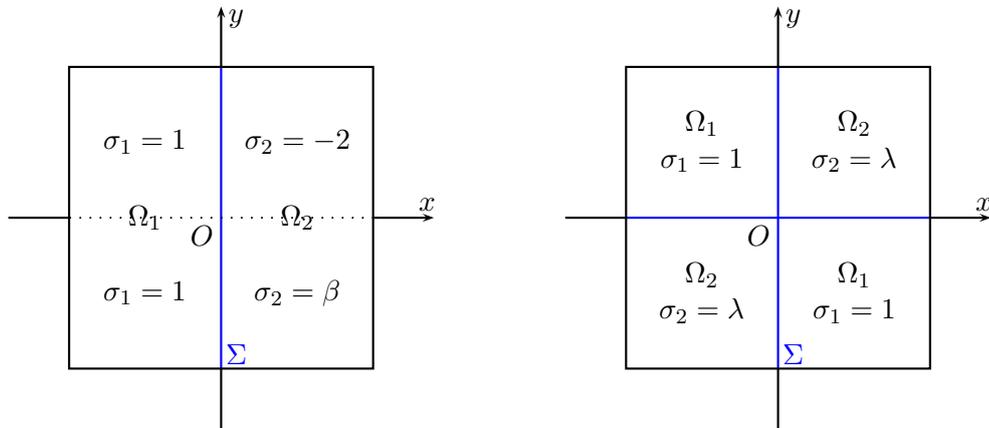


FIGURE 1.15 – Deux configurations qui ne sont pas couvertes par le Théorème 1.3.3 :  $\beta > -1$  à gauche ;  $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$  à droite.

## 1.6 Domaines de $\mathbb{R}^3$

Pour étudier le problème ( $\mathcal{P}$ ) posé dans un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ , on procède comme en 2D. Dès lors que l'on est en mesure d'établir des résultats de T-coercivité localement (cf. §1.2), on peut montrer que l'opérateur  $A \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$  est Fredholm d'indice zéro. La différence principale par rapport au cas 2D tient au fait qu'en 3D il existe une plus grande variété de géométries particulières. En électromagnétisme, ces problèmes scalaires 3D peuvent sembler assez peu intéressants. Néanmoins, ils permettent de modéliser les problèmes d'électrostatique et plus important pour nous, ils constitueront la base de l'étude des équations de Maxwell 3D (cf. Chapitre 9). Les notations que nous avons introduites en 2D sont réutilisées ici.

Nous commençons notre étude par des cas élémentaires. Par souci de concision, nous présentons les preuves uniquement lorsque les cas ne découlent pas directement du 2D.

### 1.6.1 Domaine symétrique

On obtient aisément le même résultat que celui énoncé dans le Théorème 1.2.1.

### 1.6.2 Arête prismatique

Introduisons les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  de sorte que les coordonnées cartésiennes vérifient  $(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ . Notons  $H > 0$  la hauteur du cylindre et  $R > 0$  son rayon.

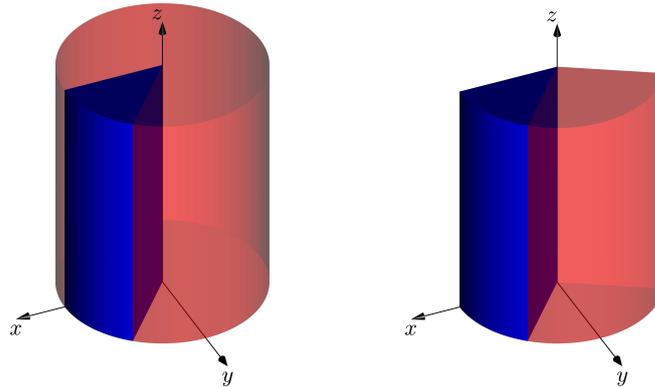


FIGURE 1.16 – Géométrie des arêtes prismatiques : arête interne (à gauche), arête externe (à droite).

#### Arête prismatique interne

Considérons la géométrie de la Figure 1.16, à gauche. Pour  $0 < \alpha < 2\pi$ , définissons

$$\begin{aligned} \Omega_1 &:= \{(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \mid 0 < r < R, 0 < \theta < \alpha, 0 < z < H\}; \\ \Omega_2 &:= \{(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \mid 0 < r < R, \alpha < \theta < 2\pi, 0 < z < H\}. \end{aligned}$$

**Théorème 1.6.1** (ARÊTE PRISMATIQUE INTERNE) *Supposons*

$$\max(\sigma_1^- / \sigma_2^+, \sigma_2^- / \sigma_1^+) > I_\alpha, \quad \text{avec} \quad I_\alpha := \max\left(\frac{\alpha}{2\pi - \alpha}, \frac{2\pi - \alpha}{\alpha}\right).$$

Alors, il existe un isomorphisme  $T \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega))$  tel que la forme  $a$  soit T-coercive. Par conséquent,  $A : u \mapsto -\operatorname{div}(\sigma \nabla u)$  est un isomorphisme de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $H^{-1}(\Omega)$ .

**Preuve.** Définissons les deux opérateurs  $R_1$  et  $R_2$  respectivement par  $(R_1 u_1)(\rho, \Theta, Z) = u_1(\rho, \frac{\alpha}{\alpha-2\pi}(\Theta - 2\pi), Z)$  et  $(R_2 u_2)(\rho, \Theta, Z) = u_2(\rho, \frac{\alpha-2\pi}{\alpha}\Theta + 2\pi, Z)$ . Pour  $k = 1, 2$ , La condition de raccord à l'interface est vérifiée pour  $R_k$  et donc  $R_k \in \mathcal{R}_k$ . En travaillant comme dans la preuve du Théorème 1.2.3, on trouve  $\|R_1\|^2 \leq I_\alpha$  et  $\|R_2\|^2 \leq I_\alpha$ . On peut alors conclure avec le Théorème 1.1.1. ■

### Arête prismatique externe

Considérons la géométrie de la Figure 1.16, à droite. Pour  $0 < \alpha < \gamma < 2\pi$ , définissons

$$\begin{aligned}\Omega_1 &:= \{(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \mid 0 < r < R, 0 < \theta < \alpha, 0 < z < H\}; \\ \Omega_2 &:= \{(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \mid 0 < r < R, \alpha < \theta < \gamma, 0 < z < H\}.\end{aligned}$$

On obtient un résultat identique à celui du Théorème 1.2.7.

### 1.6.3 Arête axisymétrique

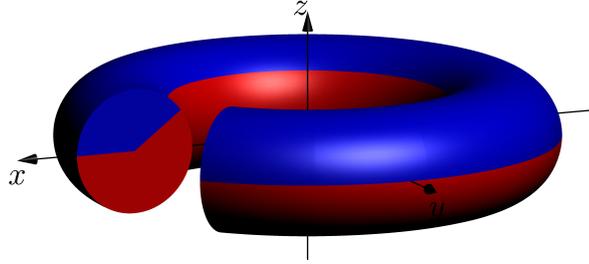


FIGURE 1.17 – Géométrie d'une arête axisymétrique interne.

Considérons la géométrie de la Figure 1.17, avec les coordonnées toroïdales  $(r, \theta, \varphi)$  telles que les coordonnées cartésiennes vérifient  $(x, y, z) = (\cos \theta (R + r \cos \varphi), \sin \theta (R + r \cos \varphi), r \sin \varphi)$ . Ici,  $R > 0$  désigne le rayon du tore. Pour  $0 < d < R$  et  $0 < \alpha < 2\pi$ , définissons

$$\begin{aligned}\Omega_1 &:= \{(\cos \theta (R + r \cos \varphi), \sin \theta (R + r \cos \varphi), r \sin \varphi) \mid 0 < r < d, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 < \varphi < \alpha\}; \\ \Omega_2 &:= \{(\cos \theta (R + r \cos \varphi), \sin \theta (R + r \cos \varphi), r \sin \varphi) \mid 0 < r < d, 0 \leq \theta < 2\pi, \alpha < \varphi < 2\pi\}.\end{aligned}$$

**Théorème 1.6.2** (ARÊTE AXISYMÉTRIQUE INTERNE) *Supposons*

$$\max(\sigma_1^- / \sigma_2^+, \sigma_2^- / \sigma_1^+) > \frac{1 + d/R}{1 - d/R} I_\alpha, \quad \text{avec} \quad I_\alpha := \max\left(\frac{\alpha}{2\pi - \alpha}, \frac{2\pi - \alpha}{\alpha}\right).$$

Alors, il existe un isomorphisme  $T \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega))$  tel que la forme  $a$  soit  $T$ -coercive. Par conséquent,  $A : u \mapsto -\operatorname{div}(\sigma \nabla u)$  est un isomorphisme de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $H^{-1}(\Omega)$ .

**Preuve.** Introduisons les opérateurs  $R_1$  et  $R_2$  définis respectivement par  $(R_1 u_1)(\rho, \Theta, \Phi) = u_1(\rho, \Theta, \frac{\alpha}{\alpha-2\pi}(\Phi - 2\pi))$  et  $(R_2 u_2)(\rho, \Theta, \Phi) = u_2(\rho, \Theta, \frac{\alpha-2\pi}{\alpha}\Phi + 2\pi)$ . Les conditions de raccord à l'interface sont satisfaites pour  $R_1$  et  $R_2$ .

Pour calculer la norme de  $R_1$ , considérons  $u_1 \in H_{0, \Gamma_1}^1(\Omega_1)$ . À l'aide du changement de variables,

dans les coordonnées toroïdales,  $(r, \theta, \varphi) = (\rho, \Theta, \frac{\alpha}{\alpha-2\pi}(\Phi - 2\pi))$ , nous obtenons<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} \|\nabla(R_1 u_1)\|_{\Omega_2}^2 &= \int_{\Omega_2} \left( \left( \frac{\partial(R_1 u_1)}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{(R + \rho \cos \Phi)^2} \left( \frac{\partial(R_1 u_1)}{\partial \Theta} \right)^2 \right) \rho (R + \rho \cos \Phi) d\rho d\Phi d\Theta \\ &\quad + \int_{\Omega_2} \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial(R_1 u_1)}{\partial \Phi} \right)^2 \rho (R + \rho \cos \Phi) d\rho d\Phi d\Theta \\ &\leq \frac{2\pi - \alpha}{\alpha} \int_{\Omega_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial r} \right)^2 r (R + r \cos(\frac{2\pi - \alpha}{\alpha} \varphi)) dr d\varphi d\theta \\ &\quad + \frac{2\pi - \alpha}{\alpha} \int_{\Omega_1} \frac{1}{(R + r \cos(\frac{2\pi - \alpha}{\alpha} \varphi))^2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right)^2 r (R + r \cos(\frac{2\pi - \alpha}{\alpha} \varphi)) dr d\varphi d\theta \\ &\quad + \frac{\alpha}{2\pi - \alpha} \int_{\Omega_1} \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \right)^2 r (R + r \cos(\frac{2\pi - \alpha}{\alpha} \varphi)) dr d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

Les relations

$$\frac{R + r \cos(\frac{2\pi - \alpha}{\alpha} \theta)}{R + r \cos \theta} \leq \frac{1 + d/R}{1 - d/R} \quad \text{et} \quad \frac{R + r \cos \theta}{R + r \cos(\frac{2\pi - \alpha}{\alpha} \theta)} \leq \frac{1 + d/R}{1 - d/R}, \quad \forall r \in ]0; d[, \forall \theta \in ]0; \alpha[$$

impliquent  $\|R_1\|^2 \leq \frac{1+d/R}{1-d/R} I_\alpha$ . Pareillement, on trouve  $\|R_2\|^2 \leq \frac{1+d/R}{1-d/R} I_\alpha$ . On conclut comme dans la preuve du Théorème 1.1.1. ■

**Remarque 1.6.3** Si  $\max(\sigma_1^-/\sigma_2^+, \sigma_2^-/\sigma_1^+) > I_\alpha$ , alors d'après le Théorème 1.6.2,  $A : u \mapsto -\text{div}(\sigma \nabla u)$  est un isomorphisme de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $H^{-1}(\Omega)$  pour  $d/R$  suffisamment petit.

**Remarque 1.6.4** Nous nous sommes intéressés à l'arête axisymétrique interne. On traiterait le cas de l'arête axisymétrique externe de la même façon, et on obtiendrait un résultat similaire à celui du Théorème 1.2.7.

### 1.6.4 Pointe conique

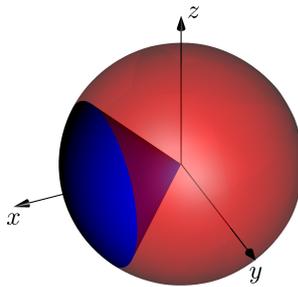


FIGURE 1.18 – Géométrie d'une pointe conique interne.

Considérons la géométrie de la Figure 1.18 et les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  naturellement associées, telles que les coordonnées cartésiennes vérifient  $(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi)$ . Introduisons  $R > 0$  et  $0 < \alpha < \pi$ . Définissons

$$\begin{aligned} \Omega_1 &:= \{(r \cos \theta, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi), 0 < r < R, 0 \leq \theta < \alpha, 0 \leq \varphi < 2\pi\}; \\ \Omega_2 &:= \{(r \cos \theta, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi), 0 < r < R, \alpha < \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\}. \end{aligned}$$

4. Voir le §1.8.2 pour le détail des calculs.

**Théorème 1.6.5** (POINTE CONIQUE INTERNE) *Supposons*<sup>5</sup>

$$\begin{cases} \sigma_1^-/\sigma_2^+ > I_\alpha & \text{ou} & \sigma_2^-/\sigma_1^+ > 1 & \text{si } \alpha \leq \pi/2 \\ \sigma_2^-/\sigma_1^+ > I_\alpha & \text{ou} & \sigma_1^-/\sigma_2^+ > 1 & \text{si } \alpha \geq \pi/2 \end{cases}, \quad \text{avec} \quad I_\alpha := \max\left(\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}, \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}\right).$$

Alors, il existe un isomorphisme  $T \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega))$  tel que la forme  $a$  soit  $T$ -coercive. Par conséquent,  $A : u \mapsto -\operatorname{div}(\sigma \nabla u)$  est un isomorphisme de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $H^{-1}(\Omega)$ .

**Preuve.** Considérons le cas  $\alpha \leq \pi/2$ .

Définissons les opérateurs  $R_1$  et  $R_2$  tels que  $(R_1 u_1)(\rho, \Theta, \Phi) = u_1(\rho, g_1(\Theta), \Phi)$  et  $(R_2 u_2)(\rho, \Theta, \Phi) = u_2(\rho, g_2(\Theta), \Phi)$ . Ici,  $g_1$  est un  $\mathcal{C}^1$  difféomorphisme de  $[\alpha; \pi]$  dans  $[0; \alpha]$  tel que  $g_1(\pi) = 0$  et  $g_1(\alpha) = \alpha$  tandis que  $g_2$  est un  $\mathcal{C}^1$  difféomorphisme de  $[0; \alpha]$  dans  $[\alpha; \pi]$  tel que  $g_2(0) = \pi$  et  $g_2(\alpha) = \alpha$ . Notons  $h_1$  (resp.  $h_2$ ) l'inverse de  $g_1$  (resp.  $g_2$ ).

La condition de raccord à l'interface est vérifiée. Évaluons la norme de  $R_1$ . Pour cela, donnons-nous  $u_1 \in H_{0, \Gamma_1}^1(\Omega_1)$ . En effectuant le changement de variables  $(r, \theta, \varphi) = (\rho, g_1(\Theta), \Phi)$ , nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} \|\nabla(R_1 u_1)\|_{\Omega_2}^2 &= \int_{\Omega_2} \left( \frac{\partial(R_1 u_1)}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial(R_1 u_1)}{\partial \Theta} \right)^2 + \frac{1}{(\rho \sin \Theta)^2} \left( \frac{\partial(R_1 u_1)}{\partial \Phi} \right)^2 \rho^2 d\rho \sin \Theta d\Theta d\Phi \\ &\leq \int_{\Omega_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial r} \right)^2 r^2 dr \sin(h_1(\theta)) |h_1'(\theta)| d\theta d\varphi \\ &\quad + \int_{\Omega_1} \frac{1}{r^2 |h_1'(\theta)|^2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right)^2 r^2 dr \sin(h_1(\theta)) |h_1'(\theta)| d\theta d\varphi \\ &\quad + \int_{\Omega_1} \frac{1}{(r \sin h_1(\theta))^2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \right)^2 r^2 dr \sin(h_1(\theta)) |h_1'(\theta)| d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

Il suit

$$\|R_1\|^2 \leq \max \left( \left\| \frac{|h_1'(\theta)| \sin(h_1(\theta))}{\sin \theta} \right\|_{L^\infty(]0; \alpha[)}, \left\| \frac{\sin(h_1(\theta))}{|h_1'(\theta)| \sin \theta} \right\|_{L^\infty(]0; \alpha[)}, \left\| \frac{|h_1'(\theta)| \sin \theta}{\sin(h_1(\theta))} \right\|_{L^\infty(]0; \alpha[)} \right).$$

Il ne nous reste plus qu'à trouver une fonction admissible  $\theta \mapsto h_1(\theta)$  qui minimise le terme de droite. Pour y parvenir, adoptons la stratégie suivante : choisissons une fonction  $h_1$  qui rende l'un des trois quotients ci-dessus constant par rapport à  $\theta$ . Nous prendrons

$$h_1(\theta) = \arccos\left(\frac{\cos \alpha + 1}{\cos \alpha - 1} \cos \theta - 2 \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - 1}\right), \quad \text{tel que} \quad \frac{|h_1'(\theta)| \sin(h_1(\theta))}{\sin \theta} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}, \quad \forall \theta \in ]0; \alpha[.$$

Par une étude de fonctions, on établit

$$\frac{\sin(h_1(\theta))}{|h_1'(\theta)| \sin \theta} \leq 1, \quad \frac{|h_1'(\theta)| \sin \theta}{\sin(h_1(\theta))} \leq \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}, \quad \forall \theta \in ]0; \alpha[.$$

Par conséquent, on a  $\|R_1\|^2 \leq I_\alpha$ .

Maintenant, pour  $R_2$ , nous devons minimiser

$$\max \left( \left\| \frac{|h_2'(\theta)| \sin(h_2(\theta))}{\sin \theta} \right\|_{L^\infty(] \alpha; \pi[)}, \left\| \frac{\sin(h_2(\theta))}{|h_2'(\theta)| \sin \theta} \right\|_{L^\infty(] \alpha; \pi[)}, \left\| \frac{|h_2'(\theta)| \sin \theta}{\sin(h_2(\theta))} \right\|_{L^\infty(] \alpha; \pi[)} \right).$$

Interrogeons notre consultant Xavier Claeys à Toulouse : « Pour ce problème, il faut considérer la projection stéréographique ». Les idées de Xavier sont généralement bonnes. Écoutons-le. Considérons la projection stéréographique

$$g_2(\Theta) = 2 \arctan\left(\frac{\tan(\alpha/2)^2}{\tan(\Theta/2)}\right) \quad \text{de sorte que} \quad h_2(\theta) = 2 \arctan\left(\frac{\tan(\alpha/2)^2}{\tan(\theta/2)}\right).$$

5. La valeur  $(1 + \cos \alpha)/(1 - \cos \alpha)$  est égale au rapport de l'angle solide occupé par le matériau négatif sur l'angle solide occupé par le matériau positif.

On trouve

$$\frac{|h'_2(\theta)| \sin(h_2(\theta))}{\sin \theta} \leq 1, \quad \frac{\sin(h_2(\theta))}{|h'_2(\theta)| \sin \theta} = 1, \quad \frac{|h'_2(\theta)| \sin \theta}{\sin(h_2(\theta))} = 1, \quad \forall \theta \in ]\alpha; \pi[,$$

et donc  $\|R_2\|^2 \leq 1$ . On conclut alors comme dans la preuve du Théorème 1.1.1.

Le cas  $\pi/2 < \alpha < \pi$  se traite en échangeant les rôles de  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . ■

**Remarque 1.6.6** *Le choix des opérateurs de transfert  $R_1, R_2$  dans cette preuve peut dérouter le lecteur. Pourtant, à ce jour, ces  $R_1, R_2$  particuliers sont les opérateurs qui nous permettent d'obtenir le plus petit intervalle critique. On ne peut pas espérer améliorer le résultat apporté par l'utilisation de  $R_2$ . En effet, pour  $\kappa_\sigma = -1$ , l'opérateur  $A$  n'est pas de type Fredholm. Si nous avions défini  $R_1$  à partir de la projection stéréographique, nous aurions obtenu un résultat moins bon que celui énoncé dans le Théorème 1.6.5, i.e. nous aurions obtenu un intervalle critique plus grand. Il est assez surprenant que l'intervalle critique ne soit pas « symétrique » par rapport à  $-1$ , c'est-à-dire de la forme  $[-a; -1/a]$  avec  $a > 1$ . La conjecture est tout de même que  $A$  n'est pas de type Fredholm dans l'intervalle critique du Théorème 1.6.5. Pour montrer ce résultat, il faut calculer les singularités, ce qui est moins évident qu'en 2D.*

### 1.6.5 Coin de Fichera

Dans un domaine de  $\mathbb{R}^3$ , il peut se produire que les arêtes s'intersectent. Au niveau de cette intersection, il apparaît à la fois des singularités liées aux arêtes et au coin, situation complexe que l'on ne rencontre pas en 2D. Ici, nous considérons un exemple caractéristique d'une telle configuration : le « fameux » coin de Fichera. Définissons  $\Omega := ]-1; 1[^3$ ,  $\Omega_1 := ]0; 1[^3$  et  $\Omega_2 := \Omega \setminus \overline{\Omega_1}$ .

**Théorème 1.6.7** (COIN DE FICHERA) *Supposons*

$$\max(\sigma_1^- / \sigma_2^+, \sigma_2^- / \sigma_1^+) > 7.$$

*Alors, il existe un isomorphisme  $T \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega))$  tel que la forme  $a$  soit  $T$ -coercive. Par conséquent,  $A : u \mapsto -\operatorname{div}(\sigma \nabla u)$  est un isomorphisme de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $H^{-1}(\Omega)$ .*

**Preuve.** Construisons l'opérateur  $R_1$  à l'aide de symétries<sup>6</sup> :

$$(R_1 u_1)(x, y, z) = \begin{cases} u_1(-x, y, z) & \text{dans } \Omega_2^1 := ]-1; 0[ \times ]0; 1[^2 \\ u_1(x, -y, z) & \text{dans } \Omega_2^2 := ]0; 1[ \times ]-1; 0[ \times ]0; 1[ \\ u_1(x, y, -z) & \text{dans } \Omega_2^3 := ]0; 1[^2 \times ]-1; 0[ \\ u_1(-x, -y, z) & \text{dans } \Omega_2^4 := ]-1; 0[ \times ]0; 1[ \\ u_1(-x, y, -z) & \text{dans } \Omega_2^5 := ]-1; 0[ \times ]0; 1[ \times ]-1; 0[ \\ u_1(x, -y, -z) & \text{dans } \Omega_2^6 := ]0; 1[ \times ]-1; 0[^2 \\ u_1(-x, -y, -z) & \text{dans } \Omega_2^7 := ]-1; 0[^3 \end{cases}.$$

Introduisons ensuite  $R_2$  défini par

$$(R_2 u_2)(x, y, z) = u_2^1(-x, y, z) + u_2^2(x, -y, z) + u_2^3(x, y, -z) \\ - u_2^4(-x, -y, z) - u_2^5(-x, y, -z) - u_2^6(x, -y, -z) \\ + u_2^7(-x, -y, -z).$$

Ci-dessus, pour  $\ell = 1 \dots 7$ ,  $u_2^\ell$  désigne la restriction de  $u_2$  à  $\Omega_2^\ell$ .

On peut vérifier que  $R_1$  et  $R_2$  satisfont la condition de raccord à l'interface (les signes dans la

6. Une approche similaire a été récemment utilisée par Nicaise et Venel dans [129] pour la géométrie de  $\mathbb{R}^2$  :  $\Omega := ]-1; 1[^2$  et  $\Omega_1 := ]0; 1[^2$ .

définition de  $R_2$  ont été choisis pour que ce soit le cas), de sorte que  $R_1 \in \mathcal{R}_1$  et  $R_2 \in \mathcal{R}_2$ . On obtient alors pour tout  $u_1 \in H_{0,\Gamma_1}^1(\Omega_1)$ ,  $\|\nabla(R_1 u_1)\|_{\Omega_2}^2 = 7 \|\nabla u_1\|_{\Omega_1}^2$ . D'autre part, pour tout  $u_2 \in H_{0,\Gamma_2}^1(\Omega_2)$ , on a  $\|\nabla(R_2 u_2)\|_{\Omega_1}^2 \leq 7 \|\nabla u_2\|_{\Omega_2}^2$ . Pour montrer ce résultat, on utilise l'inégalité  $(\sum_{k=1}^7 a_k)^2 \leq 7 \sum_{k=1}^7 a_k^2$ , pour tout  $(a_1, \dots, a_7) \in \mathbb{R}^7$ . On termine alors comme dans la preuve du Théorème 1.1.1. ■

**Remarque 1.6.8** On peut étendre ce résultat à la dimension  $d \in \mathbb{N}^*$ . Définissons  $\Omega := ]-1; 1[^d$ ,  $\Omega_1 := ]0; 1[^d$  et  $\Omega_2 := \Omega \setminus \overline{\Omega_1}$ . L'opérateur  $A : u \mapsto -\operatorname{div}(\sigma \nabla u)$  est un isomorphisme de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $H^{-1}(\Omega)$  lorsque  $\max(\sigma_1^-/\sigma_2^+, \sigma_2^-/\sigma_1^+) > 2^d - 1$ . En dimension 2, on a  $2^d - 1 = 3$ . En dimension 3, on a  $2^d - 1 = 7$ .

### 1.6.6 Géométries générales de $\mathbb{R}^3$

Pour établir le caractère Fredholm de l'opérateur  $A$  dans le cas d'une interface générale de  $\mathbb{R}^3$ , on peut de nouveau procéder par localisation, comme dans le §1.3 (cf. Théorème 1.3.3). On pourrait

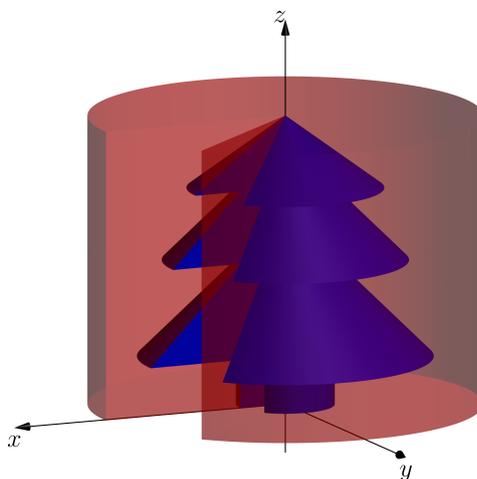


FIGURE 1.19 – Un exemple de géométrie 3D qui peut être traité par localisation.

par ailleurs donner des résultats d'optimalité pour cette méthode de la T-coercivité dans le même esprit que ce qui est fait dans le §1.5. Nous n'entrons pas dans les détails car comme nous l'avons déjà exprimé, le calcul des singularités en 3D n'a rien d'évident. Commentons tout de même le cas du coin de Fichera. Pour simplifier, nous supposons que les coefficients  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont constants, et nous nous plaçons dans une situation où le contraste  $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1$  est situé dans l'intervalle critique  $[-7; -1/7]$ . Autrement dit, nous nous intéressons précisément au cas qui n'entre pas dans le cadre du Théorème 1.6.7. On distingue alors les situations suivantes.

- Pour  $\kappa_\sigma = -1$ , il apparaît des *singularités surfaciques*. En effet, en chaque point des faces de l'interface, on peut construire une suite de fonctions pour montrer que  $A$  n'est pas Fredholm. Il suffit pour cela de procéder comme dans la preuve du Théorème 1.5.3.
- Pour  $\kappa_\sigma \in ]-3; -1/3[$ , il apparaît des *singularités linéiques*. En chaque point des trois arêtes de l'interface, on peut construire une suite de fonctions pour montrer que  $A$  n'est pas Fredholm à l'instar de ce qui est fait dans la preuve du Théorème 1.5.5.
- Pour  $\kappa_\sigma \in ]-7; -1/7[$ , on peut imaginer qu'il apparaît une *singularité ponctuelle* au niveau de l'intersection des arêtes de l'interface.

## 1.7 Conditions aux limites de type Neumann

Jusqu'à présent, nous avons imposé une condition aux limites de Dirichlet homogène sur la frontière. En utilisant un relèvement, on prouve de façon classique que les résultats obtenus précédemment sont également valides en imposant une condition de Dirichlet non homogène. Dans cette section, nous nous proposons d'étudier l'influence d'une condition de Neumann. Intéressons-nous au problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega, \\ \sigma \partial u / \partial \mathbf{n} = g \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right., \quad (1.26)$$

avec  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ . En multipliant par 1 dans l'équation volumique, et en intégrant par parties, on remarque que les termes sources  $f$  et  $g$  doivent vérifier la condition de compatibilité  $(f, 1)_\Omega + \langle g, 1 \rangle_{\partial\Omega} = 0$  pour que le problème (1.26) admette une solution. Ici,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\Omega}$  désigne le crochet de dualité  $H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)$ . D'autre part, si  $u$  est une solution de (1.26) alors  $u + cste$  est également une solution de (1.26). Ceci nous conduit à introduire l'espace

$$H_\Sigma^1(\Omega) := \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid \int_\Sigma v = 0 \right\}.$$

Rappelons que  $\Sigma$  désigne l'interface entre  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . La condition de moyenne nulle sur l'interface que nous imposons dans l'espace  $H_\Sigma^1(\Omega)$  permet d'éliminer les constantes. Si  $C$  appartient à  $H_\Sigma^1(\Omega)$ , alors  $C = 0$ . Un peu plus loin, nous verrons un second moyen de quotienter par les constantes, plus classique, en cherchant une solution à moyenne nulle sur  $\Omega$ . Cependant dans l'approche T-coercivité que nous suivons, nous avons besoin de construire des isomorphismes de l'espace variationnel et nous verrons que les constructions géométriques que nous avons proposées lors de l'étude du problème avec condition de Dirichlet homogène s'accordent mieux avec l'espace  $H_\Sigma^1(\Omega)$ .

En utilisant le théorème de Rellich qui indique que l'injection de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  est compacte et en se servant du fait que  $\Omega$  est connexe, on prouve en raisonnant par l'absurde le

**Lemme 1.7.1** *L'application  $(v, v') \mapsto (\nabla v, \nabla v')_\Omega$  définit un produit scalaire sur  $H_\Sigma^1(\Omega)$ .*

Considérons alors le problème

$$(\mathcal{P}_N) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_\Sigma^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a^\Sigma(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H_\Sigma^1(\Omega), \end{array} \right.$$

avec  $a^\Sigma(u, v) := (\sigma \nabla u, \nabla v)_\Omega$  et  $l(v) := (f, v)_\Omega + \langle g, v \rangle_{\partial\Omega}$  pour tout  $u, v$  dans  $H_\Sigma^1(\Omega)$ .

Si  $u$  est solution de  $(\mathcal{P}_N)$  et si  $f$  et  $g$  satisfont la condition de compatibilité, alors  $u$  vérifie le problème (1.26). Concentrons-nous sur l'étude du problème  $(\mathcal{P}_N)$ . Avec le théorème de représentation de Riesz, introduisons l'opérateur borné  $A^\Sigma : H_\Sigma^1(\Omega) \rightarrow H_\Sigma^1(\Omega)$  tel que pour tout  $v, v' \in H_\Sigma^1(\Omega)$ ,  $(\nabla(A^\Sigma v), \nabla v')_\Omega = a^\Sigma(v, v')$ . Considérons également le terme source  $F \in H_\Sigma^1(\Omega)$  tel que pour tout  $v' \in H_\Sigma^1(\Omega)$ ,  $(\nabla F, \nabla v')_\Omega = l(v')$ . L'élément  $u \in H_\Sigma^1(\Omega)$  vérifie  $A^\Sigma u = F$  si et seulement si  $u$  est solution de  $(\mathcal{P}_N)$ .

À l'instar de ce que nous avons fait pour le problème de Dirichlet, pour  $k = 1, 2$ , introduisons l'espace des restrictions des éléments de  $H_\Sigma^1(\Omega)$  à  $\Omega_k$  :

$$H_\Sigma^1(\Omega_k) := \left\{ v|_{\Omega_k}, v \in H_\Sigma^1(\Omega) \right\}.$$

Si  $R_1^\Sigma \in \mathcal{L}(H_\Sigma^1(\Omega_1), H_\Sigma^1(\Omega_2))$  et  $R_2^\Sigma \in \mathcal{L}(H_\Sigma^1(\Omega_2), H_\Sigma^1(\Omega_1))$ , nous notons

$$\|R_1^\Sigma\| := \sup_{v \in H_\Sigma^1(\Omega_1), \|\nabla v\|_{\Omega_1}=1} \|\nabla(R_1^\Sigma v)\|_{\Omega_2} \quad \text{et} \quad \|R_2^\Sigma\| := \sup_{v \in H_\Sigma^1(\Omega_2), \|\nabla v\|_{\Omega_2}=1} \|\nabla(R_2^\Sigma v)\|_{\Omega_1}.$$

L'équivalent du Théorème 1.1.1 pour le problème de Neumann  $(\mathcal{P}_N)$  s'énonce de la manière suivante.

**Théorème 1.7.2** Soit  $R_1^\Sigma \in \mathcal{L}(H_\Sigma^1(\Omega_1), H_\Sigma^1(\Omega_2))$  un opérateur vérifiant la condition de raccord  $(R_1^\Sigma u_1)|_\Sigma = u_1|_\Sigma$  pour tout  $u_1 \in H_\Sigma^1(\Omega_1)$ . Définissons

$$T_1^\Sigma u = \begin{cases} u_1 & \text{dans } \Omega_1 \\ -u_2 + 2R_1^\Sigma u_1 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases} . \quad (1.27)$$

Si  $\sigma_1^-/\sigma_2^+ > \|R_1^\Sigma\|^2$ , alors la forme  $a^\Sigma$  est  $T_1^\Sigma$ -coercive : il existe une constante  $C > 0$  telle que  $a^\Sigma(u, T_1^\Sigma u) \geq C \|\nabla u\|_\Omega^2$  pour tout  $u \in H_\Sigma^1(\Omega)$ . Dans ce cas,  $A^\Sigma : H_\Sigma^1(\Omega) \rightarrow H_\Sigma^1(\Omega)$  est un isomorphisme.

Soit  $R_2^\Sigma \in \mathcal{L}(H_\Sigma^1(\Omega_2), H_\Sigma^1(\Omega_1))$  un opérateur vérifiant la condition de raccord  $(R_2^\Sigma u_2)|_\Sigma = u_2|_\Sigma$  pour tout  $u_2 \in H_\Sigma^1(\Omega_2)$ . Définissons

$$T_2^\Sigma u = \begin{cases} u_1 - 2R_2^\Sigma u_2 & \text{dans } \Omega_1 \\ -u_2 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases} . \quad (1.28)$$

Si  $\sigma_2^-/\sigma_1^+ > \|R_2^\Sigma\|^2$ , alors la forme  $a^\Sigma$  est  $T_2^\Sigma$ -coercive : il existe une constante  $C > 0$  telle que  $a^\Sigma(u, T_2^\Sigma u) \geq C \|\nabla u\|_\Omega^2$  pour tout  $u \in H_\Sigma^1(\Omega)$ . Dans ce cas,  $A^\Sigma : H_\Sigma^1(\Omega) \rightarrow H_\Sigma^1(\Omega)$  est un isomorphisme.

**Preuve.** Pour montrer ce résultat, il suffit d'adapter la preuve du Théorème 1.1.1. Mentionnons simplement que  $T_1^\Sigma$  et  $T_2^\Sigma$  sont bien à valeurs dans  $H_\Sigma^1(\Omega)$ . En effet, on a  $\int_\Sigma T_1^\Sigma u = \int_\Sigma u_1 = 0$  et  $\int_\Sigma T_2^\Sigma u = -\int_\Sigma u_2 = 0$  pour tout  $u \in H_\Sigma^1(\Omega)$ . ■

### 1.7.1 Géométries particulières

Reconsidérons les cas particuliers étudiés dans les paragraphes 1.2 (2D) et 1.6 (3D). En définissant  $R_1^\Sigma$  et  $R_2^\Sigma$  de la même façon que  $R_1$  et  $R_2$ , on montre que  $A^\Sigma : H_\Sigma^1(\Omega) \rightarrow H_\Sigma^1(\Omega)$  constitue un isomorphisme pour une condition sur le contraste identique à celle des Théorèmes 1.2.1 (DOMAINE SYMÉTRIQUE), 1.2.3 (SOMMET INTÉRIEUR), 1.2.10 (INTERFACE RÉGULIÈRE), 1.6.1 (ARÊTE PRISMATIQUE INTERNE), 1.6.2 (ARÊTE AXISYMMÉTRIQUE INTERNE), 1.6.5 (POINTE CONIQUE INTERNE) et 1.6.7 (COIN DE FICHERA). En 2D, seul diffère le résultat pour le SOMMET EXTÉRIEUR. Étudions le problème  $(\mathcal{P}_N)$  pour cette configuration.

Rappelons la géométrie considérée. On note  $(r, \theta)$  les coordonnées polaires. Pour  $R > 0$  et  $0 < \alpha < \gamma < 2\pi$ , définissons :

$$\begin{aligned} \Omega_1 &:= \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \mid 0 < r < R, 0 < \theta < \alpha\} ; \\ \Omega_2 &:= \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \mid 0 < r < R, \alpha < \theta < \gamma\} . \end{aligned}$$

**Théorème 1.7.3** Supposons

$$\begin{cases} \sigma_1^-/\sigma_2^+ > \frac{\gamma - \alpha}{\alpha} & \text{ou } \sigma_2^-/\sigma_1^+ > 1 & \text{si } \alpha \leq \gamma/2 ; \\ \sigma_2^-/\sigma_1^+ > \frac{\gamma - \alpha}{\alpha} & \text{ou } \sigma_1^-/\sigma_2^+ > 1 & \text{si } \alpha \geq \gamma/2 . \end{cases}$$

Alors, il existe un isomorphisme  $T^\Sigma \in \mathcal{L}(H_\Sigma^1(\Omega))$  tel que la forme  $a^\Sigma$  soit  $T^\Sigma$ -coercive. Par conséquent,  $A^\Sigma : H_\Sigma^1(\Omega) \rightarrow H_\Sigma^1(\Omega)$  est un isomorphisme.

**Preuve.** Considérons le cas  $\alpha \leq \gamma/2$ . Définissons  $R_1^\Sigma$  et  $R_2^\Sigma$  les opérateurs tels que

$$(R_1^\Sigma u_1)(\rho, \Theta) = u_1(\rho, \frac{\alpha}{\alpha - \gamma} (\Theta - \gamma)) \quad ; \quad (R_2^\Sigma u_2)(\rho, \Theta) = u_2^\Sigma(\rho, 2\alpha - \Theta) .$$

D'une part, on remarque que  $(R_1^\Sigma u_1)|_\Sigma = u_1|_\Sigma$  pour tout  $u_1 \in H_\Sigma^1(\Omega_1)$  et  $(R_2^\Sigma u_2)|_\Sigma = u_2|_\Sigma$  pour tout  $u_2 \in H_\Sigma^1(\Omega_2)$ . D'autre part, on trouve  $\|R_1^\Sigma\|^2 = (\gamma - \alpha)/\alpha$  et  $\|R_2^\Sigma\|^2 = 1$ . On conclut alors avec le Théorème 1.7.2.

Pour traiter le cas  $\alpha \geq \gamma/2$ , on échange les rôles de  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . ■

**Remarque 1.7.4** *Expliquons pourquoi les résultats pour les problèmes avec condition de Dirichlet et Neumann diffèrent pour le sommet intérieur. Pour fixer les idées, supposons  $\alpha \leq \gamma/2$ . Pour définir  $R_1$ , nous pouvons procéder à une symétrie par rapport à l'interface et à un prolongement par zéro. Cela constitue bien un opérateur à valeurs dans  $H_{0,\Gamma_2}^1(\Omega_2)$ . Pour  $R_1^\Sigma$ , on ne peut opérer ainsi car cela ne donne pas un opérateur à valeurs dans  $H_\Sigma^1(\Omega_2)$ , en raison du possible saut de trace en  $\theta = 2\alpha$ . Inversement, pour définir  $R_2$ , nous devons effectuer une dilatation en  $\theta$  de façon à vérifier la condition de Dirichlet homogène en  $\theta = 0$ . Dans  $H_\Sigma^1(\Omega)$ , il n'y a pas cette contrainte. Une simple symétrie par rapport à l'interface suffit pour construire  $R_2^\Sigma$ .*

### 1.7.2 Interface quelconque en 2D

Nous n'écrivons pas le processus de localisation pour l'étude du problème ( $\mathcal{P}_N$ ) car nous démontrerons plus loin dans ce document deux résultats qui permettent de passer outre cette étape technique en 2D. Pour les énoncer, introduisons avec le Théorème de Riesz les opérateurs bornés  $A(\sigma) : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$  et  $A^\Sigma(\sigma) : H_\Sigma^1(\Omega) \rightarrow H_\Sigma^1(\Omega)$  tels que

$$\begin{aligned} (\nabla(A(\sigma)u), \nabla v)_\Omega &= (\sigma \nabla u, \nabla v)_\Omega, & \forall (u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega); \\ (\nabla(A^\Sigma(\sigma)u), \nabla v)_\Omega &= (\sigma \nabla u, \nabla v)_\Omega, & \forall (u, v) \in H_\Sigma^1(\Omega) \times H_\Sigma^1(\Omega). \end{aligned}$$

Avec cette notation, on a  $A^\Sigma(\sigma) = A^\Sigma$ . Dans le Chapitre 7, nous montrerons que  $A(\sigma) : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$  est un isomorphisme si et seulement si  $A^\Sigma(\sigma^{-1}) : H_\Sigma^1(\Omega) \rightarrow H_\Sigma^1(\Omega)$  est un isomorphisme (Théorème 7.2.1). D'autre part, nous prouverons que  $A(\sigma) : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$  est Fredholm d'indice zéro si et seulement si  $A^\Sigma(\sigma^{-1}) : H_\Sigma^1(\Omega) \rightarrow H_\Sigma^1(\Omega)$  est Fredholm d'indice zéro (Théorème 7.2.3).

Ceci montre que  $A(\sigma)$  n'est pas de type Fredholm si et seulement si  $A^\Sigma(\sigma^{-1})$  n'est pas de type Fredholm. En utilisant les résultats du §1.5 qui donnent des critères pour que  $A(\sigma)$  ne soit pas de type Fredholm, on obtient des conditions pour que  $A^\Sigma(\sigma^{-1})$  ne soit pas de type Fredholm.

Ainsi, en 2D, les problèmes avec condition aux limites de Dirichlet et condition aux limites de Neumann sont intimement liés. Ce résultat remarquable ne semble pas exister en 3D.

**Remarque 1.7.5** *Considérons de nouveau le cas du sommet extérieur (cf. §1.2.3). Supposons  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  constants. Fixons  $\gamma = \pi$  et  $\alpha = \pi/4$ . Avec le Théorème 1.2.7, on prouve que  $A(\sigma)$  est un isomorphisme, dès que  $\kappa_\sigma \in ]-\infty; -3[ \cup ]-1; 0[$ . Le Théorème 1.5.5 permet lui de montrer que  $A(\sigma)$  n'est pas de type Fredholm pour  $\kappa_\sigma \in ]-3; -1[$ . Le Théorème 1.7.3 indique que  $A^\Sigma(\sigma)$  est un isomorphisme dès que  $\kappa_\sigma \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1/3; 0[$ . Ces résultats sont donc parfaitement cohérents avec les Théorèmes 7.2.1 et 7.2.3 que nous venons de mentionner.*

**Remarque 1.7.6** *Revenons sur le cas du sommet intérieur (cf. §1.2.2 et Remarque 1.5.7). Fixons  $\alpha \in ]0; \pi[$ . Appelons cette géométrie  $\mathcal{G}$ . Supposons  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  constants. En vertu du Théorème 1.2.3, nous savons que  $A(\sigma)$  définit un isomorphisme lorsque  $\kappa_\sigma \in ]-\infty; -(2\pi - \alpha)/\alpha[ \cup ]-\alpha/(2\pi - \alpha); 0[$ . Par ailleurs, le Théorème 1.5.5 indique que  $A(\sigma)$  n'est pas de type Fredholm pour  $\kappa_\sigma \in ]-(2\pi - \alpha)/\alpha; -\alpha/(2\pi - \alpha)[$ . Précisons la structure des singularités (voir la preuve du Théorème 1.5.5) qui sont responsables de cet intervalle critique.*

*Introduisons la géométrie du sommet extérieur (cf. §1.2.3) avec  $\gamma = \pi$  et un secteur, pour  $\Omega_1$ , d'ouverture  $\alpha/2$ . Appelons cette géométrie  $\mathcal{G}^{1/2}$ . Nous pouvons voir cette configuration comme un « demi sommet intérieur ».*

*D'après le Théorème 1.5.5, l'opérateur associé au problème avec condition aux limites de Dirichlet dans  $\mathcal{G}^{1/2}$  n'est pas de type Fredholm pour  $\kappa_\sigma \in ]-(\pi - \alpha/2)/(\alpha/2); -1[ = ]-(2\pi - \alpha)/\alpha; -1[$ . Ceci s'explique par l'existence d'une singularité qui « sort » de  $H^1$  pour de telles valeurs du contraste. En appliquant une antisymétrie à cette singularité, on construit une singularité dans  $\mathcal{G}$ . L'existence de cette dernière empêche  $A(\sigma)$  d'être de type Fredholm pour  $\kappa_\sigma \in ]-(2\pi - \alpha)/\alpha; -1[$ .*

*En reprenant les idées de la preuve du Théorème 1.5.5, on peut montrer que l'opérateur associé*

au problème avec condition aux limites de Neumann dans  $\mathcal{G}^{1/2}$  n'est pas de type Fredholm pour  $\kappa_\sigma \in [-1; -(\alpha/2)/(\pi - (\alpha/2))]= [-1; -\alpha/(2\pi - \alpha)]$ . En symétrisant la singularité associée à ce problème, on obtient une singularité dans  $\mathcal{G}$  qui permet de montrer que  $A(\sigma)$  n'est pas de type pour  $\kappa_\sigma \in [-1; -\alpha/(2\pi - \alpha)]$ .

### 1.7.3 Travail dans l'espace des fonctions à moyenne nulle

De façon plus usuelle, nous aurions pu supprimer les constantes de l'espaces variationnel en imposant aux fonctions d'être à moyenne nulle sur  $\Omega$ . Introduisons l'espace

$$H^1_{\#}(\Omega) := \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid \int_{\Omega} v = 0 \right\}.$$

L'application  $(v, v') \mapsto (\nabla v, \nabla v')_{\Omega}$  définit un produit scalaire sur  $H^1_{\#}(\Omega)$ . Considérons alors le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1_{\#}(\Omega) \text{ tel que} \\ a^{\#}(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H^1_{\#}(\Omega), \end{array} \right. \quad (1.29)$$

avec  $a^{\#}(u, v) := (\sigma \nabla u, \nabla v)_{\Omega}$  et  $l(v) := (f, v)_{\Omega} + \langle g, v \rangle_{\partial\Omega}$  pour tout  $u, v$  dans  $H^1_{\#}(\Omega)$ .

Avec le théorème de représentation de Riesz, introduisons l'opérateur borné  $A^{\#} : H^1_{\#}(\Omega) \rightarrow H^1_{\#}(\Omega)$  tel que pour tout  $v, v' \in H^1_{\#}(\Omega)$ ,  $(\nabla(A^{\#}v), \nabla v')_{\Omega} = a^{\#}(v, v')$ . Le problème (1.29) est bien posé pour tout  $l \in H^1_{\#}(\Omega)^*$  (le dual topologique de  $H^1_{\#}(\Omega)$  avec la notation américaine) si et seulement si  $A^{\#}$  définit un isomorphisme.

Considérons les opérateurs

$$P^{\Sigma}_{\#} : H^1_{\#}(\Omega) \rightarrow H^1_{\Sigma}(\Omega) \quad \text{et} \quad P^{\#}_{\Sigma} : H^1_{\Sigma}(\Omega) \rightarrow H^1_{\#}(\Omega)$$

$$u \mapsto u - \int_{\Sigma} u / \int_{\Sigma} 1 \quad \text{et} \quad u \mapsto u - \int_{\Omega} u / \int_{\Omega} 1.$$

On vérifie sans difficulté que  $P^{\Sigma}_{\#}$  et  $P^{\#}_{\Sigma}$  sont des isomorphismes avec  $P^{\Sigma}_{\#} \circ P^{\#}_{\Sigma} = \text{Id}_{H^1_{\Sigma}(\Omega)}$  et  $P^{\#}_{\Sigma} \circ P^{\Sigma}_{\#} = \text{Id}_{H^1_{\#}(\Omega)}$ . Ces opérateurs vont nous permettre de prouver qu'on a des résultats identiques pour  $A^{\Sigma}$  et  $A^{\#}$ .

**Proposition 1.7.7** *L'opérateur  $A^{\#}$  vérifie  $A^{\#} = P^{\#}_{\Sigma} \circ A^{\Sigma} \circ P^{\Sigma}_{\#}$ . Par conséquent, on a les deux assertions suivantes.*

*L'opérateur  $A^{\#} : H^1_{\#}(\Omega) \rightarrow H^1_{\#}(\Omega)$  définit un isomorphisme si et seulement si  $A^{\Sigma} : H^1_{\Sigma}(\Omega) \rightarrow H^1_{\Sigma}(\Omega)$  constitue un isomorphisme.*

*L'opérateur  $A^{\#} : H^1_{\#}(\Omega) \rightarrow H^1_{\#}(\Omega)$  est Fredholm d'indice zéro si et seulement si  $A^{\Sigma} : H^1_{\Sigma}(\Omega) \rightarrow H^1_{\Sigma}(\Omega)$  est Fredholm d'indice zéro.*

**Preuve.** Montrons  $A^{\#} = P^{\#}_{\Sigma} \circ A^{\Sigma} \circ P^{\Sigma}_{\#}$ . Pour tout  $u, v$  dans  $H^1_{\#}(\Omega)$ , on a

$$\begin{aligned} (\nabla(P^{\#}_{\Sigma}(A^{\Sigma}(P^{\Sigma}_{\#}u))), \nabla v)_{\Omega} &= (\nabla(A^{\Sigma}(P^{\Sigma}_{\#}u)), \nabla v)_{\Omega} \\ &= (\nabla(A^{\Sigma}(P^{\Sigma}_{\#}u)), \nabla(P^{\#}_{\Sigma}v))_{\Omega} \\ &= (\sigma \nabla(P^{\Sigma}_{\#}u), \nabla(P^{\#}_{\Sigma}v))_{\Omega} = (\sigma \nabla u, \nabla v)_{\Omega} = (\nabla(A^{\#}u), \nabla v)_{\Omega}. \end{aligned}$$

Ceci permet d'obtenir le résultat de la proposition. ■

## 1.8 Calculs manquants

### 1.8.1 Calculs utilisés dans la Section 1.5

Commençons par détailler un calcul intervenant dans la preuve du Théorème 1.5.3. Soit  $b > 0$  tel que  $[-b; b] \times [-b; b] \subset \Omega$ . Reconsidérons la suite  $(u_n)_n$  définie en (1.14) et introduisons une fonction de troncature  $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ , égale à 1 dans  $[-b/2; b/2] \times [-b/2; b/2]$ .

**Lemme 1.8.1** *On a  $\|\chi u_n\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .*

**Preuve.** Considérons  $\tilde{D} := [-b/2; b/2] \times [-b/2; b/2]$ , et écrivons

$$\begin{aligned} \|\chi u_n\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}^2 &\geq \|\nabla u_n\|_{\tilde{D}}^2 \geq \|\partial_t u_n\|_{\tilde{D}}^2 \\ &\geq 2 \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^{b/2} n^2 \cos^2 nt \frac{\sinh^2 n(b-s)}{e^{2nb}} ds dt \\ &\geq 2n^2 \int_{-b/2}^{b/2} \cos^2 nt dt \int_0^{b/2} \frac{\sinh^2 n(b-s)}{e^{2nb}} ds \\ &\geq 2n^2 \left[ \frac{b}{2} + \frac{\sin nb}{2n} \right] \int_0^{b/2} \frac{\sinh^2 n(b-s)}{e^{2nb}} ds. \end{aligned}$$

Mais, l'on a

$$\begin{aligned} 4 \int_0^{b/2} \frac{\sinh^2 n(b-s)}{e^{2nb}} ds &= \int_0^{b/2} e^{-2ns} - 2e^{-2nb} + e^{2ns-4nb} ds \\ &= \left( \frac{1}{2n} - \frac{e^{-nb}}{2n} \right) - (b e^{-2nb}) + e^{-4nb} \left( \frac{e^{nb}}{2n} - \frac{1}{2n} \right) \sim \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe  $C > 0$ , telle que pour  $n$  assez grand, on ait  $\|\chi u_n\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}^2 > Cn$ . ■

Présentons ensuite un calcul utilisé dans la preuve du Théorème 1.5.5. Définissons  $u_n(r, \theta) := \chi(r)S_n(r, \theta)$ , où  $\chi$  est une fonction de troncature égale à 1 pour  $0 \leq r \leq d/2$  et  $S_n(r, \theta) := r^{i\eta+1/n}\varphi(\theta)$ .

**Lemme 1.8.2** *On a  $\|u_n\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .*

**Preuve.** Pour obtenir ce résultat, il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{\mathbb{H}_0^1(\Omega)}^2 &\geq \int_0^{2\pi} \int_0^{d/2} r^{-2+2/n} |\partial_\theta \varphi|^2 r dr d\theta \\ &\geq C \int_0^{d/2} r^{-1+2/n} d\theta \\ &\geq Cn(d/2)^{2/n}/2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty. \end{aligned}$$
■

### 1.8.2 Coordonnées toroïdales

Considérons la géométrie de la Figure 1.17 et introduisons le changement de variables  $(x, y, z) = (\cos \theta (R + r \cos \varphi), \sin \theta (R + r \cos \varphi), r \sin \varphi)$ , pour  $R > 0$ . La matrice jacobienne associée à ce changement de variables a pour expression

$$\begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -\sin \theta (R + r \cos \varphi) & -r \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta (R + r \cos \varphi) & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \varphi & 0 & r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Le volume élémentaire dans les coordonnées toroïdales est alors  $r(R + r \cos \varphi) dr d\varphi d\theta$ .  
D'autre part, le gradient en coordonnées toroïdales s'écrit

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{1}{R + r \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \end{pmatrix}.$$

