

# Effet Lehmann électrique ou flexo-électricité ?

*Un préjugé, c'est une vérité qu'on affirme trop. Il y a des vérités partout, mais il ne faut pas trop y croire, ni surtout y tenir.*

J. RENARD, Journal

Ce chapitre est consacré à l'expérience de Padmini et Madhusudana visant à mesurer l'analogie électrique de l'effet Lehmann et sa dépendance avec la torsion spontanée. Après l'avoir décrite, nous comparerons les différentes interprétations possibles des observations et nous concluons quant à leurs vraisemblances respectives. Le détail des calculs optiques est donné en annexe.

Le travail présenté dans ce chapitre a donné lieu à une publication [[Deq07a](#)].

## 4.1 Expérience de Padmini et Madhusudana

### 4.1.1 Principe et dispositif expérimental

Padmini et Madhusudana [[Pad93](#)] ont étudié l'intensité lumineuse transmise entre polariseurs croisés à travers une cellule traitée en ancrage planaire parallèle, remplie avec un cholestérique compensé<sup>1</sup> et soumise à

---

1. Il s'agit d'un mélange de 35,6% de 4-(4-n-pentylphényl)benzoate de 2-cyano-4-heptylphényle, 6,5% de 7CB et 57,9% de CC en concentration molaire.

un champ électrique alternatif à basse fréquence. Si l'on exclut tout couplage linéaire tel que l'effet Lehmann, l'excitation du directeur est due au couple diélectrique, quadratique en champ électrique, et à la fréquence double de celle de la tension appliquée. Seul un effet linéaire ou d'ordre impair peut donc engendrer des oscillations du directeur et un signal optique à la fréquence d'excitation — sauf dans le cas particulier des oscillations paramétriques qui ne peuvent se développer ici, le régime étant sur-amorti. Le but de l'expérience de Padmini et Madhusudana est de mettre en évidence l'effet Lehmann électrique par l'observation de l'harmonique 1 et de mesurer l'amplitude du signal au voisinage de la température de compensation du cholestérique pour tester la théorie proposée par Pleiner et Brand.

Dans leur expérience, un laser He-Ne est utilisé comme source lumineuse. Le polariseur fait un angle de  $\pi/8$  avec la direction d'ancrage prise suivant l'axe  $x$ . La lumière est reçue sur une photodiode. Une détection synchrone permet d'analyser la réponse à la fréquence du champ électrique imposé — harmonique 1 — ou à la fréquence double — harmonique 2. Enfin, leur étude est faite de part et d'autre de la température d'inversion et dans des cellules très fines, d'épaisseur de l'ordre de  $3 \mu\text{m}$ .

#### 4.1.2 Résultats de Padmini et Madhusudana

Les principaux résultats expérimentaux obtenus par ces deux auteurs se résument de la façon suivante :

1. Pour une tension inférieure au seuil de Fréédéricksz, aucun signal n'est perceptible.
2. Au-dessus du seuil de Fréédéricksz, l'harmonique 1 est en quadrature par rapport à l'excitation et décroît comme l'inverse de la fréquence.
3. Au-dessus du seuil de Fréédéricksz, l'amplitude de l'harmonique 1 est proportionnelle à la torsion spontanée du cholestérique, et s'annule donc à la température d'inversion.

Padmini et Madhusudana ont interprété ces observations en termes d'effet Lehmann électrique, en supposant que le coefficient de couplage  $\nu_E$  existait et était proportionnel à la torsion spontanée. D'après eux, un couple Lehmann s'exerce donc sur le directeur, qui de ce fait sort, sous l'effet du champ électrique, alternativement de part et d'autre du plan vertical  $xz$  imposé par l'ancrage ( $\varphi \neq 0$ ). D'après ces auteurs, cet effet serait aussi présent en dessous du seuil mais ne serait pas mesurable à

cause de la rotation adiabatique du plan de polarisation de la lumière<sup>2</sup>. En revanche, ils proposent qu'au dessus du seuil de Fréédérickz, la polarisation ne tourne plus de façon adiabatique à cause de la diminution de la biréfringence de l'échantillon provoquée par l'inclinaison du directeur dans la direction verticale. Cela leur permet d'expliquer qualitativement l'apparition d'un signal mesurable à la fréquence du champ électrique.

Cette expérience ayant été utilisée comme argument en faveur d'un effet Lehmann où le coefficient de couplage  $\nu_E$  serait proportionnel à la torsion spontanée, il nous a paru essentiel de refaire des mesures similaires dans notre mélange pour vérifier ce point.

### 4.1.3 Mesures dans notre mélange

Les mesures que nous avons refaites avec le mélange 8OCB/CC sont globalement concordantes avec celles de Padmini et Madhusudana. Notons que nous avons utilisé un laser He-Ne et une détection synchrone *Stanford Research Systems SR850*.

Nos mesures ont été faites sur des cellules d'épaisseur  $5 \mu\text{m}$ . Dans les expériences correspondant aux figures 4.1 (a), (c) et (d), la température est de  $55,6^\circ\text{C}$  et correspond à une torsion spontanée de  $0,27 \text{ rad } \mu\text{m}^{-1}$ , donc à un pas  $p = 23 \mu\text{m} \sim 5d$ . L'intensité a été normalisée de sorte que l'intensité moyenne en dessous du seuil vaille 1, cf. figure 4.1 (c). L'ordre de grandeur de l'amplitude de l'harmonique 1 détectée par la photodiode est de  $100 \mu\text{V}$  alors que celle de la composante continue en dessous du seuil est de l'ordre de  $100 \text{ mV}$ . Le seuil de Fréédérickz a été déterminé d'après la courbe de la figure 4.1 (c). Il vaut  $0,89 \text{ V}$ . Une mesure de la capacité en fonction de la tension confirme cette valeur.

La figure 4.1 (b) montre clairement que, quand on change la température, le signal mesuré à la fréquence du champ à une tension fixe de  $1,3 \text{ V}$  s'annule et change de signe au point de compensation.

Les variations de la phase et de l'amplitude de l'harmonique 1 avec la fréquence, représentées figure 4.1 (d), sont aussi les mêmes que celles observées par Padmini et Madhusudana : phase voisine de  $\pi/2$  et décroissance de l'amplitude suivant une loi en  $1/f$  à suffisamment haute fréquence ( $f > 30 \text{ Hz}$ ). A basse fréquence, on constate en plus que l'amplitude sature puis chute. Deux phénomènes interviennent dans cette limite :

2. Dans la limite d'une forte biréfringence et d'une faible torsion à l'échelle de la longueur d'onde de la lumière ( $\Delta n \gg q\lambda$ ), la direction de polarisation de l'onde suit l'orientation du directeur.

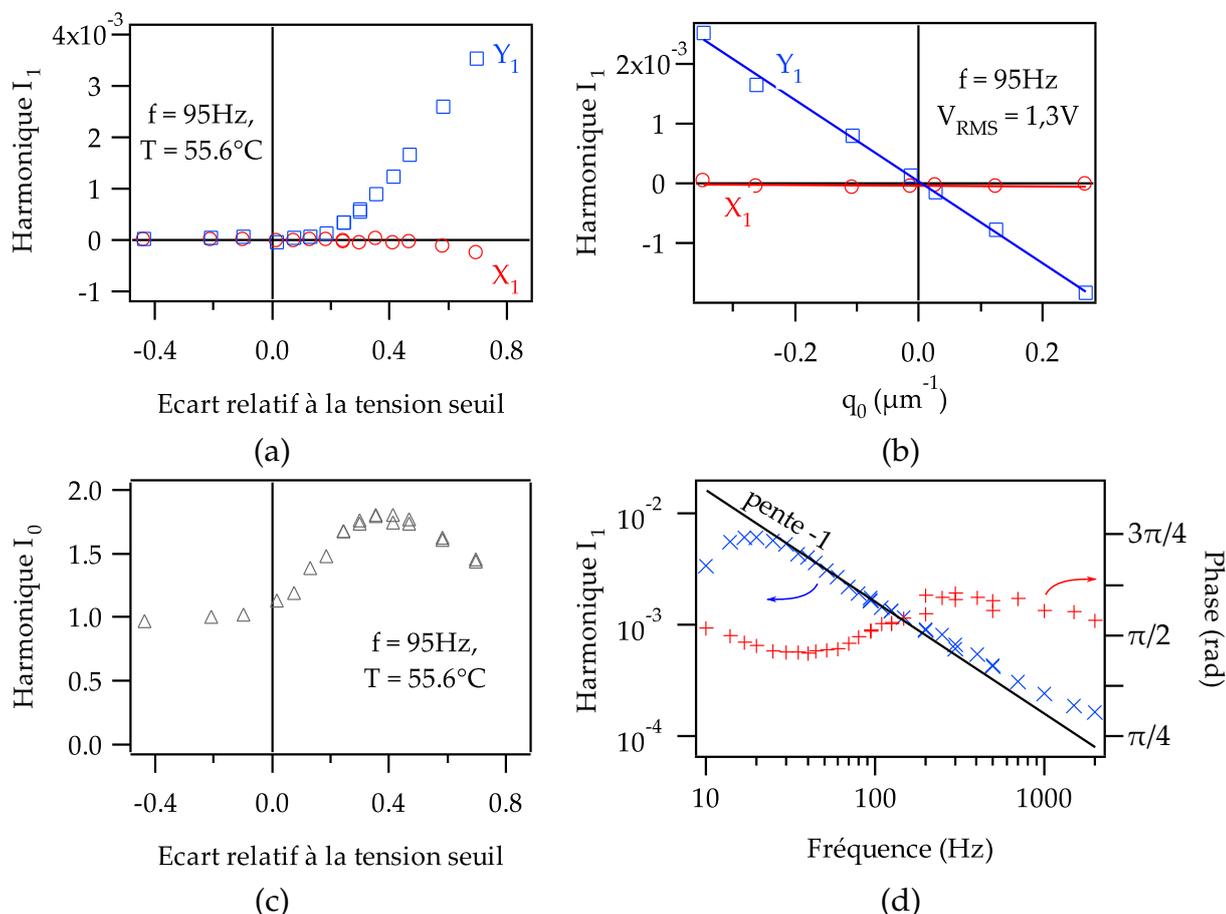


FIGURE 4.1 – Dans ces figures,  $X_1$  et  $Y_1$  représentent respectivement les composantes de l’harmonique 1 en phase et en quadrature avec l’excitation. (a) Harmonique 1 de l’intensité lumineuse transmise entre polariseurs croisés en fonction de l’écart au seuil. Le signal est essentiellement en quadrature et augmente à partir du seuil de Fréédéricksz avec une tangente horizontale. (b) Dépendance de l’harmonique 1 avec la torsion spontanée. Le signal s’annule à la température de compensation aux incertitudes expérimentales près. (c) Harmonique 0 de l’intensité lumineuse en fonction de l’écart relatif à la tension seuil. Le seuil est déterminé d’après cette courbe. (d) Comportement en fréquence de l’harmonique 1. Son amplitude décroît essentiellement en  $1/f$  et sa phase reste proche de  $\pi/2$ .

- La période d’excitation devient supérieure au temps de réponse du directeur  $\tau = \frac{\gamma d^2}{K\pi^2}$ . Le champ de directeurs est donc à chaque instant proche de l’équilibre, si bien que l’amplitude de la réponse ne doit

dépendre que de celle du champ électrique, devenant indépendante de la fréquence. C'est *grosso modo* ce qui est observé entre 20 et 50 Hz, cf. figure 4.1 (d).

- À très basse fréquence, l'écrantage des électrodes par les ions augmente le seuil de Fréédéricksz. Comme nos mesures sont faites à tension fixée, l'écrantage diminue l'écart à la tension seuil et l'amplitude de l'harmonique 1 diminue, comme on le voit en dessous de 20 Hz, cf. figure 4.1 (d).

Enfin, la figure 4.1 (a) montre que la composante  $Y_1$  de l'harmonique 1 n'est pas une fonction linéaire de  $\frac{V-V_S}{V_S}$  au voisinage du seuil, mais varie plutôt suivant une loi puissance avec un exposant compris entre 2 et 3.

## 4.2 Confrontation aux différentes hypothèses

### 4.2.1 Effet Lehmann proportionnel à la torsion spontanée

Le but de cette partie est de mettre en évidence l'insuffisance de l'explication proposée par Padmini et Madhusudana. On peut d'ores et déjà noter que dans tous les calculs qui suivent, l'équation de Maxwell en régime quasi-stationnaire  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$  et l'invariance par translation dans le plan des lames imposent que  $\vec{E} = E \vec{e}_z$ .

Calculons maintenant la réponse du directeur en dessous du seuil de Fréédéricksz, donc quand  $\theta = 0$ , dans l'hypothèse où l'effet Lehmann se manifeste et en supposant que  $v_E$  soit proportionnel à  $q_0$ . L'équation d'équilibre des couples pour l'harmonique 1 de  $\varphi$ , noté  $\varphi_1$ , s'écrit en posant  $v_E = v_0 q_0$  :

$$\gamma_1 \varphi_{1,t} = K_2 \varphi_{1,zz} - v_0 q_0 E \cos \omega t \quad (4.1)$$

ce qui donne en notation complexe :

$$i\gamma_1 \omega \underline{\varphi}_1 = K_2 \underline{\varphi}_{1,zz} - v_0 q_0 \underline{E} \quad (4.2)$$

La solution de cette équation est

$$\underline{\varphi}_1 = i \frac{v_0 q_0 \underline{E}}{\gamma_1 \omega} + C_1 e^{\kappa z} + C_2 e^{-\kappa z} \quad (4.3)$$

où  $\kappa^2 = \frac{i\gamma_1 \omega}{K_2}$  et  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes d'intégration complexes à choisir telles que  $\underline{\varphi}_1$  s'annule aux parois.

Au-dessus du seuil, on peut développer la solution en puissances de l'écart au seuil. Limitons nous à l'ordre 1. Les composantes statiques de  $\theta$

et  $\varphi$  sont les mêmes qu'en l'absence d'effet Lehmann<sup>3</sup>. L'équation vérifiée par l'harmonique 1 de  $\varphi$  est

$$\gamma_1 \varphi_{1,t} = \left( K_2 + (K_3 - K_2) \theta_0^2 \right) \varphi_{1,zz} - (2K_2 - K_3) \varphi_{1,z} \theta_0 \theta_{0,z} - \nu_0 q_0 E \quad (4.4)$$

où  $\theta_0$  est la composante statique de  $\theta$ . En notation complexe et en remplaçant  $\theta_0$  par son expression,  $\theta_0 = A \sin \frac{\pi z}{d}$ , cette équation devient

$$i\gamma_1 \omega \underline{\varphi}_1 = K_2 \underline{\varphi}_{1,zz} - \nu_0 q_0 \underline{E} - (2K_2 - K_3) \frac{\pi}{d} A^2 \sin \frac{2\pi z}{d} \underline{\varphi}_{1,z} + (K_3 - K_2) A^2 \sin^2 \frac{\pi z}{d} \underline{\varphi}_{1,zz} \quad (4.5)$$

où  $A$  représente l'inclinaison du directeur au centre de la cellule.

Cette équation se résout analytiquement à l'ordre 2 en  $A$  :

$$\begin{aligned} \underline{\varphi}_1 = & i \frac{\nu_0 q_0 E}{\gamma_1 \omega} + C_1 e^{\kappa z} + C_2 e^{-\kappa z} + A^2 \left[ i \frac{\kappa^3}{4\gamma_1 \omega} (K_3 - K_2) \times \right. \\ & \left. \left( z - d \frac{\sin \frac{2\pi z}{d}}{2\pi} \right) (C_1 e^{\kappa z} - C_2 e^{-\kappa z}) + \frac{\kappa^2 (3K_2 - K_3)}{8\gamma_1 \omega (\pi^2 + \kappa^2 d^2)} \times \right. \\ & \left. \left( i\pi \kappa d (C_1 e^{\kappa z} - C_2 e^{-\kappa z}) \sin \frac{2\pi z}{d} + \right. \right. \\ & \left. \left. i\kappa^2 d^2 (C_1 e^{\kappa z} + C_2 e^{-\kappa z}) \cos \frac{2\pi z}{d} \right) + C_3 e^{\kappa z} + C_4 e^{-\kappa z} \right] \quad (4.6) \end{aligned}$$

Après remplacement des constantes qui satisfont aux conditions aux limites en  $z = 0$  et  $z = d$ , on obtient

$$\begin{aligned} \underline{\varphi}_1 = & i \frac{\nu_0 q_0 E}{\gamma_1 \omega} \left( 1 - \frac{\text{ch} \left( \kappa \left( \frac{d}{2} - z \right) \right)}{\text{ch} \left( \kappa \frac{d}{2} \right)} \right) + \frac{A^2 \nu_0 q_0 E \kappa^3 d}{8\gamma_1^2 \omega^2 \text{ch} \left( \frac{\kappa d}{2} \right)} \left[ \frac{2(K_3 - 3K_2)}{\pi^2 + \kappa^2 d^2} \times \right. \\ & \left. \left\{ \kappa d \sin \frac{\pi z}{d} \text{ch} \left( \kappa \left( \frac{d}{2} - z \right) \right) + \pi \cos \frac{\pi z}{d} \text{sh} \left( \kappa \left( \frac{d}{2} - z \right) \right) \right\} \sin \frac{\pi z}{d} + \right. \\ & (K_3 - K_2) \left\{ \left( 1 - \frac{2z}{d} + \frac{\sin \frac{2\pi z}{d}}{\pi} \right) \text{sh} \left( \kappa \left( \frac{d}{2} - z \right) \right) - \right. \\ & \left. \left. \text{th} \frac{\kappa d}{2} \text{ch} \left( \kappa \left( \frac{d}{2} - z \right) \right) \right\} \right] \quad (4.7) \end{aligned}$$

3. Cf. Annexe B à la fin de la thèse. La composante statique de  $\theta$  variant comme la puissance 1/2 de l'écart au seuil, les calculs seront donc arrêtés à l'ordre 2 en  $\theta_0$ .

Connaissant la structure du directeur en fonction de la tension, on peut ensuite en déduire l'intensité lumineuse transmise<sup>4</sup>. Ce calcul est fait numériquement avec *Mathematica*.

La figure 4.2 montre le résultat du calcul obtenu en prenant  $\nu_0 = -1,4 \times 10^{-14} \text{ kg V}^{-1} \text{ s}^{-2}$ . Cette valeur a été choisie de sorte que la composante  $Y_1$  coïncide avec la valeur expérimentale trouvée à 30% au-dessus du seuil en tension. D'après ce calcul, le signal que l'on devrait mesurer en dessous du seuil n'est pas du tout négligeable par rapport à sa valeur au-dessus du seuil. Ce calcul montre donc qu'un signal devrait aussi être détecté en dessous du seuil dès qu'une tension est appliquée, ce qui n'est pas le cas.

Selon Padmini et Madhusudana, le signal n'est pas visible en dessous du seuil à cause de la rotation adiabatique de la polarisation de la lumière. En revanche, selon ces auteurs, le critère de Mauguin n'est plus respecté au-dessus du seuil — car la biréfringence diminue — ce qui rend possible la détection des oscillations. Notre calcul contredit cette interprétation. Aucun changement significatif et aussi brutal de la sensibilité optique ne devrait se produire au seuil de la transition de Fréédéricksz.

Le résultat de notre étude théorique est donc que le phénomène responsable de l'apparition d'un signal à la fréquence du champ au-dessus du seuil de Fréédéricksz ne peut être un effet Lehmann proportionnel à  $q_0$ . D'autre part, notre étude montre que le phénomène mis en jeu ne provoque pas d'oscillations significatives du directeur en dessous du seuil de Fréédéricksz.

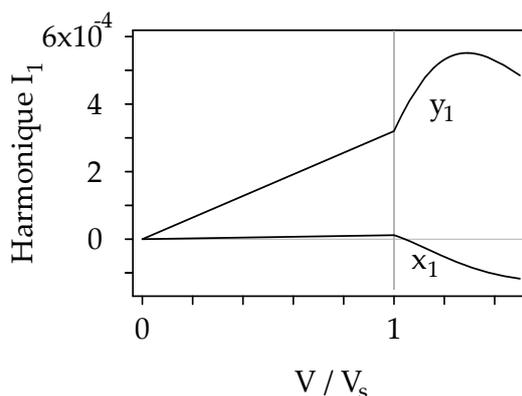


FIGURE 4.2 – Harmonique 1 calculée dans l'hypothèse d'un effet Lehmann proportionnel à  $q_0$ .

4. Cf. annexe 4.a.

### 4.2.2 Effet Lehmann proportionnel à la torsion réelle

Le calcul précédent montre qu'un effet Lehmann proportionnel à  $q_0$  ne permet pas de rendre compte des observations. En particulier, il semble qu'en dessous du seuil, rien ne se passe. Or nous savons qu'au-dessus du seuil, de la torsion apparaît, proportionnelle à  $q_0$ , cf. Annexe B à la fin de la thèse. Pour cette raison, nous avons cherché si un effet Lehmann proportionnel à la torsion réelle  $q = -\vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{n})$ , qui est nulle en dessous du seuil, permettrait de mieux expliquer nos mesures, le signal étant nul dans ce cas en dessous du seuil de Frédérickz. Dans ce paragraphe, nous avons donc posé  $\nu_E = \nu_q q$ .

En dessous du seuil,  $\theta$  et  $\varphi$  sont nuls. Au-dessus du seuil, l'équation d'équilibre des couples en  $\theta$  est la même qu'en l'absence d'effet Lehmann et l'équation vérifiée par l'harmonique 1 de  $\varphi$  est, compte tenu de l'harmonique 0 donnée en annexe B :

$$\gamma_1 \varphi_{1,t} = K_2 \varphi_{1,zz} - q_0 \nu_q \frac{A^2}{2} \cos \frac{2\pi z}{d} E \cos \omega t \quad (4.8)$$

ou, en notations complexes,

$$i\gamma_1 \omega \underline{\varphi}_1 = K_2 \underline{\varphi}_{1,zz} - q_0 \nu_q \frac{A^2}{2} \underline{E} \cos \frac{2\pi z}{d} \quad (4.9)$$

Cette équation se résout directement :

$$\underline{\varphi}_1 = \frac{-A^2}{2i\gamma_1 \omega} q_0 \nu_q \underline{E} \frac{\kappa^2 d^2 \cos \frac{2\pi z}{d}}{4\pi^2 + \kappa^2 d^2} + C_1 e^{\kappa z} + C_2 e^{-\kappa z} \quad (4.10)$$

avec  $\kappa^2 = i\frac{\gamma_1 \omega}{K_2}$ .

En remplaçant les constantes d'intégration par leurs valeurs de sorte que  $\underline{\varphi}_1 = 0$  sur les parois, on obtient finalement

$$\underline{\varphi}_1 = \frac{-A^2}{2i\gamma_1 \omega} q_0 \nu_q \underline{E} \frac{\kappa^2 d^2}{4\pi^2 + \kappa^2 d^2} \left( \cos \frac{2\pi z}{d} - \frac{\text{ch} \left( \kappa \left( \frac{d}{2} - z \right) \right)}{\text{ch} \left( \kappa \frac{d}{2} \right)} \right) \quad (4.11)$$

À partir de là, le calcul optique de l'harmonique 1 peut être fait en utilisant *Mathematica*, cf. annexe 4.a. Le résultat est présenté sur la figure 4.3. La valeur du coefficient Lehmann a été ajustée à  $\nu_q = -9,3 \times 10^{-13} \text{ kg V}^{-1} \text{ s}^{-2}$  de sorte que  $Y_1$  coïncide à nouveau avec sa valeur expérimentale à 30% au-dessus du seuil. On remarquera que  $\nu_q$  est deux

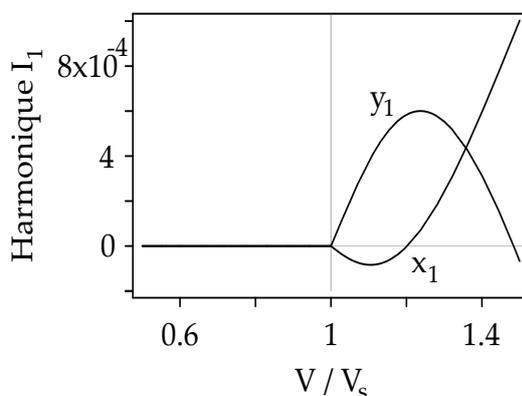


FIGURE 4.3 – Harmonique 1 calculée dans l’hypothèse où le coefficient Lehmann est proportionnel à la torsion réelle.

ordres de grandeurs plus grand que  $\nu_0$  calculé précédemment. Cela s’explique par le fait que la torsion réelle à 30% au-dessus du seuil est bien plus petite que la torsion spontanée :  $|\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{n}| \ll q_0$ .

Comme prévu, le signal calculé est nul en dessous du seuil. Ce modèle est donc en meilleur accord avec les observations expérimentales. Cependant, ni  $X_1$  ni  $Y_1$  ne s’accorde parfaitement aux courbes mesurées, y compris près du seuil, où les simplifications utilisées dans les calculs sont bien justifiées. En effet, ce calcul prévoit que  $X_1$  et  $Y_1$  croissent à partir du seuil avec une pente finie, cf. figure 4.3 alors que ces pentes sont nulles expérimentalement, cf. figure 4.1 (a). L’hypothèse d’un effet Lehmann proportionnel à la torsion réelle n’est donc pas satisfaisante.

### 4.2.3 Effet flexo-électrique

Tarasov et Kramer ont suggéré que la rotation des gouttes observée par Padmini et Madhusudana [Mad89] pouvait être expliquée sans invoquer l’effet Lehmann, mais en tenant compte de la flexo-électricité [Tar03c]. Par ailleurs, Brand et Pleiner ont rappelé [Bra97] que les effets flexo-électrique et Lehmann électrique, à supposer que ce dernier existe, devaient se manifester ensemble dans les mêmes circonstances. D’où l’idée de chercher si nos observations sont mieux décrites par un effet d’origine flexo-électrique.

La flexo-électricité se traduit par l’apparition d’une polarisation lorsque le directeur est courbé ou déformé en éventail, cf. section 2.5. Cette polarisation se couple au champ électrique. C’est un effet linéaire susceptible de provoquer une réponse à la fréquence du champ. Comme

la polarisation flexo-électrique est nulle en dessous du seuil car  $\vec{\nabla} \cdot \vec{n}$  et  $\vec{n} \times (\vec{\nabla} \times \vec{n})$  sont nuls, le signal observé ne peut être non nul qu'au-dessus du seuil, en accord avec les observations.

La prise en compte de la flexo-électricité ajoute un terme dans l'équation des couples sur  $\theta$  qui devient :

$$\begin{aligned} \gamma_1 \theta_{,t} = & (K_1 \cos^2 \theta + K_3 \sin^2 \theta) \theta_{,zz} + \\ & \frac{\sin 2\theta}{2} \left( \varepsilon_0 \varepsilon_a E^2 + e_a E_{,z} + (K_3 - K_1) \theta_{,z}^2 + K_2 \varphi_{,z} (\varphi_{,z} - 2 q_0) \right) + \\ & \frac{\sin 4\theta}{4} (K_2 - K_3) \varphi_{,z}^2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

mais ne modifie pas l'équation en  $\varphi$ . On remarque que le terme flexo-électrique est proportionnel à  $E_{,z}$ , donc linéaire en champ. Ainsi, il entraîne bien a priori une réponse en  $\theta$  à la fréquence du champ. La variation spatiale du champ électrique peut provenir de l'anisotropie de la conductivité. Dans le régime basse fréquence par rapport à la fréquence de relaxation des charges, le champ électrique est calculé grâce à l'équation  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$  où  $\vec{j}$  est la densité de courant électrique. Notons qu'au-dessus de la fréquence de relaxation des charges, il faut plutôt utiliser l'équation  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$ , mais on peut démontrer que les résultats obtenus sont qualitativement les mêmes.

Plaçons nous dans la première hypothèse. À partir de l'équation  $j_{z,z} = \partial_z [(\sigma_{\perp} + \sigma_a n_z^2) E] = 0$ , on déduit :

$$E = \frac{J}{\sigma_{\perp} + \sigma_a n_z^2} \quad (4.13)$$

où  $J$  est une constante d'intégration correspondant au courant électrique par unité de surface. En première approximation  $n_z^2 = \theta^2 = A^2 \sin^2 \frac{\pi z}{d}$  est une fonction paire de  $(z - \frac{d}{2})$ , donc  $E(z)$  est paire également et sa dérivée  $E_{,z}$  est impaire. On en déduit que l'excitation de l'harmonique 1 en  $\theta$ , noté  $\theta_1$ , est impaire en  $z$  autour de  $z = \frac{d}{2}$ . Cela a pour conséquence importante que, dans le calcul optique, l'harmonique 1 de  $\psi$  est nulle par symétrie, cf. équations (4.14) et (4.15a). Autrement dit, les oscillations zénithales du directeur, bien qu'elles existent, ne sont pas détectables directement. Rappelons l'expression de l'intensité lumineuse transmise entre polariseurs croisés, que l'on démontre dans l'annexe 4.a :

$$\frac{I_A}{I_P} = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \left( \Re(f) \sin \frac{\psi}{2} - \Im(f) \cos \frac{\psi}{2} \right) \quad (4.14)$$

avec les notations

$$\psi = k \int_0^d (n_{\text{eff}}(z) - n_o) dz \quad (4.15a)$$

$$\mathbb{f} = \int_0^d \underbrace{\varphi'(z)}_1 \underbrace{e^{ik \int_0^z (n_{\text{eff}}(z') - n_o) dz'}}_2 dz \quad (4.15b)$$

Dans le calcul de l'intensité lumineuse, l'harmonique 1 provient donc uniquement de  $\mathbb{f}$ , cf. équations (4.14) et (4.15b). Or  $\varphi'$  étant proportionnel à la torsion spontanée  $q_0$ , le signal dû à la flexo-électricité doit également être proportionnel à  $q_0$ .

Dans la suite, on va développer  $\theta_1$  en série de Fourier spatiale. Dans la limite où  $\theta$  reste petit, à savoir près du seuil, on peut ne garder que la première composante significative.  $\theta_1$  étant impair en  $z$  autour de  $z = \frac{d}{2}$  on prendra  $\theta_1 = a_1(t) \sin \frac{2\pi z}{d}$ . Par ailleurs, le terme source de  $\theta_1$  varie comme  $\cos \frac{\pi z}{d} \sin^2 \frac{\pi z}{d}$ , qui peut être remplacé en première approximation par sa première harmonique spatiale,  $\frac{16}{15\pi} \sin \frac{2\pi z}{d}$ .

L'harmonique 0 en  $\theta$ , notée  $\theta_0$ , varie comme  $\sqrt{\mu}$  où  $\mu = \frac{V - V_{\text{seuil}}}{V_{\text{seuil}}}$  est l'écart relatif au seuil de Fréederickz. D'après les équations (4.13) et (4.12), on en déduit que  $E_z$  varie comme  $\mu$  et  $\theta_1$  comme  $\mu^{3/2}$ . De plus, à haute fréquence,  $\theta_1$  est en quadrature avec  $E$  et décroît comme  $\omega^{-1}$ .

En ce qui concerne l'harmonique  $\varphi_1$ , elle est excitée proportionnellement à  $(\theta_0 \theta_1)_{,z}$ , cf. Annexe B à la fin de la thèse. Elle varie donc comme  $\mu^2$ . A haute fréquence,  $\varphi_1$  est donc en quadrature avec  $\theta_1$ , donc en phase ou en opposition de phase avec la tension et varie comme  $\omega^{-2}$ .  $\theta_0 \theta_1$  étant impair en  $z$  autour de  $z = \frac{d}{2}$ , sa dérivée par rapport à  $z$  est paire autour de ce même point. On cherche donc  $\varphi_1$  sous la forme  $\varphi_1 = b_1(t) \sin \frac{\pi z}{d}$ .

Qualitativement, on peut déjà déduire des remarques précédentes les principales caractéristiques du signal optique. Son harmonique 1 provient uniquement de l'harmonique 1 de  $\mathbb{f}$  et contient principalement deux termes. En effet,

1. L'équation d'évolution de  $\varphi$  est couplée à celle de  $\theta$ . Les oscillations de  $\theta$  à la fréquence du champ génèrent donc des oscillations de  $\varphi$  à la même fréquence qui sont détectables optiquement par l'intermédiaire du terme noté 1. dans l'équation (4.15b). Cette première composante de l'harmonique 1 du signal optique varie comme  $\mu^2$ , décroît comme  $\omega^{-2}$  et est en phase avec l'excitation.
2. Le terme noté 2. dans l'équation (4.15b) fait intervenir  $n_{\text{eff}}$ , donc  $\theta$ . Comme  $\theta$  oscille à la fréquence de la tension appliquée, ce terme

contribue à l'harmonique 1. Le signal optique correspondant varie comme  $\mu^3$  mais décroît comme  $\omega^{-1}$ . Il devient donc rapidement prépondérant devant le précédent lorsque la fréquence augmente. Il est de plus en quadrature avec l'excitation. C'est essentiellement ce terme qui est responsable du signal mesuré dans notre expérience.

Pour calculer l'intensité transmise, il reste à calculer les harmoniques pertinentes des angles  $\theta$  et  $\phi$  et du courant électrique  $J$ . Les équations vérifiées par les différentes harmoniques de  $\theta$ ,  $\varphi$  et  $J$  sont :

$$0 = a_0 \left\{ \frac{K_1 \pi^2}{d^2} + \frac{(K_3 - K_1) \pi^2}{2d^2} a_0^2 - q_0 d \frac{2\pi K_2}{d^2} b_0 + \varepsilon_0 \varepsilon_a \left( \left( 3 \frac{\Delta\sigma}{\sigma} - 1 \right) a_0^2 - 1 \right) \frac{J_0^2}{\sigma^2} \right\} \quad (4.16a)$$

$$\gamma_1 a_1'(t) = \left( \varepsilon_0 \varepsilon_a \frac{J_0^2}{\sigma^2} - \frac{4\pi^2 K_1}{d^2} \right) a_1(t) - \frac{32}{15} \frac{e_a}{d} \frac{\Delta\sigma}{\sigma^2} J_1(t) a_0^3 \quad (4.16b)$$

$$0 = 2\pi \left( 2K_2 + (K_3 - K_2) a_0^2 \right) - K_2 a_0^2 q_0 d \left( 1 + \frac{a_0^2}{6} \right) b_0 \quad (4.16c)$$

$$\gamma_1 b_1'(t) = -\frac{K_2 \pi^2}{d^2} b_1(t) - \pi q_0 d \frac{K_2}{d^2} a_0 a_1(t) \quad (4.16d)$$

où  $a_0$  et  $b_0$  sont respectivement les harmoniques 0 de  $\theta$  et  $\varphi$ , tandis que  $J_1$  est l'harmonique 1 de  $J$  et  $J_0^2$  l'harmonique 0 de  $J^2$ . Pour calculer  $J$ , on utilise le fait que  $V = -\int_0^d E dz$ . On trouve que  $\frac{J(t)}{\sigma} = -\frac{V(t)}{d} \left( 1 + \frac{\Delta\sigma}{2\sigma} a_0^2 \right)$ . En remplaçant dans le système d'équations précédent, on en déduit les solutions suivantes :

$$a_0 = \pm 2 \sqrt{\frac{\mu K_1}{K_3 - K_2 \left( \frac{q_0 d}{\pi} \right)^2 + K_1 \frac{\Delta\sigma}{\sigma}}} \text{ ou } a_0 = 0 \quad (4.17a)$$

$$a_1(t) = \frac{64e_a V_{\text{seuil}}}{15\gamma_1 d^2 (35\omega_1^2 + 4\omega^2)} \frac{\Delta\sigma}{\sigma} (-7\omega_1 \cos \omega t + 2\omega \sin \omega t) a_0^3 \quad (4.17b)$$

$$b_0 = \frac{q_0 d}{4\pi} a_0^2 \quad (4.17c)$$

$$b_1(t) = \frac{\omega_2}{\omega_2^2 + \omega^2} (a_1'(t) - \omega_2 a_1(t)) \frac{q_0 d}{\pi} a_0 \quad (4.17d)$$

$$\text{avec } \omega_1 = \frac{\pi^2 K_1}{\gamma_1 d^2}, \omega_2 = \frac{\pi^2 K_2}{\gamma_1 d^2}, V_{\text{seuil}} = \pi \sqrt{\frac{2K_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_a}} \text{ et } \mu = \frac{V - V_{\text{seuil}}}{V_{\text{seuil}}}.$$

On peut maintenant calculer numériquement l'intensité lumineuse transmise. On choisit  $e_a = 9 \times 10^{-12} \text{ C m}^{-1}$  pour que  $Y_1$  coïncide avec la valeur expérimentale mesurée à 30% au-dessus du seuil. Notons que cette valeur est compatible avec l'ordre de grandeur des coefficients flexo-électriques mesurés dans d'autres cristaux liquides [Mur93]. L'harmonique 1 calculée dans l'hypothèse d'un effet dû à la flexo-électricité est représenté sur la fig. 4.4. L'accord avec l'expérience est particulièrement bon, ce qui montre déjà que la flexo-électricité est en grande partie responsable du signal observé expérimentalement. Il pourrait cependant exister un peu d'effet Lehmann qui serait « noyé » dans l'effet flexo-électrique. Pour le savoir, nous avons réalisé une autre expérience décrite dans la section suivante.

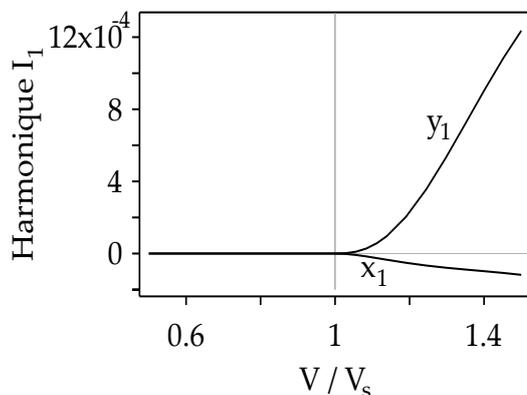


FIGURE 4.4 – Harmonique 1 calculée dans l'hypothèse d'un effet d'origine flexo-électrique.

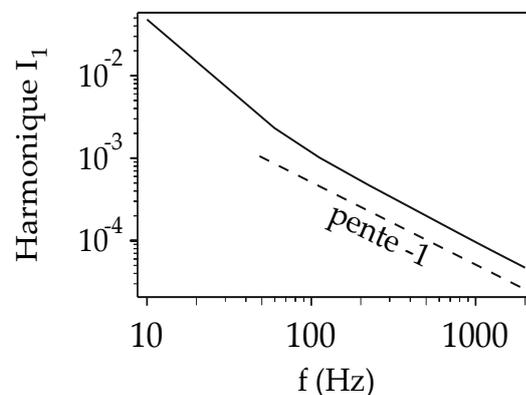


FIGURE 4.5 – Amplitude de l'harmonique 1 calculée en fonction de la fréquence à 50% au-dessus du seuil.

## 4.3 Expérience en géométrie torsadée d'un demi pas

### 4.3.1 Objectifs

À ce stade, nous avons montré que les observations ne sont pas compatibles avec un coefficient Lehmann proportionnel à  $q_0$ , car aucun signal n'est perçu en dessous du seuil de Fréédérickz. Les deux autres hypothèses envisagées sont en revanche compatibles avec cette absence de signal mais conduisent à des valeurs différentes de l'exposant critique de  $Y_1$

en fonction de  $\mu$  au-dessus du seuil de Fréédérickz. Expérimentalement, cet exposant est plus proche de celui prévu en présence de flexo-électricité qu'en présence d'effet Lehmann proportionnel à la torsion réelle, mais il serait hâtif de conclure sur la base de ce constat parce que l'incertitude expérimentale sur cet exposant est importante.

C'est pourquoi nous avons imaginé une autre expérience permettant de séparer clairement les deux effets. L'idée est de reproduire l'expérience de Padmini et Madhusudana en géométrie torsadée, tout en restant en ancrage planaire parallèle à l'axe  $x$ . En effet, s'il existe un effet Lehmann électrique proportionnel à la torsion réelle du cholestérique  $q$ , il devrait se manifester même en dessous du seuil de la transition de Fréédérickz. En revanche, la polarisation flexo-électrique étant nulle en dessous du seuil de Fréédérickz, aucun signal ne devrait être observé, sauf s'il existe un effet Lehmann.

Faisons le calcul dans la géométrie où le directeur tourne d'un demi-tour dans l'épaisseur. En l'absence de champ électrique,  $\varphi = qz = \frac{\pi z}{d}$  et, en dessous du seuil,  $\theta = 0$ , ce qui exclut tout effet de la flexo-électricité, puisque le champ de directeurs est seulement torsadé. L'équation pour  $\varphi$  est :

$$\gamma_1 \varphi_{,t} = K_2 \varphi_{,zz} + \nu_q \varphi_{,z} E \cos \omega t \quad (4.18)$$

On cherche à résoudre au premier ordre en  $\nu_q E$ . On remplace donc  $\varphi_{,z}$  par  $\frac{\pi}{d}$ , d'où

$$\gamma_1 \varphi_{,t} = K_2 \varphi_{,zz} + \nu_q \frac{\pi}{d} E \cos \omega t \quad (4.19)$$

Cette équation est du même type que celle résolue précédemment dans le cas d'un coefficient proportionnel à  $q_0$ , cf. équation (4.1). Sa solution s'écrit, en notation complexe,

$$\underline{\varphi}_1 = i \frac{\nu_q (\pi/d) E}{\gamma_1 \omega} + C_1 e^{\kappa z} + C_2 e^{-\kappa z} \quad (4.20)$$

Le calcul de l'intensité transmise entre polariseurs croisés à  $\pi/8$  de la direction d'ancrage dans la géométrie torsadée est fait en annexe. On trouve

$$\begin{aligned} \frac{I_a}{I_0} = & \left( 1 - \frac{\psi_0^2}{2\Psi^2} \right) \sin^2 \frac{\Psi}{2} + \frac{\pi \psi_0^2}{\gamma_1 \omega \Psi^2} \Re \left[ \frac{i \kappa \nu_q}{\Psi^2 + \kappa^2 d^2} \times \right. \\ & \left. \left( \Psi \operatorname{th} \frac{\kappa d}{2} \sin \Psi + \kappa d (\cos \Psi - 1) \right) \underline{E} e^{i\omega t} \right] \end{aligned} \quad (4.21)$$

En utilisant la valeur du coefficient Lehmann déterminée en géométrie déroulée, à savoir  $\nu_q = -9,3 \times 10^{-13} \text{ kg V}^{-1} \text{ s}^{-2}$ , ce qui revient à

supposer que l'effet Lehmann est le seul à intervenir, on peut calculer l'harmonique 1 en fonction de la tension, cf. figure 4.6. Il apparaît immédiatement que l'ordre de grandeur du signal qu'on devrait mesurer sous cette hypothèse devrait être le même en géométrie torsadée en dessous du seuil qu'en géométrie déroulée au-dessus du seuil, cf. figure 4.3. Nous avons donc réalisé l'expérience pour savoir s'il existe un signal mesurable en dessous du seuil.

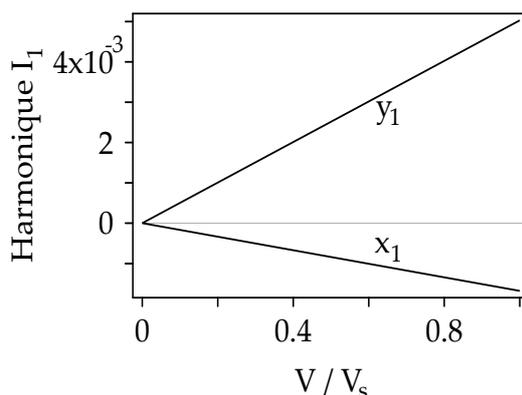


FIGURE 4.6 – Harmonique 1 calculée en fonction de la tension en géométrie torsadée dans l'hypothèse où le coefficient Lehmann est proportionnel à la torsion réelle  $q$ .

### 4.3.2 Expérience

L'expérience est réalisée à la température  $T = 52,5^{\circ}\text{C}$  dans une cellule d'épaisseur  $d = 5 \mu\text{m}$  traitée en ancrage planaire parallèle à l'axe  $x$ . À cette température,  $d = \frac{p}{2}$  et le champ de directeurs est torsadé de  $\pi$ . Dans cette géométrie, l'intensité lumineuse mesurée en fonction de la tension est représentée sur la figure 4.7. Comme dans la géométrie déroulée, le signal à la fréquence du champ (harmonique 1) n'est perceptible qu'au-delà du seuil de la transition de Fréederickz. Cela démontre qu'il n'existe pas d'effet Lehmann mesurable proportionnel à la torsion réelle du cholestérique. Le signal mesuré en géométrie déroulée, qui est celle de Padmini et Madhusudana, est donc bien dû à la seule flexo-électricité du matériau.

Notons par ailleurs que dans la géométrie torsadée, on observe d'abord en augmentant la tension l'apparition d'une structure périodique dont le vecteur d'onde est parallèle au directeur au centre de la cellule. La transition vers cette structure périodique est du second ordre. Puis, à plus

forte tension, cette structure transite vers un état invariant par translation. Cette dernière transition est du premier ordre. Ces résultats sont expliqués dans l'annexe 4.c.

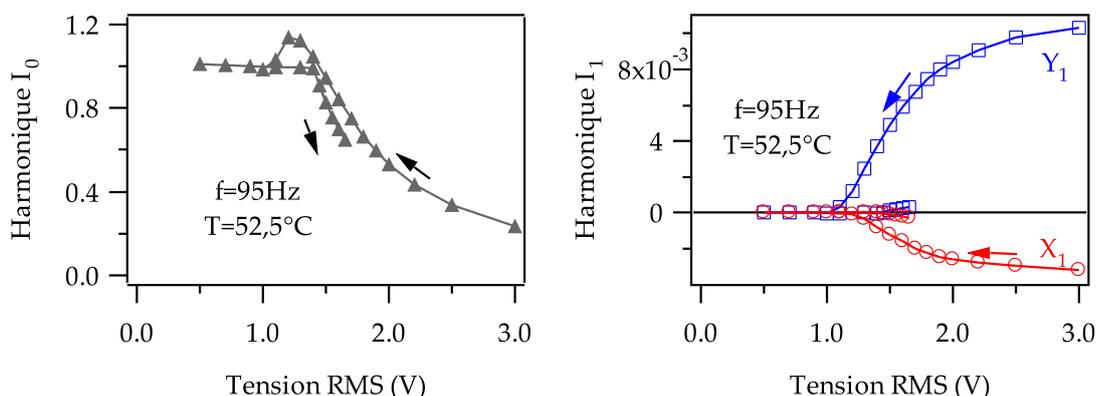


FIGURE 4.7 – Harmoniques 0 et 1 de l'intensité lumineuse transmise entre polariseurs croisés dans la géométrie torsadée, en fonction de la tension appliquée.

## 4.4 Conclusions

En dessous du seuil de Fréédéricksz, le signal mesuré est nul à la fois en géométrie déroulée et en géométrie torsadée. On en déduit que l'effet Lehmann ne permet pas d'expliquer les expériences, qu'il soit proportionnel à la torsion spontanée ou à la torsion réelle contrairement à ce qu'avaient affirmé Padmini et Madhusudana.

Un autre résultat est qu'il est essentiel que le directeur s'incline hors du plan parallèle aux plaques de verre pour observer un signal à la fréquence de la tension appliquée. En d'autres termes, il faut se placer au-dessus du seuil de Fréédéricksz pour observer un signal. Dans ce cas, toutes les observations s'expliquent en faisant intervenir l'effet flexo-électrique. De plus, la valeur de la différence  $e_n$  des coefficients flexo-électriques utilisée pour expliquer nos observations est compatible avec les valeurs habituellement mesurées dans d'autres cristaux liquides.

L'expérience de Padmini et Madhusudana ne permet donc de tirer aucune conclusion quant à l'effet Lehmann électrique, si ce n'est qu'il est trop faible pour être observé<sup>5</sup>. Cette expérience sous champ électrique

5. Notons au passage qu'aucune expérience n'a d'ailleurs montré à ce jour de façon

ne remet donc pas en cause le résultat d'Éber et Jánossy, qui trouvent que le coefficient Lehmann thermomécanique ne s'annule pas au point de compensation.

La contradiction apparente entre les expériences sous champ électrique du groupe de Bangalore — Madhusudana et collaborateurs — et celle d'Éber et Jánossy en présence d'un gradient thermique est donc levée.

Néanmoins, l'avis de Pleiner et Brand concernant le résultat de l'expérience d'Éber et Jánossy laisse planer un doute sur sa validité. Il nous a alors paru essentiel de refaire également cette expérience pour vérifier son résultat et savoir si Pleiner et Brand avaient ou non raison. C'est ce qui fera l'objet du chapitre suivant.

## 4.a Annexe : Transmission optique en géométrie déroulée

L'intensité transmise entre polariseurs croisés provient des interférences entre les rayons ordinaire et extraordinaire qui sont déphasés après la traversée de la cellule. On cherche donc à calculer le déphasage entre les deux ondes, à partir du champ de directeurs. Le matériau est supposé uniaxe et sans pouvoir rotatoire moléculaire. Le directeur, parallèle à l'axe optique, a pour composantes, cf. figure 2.1

$$\begin{cases} \cos \theta(z) \cos \varphi(z) \\ \cos \theta(z) \sin \varphi(z) \\ \sin \theta(z) \end{cases} \quad (4.22)$$

À chaque  $z$ , le champ électrique de l'onde lumineuse se décompose sur la base de vecteurs unitaires  $\vec{e}_o$  et  $\vec{e}_e$  qui définissent une base orthonormée directe du plan  $(x, y)$ ,  $\vec{e}_e$  étant aligné avec la projection du directeur.

$$\vec{E} = (E_o(z)\vec{e}_o + E_e(z)\vec{e}_e) e^{i\omega t} \quad (4.23)$$

En appliquant les lois de propagation de la lumière dans un milieu anisotrope à une tranche d'épaisseur  $dz$  tendant vers 0, on peut montrer que les composantes de  $\vec{E}$  sont solutions du système suivant :

$$E'_o(z) = ik n_o E_o(z) - \varphi'(z) E_e(z) \quad (4.24a)$$

$$E'_e(z) = ik n_{\text{eff}}(z) E_e(z) + \varphi'(z) E_o(z) \quad (4.24b)$$

certaine l'existence de l'effet Lehmann électrique dans les cristaux liquides cholestériques.

où  $n_o$  désigne l'indice ordinaire,  $n_{\text{eff}}$  un indice effectif dépendant de l'inclinaison du directeur et  $k$  le vecteur d'onde de la lumière dans le vide  $k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ . En incidence normale,

$$n_{\text{eff}}(z) = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_e^2 \sin^2 \theta(z) + n_o^2 \cos^2 \theta(z)}} \quad (4.25)$$

Rappelons que  $n_e$  désigne l'indice extraordinaire. Si l'on cherche les solutions sous la forme  $E_o(z) = A(z) e^{ik n_o z}$  et  $E_e(z) = B(z) e^{ik \int_0^z n_{\text{eff}}(z') dz'}$ ,  $A$  et  $B$  vérifient le système suivant

$$A'(z) = -f(z) B(z) \quad (4.26a)$$

$$B'(z) = \overline{f(z)} A(z) \quad (4.26b)$$

avec  $f(z) = \varphi'(z) e^{ik \int_0^z (n_{\text{eff}}(z') - n_o) dz'}$  et  $\overline{f(z)}$  son complexe conjugué. Or, dans un échantillon planaire déroulé,  $\varphi(0) = \varphi(d) = 0$ . Les variations de  $\varphi$  dans l'épaisseur de l'échantillon sont dues soit à la torsion spontanée au-dessus du seuil de Fréédéricksz, soit à un éventuel effet Lehmann. Dans les deux cas, ces variations sont supposées petites. On va donc développer les solutions  $A(z)$  et  $B(z)$  à l'ordre 1 en  $\varphi'(z)$  :  $A = A_0 + A_1$  et  $B = B_0 + B_1$  où les indices 0 désignent l'ordre 0 et les indices 1 l'ordre 1.

À l'ordre 0,  $A'_0(z) = 0$  car  $f$  est d'ordre 1 en  $\varphi'$ , donc  $A_0$  est constant. De même pour  $B_0$ . Ces deux constantes sont déterminées grâce aux conditions aux limites en  $z = 0$ . On désigne par  $\alpha$  l'angle entre l'axe  $x$ , parallèle à la direction d'ancrage, et la direction du polariseur. Ainsi,

$$A_0 = E_o(0) = -E_p \sin \alpha \quad (4.27a)$$

$$B_0 = E_e(0) = E_p \cos \alpha \quad (4.27b)$$

où  $E_p$  est l'amplitude du champ électrique de l'onde incidente après avoir passé le polariseur.

L'ordre 1 en  $q_0$  peut se déduire du résultat à l'ordre 0, car les amplitudes sont reliées par la relation de récurrence

$$A_1(z) = -B_0 \int_0^z f(z') dz' \quad (4.28a)$$

$$B_1(z) = A_0 \int_0^z \overline{f(z')} dz' \quad (4.28b)$$

Les composantes du champ électrique de l'onde à la sortie de la cellule sont donc, à l'ordre qui nous intéresse :

$$E_o(d) = E_P \left( -\sin \alpha - \cos \alpha \int_0^d f(z) dz \right) e^{ik n_o d} \quad (4.29a)$$

$$E_e(d) = E_P \left( \cos \alpha - \sin \alpha \int_0^d \overline{f(z)} dz \right) e^{ik \int_0^d n_{\text{eff}}(z) dz} \quad (4.29b)$$

À la sortie de l'analyseur croisé avec le polariseur, le champ électrique de l'onde vaut

$$\begin{aligned} E_A &= -E_o(d) \cos \alpha - E_e(d) \sin \alpha \\ &= E_P e^{ik n_o d} \left( \sin \alpha \cos \alpha (1 - e^{i\psi}) + \right. \\ &\quad \left. \cos^2 \alpha \int_0^d f(z) dz + \sin^2 \alpha \int_0^d \overline{f(z)} dz e^{i\psi} \right) \end{aligned} \quad (4.30)$$

avec  $\psi = k \int_0^d (n_{\text{eff}}(z) - n_o) dz$ . On en déduit le rapport de l'intensité lumineuse  $I_A$  en sortie de l'analyseur sur l'intensité  $I_P$  en sortie du polariseur, au premier ordre en perturbation

$$\frac{I_A}{I_P} = \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\psi}{2} + \sin 4\alpha \sin \frac{\psi}{2} \left( \Re(\mathbb{f}) \sin \frac{\psi}{2} - \Im(\mathbb{f}) \cos \frac{\psi}{2} \right) \quad (4.31)$$

avec la nouvelle notation

$$\mathbb{f} = \int_0^d f(z) dz = \int_0^d \varphi'(z) e^{ik \int_0^z (n_{\text{eff}}(z') - n_o) dz'} dz \quad (4.32)$$

L'harmonique 1 du signal provient seulement de  $\mathbb{f}$  car l'harmonique 1 de  $\psi$  est nulle<sup>6</sup>. Pour avoir un signal maximum<sup>7</sup>, il faut que  $\sin 4\alpha = 1$ . Il faut donc choisir  $\alpha = \frac{\pi}{8} \bmod \frac{\pi}{4}$ . Nous avons choisi  $\alpha = \frac{\pi}{8}$ , d'où

$$\frac{I_A}{I_P} = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \left( \Re(\mathbb{f}) \sin \frac{\psi}{2} - \Im(\mathbb{f}) \cos \frac{\psi}{2} \right) \quad (4.33)$$

### Limite de validité du modèle optique

Dans le raisonnement précédent, nous avons développé les équations à l'ordre 1 en  $\varphi'$ . Cela se justifie dans la limite où  $|A_1| \ll |A_0|$ , soit,

6. Dans l'hypothèse de la flexo-électricité, l'harmonique 1 de  $n_{\text{eff}}(z)$  n'est pas nulle mais son intégrale sur l'épaisseur de la cellule est nulle.

7. Ce résultat est vérifié expérimentalement.

d'après les équations (4.28)

$$|\mathbb{f}| = \left| \int_0^d f(z) dz \right| = \left| \int_0^d \varphi'(z) e^{ik \int_0^z (n_{\text{eff}}(z') - n_o) dz'} dz \right| \ll 1 \quad (4.34)$$

Or  $\varphi(0) = \varphi(d) = 0$ . Une intégration par parties donne donc

$$\mathbb{f} = - \int_0^d \varphi(z) ik (n_{\text{eff}}(z) - n_o) e^{ik \int_0^z (n_{\text{eff}}(z') - n_o) dz'} dz \quad (4.35)$$

On peut obtenir un critère plus grossier en majorant  $|\mathbb{f}|$  :

$$|\mathbb{f}| < \int_0^d |\varphi(z) k (n_{\text{eff}} - n_o)| dz < \int_0^d \varphi_m k (n_{\text{eff}} - n_o) dz = \varphi_m \psi < \varphi_m \psi_0 \quad (4.36)$$

où  $\varphi_m$  est l'amplitude maximale de  $\varphi$  et  $\psi_0 = k (n_e - n_o) d$ .

On trouve ainsi que, pour que les calculs précédents soient valables, il suffit que

$$\varphi_m \psi_0 \ll 1 \quad (4.37)$$

Pour une épaisseur de  $5 \mu\text{m}$ , cela correspond à  $\varphi_m \ll 0,2$  rad car  $\psi_0 \sim 5$ . À  $1^\circ\text{C}$  de la température d'inversion, et à une tension égale à 2 fois le seuil de la transition de Fréédéricksz, l'amplitude maximale de la partie statique de  $\varphi$  est  $\varphi_m = 0,05$  rad. On peut faire un calcul plus exact en prenant  $\varphi(z) = \varphi_m \sin n\pi \frac{z}{d}$  et  $n_{\text{eff}} = n_e$  pour estimer de combien le critère grossier surestime  $|\mathbb{f}|$ . Dans ce cas,

$$\mathbb{f} = i n\pi \frac{1 - (-1)^n e^{i\psi_0}}{\psi_0^2 - (n\pi)^2} \varphi_m \psi_0 \quad (4.38)$$

Avec  $n = 2$ , on trouve  $|\mathbb{f}| = 0,5 \varphi_m \psi_0$ , soit une surestimation d'un facteur 2. On voit donc qu'à  $1^\circ\text{C}$  de la température d'inversion, le critère est vérifié même à une tension de 2 fois le seuil de la transition de Fréédéricksz, puisqu'alors,  $|\mathbb{f}| \sim 0,1 \ll 1$ .

## 4.b Annexe : Transmission optique en géométrie torsadée

Dans cette géométrie, le calcul est différent car on ne peut plus considérer que  $\varphi$  est petit. Mais le fait que  $\theta$  soit nul permet de faire encore le calcul.

Les équations (4.26) sont toujours valables mais le critère (4.34) ne l'est pas forcément. Nous allons développer la solution en séries autour d'un champ électrique nul. A l'ordre 0,  $\varphi' = \pi/d$ . Dans ce cas, la solution du système (4.26) s'écrit sous la forme

$$A_0(z) = C_1 e^{i\frac{z}{2d}(\psi_0 - \Psi)} + C_2 e^{i\frac{z}{2d}(\psi_0 + \Psi)} \quad (4.39a)$$

$$B_0(z) = \frac{-i}{2\pi} \left( (\psi_0 - \Psi) C_1 e^{i\frac{z}{2d}(-\psi_0 - \Psi)} + (\psi_0 + \Psi) C_2 e^{i\frac{z}{2d}(-\psi_0 + \Psi)} \right) \quad (4.39b)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes d'intégration et  $\Psi = \sqrt{\psi_0^2 + 4\pi^2}$ . Les conditions aux limites en  $A_0(0) = E_P \cos \alpha$  et  $B_0(0) = E_P \sin \alpha$  conduisent à

$$C_1 = E_P \left( \frac{\Psi + \psi_0}{2\Psi} \cos \alpha - \frac{i\pi}{\Psi} \sin \alpha \right) \quad (4.40a)$$

$$C_2 = E_P \left( \frac{\Psi - \psi_0}{2\Psi} \cos \alpha + \frac{i\pi}{\Psi} \sin \alpha \right) \quad (4.40b)$$

A l'ordre 1, la solution du système (4.26) est

$$A_1(z) = \int_0^z \varphi'_1(z', t) [A_0(z')f_1(z') + B_0(z')f_2(z')] dz' \quad (4.41a)$$

$$B_1(z) = - \int_0^z \varphi'_1(z', t) [A_0(z')\overline{f_2(z')} + B_0(z')\overline{f_1(z')}] dz' \quad (4.41b)$$

où  $\varphi_1$  est l'harmonique 1 de  $\varphi$

$$\text{et } f_1(z') = \frac{i\pi}{\Psi} \left( e^{\frac{i}{2d}(\psi_0 + \Psi)(z - z')} - e^{\frac{i}{2d}(\psi_0 - \Psi)(z - z')} \right)$$

$$\text{et } f_2(z') = \frac{1}{2\Psi} \left( (\psi_0 - \Psi) e^{\frac{i}{2d}((\psi_0 + \Psi)z + (\psi_0 - \Psi)z')} - (\psi_0 + \Psi) e^{\frac{i}{2d}((\psi_0 - \Psi)z + (\psi_0 + \Psi)z')} \right)$$

En remplaçant  $A_0$  et  $B_0$  par leurs expressions (4.39), on trouve

$$A_1(d) = \int_0^d \varphi'_1(z, t) (g_1(z) \cos \alpha + g_2(z) \sin \alpha) dz \quad (4.42a)$$

$$B_1(d) = - \int_0^d \varphi'_1(z, t) (\overline{g_2(z)} \cos \alpha - \overline{g_1(z)} \sin \alpha) dz \quad (4.42b)$$

$$\text{avec } g_1(z) = E_P \left( \frac{2i\pi \psi_0}{\Psi^2} e^{\frac{i\psi_0}{2}} \cos \left( \Psi \left( \frac{z}{d} - \frac{1}{2} \right) \right) \right)$$

$$\text{et } g_2(z) = E_P \left( \frac{-\psi_0}{\Psi^2} e^{\frac{i\psi_0}{2}} \left( \psi_0 \cos \left( \Psi \left( \frac{z}{d} - \frac{1}{2} \right) \right) + i\Psi \sin \left( \Psi \left( \frac{z}{d} - \frac{1}{2} \right) \right) \right) \right)$$

On en déduit l'intensité transmise entre polariseurs croisés pour  $\alpha = \frac{\pi}{8}$  au premier ordre en  $\varphi'_1$  :

$$\begin{aligned} \frac{I_A}{I_P} = & \frac{\psi_0^2 + 8\pi^2}{4\Psi^2} (1 - \cos \Psi) + \\ & \frac{\psi_0^2}{2\Psi^3} \left[ (\Psi (1 - \cos \Psi) + 2\pi \sin \Psi) \int_0^d \varphi'_1(z, t) \cos \frac{\Psi z}{d} dz + \right. \\ & \left. (2\pi (1 - \cos \Psi) + \Psi \sin \Psi) \int_0^d \varphi'_1(z, t) \sin \frac{\Psi z}{d} dz \right] \end{aligned} \quad (4.43)$$

En remplaçant  $\varphi'_1$  d'après l'expression (4.20), on obtient finalement,

$$\begin{aligned} \frac{I_A}{I_P} = & \left( 1 - \frac{\psi_0^2}{2\Psi^2} \right) \sin^2 \frac{\Psi}{2} + \frac{\pi\psi_0^2}{\gamma_1 \omega \Psi^2} \Re \left[ \frac{i\kappa \nu_q}{\Psi^2 + \kappa^2 d^2} \times \right. \\ & \left. \left( \Psi \operatorname{th} \frac{\kappa d}{2} \sin \Psi + \kappa d (\cos \Psi - 1) \right) \underline{E} e^{i\omega t} \right] \end{aligned} \quad (4.44)$$

## 4.c Annexe : Instabilité périodique

Peut-on expliquer par le calcul l'instabilité périodique observée en échantillon torsadé d'un demi-tour lorsque  $q_0 = \pi/d$  ?

Posons  $\theta = \epsilon \theta_0 \sin \frac{\pi z}{d} \cos ky$  et  $\varphi = \frac{\pi z}{d} + \epsilon \varphi_0 \sin \frac{\pi z}{d} \sin ky$  et calculons l'énergie élastique à l'ordre 2 en  $\epsilon$ . Si cette énergie est négative, le système est instable et une instabilité de vecteur d'onde  $k$  suivant l'axe  $y$  se développe, c'est-à-dire que l'on voit apparaître des bandes parallèles à la direction d'ancrage  $x$ .

Le calcul de l'énergie élastique à l'ordre 2 donne, par unité de surface

$$\begin{aligned} F = & \epsilon^2 \left( \frac{[\pi^2 (K_1 + K_3) - d^2 \epsilon_0 \epsilon_a E^2] \theta_0^2 + \pi^2 K_2 \varphi_0^2}{8d} + \right. \\ & k \frac{K_1 + K_2 + 2K_3}{3} \theta_0 \varphi_0 + \\ & \left. k^2 d \frac{(K_2 + 3K_3) \theta_0^2 + (K_1 + 3K_3) \varphi_0^2}{32} \right) \end{aligned} \quad (4.45)$$

On cherche alors les valeurs de  $k$  et  $\varphi_0$  qui minimisent  $F$ . On obtient

$$\varphi_0 = \frac{-16kd\theta_0}{3} \frac{K_1 + K_2 + 2K_3}{k^2 d^2 (K_1 + 3K_3) + 4\pi^2 K_2} \quad (4.46a)$$

$$k = \frac{2}{d} \sqrt{\frac{\pi K_2}{K_1 + 3K_3} \left( \frac{8}{3} \frac{K_1 + K_2 + 2K_3}{\sqrt{K_2(K_2 + 3K_3)}} - \pi \right)} \quad (4.46b)$$

L'énergie élastique correspondante vaut

$$F = \frac{\epsilon^2 \theta_0^2}{8d} \left( \pi^2 (K_1 + K_3) - d^2 \epsilon_0 \epsilon_a E^2 - \frac{\left( \frac{8}{3} (K_1 + K_2 + 2K_3) - \pi \sqrt{K_2(K_2 + 3K_3)} \right)^2}{K_1 + 3K_3} \right) \quad (4.47)$$

On peut maintenant calculer le seuil d'instabilité : il correspond à la valeur de  $E$  pour laquelle  $F$  s'annule et change de signe. On trouve

$$V = E d = \pi \sqrt{\frac{K_1 + K_3 - \frac{\left( \sqrt{K_2(K_2 + 3K_3)} - \frac{8}{3\pi} (K_1 + K_2 + 2K_3) \right)^2}{K_1 + 3K_3}}{\epsilon_0 \epsilon_a}} \quad (4.48)$$

qui est toujours inférieur au seuil de l'instabilité de Fréédéricksz homogène,  $V = \pi \sqrt{\frac{K_1 + K_3}{\epsilon_0 \epsilon_a}}$ .

En conclusion, même si nous n'avons pas déterminé le seuil réel de l'instabilité périodique puisque nous avons utilisé une forme particulière pour le champ de directeurs qui n'est *a priori* pas celle de plus basse énergie, nous avons démontré qu'il existe une instabilité périodique qui se développe pour une tension inférieure à celle de la transition de Fréédéricksz classique.