ÉQUATIONS DE MAXWELL EN 3D

Les résultats de ce chapitre feront probablement l'objet de la publication :

[20] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, L. Chesnel et P. Ciarlet Jr.: T-coercivity for the Maxwell transmission problem between a dielectric and a negative material. *En cours*, 27 pages, 2012.

Sommaire

Int	roduct	ion
9.1	Mis	e en place du problème
9.2	Form	mulations équivalentes
	9.2.1	Problème pour le champ électrique
	9.2.2	Problème pour le champ magnétique
9.3	Écla	irage: T-coercivité dans $\mathbf{V}_N(1;\Omega)$ et $\mathbf{V}_T(1;\Omega)$
	9.3.1	Étude pour le champ électrique avec une permittivité $\varepsilon=1$ 217
	9.3.2	Étude pour le champ magnétique avec une perméabilité $\mu=1$ 218
9.4	Rés	ultats de compacité
	9.4.1	Injection compacte de $\mathbf{X}_N(\varepsilon;\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$
	9.4.2	Injection compacte de $\mathbf{X}_T(\mu; \Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$
9.5	Cara	actère bien posé des problèmes initiaux
9.6	Illus	strations
	9.6.1	Domaine symétrique
	9.6.2	Arête prismatique
	9.6.3	Coin de Fichera
	9.6.4	Cavité non symétrique
9.7	Exte	ension: problèmes scalaires non injectifs
	9.7.1	Problèmes scalaires non injectifs : formulations équivalentes
	9.7.2	Problèmes scalaires non injectifs : résultats de compacité
	9.7.3	Problèmes scalaires non injectifs : retour aux problèmes initiaux 229
9.8	Exte	ension : géométries non triviales
	9.8.1	Géométries non triviales : résultats de compacité
	9.8.2	Géométries non triviales : retour aux problèmes initiaux

Introduction

ous continuons l'étude des équations de Maxwell en régime harmonique en temps dans un matériau composite plongé dans un conducteur parfait. Le matériau composite est modélisé par une permittivité diélectrique ε et une perméabilité magnétique μ qui varient en espace. Nous souhaitons plus particulièrement nous intéresser à des matériaux composites

mélangeant matériaux positifs et matériaux négatifs. Il est bien connu que les métaux, sous la fréquence plasma, présentent une permittivité à partie réelle négative (cf. Chapitre 4). Or de nombreux métaux possèdent une fréquence plasma située dans l'ultraviolet si bien que dans le visible, la partie réelle de ε est négative. La perméabilité μ reste par contre positive indépendamment de la fréquence. Récemment, les physiciens sont parvenus à concevoir des matériaux à perméabilité négative pour certaines plages de fréquences et même des matériaux doublement négatifs, c'est-àdire, des matériaux qui, après homogénéisation, se comportent comme si ε et μ étaient toutes les deux négatives. Indiquons que ce sont ces derniers « métamatériaux » qui permettent d'obtenir le spectaculaire effet d'indice de réfraction négatif. L'association de matériaux classiques avec des matériaux négatifs ouvre la voie à des applications très prometteuses telles que les guides d'ondes plasmoniques, les lentilles parfaites [148, 113, 134], les pièges à photon, les cavités sous-longueur d'ondes [76] ... De nouveau, indiquons que les expérimentations dans ces domaines sont longues et coûteuses à mettre en place, notamment en raison de l'échelle nanométrique des structures. C'est pourquoi, l'on cherche à les remplacer par des simulations numériques. Or d'un point de vue mathématique, le changement de signe des coefficients physiques présente des difficultés relativement inhabituelles tant d'un point de vue théorique que numérique [131, 137, 80]. De façon générale, les questions auxquelles nous devons répondre sont les suivantes. Peut-on étendre les théories classiques pour traiter les configurations dans lesquelles ε et/ou μ changent de signe? Si ce n'est pas possible, peut-on déterminer un nouveau cadre fonctionnel dans lequel on retrouve un problème bien posé et des propriétés de stabilité? Dans la suite, nous allons considérer des permittivités et perméabilités à valeurs réelles. Réexpliquons pourquoi. Pour les applications, l'on cherche à travailler avec des matériaux aussi peu dissipatifs que possible et le comportement d'un matériau légèrement absorbant est très lié au comportement du matériau sans dissipation. Par conséquent, il est important de bien comprendre les propriétés du problème idéal non dissipatif. Nous renvoyons le lecteur au Chapitre 4 pour ces questions de modélisation.

Pour les configurations 2D telles que les guides 3D invariants dans une direction, les équations de Maxwell se ramènent à des problèmes scalaires mettant en jeu les opérateurs $-\text{div}(\sigma\nabla\cdot)$ avec condition de Dirichlet ou de Neumann, σ étant égal à ε^{-1} ou μ^{-1} . Nous avons étudié en détail ces problèmes scalaires dans les Parties I et II (voir également [23, 155, 25, 129]). Ces problèmes sont bien posés au sens de Fredholm si le contraste (rapport des valeurs de σ de part et d'autre de l'interface entre les matériaux) est situé en dehors d'un intervalle critique contenant toujours la valeur -1. Cet intervalle se réduit à $\{-1\}$ si et seulement si l'interface est régulière (voir également [66] pour une approche reposant sur les équations intégrales). Pour un contraste égal à -1, les problèmes sont sévèrement mal posés dans H^1 . L'influence des coins, observée dans [145, 149], a été clarifiée dans [72, 26, 138] ainsi que dans le Chapitre 5. Lorsque l'interface entre le matériau positif et le matériau négatif présente un coin, selon la valeur du contraste, les problèmes scalaires peuvent être mal posés (non Fredholm) dans H^1 en raison de l'apparition de deux « singularités propagatives » au niveau du coin. Nous pouvons définir un nouveau cadre fonctionnel en ajoutant l'une de ces singularités dans l'espace. Le caractère bien posé du problème est alors obtenu en imposant une condition de radiation, justifiée par un principe d'absorption limite, au niveau du coin.

Pour les problèmes scalaires, la théorie commence à être assez claire. À présent, notre objectif consiste à étendre ces résultats pour étudier les équations de Maxwell. Nous souhaitons en particulier développer une technique variationnelle pour obtenir le caractère bien posé de ces équations. Les techniques variationnelles sont intéressantes car elles permettent de considérer des configurations relativement générales pour lesquelles l'interface et les coefficients ε , ε^{-1} , μ , μ^{-1} sont lipschitziens. Il est compliqué d'adapter l'approche géométrique présentée dans le Chapitre 1 pour traiter les problèmes vectoriels en raison de la nature des espaces utilisés pour les équations de Maxwell. C'est pourquoi nous procéderons différemment. Nous recourrons de nouveau à la technique de la T-coercivité mais sous une forme plus abstraite. Nous allons prouver que l'on peut

construire des opérateurs de T-coercivité qui permettent de restaurer une certaine positivité dès lors que les problèmes scalaires 3D associés sont bien posés. Lorsque les contrastes en ε et en μ sont situés dans les intervalles critiques, l'étude reste à mener pour obtenir un problème bien posé dans un cadre fonctionnel $ad\ hoc$.

Présentons maintenant le plan de ce chapitre. Nous commençons par définir le problème et introduire les notations dans la Section 9.1. Dans la Section 9.2, nous donnons des formulations équivalentes des équations de Maxwell dans les espaces $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ pour le champ électrique et $\mathbf{V}_{T}(\mu;\Omega)$ pour le le champ magnétique. Dans ces espaces, nous imposons la condition de divergence nulle. La Section 9.3 contient l'idée principale de ce chapitre. Nous montrons comment construire des opérateurs de T-coercivité pour les équations de Maxwell lorsque les problèmes scalaires 3D associés sont bien posés. Dans un souci pédagogique, nous présentons d'abord le procédé pour les configurations canoniques $\varepsilon = 1$ pour le champ électrique et $\mu = 1$ pour le champ magnétique. Ensuite, nous utilisons ces résultats et une astuce de [41] pour prouver que les espaces $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ et $V_T(\mu;\Omega)$ s'injectent de façon compacte dans $L^2(\Omega) := L^2(\Omega)^3$, prolongeant ainsi les résultats de [24]. De nouveau, soulignons que ces résultats n'existent pas dans la littérature lorsque ε et μ changent de signe. Dans la Section 9.5, nous énonçons et prouvons le résultat principal de ce travail : les problèmes de transmission pour les équations de Maxwell pour le champ électrique et le champ magnétique sont bien posés dès lors que les problèmes scalaires associés possèdent une unique solution. Nous illustrons ce résultat sur une série de géométries canoniques. Enfin, nous présentons quelques généralisations. Dans la Section 9.7, nous nous intéressons à des configurations pour lesquelles les problèmes scalaires sont bien posés au sens de Fredholm mais avec un noyau non réduit à zéro. Dans la Section 9.8, nous considérons le cas d'un domaine non simplement connexe à frontière non connexe 1. Cette dernière étude permet de traiter les domaines non simplement connexes à frontière connexe ainsi que les domaines simplement connexes à frontière non connexe.

9.1 Mise en place du problème

Considérons Ω un domaine de \mathbb{R}^3 , *i.e.* un ouvert borné connexe à frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne. Dans l'introduction du Chapitre 7, nous avons vu que les équations de Maxwell en régime périodique en temps s'écrivent

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E} - i\omega\mu\mathbf{H} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{rot}\,\mathbf{H} + i\omega\varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{J} \quad \text{dans } \Omega. \tag{9.1}$$

Ci-dessus, E et H désignent respectivement les champs électrique et magnétique. Le terme source J est la densité de courant. Nous faisons l'hypothèse que le milieu Ω , composé d'un ou plusieurs matériaux, est plongé dans un conducteur parfait si bien qu'on a les conditions aux limites suivantes

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$$
 et $\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial \Omega$, (9.2)

où n désigne le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$, dirigé vers l'extérieur. Nous supposons que la permittivité diélectrique ε et la perméabilité magnétique μ , à valeurs réelles, appartiennent à $L^{\infty}(\Omega)$ avec $\varepsilon^{-1} \in L^{\infty}(\Omega)$ et $\mu^{-1} \in L^{\infty}(\Omega)$. Introduisons quelques espaces usuels dans l'étude des équations de Maxwell :

```
 \begin{array}{lll} \mathbf{L}^2(\Omega) & := & \mathbf{L}^2(\Omega)^3; \\ \mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\,\Omega) & := & \left\{ \boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \,|\, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \right\}; \\ \mathbf{H}_N(\mathbf{rot}\,;\,\Omega) & := & \left\{ \boldsymbol{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\,\Omega) \,|\, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n} = 0 \,\, \mathrm{sur}\,\,\partial\Omega \right\}; \\ \mathbf{V}_N(\xi;\,\Omega) & := & \left\{ \boldsymbol{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\,\Omega) \,|\, \mathrm{div}\,(\xi\boldsymbol{u}) = 0,\, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n} = 0 \,\, \mathrm{sur}\,\,\partial\Omega \right\}, \quad \mathrm{pour}\,\,\xi \in \mathbf{L}^\infty(\Omega); \\ \mathbf{V}_T(\xi;\,\Omega) & := & \left\{ \boldsymbol{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\,\Omega) \,|\, \mathrm{div}\,(\xi\boldsymbol{u}) = 0,\, \xi\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \,\, \mathrm{sur}\,\,\partial\Omega \right\}, \quad \mathrm{pour}\,\,\xi \in \mathbf{L}^\infty(\Omega). \end{array}
```

^{1.} La Figure 9.2 à la fin de ce chapitre présente un exemple de domaine non simplement connexe à frontière non connexe.

Nous munirons les espaces $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$, $\mathbf{H}_N(\mathbf{rot}; \Omega)$, $\mathbf{V}_N(\xi; \Omega)$ et $\mathbf{V}_T(\xi; \Omega)$ du produit scalaire

$$(\cdot,\cdot)_{\mathbf{rot}} = (\cdot,\cdot)_{\Omega} + (\mathbf{rot}\cdot,\mathbf{rot}\cdot)_{\Omega}.$$

La densité de courant J est choisie dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ avec div J=0. Nous notons indistinctement $(\cdot,\cdot)_{\Omega}$ (resp. $\|\cdot\|_{\Omega}$) les produits scalaires (resp. normes) de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Si $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{H})$ vérifient les équations (9.1)-(9.2), \boldsymbol{E} et \boldsymbol{H} sont respectivement solutions des problèmes

Trouver
$$\boldsymbol{E} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$$
 tel que :

$$\mathbf{rot} \, \mu^{-1} \mathbf{rot} \, \boldsymbol{E} - \omega^{2} \varepsilon \boldsymbol{E} = i \omega \boldsymbol{J} \quad \text{dans } \Omega$$

$$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{sur } \partial \Omega,$$

$$(9.3)$$

Trouver
$$\boldsymbol{H} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$$
 tel que :
 $\mathbf{rot} \, \varepsilon^{-1} \mathbf{rot} \, \boldsymbol{H} - \omega^{2} \mu \boldsymbol{H} = \mathbf{rot} \, \varepsilon^{-1} \boldsymbol{J} \quad \text{dans } \Omega$
 $\mu \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{sur } \partial \Omega$
 $\varepsilon^{-1} (\mathbf{rot} \, \boldsymbol{H} - \boldsymbol{J}) \times \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{sur } \partial \Omega.$ (9.4)

Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, nous souhaitons déterminer des critères sur ε et μ pour assurer que les problèmes (9.3) et (9.4) sont bien posés au sens de Fredholm (noyau et conoyau de même dimension finie). Classiquement pour l'étude des équations de Maxwell, notre stratégie va consister, dans un premier temps en tout cas, à travailler dans l'espace $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ pour le champ électrique et dans l'espace $\mathbf{V}_T(\mu;\Omega)$ pour le champ magnétique. En effet, par exemple, si \mathbf{E} vérifie (9.3) et si $\omega \neq 0$, alors div $(\varepsilon \mathbf{E}) = 0$, et donc \mathbf{E} appartient à l'espace $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$. Pour montrer que le problème pour le champ électrique est bien posé au sens de Fredholm, nous aurons alors besoin de prouver que l'injection de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte et que l'opérateur $\mathbf{rot} \ \mu^{-1} \mathbf{rot} \cdot : \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega) \to \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)^*$ définit un isomorphisme (ou au moins un opérateur Fredholm d'indice zéro). De même, pour montrer que le problème en champ magnétique (9.4) est bien posé au sens de Fredholm, il faut prouver que l'injection de $\mathbf{V}_T(\mu;\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte et que l'opérateur $\mathbf{rot} \ \varepsilon^{-1} \mathbf{rot} \cdot : \mathbf{V}_T(\mu;\Omega) \to \mathbf{V}_T(\mu;\Omega)^*$ constitue un isomorphisme (ou au moins un opérateur Fredholm d'indice zéro).

9.2 Formulations équivalentes

Commençons par donner des formulations équivalentes pour le problème (9.1)-(9.2) dans les espaces $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ et $\mathbf{V}_T(\mu;\Omega)$.

9.2.1 Problème pour le champ électrique

Considérons a^{ε} la forme bilinéaire telle que $a^{\varepsilon}(\varphi,\varphi')=(\varepsilon\nabla\varphi,\nabla\varphi')_{\Omega}$ pour tout $\varphi,\varphi'\in H^1_0(\Omega)$. Avec le théorème de représentation de Riesz, définissons l'opérateur $A^{\varepsilon}:H^1_0(\Omega)\to H^1_0(\Omega)$ tel que, pour tout $\varphi,\varphi'\in H^1_0(\Omega),\ (\nabla(A^{\varepsilon}\varphi),\nabla\varphi')_{\Omega}=a^{\varepsilon}(\varphi,\varphi')$. Sur $H^1_0(\Omega)$, nous définissons la norme $\|\cdot\|_{H^1_0(\Omega)}=\|\nabla\cdot\|_{\Omega}$. Maintenant, introduisons une hypothèse portant sur le problème scalaire pour le champ électrique. Ici, C>0 est une constante.

$$(\mathscr{H}_{\varepsilon}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Il existe un isomorphisme } \mathsf{T}^{\varepsilon} \text{ de } \mathsf{H}^{1}_{0}(\Omega) \text{ tel que} \\ |a^{\varepsilon}(\varphi,\mathsf{T}^{\varepsilon}\varphi)| \geq C \ \|\varphi\|^{2}_{\mathsf{H}^{1}_{0}(\Omega)} \,, \qquad \forall \varphi \in \mathsf{H}^{1}_{0}(\Omega). \end{array} \right.$$

Lemme 9.2.1 L'hypothèse $(\mathcal{H}_{\varepsilon})$ est vérifiée si et seulement si $A^{\varepsilon}: H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ constitue un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$. Dans ce cas, pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$, il existe une unique solution au problème

Trouver
$$\varphi \in H_0^1(\Omega)$$
 tel que:

$$-\operatorname{div}(\varepsilon \nabla \varphi) = f. \tag{9.5}$$

On a alors l'estimation de continuité $\|\varphi\|_{H^1_0(\Omega)} \le C \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}$, où C > 0 est une constante indépendante de f.

Remarque 9.2.2 Nous avons vu dans le Chapitre 1 comment construire les opérateurs T^{ε} selon les configurations. Il faut avoir en tête que $(\mathcal{H}_{\varepsilon})$ est une hypothèse portant uniquement sur les valeurs de ε et sur la géométrie du domaine.

Preuve. Le résultat de ce lemme important est fourni par le Théorème 2.1.4 du Chapitre 2. Nous en redonnons la preuve, très simple, sur ce cas particulier.

Supposons l'hypothèse $(\mathscr{H}_{\varepsilon})$ vérifiée. Puisque T^{ε} définit un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$, φ vérifie (9.5) si et seulement si φ est une solution du problème « trouver $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ tel que $a^{\varepsilon}(\varphi, T^{\varepsilon}\varphi') = \langle f, T^{\varepsilon}\varphi' \rangle_{\Omega}$, pour tout $\varphi' \in H_0^1(\Omega)$ » où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega}$ désigne le crochet de dualité $H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Le théorème de Lax-Milgram permet de conclure que le problème (9.5) est bien posé car $(\varphi, \varphi') \mapsto a^{\varepsilon}(\varphi, T^{\varepsilon}\varphi')$ est coercive sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ par hypothèse. Cette approche montre que A^{ε} constitue un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$.

Réciproquement, si A^{ε} définit un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$, en prenant $T^{\varepsilon} = A^{\varepsilon}$, on trouve, pour $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $|a^{\varepsilon}(\varphi, T^{\varepsilon}\varphi)| = ||A^{\varepsilon}\varphi||_{H_0^1(\Omega)}^2 \ge C ||\varphi||_{H_0^1(\Omega)}^2$.

Théorème 9.2.3 Supposons $\omega \neq 0$.

1) Si (E, H) vérifie (9.1)-(9.2) alors E est une solution du problème

Trouver
$$\mathbf{E} \in \mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega)$$
 tel que:

$$\int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \, \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \, \mathbf{E}' - \omega^2 \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}' = i\omega \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}', \qquad \forall \mathbf{E}' \in \mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega).$$
(9.6)

2) Supposons l'hypothèse $(\mathcal{H}_{\varepsilon})$ vérifiée. Si \mathbf{E} satisfait (9.6) alors $(\mathbf{E}, (i\omega\mu)^{-1}\mathbf{rot}\,\mathbf{E})$ est une solution de (9.1)-(9.2).

Preuve. 1) Si \boldsymbol{E} vérifie (9.1)-(9.2), alors \boldsymbol{E} est une solution de (9.3). D'autre part, puisque $\omega \neq 0$, on a div ($\varepsilon \boldsymbol{E}$) = 0. Ceci montre que \boldsymbol{E} satisfait (9.6).

2) Maintenant, prouvons que si $\boldsymbol{E} \in \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega) \subset \mathbf{H}_N(\mathbf{rot};\Omega)$ vérifie (9.6) alors \boldsymbol{E} est une solution du problème

Trouver
$$\mathbf{E} \in \mathbf{H}_N(\mathbf{rot}; \Omega)$$
 tel que :
$$\int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \, \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \, \mathbf{E}' - \omega^2 \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}' = i\omega \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}', \qquad \forall \mathbf{E}' \in \mathbf{H}_N(\mathbf{rot}; \Omega).$$
(9.7)

Pour tout \mathbf{E}' dans $\mathbf{H}_N(\mathbf{rot}; \Omega)$, le Lemme 9.2.1 indique qu'on peut construire $\varphi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tel que div $(\varepsilon \nabla \varphi) = \mathrm{div}(\varepsilon \mathbf{E}')$. L'élément $\mathbf{E}' - \nabla \varphi$ appartient à $\mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega)$. En remarquant que $(\varepsilon \mathbf{E}, \nabla \varphi)_{\Omega} = 0$ et $(\mathbf{J}, \nabla \varphi)_{\Omega} = 0$ (rappelons que div $\mathbf{J} = 0$), on obtient

$$\int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \, \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \, \mathbf{E}' - \omega^{2} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}' = i\omega \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}'.$$

Mais (9.3) et (9.7) sont équivalents. Par conséquent, si \boldsymbol{E} satisfait (9.6) alors \boldsymbol{E} est solution de (9.3). Il ne reste plus qu'à observer que dans ce cas, $(\boldsymbol{E}, (i\omega\mu)^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E})$ vérifie (9.1)-(9.2).

Avec le théorème de représentation de Riesz, introduisons l'opérateur borné $\mathscr{A}_N(\omega): \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega) \to \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ tel que

$$(\mathscr{A}_N(\omega)\boldsymbol{E},\boldsymbol{E}')_{\mathbf{rot}} = (\mu^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}')_{\Omega} - \omega^2(\varepsilon\boldsymbol{E},\boldsymbol{E}')_{\Omega}, \qquad \forall \boldsymbol{E},\boldsymbol{E}' \in \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega). \tag{9.8}$$

9.2.2 Problème pour le champ magnétique

Pour l'étude du champ magnétique, introduisons l'espace des fonctions à moyenne nulle

$$H^1_{\#}(\Omega) := \left\{ \varphi \in H^1(\Omega) \mid \int_{\Omega} \varphi = 0 \right\}.$$

La seule constante appartenant à $H^1_\#(\Omega)$ est zéro. En utilisant le théorème de Rellich qui indique que l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte et puisque, par hypothèse, Ω est connexe, on montre en raisonnant par l'absurde le

Lemme 9.2.4 L'application $(\varphi, \varphi') \mapsto (\nabla \varphi, \nabla \varphi')_{\Omega}$ définit un produit scalaire sur $H^1_{\#}(\Omega)$. La norme associée est notée $\|\cdot\|_{H^1_{\#}(\Omega)}$.

Considérons a^{μ} la forme bilinéaire telle que $a^{\mu}(\varphi,\varphi') = (\mu\nabla\varphi,\nabla\varphi')_{\Omega}$ pour tout $\varphi,\varphi' \in \mathrm{H}^1_{\#}(\Omega)$. Avec le théorème de représentation de Riesz, définissons l'opérateur $A^{\mu}: \mathrm{H}^1_{\#}(\Omega) \to \mathrm{H}^1_{\#}(\Omega)$ tel que, pour tout $\varphi,\varphi' \in \mathrm{H}^1_{\#}(\Omega)$, $(\nabla(A^{\mu}\varphi),\nabla\varphi')_{\Omega} = a^{\mu}(\varphi,\varphi')$. Comme pour l'étude du champ électrique, introduisons une hypothèse associée au problème scalaire 3D pour le champ magnétique. De nouveau, C > 0 est une constante.

$$(\mathscr{H}_{\mu}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Il existe un isomorphisme } \mathtt{T}^{\mu} \text{ de } \mathrm{H}^{1}_{\#}(\Omega) \text{ tel que} \\ |a^{\mu}(\varphi,\mathtt{T}^{\mu})_{\Omega}| \geq C \ \|\varphi\|^{2}_{\mathrm{H}^{1}_{\#}(\Omega)} \,, \qquad \forall \varphi \in \mathrm{H}^{1}_{\#}(\Omega). \end{array} \right.$$

Lemme 9.2.5 L'hypothèse (\mathcal{H}_{μ}) est vérifiée si et seulement si A^{μ} constitue un isomorphisme de $H^1_{\#}(\Omega)$. Dans ce cas, pour tout $f \in L^2(\Omega)$ tel que $\int_{\Omega} f = 0$, il existe une unique solution au problème

Trouver
$$\varphi \in H^1_{\#}(\Omega)$$
 tel que :

$$-\operatorname{div}(\mu \nabla \varphi) = f \operatorname{dans} \Omega$$

$$\mu \partial_n \varphi = 0 \operatorname{sur} \partial \Omega.$$
(9.9)

On a alors l'estimation de continuité $\|\varphi\|_{H^1_\#(\Omega)} \le C \|f\|_{\Omega}$, où C > 0 est une constante indépendante de f.

Remarque 9.2.6 Soulignons que (\mathcal{H}_{μ}) constitue une hypothèse portant seulement sur les valeurs de μ et sur la géométrie du domaine.

Preuve. Supposons l'hypothèse (\mathscr{H}_{μ}) vérifiée. Dans ce cas, T^{μ} définit un isomorphisme de $\mathsf{H}^1_\#(\Omega)$. Puisque f satisfait la relation de compatibilité $\int_{\Omega} f = 0$, la fonction φ est solution de (9.9) si et seulement si elle vérifie le problème « trouver $\varphi \in \mathsf{H}^1_\#(\Omega)$ tel que $a^{\mu}(\varphi,\mathsf{T}^{\mu}\varphi') = (f,\mathsf{T}^{\mu}\varphi')_{\Omega}$, pour tout $\varphi' \in \mathsf{H}^1_\#(\Omega)$ ». Mais le Lemme 9.2.4 assure que $(\varphi,\varphi') \mapsto a^{\mu}(\varphi,\mathsf{T}^{\varepsilon}\varphi')$ est coercive sur $\mathsf{H}^1_\#(\Omega) \times \mathsf{H}^1_\#(\Omega)$. On peut alors conclure que le problème (9.9) est bien posé avec le théorème de Lax-Milgram. On déduit que A^{μ} constitue un isomorphisme de $\mathsf{H}^1_\#(\Omega)$.

Réciproquement, si A^{μ} définit un isomorphisme de $H^1_{\#}(\Omega)$, en prenant $T^{\mu} = A^{\mu}$, on trouve, pour tout $\varphi \in H^1_{\#}(\Omega)$, $|a^{\mu}(\varphi, T^{\mu}\varphi)| = ||A^{\mu}\varphi||^2_{H^1_{\#}(\Omega)} \ge C ||\varphi||^2_{H^1_{\#}(\Omega)}$.

En adaptant la preuve du Théorème 9.2.3, on obtient le

Théorème 9.2.7 Supposons $\omega \neq 0$.

1) Si (E, H) vérifie (9.1)-(9.2) alors H est une solution du problème

Trouver
$$\mathbf{H} \in \mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$$
 tel que:

$$\int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \mathbf{rot} \, \mathbf{H} \cdot \mathbf{rot} \, \mathbf{H}' - \omega^2 \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}' = \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{rot} \, \mathbf{H}', \qquad \forall \mathbf{H}' \in \mathbf{V}_T(\mu; \Omega).$$
(9.10)

2) Supposons l'hypothèse (\mathcal{H}_{μ}) vérifiée. Si \mathbf{H} satisfait (9.10) alors $(i(\omega \varepsilon)^{-1}(\mathbf{rot} \mathbf{H} - \mathbf{J}), \mathbf{H})$ est une solution de (9.1)-(9.2).

Avec le théorème de représentation de Riesz, introduisons l'opérateur borné $\mathscr{A}_T(\omega): \mathbf{V}_T(\mu;\Omega) \to \mathbf{V}_T(\mu;\Omega)$ tel que

$$(\mathscr{A}_T(\omega)\boldsymbol{H},\boldsymbol{H}')_{\mathbf{rot}} = (\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{H},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{H}')_{\Omega} - \omega^2(\mu\boldsymbol{H},\boldsymbol{H}')_{\Omega}, \qquad \forall \boldsymbol{H},\boldsymbol{H}' \in \mathbf{V}_T(\mu;\Omega). \tag{9.11}$$

9.3 Éclairage : T-coercivité dans $V_N(1; \Omega)$ et $V_T(1; \Omega)$

Dans un souci pédagogique, présentons la technique de la T-coercivité pour les équations de Maxwell 3D sur les cas académiques : $\varepsilon = 1$ pour le champ électrique et $\mu = 1$ pour le champ magnétique. Cette étude sera utile pour deux raisons. D'une part, les résultats obtenus serviront à prouver les résultats d'injection compacte de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ et $\mathbf{V}_T(\mu;\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. D'autre part, cela donnera un aperçu de la méthode à employer pour étudier les opérateurs $\mathscr{A}_N(0)$ et $\mathscr{A}_T(0)$.

Avant de débuter, rappelons ici les propriétés connues pour les espaces $\mathbf{V}_N(1;\Omega)$ et $\mathbf{V}_T(1;\Omega)$ (cf. [150, 2]).

- L'injection de $\mathbf{V}_N(1;\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte. De plus, lorsque $\partial\Omega$ est connexe, l'application $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\mapsto (\mathbf{rot}\;\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\;\boldsymbol{v})_{\Omega}$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{V}_N(1;\Omega)$ et la norme associée est équivalente à la norme canonique $\boldsymbol{u}\mapsto (\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})_{\mathbf{rot}}^{1/2}$.
- L'injection de $\mathbf{V}_T(1;\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte. De plus, lorsque Ω est simplement connexe, l'application $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\mapsto (\mathbf{rot}\;\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\;\boldsymbol{v})_{\Omega}$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{V}_T(1;\Omega)$ et la norme associée est équivalente à la norme canonique $\boldsymbol{u}\mapsto (\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})_{\mathbf{rot}}^{1/2}$.

9.3.1 Étude pour le champ électrique avec une permittivité $\varepsilon = 1$

Intéressons-nous d'abord au problème pour le champ électrique.

Lemme 9.3.1 Soit Ω un domaine simplement connexe tel que $\partial\Omega$ soit connexe. Supposons l'hypothèse (\mathscr{H}_{μ}) vérifiée. Alors, il existe un isomorphisme $\mathbb{T}: \mathbf{V}_N(1;\Omega) \to \mathbf{V}_N(1;\Omega)$ tel que

$$(\mu^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\mathbb{T}\boldsymbol{v})_{\Omega} = (\mu^{-1}\mathbf{rot}\,\mathbb{T}\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_{\Omega} = (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_{\Omega}, \qquad \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_{N}(1;\,\Omega). \tag{9.12}$$

Preuve. \star Définition de \mathbb{T} . Considérons $v \in \mathbf{V}_N(1; \Omega)$.

i) Définissons φ l'unique élément de $H^1_{\#}(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} \mu \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi' = \int_{\Omega} \mu \operatorname{\mathbf{rot}} \boldsymbol{v} \cdot \nabla \varphi', \qquad \forall \varphi' \in \mathrm{H}^1_{\#}(\Omega).$$

La fonction φ est bien définie car nous avons supposé l'hypothèse (\mathcal{H}_{μ}) vérifiée.

- ii) Observons ensuite que $\mu(\mathbf{rot}\ v \nabla \varphi)$ constitue un élément de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ à divergence nulle tel que $\mu(\mathbf{rot}\ v \nabla \varphi) \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial \Omega$. Puisque Ω est simplement connexe et puisque $\partial \Omega$ est connexe, d'après le théorème 3.17 de [2] (voir aussi le théorème 3.6 de [84]), puisque Ω est simplement connexe et puisque $\partial \Omega$ est connexe, il existe un unique potentiel $\mathbb{T}\mathbf{v} \in \mathbf{V}_N(1;\Omega)$ tel que $\mathbf{rot}\ \mathbb{T}\mathbf{v} = \mu(\mathbf{rot}\ \mathbf{v} \nabla \varphi)$. Ce procédé définit un opérateur continu $\mathbb{T}: \mathbf{V}_N(1;\Omega) \to \mathbf{V}_N(1;\Omega)$.
- \star Propriété de positivité. Pour tout $oldsymbol{u},oldsymbol{v}\in\mathbf{V}_N(1;\Omega),$ on calcule alors

$$(\boldsymbol{\mu}^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\mathbb{T}\boldsymbol{v})_{\Omega}=(\boldsymbol{\mu}^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{\mu}(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}-\nabla\varphi))_{\Omega}=(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_{\Omega},$$

car $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n} = 0$ sur $\partial\Omega$. Notons que nous avons également $(\mu^{-1}\mathbf{rot}\,\mathbb{T}\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_{\Omega} = (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_{\Omega}$. $\star\,\mathbb{T}$ est un isomorphisme de $\mathbf{V}_N(1;\Omega)$. Reprenons l'opérateur champ électrique $\mathscr{A}_N(\omega)$: $\mathbf{V}_N(1;\Omega) \to \mathbf{V}_N(1;\Omega)$ défini en (9.8). L'identité précédente permet d'écrire

$$(\mathscr{A}_N(0)(\mathbb{T}oldsymbol{u}),oldsymbol{v})_{\mathbf{rot}}=(\mu^{-1}\mathbf{rot}\,\mathbb{T}oldsymbol{u},\mathbf{rot}\,oldsymbol{v})_\Omega=(\mathbf{rot}\,oldsymbol{u},\mathbf{rot}\,oldsymbol{v})_\Omega,\qquad orall oldsymbol{u},oldsymbol{v}\in\mathbf{V}_N(1;\,\Omega).$$

Puisque $\partial\Omega$ est connexe, l'application $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto (\mathbf{rot} \, \boldsymbol{u}, \mathbf{rot} \, \boldsymbol{v})_{\Omega}$ constitue un produit scalaire sur $\mathbf{V}_N(1; \Omega)$. Par conséquent, l'opérateur $\mathscr{A}_N(0) \circ \mathbb{T}$ est un isomorphisme de $\mathbf{V}_N(1; \Omega)$. Puisque $\mathscr{A}_N(0)$ est autoadjoint, nous déduisons que $\mathscr{A}_N(0)$ et \mathbb{T} définissent des isomorphismes.

Nous déduisons la

Proposition 9.3.2 Soit Ω un domaine simplement connexe tel que $\partial\Omega$ soit connexe. Supposons l'hypothèse (\mathcal{H}_{μ}) vérifiée et $\varepsilon = 1$. Alors, le problème pour le champ électrique (9.6) possède une unique solution qui dépend continûment de la donnée \mathbf{J} , pour tout $\omega \in \mathbb{C} \backslash \mathcal{F}$, où \mathcal{F} est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible.

Preuve. D'après le Lemme 9.3.1, l'opérateur $\mathscr{A}_N(0)$, avec $\varepsilon = 1$, définit un isomorphisme lorsque l'hypothèse (\mathscr{H}_{μ}) est vérifiée. Puisque $\mathbf{V}_N(1;\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, $\mathscr{A}_N(\omega)$ diffère de $\mathscr{A}_N(0)$ d'une perturbation compacte pour tout $\omega \in \mathbb{C}$. Le théorème de Fredholm analytique permet alors de conclure.

Remarque 9.3.3 Tout ce que venons de faire dans ce paragraphe fonctionne également en remplaçant l'hypothèse « $\varepsilon = 1$ » par l'hypothèse « $\varepsilon \geq C > 0$ ». Pour traiter le cas d'un coefficient ε présentant un changement de signe, nous aurons besoin de supposer l'hypothèse ($\mathcal{H}_{\varepsilon}$) vérifiée pour pouvoir construire un opérateur \mathbb{T} qui soit bien à valeurs dans $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ et pour montrer que $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

9.3.2 Étude pour le champ magnétique avec une perméabilité $\mu = 1$

Étudions maintenant le problème pour le champ magnétique.

Lemme 9.3.4 Soit Ω un domaine simplement connexe tel que $\partial\Omega$ soit connexe. Supposons l'hypothèse $(\mathcal{H}_{\varepsilon})$ vérifiée. Alors, il existe un isomorphisme \mathbb{T} de $\mathbf{V}_T(1;\Omega)$ tel que

$$(\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\mathbb{T}\boldsymbol{v})_{\Omega} = (\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\mathbb{T}\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_{\Omega} = (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_{\Omega}, \qquad \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_{T}(1;\,\Omega). \tag{9.13}$$

Preuve. La preuve est très similaire à celle du Lemme 9.3.1, les différences portant uniquement sur les conditions aux limites.

- * Définition de T. Considérons $v \in \mathbf{V}_T(1; \Omega)$.
- i) Définissons d'abord φ l'unique élément de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} \varepsilon \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi' = \int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{\mathbf{rot}} \boldsymbol{v} \cdot \nabla \varphi', \qquad \forall \varphi' \in \mathrm{H}_{0}^{1}(\Omega).$$

La fonction φ est bien définie car nous avons supposé $(\mathcal{H}_{\varepsilon})$ vérifiée.

- ii) Ensuite, remarquons que $\varepsilon(\mathbf{rot} \ \boldsymbol{v} \nabla \varphi)$ constitue un élément de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ à divergence nulle. D'après le théorème 3.12 de [2], puisque Ω est simplement connexe et puisque $\partial \Omega$ est connexe, il existe un unique potentiel $\mathbb{T}\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_T(1;\Omega)$ tel que $\mathbf{rot} \ \mathbb{T}\boldsymbol{v} = \varepsilon(\mathbf{rot} \ \boldsymbol{v} \nabla \varphi)$. Ceci définit un opérateur \mathbb{T} continu de $\mathbf{V}_T(1;\Omega)$ dans $\mathbf{V}_T(1;\Omega)$.
- \star Propriété de positivité. Pour tout $u, v \in V_T(1; \Omega)$, on trouve

$$(\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\mathbb{T}\boldsymbol{v})_{\Omega}=(\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u},\varepsilon(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}-\nabla\varphi))_{\Omega}=(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_{\Omega},$$

car $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega$. On a également $(\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\mathbb{T}\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_{\Omega} = (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_{\Omega}$.

 \star T est un isomorphisme de $\mathbf{V}_T(1;\Omega)$. Reprenons l'opérateur champ magnétique $\mathscr{A}_T(\omega)$: $\mathbf{V}_T(1;\Omega) \to \mathbf{V}_T(1;\Omega)$ défini en (9.11). Nous pouvons écrire

$$(\mathscr{A}_T(0)(\mathbb{T}\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v})_{\mathbf{rot}} = (\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\mathbb{T}\boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_{\Omega} = (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_{\Omega}, \qquad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_T(1;\Omega). \tag{9.14}$$

Puisque Ω est simplement connexe, l'application $(u, v) \mapsto (\mathbf{rot} \ u, \mathbf{rot} \ v)_{\Omega}$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{V}_T(1; \Omega)$. L'égalité (9.14) prouve donc que $\mathscr{A}_T(0) \circ \mathbb{T}$ est un isomorphisme. Puisque $\mathscr{A}_T(0)$ est autoadjoint, nous pouvons affirmer que $\mathscr{A}_T(0)$ et \mathbb{T} constituent des isomorphismes de $\mathbf{V}_T(1; \Omega)$.

En procédant comme pour la Proposition 9.3.2, on prouve la

Proposition 9.3.5 Soit Ω un domaine simplement connexe tel que $\partial\Omega$ soit connexe. Supposons l'hypothèse $(\mathcal{H}_{\varepsilon})$ vérifiée et $\mu = 1$. Alors, le problème pour le champ magnétique (9.10) possède une unique solution qui dépend continûment de la donnée \mathbf{J} , pour tout $\omega \in \mathbb{C} \backslash \mathcal{F}$, où \mathcal{F} est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible.

Remarque 9.3.6 Comme dans la Remarque 9.3.3, indiquons que l'analyse que nous avons développée dans ce paragraphe est également valide en remplaçant l'hypothèse « $\mu = 1$ » par l'hypothèse « $\mu \geq C > 0$ ». Lorsque μ change de signe, il faut supposer l'hypothèse (\mathcal{H}_{μ}) vérifiée pour pouvoir construire un opérateur \mathbb{T} à valeurs dans $\mathbf{V}_T(\mu;\Omega)$ et pour prouver le résultat d'injection compacte de $\mathbf{V}_T(\mu;\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

9.4 Résultats de compacité

Définissons les espaces, pour $\xi \in L^{\infty}(\Omega)$,

$$\mathbf{X}_{N}(\xi; \Omega) := \left\{ \boldsymbol{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) \mid \operatorname{div}(\xi \boldsymbol{u}) \in \mathbf{L}^{2}(\Omega), \, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n} = 0 \, \operatorname{sur} \, \partial \Omega \right\}; \\ \mathbf{X}_{T}(\xi; \Omega) := \left\{ \boldsymbol{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) \mid \operatorname{div}(\xi \boldsymbol{u}) \in \mathbf{L}^{2}(\Omega), \, \xi \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \, \operatorname{sur} \, \partial \Omega \right\}.$$

Nous les munissons de la norme $\boldsymbol{u} \mapsto (\|\boldsymbol{u}\|_{\Omega}^2 + \|\operatorname{div}(\xi\boldsymbol{u})\|_{\Omega}^2 + \|\operatorname{rot}\boldsymbol{u}\|_{\Omega}^2)^{1/2}$. Dans ce paragraphe, nous prouvons que $\mathbf{X}_N(\varepsilon;\Omega)$ et $\mathbf{X}_T(\mu;\Omega)$ s'injectent de façon compacte dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ lorsque $(\mathscr{H}_{\varepsilon})$ et (\mathscr{H}_{μ}) sont vérifiées, étendant ainsi les théorèmes classiques de [150, 117]. Ceci constitue un résultat un peu plus général que celui dont nous avons besoin pour notre étude, à savoir l'injection compacte de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ et $\mathbf{V}_T(\mu;\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

9.4.1 Injection compacte de $X_N(\varepsilon; \Omega)$ dans $L^2(\Omega)$

Commençons par étudier l'espace des champs électriques.

Théorème 9.4.1 Soit Ω un domaine simplement connexe tel que $\partial\Omega$ soit connexe. Supposons l'hypothèse $(\mathcal{H}_{\varepsilon})$ vérifiée. Alors l'injection de $\mathbf{X}_N(\varepsilon;\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte.

Preuve. Soit (\boldsymbol{u}_n) une suite bornée de $\mathbf{X}_N(\varepsilon;\Omega)$. Définissons $f_n := \operatorname{div}(\varepsilon \boldsymbol{u}_n)$ et $\boldsymbol{F}_n := \operatorname{rot} \boldsymbol{u}_n$. Les suites (f_n) et (\boldsymbol{F}_n) sont respectivement bornées dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. D'après le Lemme 9.2.1, il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que div $(\varepsilon \nabla \varphi_n) = \operatorname{div}(\varepsilon \boldsymbol{u}_n)$. La fonction $\varepsilon(\boldsymbol{u}_n - \nabla \varphi_n)$, élément de $\mathbf{L}^2(\Omega)$, est à divergence nulle. Puisque $\partial\Omega$ est connexe, il existe (voir [2], théorème 3.12) un potentiel \boldsymbol{w}_n appartenant à $\mathbf{V}_T(1;\Omega)$ tel que $\operatorname{rot} \boldsymbol{w}_n = \varepsilon(\boldsymbol{u}_n - \nabla \varphi_n)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\boldsymbol{u}_n = \nabla \varphi_n + \varepsilon^{-1} \operatorname{rot} \boldsymbol{w}_n$. Montrons qu'on peut extraire de $(\nabla \varphi_n)$ et $(\operatorname{rot} \boldsymbol{w}_n)$ des sous-suites qui convergent dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Le Lemme 9.2.1 assure que (φ_n) reste bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Puisque T^{ε} est continu de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, la suite $(T^{\varepsilon}\varphi_n)$ est également bornée dans $H_0^1(\Omega)$. Mais $H_0^1(\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $L^2(\Omega)$. Par conséquent, on peut extraire de (φ_n) une sous-suite (toujours notée (φ_n)) telle que $(T^{\varepsilon}\varphi_n)$ converge dans $L^2(\Omega)$. Introduisons $\varphi_{nm} = \varphi_n - \varphi_m$ et $f_{nm} = f_n - f_m$. Par linéarité, on a $-(\varepsilon \nabla \varphi_{nm}, \nabla \varphi')_{\Omega} = (f_{nm}, \varphi')_{\Omega}$ pour tout $\varphi' \in H_0^1(\Omega)$. En choisissant $\varphi' = T^{\varepsilon}\varphi_{nm}$, on obtient

$$C \|\varphi_{nm}\|_{\mathrm{H}_{0}^{1}(\Omega)}^{2} \leq |(\varepsilon \nabla \varphi_{nm}, \nabla (\mathtt{T}^{\varepsilon} \varphi_{nm}))_{\Omega}| = |(f_{nm}, \mathtt{T}^{\varepsilon} \varphi_{nm})_{\Omega}|.$$

Ceci montre que la suite $(\nabla \varphi_n)$ est de Cauchy dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, donc qu'elle converge.

Maintenant, travaillons sur la suite (**rot** w_n). Nous savons que $w \mapsto \|\mathbf{rot} w\|_{\Omega}$ définit une norme sur $\mathbf{V}_T(1; \Omega)$. Par conséquent, la suite (w_n) est bornée dans $\mathbf{V}_T(1; \Omega)$ et nous pouvons en extraire

une sous-suite, toujours notée (\boldsymbol{w}_n) , qui converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. En vertu du Lemme 9.3.4, il existe un isomorphisme \mathbb{T} de $\mathbf{V}_T(1;\Omega)$ tel que

$$\left|(arepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,oldsymbol{w},\mathbf{rot}\,\mathbb{T}oldsymbol{w})_{\Omega}
ight|=\left\|\mathbf{rot}\,oldsymbol{w}
ight\|_{\Omega}^{2},\qquadoralloldsymbol{w}\in\mathbf{V}_{T}(1;\,\Omega).$$

Comme \mathbb{T} est continu, la suite $(\mathbb{T}\boldsymbol{w}_n)$ est bornée dans $\mathbf{V}_T(1;\Omega)$. Ainsi, nous pouvons extraire de (\boldsymbol{w}_n) une sous-suite, toujours notée (\boldsymbol{w}_n) , telle que $(\mathbb{T}\boldsymbol{w}_n)$ converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Introduisons $\boldsymbol{w}_{nm} = \boldsymbol{w}_n - \boldsymbol{w}_m$ et $\boldsymbol{F}_{nm} = \boldsymbol{F}_n - \boldsymbol{F}_m$. Puisque $\operatorname{rot} \varepsilon^{-1}\operatorname{rot} \boldsymbol{w}_n = \boldsymbol{F}_n$ dans Ω et $(\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}\boldsymbol{w}_n) \times \boldsymbol{n} = 0$ sur $\partial\Omega$, on a $(\varepsilon^{-1}\operatorname{rot}\boldsymbol{w}_{nm},\operatorname{rot}\boldsymbol{w}')_{\Omega} = (\boldsymbol{F}_{nm},\boldsymbol{w}')_{\Omega}$ pour tout $\boldsymbol{w}' \in \mathbf{V}_T(1;\Omega)$. En testant avec $\boldsymbol{w}' = \mathbb{T}\boldsymbol{w}_{nm}$, on trouve :

$$\|\mathbf{rot}\, \boldsymbol{w}_{nm}\|_{\Omega}^2 = |(\boldsymbol{F}_{nm}, \mathbb{T}\boldsymbol{w}_{nm})_{\Omega}|.$$

Par conséquent, la suite (rot w_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Elle converge donc.

Corollaire 9.4.2 Soit Ω un domaine simplement connexe tel que $\partial\Omega$ soit connexe. Supposons l'hypothèse $(\mathcal{H}_{\varepsilon})$ vérifiée. Alors il existe une constante C telle que

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\Omega}^{2} \leq C \|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}\|_{\Omega}^{2}, \qquad \forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{V}_{N}(\varepsilon;\Omega).$$
 (9.15)

Ainsi, l'application $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto (\mathbf{rot} \, \boldsymbol{u}, \mathbf{rot} \, \boldsymbol{v})_{\Omega}$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega)$ et la norme associée est équivalente à la norme canonique $\boldsymbol{u} \mapsto (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})_{\mathbf{rot}}^{1/2}$.

Preuve. Pour prouver ce corollaire, il suffit de montrer l'estimation (9.15). Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une suite (u_n) d'éléments de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|\boldsymbol{u}_n\|_{\Omega} = 1$$
 et $\lim_{n \to \infty} \|\mathbf{rot} \, \boldsymbol{u}_n\|_{\Omega} = 0.$

D'après le Théorème 9.4.1 d'injection compacte, nous pouvons extraire de (\boldsymbol{u}_n) une sous-suite (toujours notée (\boldsymbol{u}_n)) qui converge vers \boldsymbol{u} dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Par construction, on a $\|\boldsymbol{u}\|_{\Omega} = 1$. On vérifie aisément que $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{u} = 0$ p.p. dans Ω . De plus, \boldsymbol{u}_n appartient à $\mathbf{H}_N(\mathbf{rot}\ ;\Omega)$ pour tout n et donc, \boldsymbol{u} est un élément de $\mathbf{H}_N(\mathbf{rot}\ ;\Omega)$. Puisque $\partial\Omega$ est simplement connexe, on déduit (cf. [45], théorème 8) qu'il existe un potentiel scalaire $\varphi \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que $\boldsymbol{u} = \nabla \varphi$ dans Ω . Enfin, on remarque que div $(\varepsilon \boldsymbol{u}) = 0$ et donc div $(\varepsilon \nabla \varphi) = 0$. Le Lemme 9.2.1 implique $\varphi = 0$ et donc $\boldsymbol{u} = 0$. Ceci conduit à une absurdité car on doit avoir $\|\boldsymbol{u}\|_{\Omega} = 1$.

9.4.2 Injection compacte de $X_T(\mu; \Omega)$ dans $L^2(\Omega)$

Travaillons à présent sur l'espace des champs magnétiques.

Théorème 9.4.3 Soit Ω un domaine simplement connexe tel que $\partial\Omega$ soit connexe. Supposons l'hypothèse (\mathcal{H}_{μ}) vérifiée. Alors, l'injection de $\mathbf{X}_{T}(\mu;\Omega)$ dans $\mathbf{L}^{2}(\Omega)$ est compacte.

Preuve. Soit (u_n) une suite bornée d'éléments de $\mathbf{X}_T(\mu;\Omega)$. Définissons $f_n := \operatorname{div}(\mu u_n)$ et $\mathbf{F}_n := \operatorname{rot} \mathbf{u}_n$. La suite (f_n) est bornée dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ tandis que (\mathbf{F}_n) est bornée dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mu u_n) = \int_{\partial\Omega} \mu u_n \cdot \mathbf{n} = 0$, le Lemme 9.2.5 permet de construire $\varphi_n \in \mathrm{H}^1_\#(\Omega)$ tel que $\operatorname{div}(\mu \nabla \varphi_n) = \operatorname{div}(\mu u_n)$. Remarquons ensuite que $\mu(\mathbf{u}_n - \nabla \varphi_n)$ constitue un élément de $\mathrm{L}^2(\Omega)$ à divergence nulle tel que $\mu(\mathbf{u}_n - \nabla \varphi_n) \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$. Puisque Ω est simplement connexe, d'après le théorème 3.17 de [2], il existe un potentiel $\mathbf{w}_n \in \mathbf{V}_N(1;\Omega)$ tel que $\mathrm{rot} \mathbf{w}_n = \mu(\mathbf{u}_n - \nabla \varphi_n)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\mathbf{u}_n = \nabla \varphi_n + \mu^{-1} \mathrm{rot} \mathbf{w}_n$.

On montre ensuite comme dans la preuve du Théorème 9.4.1, en utilisant l'hypothèse (\mathcal{H}_{μ}) , qu'on peut extraire de $(\nabla \varphi_n)$ et $(\mathbf{rot} \ w_n)$ des sous-suites qui convergent dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Comme précédemment, ce théorème permet d'obtenir le

Corollaire 9.4.4 Soit Ω un domaine simplement connexe tel que $\partial\Omega$ soit connexe. Supposons l'hypothèse (\mathcal{H}_{μ}) vérifiée. Alors, il existe une constante C telle que

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\Omega}^{2} \leq C \|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}\|_{\Omega}^{2}, \qquad \forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{V}_{T}(\mu;\,\Omega).$$
 (9.16)

Ainsi, l'application $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto (\mathbf{rot} \, \boldsymbol{u}, \mathbf{rot} \, \boldsymbol{v})_{\Omega}$ définit un produit scalaire sur $\mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$ et la norme associée est équivalente à la norme canonique $\boldsymbol{u} \mapsto (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})_{\mathbf{rot}}^{1/2}$.

9.5 Caractère bien posé des problèmes initiaux

Nous étendons les résultats des Lemmes 9.3.1 et 9.3.4 pour pouvoir traiter le problème en champ électrique (resp. champ magnétique) lorsque ε (resp. μ) change de signe. Nous précisons ainsi la Remarque 9.3.3 (resp. Remarque 9.3.6).

Lemme 9.5.1 Soit Ω un domaine simplement connexe tel que $\partial\Omega$ soit connexe. Supposons les hypothèses $(\mathcal{H}_{\varepsilon})$ et (\mathcal{H}_{μ}) vérifiées. Alors :

• Il existe un isomorphisme \mathbb{T}^{ε} de $\mathbf{V}_{N}(\varepsilon;\Omega)$ tel que

$$(\mu^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\mathbb{T}^{\varepsilon}\boldsymbol{v})_{\Omega} = (\mu^{-1}\mathbf{rot}\,\mathbb{T}^{\varepsilon}\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_{\Omega} = (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_{\Omega}, \qquad \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_{N}(\varepsilon;\Omega). \tag{9.17}$$

• Il existe un isomorphisme \mathbb{T}^{μ} de $\mathbf{V}_{T}(\mu;\Omega)$ tel que

$$(\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\mathbb{T}^{\mu}\boldsymbol{v})_{\Omega} = (\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\mathbb{T}^{\mu}\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_{\Omega} = (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_{\Omega}, \qquad \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_{T}(\mu;\Omega). \tag{9.18}$$

Preuve. Les premières étapes de construction des opérateurs \mathbb{T}^{ε} et \mathbb{T}^{μ} vont être les mêmes que celles des Lemmes 9.3.1 et 9.3.4. Nous les rappelons néanmoins dans un souci de clarté. Bien sûr, pour obtenir des champs appartenant à $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ et $\mathbf{V}_T(\mu;\Omega)$ (au lieu de $\mathbf{V}_N(1;\Omega)$ et $\mathbf{V}_T(1;\Omega)$), il va falloir rajouter une étape.

- * Définition de \mathbb{T}^{ε} . Considérons $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_{N}(\varepsilon; \Omega)$.
- i) Introduisons φ l'unique élément de $H^1_{\#}(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} \mu \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi' = \int_{\Omega} \mu \operatorname{\mathbf{rot}} \boldsymbol{v} \cdot \nabla \varphi', \qquad \forall \varphi' \in \mathrm{H}^{1}_{\#}(\Omega).$$

La fonction φ est bien définie car nous avons supposé (\mathcal{H}_{μ}) vérifiée.

- ii) Remarquons ensuite que $\mu(\mathbf{rot} \, \mathbf{v} \nabla \varphi)$ constitue un élément de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ à divergence nulle tel que $\mu(\mathbf{rot} \, \mathbf{v} \nabla \varphi) \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial \Omega$. Puisque Ω est simplement connexe et puisque $\partial \Omega$ est connexe, d'après le théorème 3.17 de [2], il existe un unique potentiel ψ appartenant à $\mathbf{V}_N(1; \Omega)$ tel que $\mathbf{rot} \, \psi = \mu(\mathbf{rot} \, \mathbf{v} \nabla \varphi)$.
- iii) Considérons ζ l'unique élément de $H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} \varepsilon \nabla \zeta \cdot \nabla \zeta' = \int_{\Omega} \varepsilon \, \psi \cdot \nabla \zeta', \qquad \forall \zeta' \in H_0^1(\Omega).$$

La fonction ζ est bien définie puisque nous avons supposé $(\mathcal{H}_{\varepsilon})$ vérifiée.

- iv) Définissons enfin l'opérateur \mathbb{T}^{ε} : $\mathbf{V}_{N}(\varepsilon; \Omega) \to \mathbf{V}_{N}(\varepsilon; \Omega)$ tel que $\mathbb{T}^{\varepsilon} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\psi} \nabla \zeta$ pour $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_{N}(\varepsilon; \Omega)$.
- * Définition de \mathbb{T}^{μ} . Considérons $v \in \mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$.
- i) Introduisons φ l'unique élément de $H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} \varepsilon \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi' = \int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{\mathbf{rot}} \boldsymbol{v} \cdot \nabla \varphi', \qquad \forall \varphi' \in \mathrm{H}^{1}_{0}(\Omega).$$

La fonction φ est bien définie puisque nous avons supposé $(\mathcal{H}_{\varepsilon})$ vérifiée.

- ii) Ensuite, observons que $\varepsilon(\mathbf{rot} \ v \nabla \varphi)$ est dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, à divergence nulle. Puisque Ω est simplement connexe et puisque $\partial \Omega$ est connexe, en vertu du théorème 3.12 de [2], il existe un unique potentiel $\psi \in \mathbf{V}_T(1;\Omega)$ tel que $\mathbf{rot} \ \psi = \varepsilon(\mathbf{rot} \ v \nabla \varphi)$.
- iii) Considérons ζ l'unique élément de $H^1_{\#}(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} \mu \nabla \zeta \cdot \nabla \zeta' = \int_{\Omega} \mu \, \psi \cdot \nabla \zeta', \qquad \forall \zeta' \in \mathrm{H}^1_{\#}(\Omega).$$

La fonction ζ est bien définie car (\mathcal{H}_{μ}) est vérifiée.

iv) Définissons enfin l'opérateur \mathbb{T}^{μ} : $\mathbf{V}_T(\mu;\Omega) \to \mathbf{V}_T(\mu;\Omega)$ tel que $\mathbb{T}^{\mu}\mathbf{v} = \boldsymbol{\psi} - \nabla \zeta$ pour $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_T(\mu;\Omega)$.

Un calcul simple conduit alors à (9.17) et (9.18). En procédant comme dans les Lemmes 9.3.1 et 9.3.4, en utilisant les Corollaires 9.4.2 et 9.4.4 qui prouvent que $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto (\mathbf{rot} \ \boldsymbol{u}, \mathbf{rot} \ \boldsymbol{v})_{\Omega}$ constitue un produit scalaire sur $\mathbf{V}_{N}(\varepsilon; \Omega)$ et sur $\mathbf{V}_{T}(\mu; \Omega)$, on montre a posteriori que \mathbb{T}^{ε} et \mathbb{T}^{μ} définissent respectivement des isomorphismes de $\mathbf{V}_{N}(\varepsilon; \Omega)$ et $\mathbf{V}_{T}(\mu; \Omega)$.

Nous disposons à présent de tous les outils pour démontrer le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 9.5.2 Soit Ω un domaine simplement connexe tel que $\partial\Omega$ soit connexe. Effectuons les hypothèses $(\mathcal{H}_{\varepsilon})$ et (\mathcal{H}_{μ}) :

$$(\mathscr{H}_{\varepsilon}) \quad \left| \begin{array}{l} \textit{Il existe un isomorphisme } \mathsf{T}^{\varepsilon} \; \textit{de} \; \mathrm{H}^{1}_{0}(\Omega) \; \textit{tel que} \\ |(\varepsilon \nabla \varphi, \nabla (\mathsf{T}^{\varepsilon} \varphi))_{\Omega}| \geq C \; \|\varphi\|^{2}_{\mathrm{H}^{1}_{0}(\Omega)} \,, \qquad \forall \varphi \in \mathrm{H}^{1}_{0}(\Omega). \end{array} \right.$$

$$(\mathscr{H}_{\mu}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Il existe un isomorphisme } \mathcal{T}^{\mu} \text{ de } \mathcal{H}^{1}_{\#}(\Omega) \text{ tel que} \\ |(\mu \nabla \varphi, \nabla (\mathcal{T}^{\mu} \varphi))_{\Omega}| \geq C \|\varphi\|_{\mathcal{H}^{1}_{\#}(\Omega)}^{2}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}^{1}_{\#}(\Omega). \end{array} \right|$$

Alors on a les résultats suivants.

• Il existe une unique solution au problème pour le champ électrique

Trouver
$$\mathbf{E} \in \mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega)$$
 tel que:

$$\int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \, \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \, \mathbf{E}' - \omega^2 \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}' = i\omega \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}', \qquad \forall \mathbf{E}' \in \mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega),$$
(9.19)

qui dépend continûment de la donnée J, pour tout $\omega \in \mathbb{C} \backslash \mathscr{S}$, où \mathscr{S} est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible.

• Il existe une unique solution au problème pour le champ magnétique

Trouver
$$\mathbf{H} \in \mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$$
 tel que:

$$\int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \mathbf{rot} \, \mathbf{H} \cdot \mathbf{rot} \, \mathbf{H}' - \omega^2 \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}' = \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{rot} \, \mathbf{H}', \qquad \forall \mathbf{H}' \in \mathbf{V}_T(\mu; \Omega),$$

qui dépend continûment de la donnée J, pour tout $\omega \in \mathbb{C} \backslash \mathscr{S}$.

• Les équations de Maxwell (9.1)-(9.2) possèdent une unique solution pour tout $\omega \in \mathbb{C} \backslash \mathscr{S}$.

Preuve. Commençons par le premier point. Le Lemme 9.5.1 assure qu'il existe un isomorphisme $\mathbb{T}^{\varepsilon}: \mathbf{V}_{N}(\varepsilon; \Omega) \to \mathbf{V}_{N}(\varepsilon; \Omega)$ tel que $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto (\mu^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}, \mathbf{rot}\,\mathbb{T}^{\varepsilon}\boldsymbol{v})_{\Omega}$ soit coercive sur $\mathbf{V}_{N}(\varepsilon; \Omega) \times \mathbf{V}_{N}(\varepsilon; \Omega)$. Maintenant, puisque \mathbb{T}^{ε} est un isomorphisme, le champ \boldsymbol{E} vérifie (9.19) si et seulement si \boldsymbol{E} satisfait le problème

Trouver
$$\boldsymbol{E} \in \mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega)$$
 tel que :

$$\int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \, \boldsymbol{E} \cdot \mathbf{rot} \, (\mathbb{T}^{\varepsilon} \boldsymbol{E}') - \omega^2 \varepsilon \boldsymbol{E} \cdot (\mathbb{T}^{\varepsilon} \boldsymbol{E}') = i\omega \int_{\Omega} \boldsymbol{J} \cdot (\mathbb{T}^{\varepsilon} \boldsymbol{E}'), \qquad \forall \boldsymbol{E}' \in \mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega).$$

Or d'après le Théorème 9.4.1, l'injection de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte. Par conséquent, l'alternative de Fredholm est vérifiée pour ce problème. Le second point se montre de la même façon tandis que le troisième s'obtient à partir des Théorèmes 9.2.3 et 9.2.7.

9.6. Illustrations 223

9.6 Illustrations

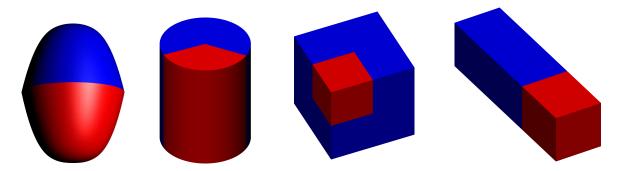
Nous appliquons le Théorème 9.5.2 dans quelques configurations simples. Nous nous intéressons à des situations pour lesquelles le milieu est constitué de deux matériaux différents. Pour modéliser ce problème, nous supposons Ω divisé en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 avec $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$ et $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Notons $\Sigma := \partial \Omega_1 \setminus \partial \Omega = \partial \Omega_2 \setminus \partial \Omega$. Introduisons ε_1 et μ_1 (resp. ε_2 et μ_2) deux éléments de $L^{\infty}(\Omega_1)$ (resp. $L^{\infty}(\Omega_2)$). Définissons les fonctions ε et μ telles que $\varepsilon|_{\Omega_k} = \varepsilon_k$ et $\mu|_{\Omega_k} = \mu_k$ pour k = 1, 2. Nous supposons Ω_1 occupé par un matériau positif usuel et Ω_2 rempli d'un matériau possiblement négatif (pour ε et/ou μ). Pour cela, nous effectuons les hypothèses suivantes :

- il existe une constante C telle que $\varepsilon_1 \geq C > 0$ et $\mu_1 \geq C > 0$ p.p. dans Ω_1 ;
- il existe une constante C telle que $\varepsilon_2 \geq C > 0$ p.p. dans Ω_2 ou $\varepsilon_2 \leq -C < 0$ p.p. dans Ω_2 ;
- il existe une constante C telle que $\mu_2 \geq C > 0$ p.p. dans Ω_2 ou $\mu_2 \leq -C < 0$ p.p. dans Ω_2 .

Sous ces hypothèses, on a $\varepsilon^{-1} \in L^{\infty}(\Omega)$ et $\mu^{-1} \in L^{\infty}(\Omega)$. Définissons alors

$$\sigma_1^+ := \sup_{\Omega_1} \sigma_1, \quad \sigma_2^+ := \sup_{\Omega_2} |\sigma_2|, \quad \sigma_1^- := \inf_{\Omega_1} \sigma_1 \quad \text{et} \quad \sigma_2^- := \inf_{\Omega_2} |\sigma_2|, \quad \text{pour } \sigma = \varepsilon, \mu.$$

De façon générale, si v est une fonction mesurable sur Ω , nous utilisons la notation $v_k := v|_{\Omega_k}$, k = 1, 2.



 $\label{eq:Figure 9.1} Figure \ 9.1-G\'{e}om\'{e}tries \ canoniques: domaine sym\'{e}trique, ar\^{e}te prismatique, coin de Fichera et cavit\'e non sym\'{e}trique.$

9.6.1 Domaine symétrique

Soit Ω un domaine symétrique, au sens où Ω_1 est l'image de Ω_2 par une symétrie. Sans perte de généralité, nous supposons que l'interface Σ est incluse dans le plan z=0 (voir la Figure 9.1, à gauche, pour un exemple). Considérons les opérateurs R_1 et R_2 respectivement définis par $(R_1\varphi_1)(x,y,z)=\varphi_1(x,y,-z)$ et $(R_2\varphi_2)(x,y,z)=\varphi_2(x,y,-z)$ pour $\varphi\in H^1(\Omega)$. Définissons les opérateurs T_1 et T_2 tels que :

$$T_{1}\varphi = \begin{cases} \varphi_{1} & \operatorname{dans} \Omega_{1} \\ -\varphi_{2} + 2R_{1}\varphi_{1} & \operatorname{dans} \Omega_{2} \end{cases}; \quad T_{2}\varphi = \begin{cases} \varphi_{1} - 2R_{2}\varphi_{2} & \operatorname{dans} \Omega_{1} \\ -\varphi_{2} & \operatorname{dans} \Omega_{2} \end{cases}.$$
(9.20)

En remarquant que $T_1 \circ T_1 = T_2 \circ T_2 = Id$, on déduit que T_1 et T_2 constituent des isomorphismes de $H^1(\Omega)$. Les restrictions T_1^{ε} et T_2^{ε} de T_1 et T_2 à $H^1_0(\Omega)$ sont des isomorphismes de $H^1_0(\Omega)$. Introduisons la forme linéaire $\gamma: H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ telle que $\gamma(\varphi) = \int_{\Omega} \varphi / \int_{\Omega} 1$. Définissons alors les opérateurs T_1^{μ} et T_2^{μ} tels que, pour tout $\varphi \in H^1_{\#}(\Omega)$, $T_1^{\mu}\varphi = T_1\varphi - \gamma(T_1\varphi)$ et $T_2^{\mu}\varphi = T_2\varphi - \gamma(T_2\varphi)$. Remarquons que T_1^{μ} et T_2^{μ} sont bien à valeurs dans $H^1_{\#}(\Omega)$. De plus, on a

$$\begin{array}{lcl} T_1^\mu(T_1^\mu\varphi) &=& T_1^\mu(T_1\varphi-\gamma(T_1\varphi)) &=& T_1(T_1\varphi-\gamma(T_1\varphi))-\gamma(T_1(T_1\varphi-\gamma(T_1\varphi))) \\ &=& \varphi-T_1(\gamma(T_1\varphi))-\gamma(\varphi-T_1(\gamma(T_1\varphi))) \\ &=& \varphi-T_1(\gamma(T_1\varphi))+\gamma(T_1(\gamma(T_1\varphi))) &=& \varphi. \end{array}$$

Ainsi, $T_1^{\mu} \circ T_1^{\mu} = \text{Id.}$ De même, on montre que $T_2^{\mu} \circ T_2^{\mu} = \text{Id.}$ Ceci prouve que T_1^{μ} et T_2^{μ} sont des isomorphismes de $H_{\#}^1(\Omega)$.

Proposition 9.6.1 (Domaine symétrique)

Supposons que ε vérifie $\varepsilon \geq C > 0$ p.p. dans Ω ou $\max(\varepsilon_1^-/\varepsilon_2^+, \varepsilon_2^-/\varepsilon_1^+) > 1$.

Supposons que μ vérifie $\mu \geq C > 0$ p.p. dans Ω ou $\max(\mu_1^-/\mu_2^+, \mu_2^-/\mu_1^+) > 1$.

Alors les équations de Maxwell (9.1)-(9.2) possèdent une unique solution pour tout $\omega \in \mathbb{C} \backslash \mathscr{S}$, où \mathscr{S} est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible.

Preuve. Pour démontrer ce résultat, il suffit d'appliquer le Théorème 9.5.2. Pour vérifier les hypothèses $(\mathcal{H}_{\varepsilon})$ et (\mathcal{H}_{μ}) , on travaille avec T^{ε} et T^{μ} comme dans les tableaux suivants.

Pour	$\varepsilon \ge C > 0$	$\varepsilon_1^-/\varepsilon_2^+ > 1$	$\varepsilon_2^-/\varepsilon_1^+ > 1$
Prendre \mathtt{T}^{ε} égal à	Id	$\mathtt{T}_1^{\varepsilon}$	$\mathtt{T}_2^{\varepsilon}$

Pour	$\mu \ge C > 0$	$\mu_1^-/\mu_2^+ > 1$	$\mu_2^-/\mu_1^+ > 1$
Prendre \mathtt{T}^{μ} égal à	Id	\mathtt{T}_1^{μ}	\mathtt{T}_2^{μ}

Lorsque ε et μ sont constantes de part et d'autre de l'interface, l'énoncé de la Proposition 9.6.1 se simplifie.

Proposition 9.6.2 (DOMAINE SYMÉTRIQUE : COEFFICIENTS CONSTANTS PAR MORCEAUX) Supposons que ε_1 , ε_2 , μ_1 et μ_2 soient des constantes. Supposons de plus $\kappa_{\varepsilon} := \varepsilon_2/\varepsilon_1 \in \mathbb{C}^* \setminus \{-1\}$ et $\kappa_{\mu} := \mu_2/\mu_1 \in \mathbb{C}^* \setminus \{-1\}$. Alors les équations de Maxwell (9.1)-(9.2) possèdent une unique solution pour tout $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$, où \mathcal{S} est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible.

9.6.2 Arête prismatique

Considérons la géométrie de la Figure 9.1, milieu-gauche. Introduisons les coordonnées cylindriques (r,θ,z) centrées sur l'arête et telles que les coordonnées cartésiennes vérifient $(x,y,z)=(r\cos\theta,r\sin\theta,z)$. Notons H>0 la hauteur du cylindre, R>0 son rayon. Pour $0<\alpha<2\pi$, définissons

$$\begin{split} &\Omega_1 := \{ (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \, | \, 0 < r < R, \, 0 < \theta < \alpha, \, 0 < z < H \} \; ; \\ &\Omega_2 := \{ (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \, | \, 0 < r < R, \, \alpha < \theta < 2\pi, \, 0 < z < H \} \; . \end{split}$$

Introduisons les deux opérateurs R_1 et R_2 tels que $(R_1\varphi_1)(r,\theta,z) = \varphi_1(r,\frac{\alpha}{\alpha-2\pi}(\theta-2\pi),z)$ et $(R_2\varphi_2)(r,\theta,z) = \varphi_2(r,\frac{\alpha-2\pi}{\alpha}\theta+2\pi,z)$ pour $\varphi \in H^1(\Omega)$.

En procédant comme pour le domaine symétrique, on obtient la

Proposition 9.6.3 (ARÊTE PRISMATIQUE)

Définissons $I_{\alpha} := \max(\frac{\alpha}{2\pi - \alpha}, \frac{2\pi - \alpha}{\alpha}).$

Supposons que ε vérifie $\varepsilon \geq C > 0$ p.p. dans Ω ou $\max(\varepsilon_1^-/\varepsilon_2^+, \varepsilon_2^-/\varepsilon_1^+) > I_{\alpha}$.

Supposons que μ vérifie $\mu \geq C > 0$ p.p. dans Ω ou $\max(\mu_1^-/\mu_2^+, \mu_2^-/\mu_1^+) > I_{\alpha}$.

Alors les équations de Maxwell (9.1)-(9.2) possèdent une unique solution pour tout $\omega \in \mathbb{C} \backslash \mathscr{S}$, où \mathscr{S} est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible.

Proposition 9.6.4 (ARÊTE PRISMATIQUE : COEFFICIENTS CONSTANTS PAR MORCEAUX)

Supposons que ε_1 , ε_2 , μ_1 et μ_2 soient des constantes. Définissons $I_{\alpha} := \max(\frac{\alpha}{2\pi-\alpha}, \frac{2\pi-\alpha}{\alpha})$. Supposons $\kappa_{\varepsilon} := \varepsilon_2/\varepsilon_1 \in \mathbb{C}^* \setminus [-I_{\alpha}; -1/I_{\alpha}]$ et $\kappa_{\mu} := \mu_2/\mu_1 \in \mathbb{C}^* \setminus [-I_{\alpha}; -1/I_{\alpha}]$. Alors les équations de Maxwell (9.1)-(9.2) possèdent une unique solution pour tout $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$, où \mathcal{S} est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible.

9.6. Illustrations 225

9.6.3 Coin de Fichera

Considérons la géométrie de la Figure 9.1, milieu-droite. Plus précisément, définissons $\Omega :=]-1;1[^3, \, \text{avec} \, \Omega_1 :=]0;1[^3, \, \text{et} \, \Omega_2 := \Omega \setminus \overline{\Omega_1}.$

Introduisons les opérateurs R_1 , R_2 , tels que, pour $\varphi \in H^1(\Omega)$,

$$(R_{1}\varphi_{1})(x,y,z) = \begin{cases} \varphi_{1}(-x,y,z) & \text{dans} & \Omega_{2}^{1} :=] -1; 0[\times]0; 1[^{2} \\ \varphi_{1}(x,-y,z) & \text{dans} & \Omega_{2}^{2} :=]0; 1[\times] -1; 0[\times]0; 1[\\ \varphi_{1}(x,y,-z) & \text{dans} & \Omega_{2}^{3} :=]0; 1[^{2}\times] -1; 0[\\ \varphi_{1}(-x,-y,z) & \text{dans} & \Omega_{2}^{4} :=] -1; 0[^{2}\times]0; 1[\\ \varphi_{1}(-x,y,-z) & \text{dans} & \Omega_{2}^{5} :=] -1; 0[\times]0; 1[\times] -1; 0[\\ \varphi_{1}(x,-y,-z) & \text{dans} & \Omega_{2}^{6} :=]0; 1[\times] -1; 0[^{2} \\ \varphi_{1}(-x,-y,-z) & \text{dans} & \Omega_{2}^{7} :=] -1; 0[^{3} \end{cases}$$

$$(R_2\varphi_2)(x,y,z) = \varphi_2^1(-x,y,z) + \varphi_2^2(x,-y,z) + \varphi_2^3(x,y,-z) -\varphi_2^4(-x,-y,z) - \varphi_2^5(-x,y,-z) - \varphi_2^6(x,-y,-z) +\varphi_2^7(-x,-y,-z).$$

Ci-dessus, pour $\ell=1\dots 7,\ \varphi_2^\ell$ désigne la restriction de φ_2 à $\Omega_2^\ell.$

De nouveau, en procédant comme pour le cas du domaine symétrique, on obtient la

Proposition 9.6.5 (COIN DE FICHERA)

Supposons que ε vérifie $\varepsilon \geq C > 0$ p.p. dans Ω ou $\max(\varepsilon_1^-/\varepsilon_2^+, \varepsilon_2^-/\varepsilon_1^+) > 7$. Supposons que μ vérifie $\mu \geq C > 0$ p.p. dans Ω ou $\max(\mu_1^-/\mu_2^+, \mu_2^-/\mu_1^+) > 7$.

Alors les équations de Maxwell (9.1)-(9.2) possèdent une unique solution pour tout $\omega \in \mathbb{C} \backslash \mathcal{S}$, où \mathcal{S} est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible.

Proposition 9.6.6 (Coin de Fichera : Coefficients constants par morceaux)

Supposons que ε_1 , ε_2 , μ_1 et μ_2 soient des constantes. Supposons $\kappa_{\varepsilon} := \varepsilon_2/\varepsilon_1 \in \mathbb{C}^* \setminus [-7; -1/7]$ et $\kappa_{\mu} := \mu_2/\mu_1 \in \mathbb{C}^* \setminus [-7; -1/7]$. Alors les équations de Maxwell (9.1)-(9.2) possèdent une unique solution pour tout $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$, où \mathcal{S} est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible.

9.6.4 Cavité non symétrique

Considérons la cavité non symétrique de la Figure 9.1. Plus précisément, définissons $\Omega := \{(x,y,z) \in]-a;b[\times]0;1[\times]0;1[\},\ \Omega_1 :=]-a;0[\times]0;1[\times]0;1[\ \text{et}\ \Omega_2 :=]0;b[\times]0;1[\times]0;1[\ \text{avec}\ a>0\ \text{et}\ b>0.$ L'interface Σ est alors égale à $\{0\}\times]0;1[\times]0;1[\ \text{Supposons}\ \text{que}\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \mu_1\ \text{et}\ \mu_2$ soient des constantes. Nous définissons $\kappa_\varepsilon := \varepsilon_2/\varepsilon_1\ \text{et}\ \kappa_\mu := \mu_2/\mu_1$.

Rappelons que dans le §9.2.1, nous avons défini l'opérateur A^{ε} tel que, pour tout $\varphi, \varphi' \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, $(\nabla(A^{\varepsilon}\varphi), \nabla\varphi')_{\Omega} = (\varepsilon\nabla\varphi, \nabla\varphi')_{\Omega}$ tandis que dans le §9.2.2, nous avons introduit l'opérateur A^{μ} tel que, pour tout $\varphi, \varphi' \in \mathrm{H}_{\#}^1(\Omega)$, $(\nabla(A^{\mu}\varphi), \nabla\varphi')_{\Omega} = (\mu\nabla\varphi, \nabla\varphi')_{\Omega}$. Pour cette géométrie particulière, nous savons (voir le Chapitre 1) que l'opérateur A^{ε} (resp. A^{μ}) est Fredholm d'indice zéro si et seulement si $\kappa_{\varepsilon} \neq -1$ (resp. $\kappa_{\mu} \neq -1$). Pour appliquer le Théorème 9.5.2, nous avons besoin que A^{ε} et A^{μ} soient des isomorphismes. Par conséquent, nous allons étudier la question de l'injectivité de A^{ε} et A^{μ} . Commençons par A^{ε} . Considérons φ un élément de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ tel que $A^{\varepsilon}\varphi = 0$. Le couple (φ_1, φ_2) vérifie les équations

$$\begin{array}{lclcl} \Delta \varphi_1 & = & 0 & \mathrm{dans} \ \Omega_1; & & \varphi_1 - \varphi_2 & = & 0 & \mathrm{sur} \ \Sigma; \\ \Delta \varphi_2 & = & 0 & \mathrm{dans} \ \Omega_2; & & \varepsilon_1 \partial_x \varphi_1 - \varepsilon_2 \partial_x \varphi_2 & = & 0 & \mathrm{sur} \ \Sigma. \end{array}$$

En décomposant φ_1 et φ_2 en série de Fourier (la famille $\{(y,z)\mapsto \sin(m\pi y)\sin(n\pi z)\}_{m,\,n=1}^{\infty}$ constitue une base hilbertienne de L²([0;1[×]0;1[)), nous obtenons

$$\varphi_{1}(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{1}^{mn} \sinh(\sqrt{m^{2}+n^{2}}\pi(x+a)) \sin(m\pi y) \sin(n\pi z)$$
et
$$\varphi_{2}(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{2}^{mn} \sinh(\sqrt{m^{2}+n^{2}}\pi(x-b)) \sin(m\pi y) \sin(n\pi z),$$

où φ_1^{mn} et φ_2^{mn} sont des constantes. De plus, les conditions de transmission impliquent,

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \qquad \begin{vmatrix} \varphi_1^{mn} \sinh(\sqrt{m^2 + n^2} \pi a) &= -\varphi_2^{mn} \sinh(\sqrt{m^2 + n^2} \pi b) \\ \varphi_1^{mn} \varepsilon_1 \cosh(\sqrt{m^2 + n^2} \pi a) &= \varphi_2^{mn} \varepsilon_2 \cosh(\sqrt{m^2 + n^2} \pi b) \end{vmatrix} . \tag{9.21}$$

Pour chaque $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, il existe une solution non triviale au système (9.21) (en $(\varphi_1^{mn}, \varphi_2^{mn})$) si et seulement si

$$0 = \varepsilon_2 \sinh(\sqrt{m^2 + n^2}\pi a) \cosh(\sqrt{m^2 + n^2}\pi b) + \varepsilon_1 \sinh(\sqrt{m^2 + n^2}\pi b) \cosh(\sqrt{m^2 + n^2}\pi a)$$

$$\Leftrightarrow \kappa_{\varepsilon} = -\frac{\tanh(\sqrt{m^2 + n^2}\pi b)}{\tanh(\sqrt{m^2 + n^2}\pi a)}.$$

Par conséquent, A^{ε} constitue un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ si et seulement si κ_{ε} n'est pas un élément de

$$\mathscr{K}_{\varepsilon} := \{-\tanh(\sqrt{m^2 + n^2}\pi b)/\tanh(\sqrt{m^2 + n^2}\pi a), (m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\} \cup \{-1\}. \tag{9.22}$$

En procédant de la même façon, en remplaçant les « sin » par des « cos » et les « sinh » par des « cosh » pour satisfaire la condition de Neumann, on montre que A^{μ} définit un isomorphisme de $H^1_{\#}(\Omega)$ si et seulement si κ_{μ} n'appartient pas à

$$\mathscr{K}_{\mu} := \{ -\tanh(\sqrt{m^2 + n^2}\pi a) / \tanh(\sqrt{m^2 + n^2}\pi b), (m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \} \cup \{-1\}.$$
 (9.23)

Remarque 9.6.7 La fonction $g: z \mapsto -\tanh(z\pi b)/\tanh(z\pi a)$ est continue sur \mathbb{R}_+ , strictement décroissante si a > b et strictement croissante si a < b. De plus, on a $\lim_{z \to +\infty} g(z) = -1$.

Remarque 9.6.8 Pour cette géométrie 3D particulière, on retrouve le résultat du Théorème 7.2.1 du Chapitre 7 pour les géométries 2D : le problème avec condition de Dirichlet pour le contraste κ_{ε} est bien posé si et seulement si le problème avec condition de Neumann est bien posé pour $\kappa_{\mu} = \kappa_{\varepsilon}^{-1}$.

Nous déduisons la

Proposition 9.6.9 (CAVITÉ NON SYMÉTRIQUE : COEFFICIENTS CONSTANTS PAR MORCEAUX) Supposons que ε_1 , ε_2 , μ_1 et μ_2 soient des constantes. Supposons $\kappa_{\varepsilon} = \varepsilon_2/\varepsilon_1 \in \mathbb{C}^* \backslash \mathscr{K}_{\varepsilon}$ et $\kappa_{\mu} = \mu_2/\mu_1 \in \mathbb{C}^* \backslash \mathscr{K}_{\mu}$, avec $\mathscr{K}_{\varepsilon}$ et \mathscr{K}_{μ} définis respectivement en (9.22) et (9.23). Alors les équations de Maxwell (9.1)-(9.2) possèdent une unique solution pour tout $\omega \in \mathbb{C} \backslash \mathscr{S}$, où \mathscr{S} est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible.

9.7 Extension: problèmes scalaires non injectifs

Dans les paragraphes précédents, nous avons introduit les formes bilinéaires a^{ε} et a^{μ} telles que

$$\begin{array}{lcl} a^{\varepsilon}(\varphi,\varphi') & = & (\varepsilon\nabla\varphi,\nabla\varphi')_{\Omega}, & & \forall\varphi,\varphi'\in \mathrm{H}^{1}_{0}(\Omega), \\ a^{\mu}(\varphi,\varphi') & = & (\mu\nabla\varphi,\nabla\varphi')_{\Omega}, & & \forall\varphi,\varphi'\in \mathrm{H}^{1}_{\#}(\Omega). \end{array}$$

Avec le théorème de représentation de Riesz, nous avons défini les opérateurs

$$\begin{array}{ll} A^{\varepsilon}: \mathrm{H}^{1}_{0}(\Omega) \rightarrow \mathrm{H}^{1}_{0}(\Omega) & \text{tel que} & (\nabla (A^{\varepsilon}\varphi), \nabla \varphi')_{\Omega} = a^{\varepsilon}(\varphi, \varphi'), \quad \forall \varphi, \varphi' \in \mathrm{H}^{1}_{0}(\Omega), \\ \mathrm{et} & A^{\mu}: \mathrm{H}^{1}_{\#}(\Omega) \rightarrow \mathrm{H}^{1}_{\#}(\Omega) & \text{tel que} & (\nabla (A^{\mu}\varphi), \nabla \varphi')_{\Omega} = a^{\mu}(\varphi, \varphi'), \quad \forall \varphi, \varphi' \in \mathrm{H}^{1}_{\#}(\Omega). \end{array}$$

Le Théorème 9.5.2 indique que les équations de Maxwell (9.1)-(9.2) sont bien posées au sens de Fredholm lorsque A^{ε} et A^{μ} définissent des isomorphismes. Dans cette section, nous souhaitons nous intéresser à des configurations pour lesquelles A^{ε} et A^{μ} sont des opérateurs Fredholm d'indice zéro non injectifs. Dans l'exemple de la cavité non symétrique décrit dans le §9.6.4, ceci correspond à considérer la situation où $\kappa_{\varepsilon} \in \mathcal{K}_{\varepsilon} \setminus \{-1\}$ et $\kappa_{\mu} \in \mathcal{K}_{\mu} \setminus \{-1\}$. Par souci de concision, nous nous concentrerons sur des cas pour lesquels A^{ε} et A^{μ} possèdent tous les deux un noyau non réduit à zéro. Lorsqu'un seul des opérateurs n'est pas injectif, la méthode à utiliser pour étudier les équations de Maxwell se déduit facilement de la démarche que nous allons présenter.

Supposons donc que la géométrie et les paramètres physiques ε, μ soient tels que $A^{\varepsilon}: \mathrm{H}^{1}_{0}(\Omega) \to \mathrm{H}^{1}_{0}(\Omega)$ et $A^{\mu}: \mathrm{H}^{1}_{\#}(\Omega) \to \mathrm{H}^{1}_{\#}(\Omega)$ constituent des opérateurs Fredholm d'indice zéro non injectifs. Introduisons $\{\lambda_{i}^{\varepsilon}\}_{i=1}^{N^{\varepsilon}}$ une base de ker A^{ε} telle que $(\nabla \lambda_{i}^{\varepsilon}, \nabla \lambda_{j}^{\varepsilon})_{\Omega} = \delta_{ij}$ et $\{\lambda_{i}^{\mu}\}_{i=1}^{N^{\mu}}$ une base de ker A^{μ} telle que $(\nabla \lambda_{i}^{\mu}, \nabla \lambda_{j}^{\mu})_{\Omega} = \delta_{ij}$. Définissons les espaces S^{ε} et S^{μ} tels que

$$\mathrm{H}^1_0(\Omega) = \ker A^{\varepsilon} \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{S}^{\varepsilon} \quad \text{ et } \quad \mathrm{H}^1_{\#}(\Omega) = \ker A^{\mu} \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{S}^{\mu}.$$

Considérons les formes bilinéaires \tilde{a}^{ε} et \tilde{a}^{μ} telles que

$$\tilde{a}^{\varepsilon}(\varphi, \varphi') = (\varepsilon \nabla \varphi, \nabla \varphi')_{\Omega}, \quad \forall \varphi, \varphi' \in S^{\varepsilon},
\tilde{a}^{\mu}(\varphi, \varphi') = (\mu \nabla \varphi, \nabla \varphi')_{\Omega}, \quad \forall \varphi, \varphi' \in S^{\mu}.$$

Avec le théorème de représentation de Riesz, définissons les opérateurs

$$\begin{array}{ll} \tilde{A}^{\varepsilon}: S^{\varepsilon} \to S^{\varepsilon} & \text{tel que} & (\nabla (\tilde{A}^{\varepsilon} \varphi), \nabla \varphi')_{\Omega} = \tilde{a}^{\varepsilon} (\varphi, \varphi'), \quad \forall \varphi, \varphi' \in S^{\varepsilon}, \\ \text{et} & \tilde{A}^{\mu}: S^{\mu} \to S^{\mu} & \text{tel que} & (\nabla (\tilde{A}^{\mu} \varphi), \nabla \varphi')_{\Omega} = \tilde{a}^{\mu} (\varphi, \varphi'), \quad \forall \varphi, \varphi' \in S^{\mu}. \end{array}$$

Classiquement (voir [116]), on a la

Proposition 9.7.1 Les opérateurs $\tilde{A}^{\varepsilon}: S^{\varepsilon} \to S^{\varepsilon}$ et $\tilde{A}^{\mu}: S^{\mu} \to S^{\mu}$ définissent des isomorphismes.

À présent, remarquons que pour $i=1...N^{\varepsilon}$, pour tout $\omega \in \mathbb{C}^*$, $\nabla \lambda_i^{\varepsilon}$ satisfait le problème homogène pour le champ électrique (9.6) posé dans $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ mais pas le problème homogène (9.3) posé dans $\mathbf{H}_N(\mathbf{rot};\Omega)$. De même, pour $i=1...N^{\mu}$, pour tout $\omega \in \mathbb{C}^*$, $\nabla \lambda_i^{\mu}$ vérifie le problème homogène pour le champ magnétique (9.10) posé dans $\mathbf{V}_T(\mu;\Omega)$ mais pas le problème homogène (9.4) posé dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)$. Par conséquent, les Théorèmes 9.2.3 et 9.2.7 ne sont manifestement plus valides lorsque \tilde{A}^{ε} et \tilde{A}^{μ} possèdent un noyau non réduit à zéro.

Cette observation importante nous encourage à écrire des formulations des équations de Maxwell dans des espaces différents de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ et $\mathbf{V}_T(\mu;\Omega)$. De façon peut-être contre intuitive, pour éliminer les noyaux $\operatorname{vect}(\nabla \lambda_1^{\varepsilon},\ldots,\nabla \lambda_{N^{\varepsilon}}^{\varepsilon})$ et $\operatorname{vect}(\nabla \lambda_1^{\mu},\ldots,\nabla \lambda_{N^{\mu}}^{\mu})$ des formulations posées respectivement dans $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ et $\mathbf{V}_T(\mu;\Omega)$, nous allons enrichir les espaces variationnels. La démarche inverse, consistant à travailler dans des espaces plus restreints, dans lesquels on aurait éliminer $\operatorname{vect}(\nabla \lambda_1^{\varepsilon},\ldots,\nabla \lambda_{N^{\varepsilon}}^{\varepsilon})$ et $\operatorname{vect}(\nabla \lambda_1^{\mu},\ldots,\nabla \lambda_{N^{\mu}}^{\mu})$, semble poser problème pour prouver un résultat d'équivalence avec les équations de Maxwell initiales. Introduisons

$$\tilde{\mathbf{V}}_{N}(\varepsilon; \Omega) := \{ \boldsymbol{u} \in \mathbf{H}_{N}(\mathbf{rot}; \Omega) \mid (\varepsilon \boldsymbol{u}, \nabla \varphi)_{\Omega} = 0, \ \forall \varphi \in S^{\varepsilon} \};
\tilde{\mathbf{V}}_{T}(\mu; \Omega) := \{ \boldsymbol{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) \mid (\mu \boldsymbol{u}, \nabla \varphi)_{\Omega} = 0, \ \forall \varphi \in S^{\mu} \}.$$

Notons qu'on a $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega) \subset \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega)$ et $\mathbf{V}_T(\mu;\Omega) \subset \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\Omega)$. Précisons le lien entre ces espaces avec les lemmes suivants.

Lemme 9.7.2 Pour $i=1...N^{\varepsilon}$, il existe $\mathbf{\Lambda}_{i}^{\varepsilon} \in \tilde{\mathbf{V}}_{N}(\varepsilon;\Omega)$ tel que $(\varepsilon \mathbf{\Lambda}_{i}^{\varepsilon}, \nabla \lambda_{j}^{\varepsilon})_{\Omega} = \delta_{ij}$, pour $j=1...N^{\varepsilon}$. On déduit

$$\tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega) = \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega) \oplus \operatorname{vect}(\mathbf{\Lambda}_i^{\varepsilon})_{i=1}^{N^{\varepsilon}}.$$

Preuve. Pour $j=1\dots N^{\varepsilon}$, introduisons la forme linéaire ℓ_{j} sur $\tilde{\mathbf{V}}_{N}(\varepsilon;\Omega)$ définie par $\ell_{j}(\boldsymbol{v})=(\varepsilon\boldsymbol{v},\nabla\lambda_{j}^{\varepsilon})_{\Omega}$. Montrons que la famille $\ell_{1},\dots,\ell_{N^{\varepsilon}}$ est libre. Donnons-nous N^{ε} constantes $\alpha_{1},\dots,\alpha_{N^{\varepsilon}}$ telles que $\sum_{j=1}^{N^{\varepsilon}}\overline{\alpha_{j}}\ell_{j}=0$. Dans ce cas, pour tout $\boldsymbol{v}\in\tilde{\mathbf{V}}_{N}(\varepsilon;\Omega)$, on a $(\varepsilon\boldsymbol{v},\sum_{j=1}^{N^{\varepsilon}}\alpha_{j}\nabla\lambda_{j}^{\varepsilon})_{\Omega}=0$. Ceci implique $(\varepsilon\boldsymbol{w},\sum_{j=1}^{N^{\varepsilon}}\alpha_{j}\nabla\lambda_{j}^{\varepsilon})_{\Omega}=0$ pour tout $\boldsymbol{w}\in\mathbf{H}_{N}(\mathbf{rot};\Omega)$. Pour le voir, pour $\boldsymbol{w}\in\mathbf{H}_{N}(\mathbf{rot};\Omega)$, introduisons $\varphi\in\mathbf{S}^{\varepsilon}$ la fonction telle que $(\varepsilon\nabla\varphi,\nabla\varphi')_{\Omega}=(\varepsilon\boldsymbol{w},\nabla\varphi')_{\Omega}$ pour tout $\varphi'\in\mathbf{S}^{\varepsilon}$. On a $\boldsymbol{w}-\nabla\varphi\in\tilde{\mathbf{V}}_{N}(\varepsilon;\Omega)$. Puisque $(\varepsilon\nabla\varphi,\nabla\lambda_{j}^{\varepsilon})_{\Omega}=0$, $j=1\dots N^{\varepsilon}$, on obtient bien $(\varepsilon\boldsymbol{w},\sum_{j=1}^{N^{\varepsilon}}\alpha_{j}\nabla\lambda_{j}^{\varepsilon})_{\Omega}=0$.

En utilisant la densité de $\mathscr{C}_0^{\infty}(\Omega)^2 \subset \mathbf{H}_N(\mathbf{rot};\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, on déduit $\sum_{j=1}^{N^{\varepsilon}} \overline{\alpha_j} \nabla \lambda_j^{\varepsilon} = 0$. Puisque la famille $\lambda_1^{\varepsilon}, \ldots, \lambda_{N^{\varepsilon}}^{\varepsilon}$ constitue une base de $\ker A^{\varepsilon}$, on a $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{N^{\varepsilon}} = 0$. Ceci achève de montrer que $\ell_1, \ldots, \ell_{N^{\varepsilon}}$ est libre. En utilisant le Théorème 7.3.5 de base antéduale du Chapitre 7, on obtient le résultat du lemme.

En procédant de la même façon, on prouve le

Lemme 9.7.3 Pour $i = 1...N^{\mu}$, il existe $\Lambda_i^{\mu} \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$ tel que $(\mu \Lambda_i^{\mu}, \nabla \lambda_j^{\mu})_{\Omega} = \delta_{ij}$, pour $j = 1...N^{\mu}$. On déduit

$$\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\Omega) = \mathbf{V}_T(\varepsilon;\Omega) \oplus \operatorname{vect}(\mathbf{\Lambda}_i^{\mu})_{i=1}^{N^{\mu}}.$$

9.7.1 Problèmes scalaires non injectifs : formulations équivalentes

Maintenant, nous pouvons donner des formulations équivalentes au problème (9.1)-(9.2) dans les espaces $\tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega)$ et $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\Omega)$.

Théorème 9.7.4 Supposons $\omega \neq 0$. Supposons l'opérateur $A^{\varepsilon}: H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ Fredholm d'indice zéro avec un noyau non réduit à zéro $\det\{\lambda_i^{\varepsilon}\}_{i=1}^{N^{\varepsilon}}$.

1) Si (E, H) vérifie (9.1)-(9.2) alors E est une solution du problème

Trouver
$$\mathbf{E} \in \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon; \Omega)$$
 tel que:
$$\int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \, \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \, \mathbf{E}' - \omega^2 \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}' = i\omega \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}', \qquad \forall \mathbf{E}' \in \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon; \Omega). \tag{9.24}$$

2) Si \mathbf{E} satisfait (9.24) alors (\mathbf{E} , $(i\omega\mu)^{-1}\mathbf{rot}\,\mathbf{E}$) est solution de (9.1)-(9.2).

Preuve. Concentrons-nous sur la preuve $2) \Rightarrow 1$). Montrons que si $\boldsymbol{E} \in \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon; \Omega) \subset \mathbf{H}_N(\mathbf{rot}; \Omega)$ satisfait (9.24) alors \boldsymbol{E} est une solution du problème (9.7) posé dans $\mathbf{H}_N(\mathbf{rot}; \Omega)$. Pour tout \boldsymbol{E}' dans $\mathbf{H}_N(\mathbf{rot}; \Omega)$, la Proposition 9.7.1 indique qu'on peut construire $\varphi \in S^{\varepsilon}$ tel que $\tilde{a}^{\varepsilon}(\varphi, \varphi') = (\varepsilon \boldsymbol{E}', \nabla \varphi')_{\Omega}$, pour tout $\varphi' \in S^{\varepsilon}$. La fonction $\boldsymbol{E}' - \nabla \varphi$ appartient à $\tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon; \Omega)$. En remarquant que $(\varepsilon \boldsymbol{E}, \nabla \varphi)_{\Omega} = 0$ et $(\boldsymbol{J}, \nabla \varphi)_{\Omega} = 0$ (rappelons que div $\boldsymbol{J} = 0$), on obtient

$$\int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{rot} \, \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \, \mathbf{E}' - \omega^{2} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}' = i\omega \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}',$$

ce qui prouve que \boldsymbol{E} vérifie (9.7). Par conséquent, si le champ \boldsymbol{E} satisfait (9.24) alors $(\boldsymbol{E},(i\omega\mu)^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E})$ vérifie (9.1)-(9.2).

En adaptant la preuve du Théorème 9.7.4, on obtient le

Théorème 9.7.5 Supposons $\omega \neq 0$. Supposons l'opérateur $A^{\mu}: H^1_{\#}(\Omega) \to H^1_{\#}(\Omega)$ Fredholm d'indice zéro avec un noyau non réduit à zéro $\text{vect}\{\lambda_i^{\mu}\}_{i=1}^{N^{\mu}}$.

1) Si (E, H) vérifie (9.1)-(9.2) alors H est une solution du problème

Trouver
$$\mathbf{H} \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$$
 tel que :
$$\int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \mathbf{rot} \, \mathbf{H} \cdot \mathbf{rot} \, \mathbf{H}' - \omega^2 \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}' = \int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{rot} \, \mathbf{H}', \qquad \forall \mathbf{H}' \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega).$$
(9.25)

2) Si \boldsymbol{H} satisfait (9.25) alors ($i(\omega\varepsilon)^{-1}(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{H}-\boldsymbol{J}),\boldsymbol{H}$) est solution de (9.1)-(9.2).

À présent, nous souhaitons étudier les formulations (9.24) et (9.25). Nous avons pour cela besoin de nouveaux résultats de compacité.

Problèmes scalaires non injectifs : résultats de compacité

Commençons par démontrer le résultat de compacité nécessaire à l'étude du problème pour le champ électrique.

Théorème 9.7.6 Soit Ω un domaine simplement connexe tel que $\partial\Omega$ soit connexe. Supposons l'opérateur $A^{\varepsilon}: \mathrm{H}_{0}^{1}(\Omega) \to \mathrm{H}_{0}^{1}(\Omega)$ Fredholm d'indice zéro avec un noyau non réduit à zéro $\mathrm{vect}\{\lambda_{i}^{\varepsilon}\}_{i=1}^{N^{\varepsilon}}$. Alors l'injection de $\tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte.

Preuve. Soit (u_n) une suite bornée de $\tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega)$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, en utilisant le Lemme 9.7.2, définissons $\mathbf{v}_n \in \mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega)$ et $(\alpha_{1n}, \dots, \alpha_{N^{\varepsilon_n}}) \in \mathbb{C}^{N^{\varepsilon}}$ les éléments tels que $\mathbf{u}_n = \mathbf{v}_n + \sum_{i=1}^{N^{\varepsilon}} \alpha_{in} \mathbf{\Lambda}_i^{\varepsilon}$. Pour montrer le Théorème 9.7.6, il suffit de prouver qu'on peut extraire de (v_n) une sous-suite qui converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Définissons $\mathbf{F}_n = \mathbf{rot} \, \mathbf{v}_n$. La suite (\mathbf{F}_n) est bornée dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a div $(\varepsilon v_n) = 0$. Puisque $\partial \Omega$ est connexe, il existe (voir [2], théorème 3.12) $w_n \in V_T(1; \Omega)$ tel que **rot** $w_n = \varepsilon v_n$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = \varepsilon^{-1} \mathbf{rot} w_n$. Montrons qu'on peut extraire de (rot w_n) une sous-suite qui converge dans $L^2(\Omega)$.

Nous savons que $\mathbf{w} \mapsto \|\mathbf{rot} \, \mathbf{w}\|_{\Omega}$ définit une norme sur $\mathbf{V}_T(1; \Omega)$. Par conséquent, la suite (\boldsymbol{w}_n) est bornée dans $\mathbf{V}_T(1;\Omega)$. Puisque $\mathbf{rot} \, \varepsilon^{-1} \mathbf{rot} \, \boldsymbol{w}_n = \boldsymbol{F}_n \, \mathrm{dans} \, \Omega \, \mathrm{et} \, (\varepsilon^{-1} \mathbf{rot} \, \boldsymbol{w}_n) \times \boldsymbol{n} = 0 \, \mathrm{sur}$ $\partial\Omega$, on a $(\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}')_{\Omega}=(\boldsymbol{F}_n,\boldsymbol{w}')_{\Omega}$ pour tout $\boldsymbol{w}'\in\mathbf{V}_T(1;\Omega)$.

Maintenant, construisons un opérateur continu \mathbb{T} de $\mathbf{V}_T(1;\Omega)$ dans $\mathbf{V}_T(1;\Omega)$ pour restaurer une certaine positivité. Considérons $\boldsymbol{w} \in \mathbf{V}_T(1; \Omega)$.

i) Définissons d'abord φ l'unique élément de S^{ε} tel que

$$\int_{\Omega} \varepsilon \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi' = \int_{\Omega} \varepsilon \left(\mathbf{rot} \ \boldsymbol{w} - \sum_{i=1}^{N^{\varepsilon}} \beta_{i} \boldsymbol{\Lambda}_{i}^{\varepsilon} \right) \cdot \nabla \varphi', \qquad \forall \varphi' \in \mathbf{S}^{\varepsilon},$$

où $\beta_i = (\varepsilon \operatorname{\mathbf{rot}} \boldsymbol{w}, \nabla \lambda_i^{\varepsilon})_{\Omega}$. La fonction φ est bien définie car \tilde{A}^{ε} définit un isomorphisme de S^{ε} . ii) Remarquons ensuite que $\varepsilon(\operatorname{\mathbf{rot}} \boldsymbol{w} - \sum_{i=1}^{N^{\varepsilon}} \beta_i \boldsymbol{\Lambda}_i^{\varepsilon} - \nabla \varphi)$ constitue un élément de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ à divergence nulle. Puisque Ω est simplement connexe et puisque $\partial\Omega$ est connexe, d'après le théorème 3.12 de [2], il existe un unique potentiel $\mathbb{T} \boldsymbol{w} \in \mathbf{V}_T(1;\Omega)$ tel que $\mathbf{rot} \, \mathbb{T} \boldsymbol{w} = \varepsilon (\mathbf{rot} \, \boldsymbol{w} - \sum_{i=1}^{N^{\varepsilon}} \beta_i \boldsymbol{\Lambda}_i^{\varepsilon} - \nabla \varphi)$. Ceci définit un opérateur \mathbb{T} continu de $\mathbf{V}_T(1;\Omega)$ dans $\mathbf{V}_T(1;\Omega)$.

Puisque \mathbb{T} est continu, la suite $(\mathbb{T}w_n)$ est bornée dans $V_T(1;\Omega)$. On peut donc extraire une soussuite de (\boldsymbol{w}_n) , toujours notée (\boldsymbol{w}_n) , telle que $(\mathbb{T}\boldsymbol{w}_n)$ converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Puisque pour $i=1\ldots N^{\varepsilon}$, la suite (β_{in}) , avec $\beta_{in} = (\varepsilon \operatorname{\mathbf{rot}} \boldsymbol{w}_n, \nabla \lambda_i^{\varepsilon})$, est bornée dans \mathbb{C} , on peut extraire une sous-suite de (\boldsymbol{w}_n) , toujours notée (\boldsymbol{w}_n) , telle que (β_{in}) converge. Introduisons $\boldsymbol{w}_{nm} := \boldsymbol{w}_n - \boldsymbol{w}_m, \, \boldsymbol{F}_{nm} := \boldsymbol{F}_n - \boldsymbol{F}_m$ et $\beta_{inm} := \beta_{in} - \beta_{im}$. On a

$$|(\boldsymbol{F}_{nm}, \mathbb{T}\boldsymbol{w}_{nm})_{\Omega}| = |(\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_{nm}, \mathbf{rot}\,\mathbb{T}\boldsymbol{w}_{nm})_{\Omega}|$$

$$\geq ||\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_{nm}||_{\Omega}^{2} - \sum_{i=1}^{N^{\varepsilon}} |\beta_{inm}||(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_{nm}, \boldsymbol{\Lambda}_{i}^{\varepsilon})_{\Omega}|.$$

Cette estimation montre que (rot w_n) constitue une suite de Cauchy de $L^2(\Omega)$. Par conséquent, elle converge. Ainsi, on peut extraire de $(v_n) = (\varepsilon^{-1} \mathbf{rot} w_n)$ une sous-suite qui converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

En travaillant de la même manière, on prouve le

Théorème 9.7.7 Soit Ω un domaine simplement connexe tel que $\partial\Omega$ soit connexe. Supposons l'opérateur $A^{\mu}: H^{1}_{\#}(\Omega) \to H^{1}_{\#}(\Omega)$ Fredholm d'indice zéro avec un noyau non réduit à zéro $\text{vect}\{\lambda_{i}^{\mu}\}_{i=1}^{N^{\mu}}$. Alors l'injection de $\tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte.

Problèmes scalaires non injectifs: retour aux problèmes initiaux

Avec le théorème de représentation de Riesz, introduisons les opérateurs bornés $A_N(\omega)$: $\tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega) \to \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega)$ et $\tilde{\mathscr{A}}_T(\omega): \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\Omega) \to \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\Omega)$ tels que

$$\begin{array}{lcl} (\tilde{\mathscr{A}}_N(\omega)\boldsymbol{E},\boldsymbol{E}')_{\mathbf{rot}} & = & (\mu^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}')_{\Omega} - \omega^2(\varepsilon\boldsymbol{E},\boldsymbol{E}')_{\Omega}, & \forall \boldsymbol{E},\boldsymbol{E}' \in \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega), \\ (\tilde{\mathscr{A}}_T(\omega)\boldsymbol{H},\boldsymbol{H}')_{\mathbf{rot}} & = & (\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{H},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{H}')_{\Omega} - \omega^2(\mu\boldsymbol{H},\boldsymbol{H}')_{\Omega}, & \forall \boldsymbol{H},\boldsymbol{H}' \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega). \end{array}$$

Énonçons maintenant le résultat principal lorsque la géométrie et les coefficients physiques ε, μ sont tels que les problèmes scalaires sont bien posés au sens de Fredholm avec un noyau non réduit à zéro.

Théorème 9.7.8 Soit Ω un domaine simplement connexe tel que $\partial\Omega$ soit connexe. Considérons $\boldsymbol{J} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ tel que div $\boldsymbol{J} = 0$.

Supposons l'opérateur $A^{\varepsilon}: \mathrm{H}^{1}_{0}(\Omega) \to \mathrm{H}^{1}_{0}(\Omega)$ Fredholm avec un noyau non trivial $\mathrm{vect}\{\lambda_{i}^{\varepsilon}\}_{i=1}^{N^{\varepsilon}}$. Supposons l'opérateur $A^{\mu}: \mathrm{H}^{1}_{\#}(\Omega) \to \mathrm{H}^{1}_{\#}(\Omega)$ Fredholm avec un noyau non trivial $\mathrm{vect}\{\lambda_{i}^{\mu}\}_{i=1}^{N^{\mu}}$ Alors on a le résultat suivant.

- Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, l'opérateur $\tilde{\mathcal{A}}_N(\omega) : \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon; \Omega) \to \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon; \Omega)$ constitue un opérateur Fredholm d'indice zéro. De plus, pour $\omega \in \mathbb{C}^*$, $\mathbf{E} \in \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon; \Omega)$ satisfait $(\tilde{\mathscr{A}}_N(\omega)\mathbf{E}, \mathbf{E}')_{\mathbf{rot}} = i\omega(\mathbf{J}, \mathbf{E}')_{\Omega}$, pour tout $E' \in \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon; \Omega)$, si et seulement si le couple $(E, (i\omega\mu)^{-1}\mathbf{rot}\,E)$ vérifie les équations de Maxwell (9.1)-(9.2).
- Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, $\mathscr{A}_T(\omega) : V_T(\mu; \Omega) \to V_T(\mu; \Omega)$ constitue un opérateur Fredholm d'indice zéro. De plus, pour $\omega \in \mathbb{C}^*$, $\boldsymbol{H} \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$ satisfait $(\tilde{\mathscr{A}}_T(\omega)\boldsymbol{H}, \boldsymbol{H}')_{\mathbf{rot}} = (\varepsilon^{-1}\boldsymbol{J}, \mathbf{rot} \, \boldsymbol{H}')_{\Omega}$, pour tout $H' \in \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega)$, si et seulement si le couple $(i(\omega \varepsilon)^{-1}(\mathbf{rot} H - J), H)$ vérifie les équations de Maxwell (9.1)-(9.2).

Preuve. Prouvons que $\tilde{\mathscr{A}}_N(\omega)$ constitue un opérateur Fredholm d'indice zéro. Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, en utilisant le Théorème 9.7.6, on prouve que $\tilde{\mathscr{A}}_N(\omega) - \tilde{\mathscr{A}}_N(0)$ constitue un opérateur compact de $\tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega)$. Par conséquent, d'après [116, théorème 2.26], $\tilde{\mathscr{A}}_N(\omega)$ est Fredholm d'indice zéro si seulement si $\mathcal{A}_N(0)$ est Fredholm d'indice zéro. Dans la suite de la preuve, nous travaillons sur l'opérateur $\tilde{\mathscr{A}}_N(0)$. Nous allons construire un opérateur continu $\tilde{\mathbb{T}}^{\varepsilon}: \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega) \to \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega)$ pour recouvrer une certaine positivité, à une perturbation compacte près. Considérons $\boldsymbol{u} \in \tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega)$.

i) Définissons d'abord φ l'unique élément de S^{μ} tel que

$$\int_{\Omega} \mu \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi' = \int_{\Omega} \mu \left(\mathbf{rot} \ \boldsymbol{u} - \sum_{i=1}^{N^{\mu}} \beta_{i} \boldsymbol{\Lambda}_{i}^{\mu} \right) \cdot \nabla \varphi', \qquad \forall \varphi' \in S^{\mu},$$

où $\beta_i = (\mu \operatorname{\mathbf{rot}} \boldsymbol{u}, \nabla \lambda_i^{\mu})_{\Omega}$. La fonction φ est bien définie puisque \tilde{A}^{μ} est un isomorphisme de S^{μ} . ii) Remarquons ensuite que $\mu(\operatorname{\mathbf{rot}} \boldsymbol{u} - \sum_{i=1}^{N^{\mu}} \beta_i \boldsymbol{\Lambda}_i^{\mu} - \nabla \varphi)$ constitue un élément de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ à divergence nulle tel que $\mu(\operatorname{\mathbf{rot}} \boldsymbol{u} - \sum_{i=1}^{N^{\mu}} \beta_i \boldsymbol{\Lambda}_i^{\mu} - \nabla \varphi) \cdot \boldsymbol{n} = 0$ sur $\partial \Omega$. Puisque Ω est simplement connexe et puisque $\partial\Omega$ est connexe, en vertu du théorème 3.17 de [2], il existe un unique potentiel $\psi\in\mathbf{V}_N(1;\Omega)$ tel que rot $\psi = \mu(\text{rot } u - \sum_{i=1}^{N^{\mu}} \beta_i \Lambda_i^{\mu} - \nabla \varphi).$

iii) Considérons ζ l'unique élément de S^{ε} tel que

$$\int_{\Omega} \varepsilon \nabla \zeta \cdot \nabla \zeta' = \int_{\Omega} \varepsilon \, \psi \cdot \nabla \zeta', \qquad \forall \zeta' \in S^{\varepsilon}.$$

La fonction ζ est bien définie puisque \tilde{A}^{ε} est un isomorphisme de S^{ε} .

iv) Enfin, définissons l'opérateur $\tilde{\mathbb{T}}^{\varepsilon}: \tilde{\mathbf{V}}_{N}(\varepsilon; \Omega) \to \tilde{\mathbf{V}}_{N}(\varepsilon; \Omega)$ qui à $\boldsymbol{u} \in \tilde{\mathbf{V}}_{N}(\varepsilon; \Omega)$ fait correspondre $\tilde{\mathbb{T}}^{\varepsilon} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\psi} - \nabla \zeta$ ainsi que l'opérateur $\tilde{K}^{\varepsilon} : \tilde{\mathbf{V}}_{N}(\varepsilon; \Omega) \to \tilde{\mathbf{V}}_{N}(\varepsilon; \Omega)$ tel que

$$(\tilde{K}^{arepsilon}oldsymbol{u},oldsymbol{v})_{\mathbf{rot}} = (oldsymbol{u},oldsymbol{v})_{\Omega} + \sum_{i=1}^{N^{\mu}} (\mu \operatorname{\mathbf{rot}} oldsymbol{u},
abla \lambda_{i}^{\mu})_{\Omega} (oldsymbol{\Lambda}_{i}^{\mu},\operatorname{\mathbf{rot}} oldsymbol{v})_{\Omega}, \qquad orall oldsymbol{v} \in \tilde{\mathbf{V}}_{N}(arepsilon;\Omega).$$

D'après le Théorème 9.7.6, nous savons que l'injection de $\tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte. Par conséquent, \tilde{K}^{ε} est la somme d'un opérateur compact et d'un opérateur de rang fini. C'est donc un opérateur compact de $\tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega)$. Maintenant, pour tout $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\tilde{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega)$, on obtient

$$\begin{array}{lcl} (\tilde{\mathscr{A}_N}(0)(\tilde{\mathbb{T}}^{\varepsilon}\boldsymbol{u}),\boldsymbol{v})_{\mathbf{rot}} & = & (\mu^{-1}\mathbf{rot}\,(\tilde{\mathbb{T}}^{\varepsilon}\boldsymbol{u}),\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_{\Omega} \\ & = & (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_{\Omega} + (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{\Omega} - (\tilde{K}^{\varepsilon}\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{\mathbf{rot}}\,. \end{array}$$

Nous déduisons $\tilde{\mathscr{A}}_T(0) \circ \tilde{\mathbb{T}}^{\varepsilon} + \tilde{K}^{\varepsilon} = \text{Id.}$ Ceci prouve que $\tilde{\mathbb{T}}^{\varepsilon}$ constitue une paramétrix à droite pour $\tilde{\mathscr{A}}_N(0)$. Par conséquent, l'opérateur autoadjoint $\tilde{\mathscr{A}}_N(0)$ est bien Fredholm d'indice zéro. On montre de la même façon que $\tilde{\mathscr{A}}_T(\omega) : \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\Omega) \to \tilde{\mathbf{V}}_T(\mu;\Omega)$ est un opérateur Fredholm d'indice zéro pour tout $\omega \in \mathbb{C}$. Finalement, l'équivalence avec les équations de Maxwell (9.1)-(9.2) provient des Théorèmes 9.7.4 et 9.7.5.

Remarque 9.7.9 Pour appliquer le théorème de Fredholm analytique et prouver que les équations de Maxwell (9.1)-(9.2) possèdent une unique solution pour tout $\omega \in \mathbb{C} \backslash \mathcal{S}$, où \mathcal{S} est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible, il reste à montrer qu'il existe $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\tilde{A}_N(\omega)$ ou $\tilde{A}_T(\omega)$ est inversible. Ceci ne semble pas évident à démontrer.

9.8 Extension : géométries non triviales

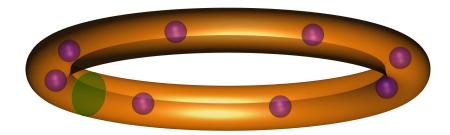


FIGURE 9.2 – Un exemple de domaine non simplement connexe à frontière non connexe. Le domaine est constitué du tore privé des inclusions violettes. Il est non simplement connexe en raison de la structure toroïdale. Il est à frontière non connexe car les frontières du tore et des sphères sont disjointes. Le disque vert représente une coupure Σ_1 telle que $\Omega \setminus \Sigma_1$ constitue un domaine simplement connexe.

Pour les applications, l'on est souvent conduit à étudier les équations de Maxwell dans des géométries non topologiquement triviales et des domaines à frontière non connexe. Dans cette section, nous souhaitons étendre les résultats que nous avons obtenus dans les paragraphes précédents pour pouvoir traiter ce genre de configurations. Pour éviter de multiplier les sous-cas, nous travaillons directement dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ à la fois non simplement connexe et à frontière non connexe. La Figure 9.2 présente un exemple de domaine possédant ces propriétés. Dans ces géométries, les éléments \boldsymbol{u} de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ (resp. $\mathbf{V}_T(\mu;\Omega)$) ne s'écrivent pas nécessairement sous la forme $\boldsymbol{u}=\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}$ (resp. $\boldsymbol{u}=\mu^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi}$) où $\boldsymbol{\psi}$ appartient à $\mathbf{V}_T(1;\Omega)$ (resp. $\mathbf{V}_N(1;\Omega)$). C'est un problème car l'étude que nous avons menée précédemment repose de façon fondamentale sur ces propositions qui sont vraies lorsque Ω est simplement connexe à frontière connexe. Tout n'est pas perdu pour autant. En effet, en imposant des conditions un peu plus restrictives aux éléments de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ et $\mathbf{V}_T(\mu;\Omega)$, on peut retrouver ces résultats d'existence de potentiels.

Pour introduire les espaces adaptés à l'étude des équations de Maxwell dans ce type de domaines, reprenons les notations de [2].

Notations liées au caractère non connexe de la frontière

Nous notons Γ_i , $i=0\ldots I$, les composantes connexes de la frontière $\partial\Omega$. Puisque nous supposons $\partial\Omega$ non connexe, nous avons $I\geq 1$. Introduisons

$$\mathrm{H}^1_\Gamma(\Omega) := \left\{ \varphi \in \mathrm{H}^1(\Omega) \, | \, \varphi_{|\Gamma_0} = 0, \, \, \varphi_{|\Gamma_i} = cste, \, \, i = 1 \dots I \right\}.$$

Commençons par caractériser cet espace. En utilisant un relèvement, on montre sans difficulté la

Proposition 9.8.1 Supposons l'hypothèse $(\mathcal{H}_{\varepsilon})$ vérifiée. Alors pour $i = 1 \dots I$, il existe une unique solution p_i au problème

Trouver
$$p_i \in H^1_{\Gamma}(\Omega)$$
 tel que :

$$\operatorname{div}(\varepsilon \nabla p_i) = 0 \quad dans \Omega$$

$$p_i = \delta_{ik} \quad sur \Gamma_k, \ k = 1 \dots I.$$

On a alors

$$\mathrm{H}^1_{\Gamma}(\Omega) = \mathrm{H}^1_0(\Omega) \oplus \mathrm{vect}(p_i)_{i=1}^I.$$

Définissons

$$\hat{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega) := \left\{ \boldsymbol{u} \in \mathbf{H}_N(\mathbf{rot};\Omega) \,|\, (\varepsilon \boldsymbol{u}, \nabla \varphi)_{\Omega} = 0, \,\, \forall \varphi \in \mathrm{H}^1_{\Gamma}(\Omega) \right\}.$$

Remarquons qu'on a $\hat{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega) \subset \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$. Précisons le lien entre ces deux espaces.

Lemme 9.8.2 Pour i = 1 ... I, il existe $P_i \in \mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega)$ tel que $(\varepsilon P_i, \nabla p_k)_{\Omega} = \delta_{ik}$, pour k = 1 ... I. On déduit

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{V}_N(\varepsilon;\,\Omega) & = & \hat{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega) \,\oplus\, \mathrm{vect}(\boldsymbol{P}_i)_{i=1}^I \\ et & \mathbf{H}_N(\mathbf{rot};\,\Omega) & = & \hat{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\,\Omega) \,\oplus\, \mathrm{vect}(\boldsymbol{P}_i)_{i=1}^I \,\oplus\, \nabla \mathrm{H}_0^1(\Omega). \end{array}$$

Preuve. Pour k = 1 ... I, définissons la forme linéaire ℓ_k sur $\mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega)$ telle que $\ell_k(\mathbf{v}) = (\varepsilon \mathbf{v}, \nabla p_k)_{\Omega}$ pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega)$. Montrons que la famille $\ell_1, ..., \ell_I$ est libre. Considérons I constantes $\alpha_1, ..., \alpha_I$ telles que $\sum_{k=1}^I \overline{\alpha_k} \ell_k = 0$. Pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega)$, on a $(\varepsilon \mathbf{v}, \sum_{k=1}^I \alpha_k \nabla p_k)_{\Omega} = 0$. On déduit $(\varepsilon \mathbf{w}, \sum_{k=1}^I \alpha_k \nabla p_k)_{\Omega} = 0$ pour tout $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_N(\mathbf{rot}; \Omega)$. En effet, si $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_N(\mathbf{rot}; \Omega)$, définissons $\varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ la fonction telle que $(\varepsilon \nabla \varphi, \nabla \varphi')_{\Omega} = (\varepsilon \mathbf{w}, \nabla \varphi')_{\Omega}$ pour tout $\varphi' \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. On a $\mathbf{w} - \nabla \varphi \in \mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega)$. Puisque $(\varepsilon \nabla \varphi, \nabla p_k)_{\Omega} = 0$, k = 1 ... I, on trouve bien $(\varepsilon \mathbf{w}, \sum_{k=1}^I \alpha_k \nabla p_k)_{\Omega} = 0$.

Puisque $\mathscr{C}_0^{\infty}(\Omega)^2 \subset \mathbf{H}_N(\mathbf{rot};\Omega)$ est dense dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, on obtient $\sum_{k=1}^I \overline{\alpha_k} \nabla p_k = 0$. Mais la famille p_1,\ldots,p_I est libre. Par conséquent, on a $\alpha_1 = \cdots = \alpha_I = 0$ et la famille ℓ_1,\ldots,ℓ_I est également libre. Le Théorème 7.3.5 de base antéduale du Chapitre 7 conduit alors au résultat de ce lemme.

Notations liées au caractère non simplement connexe du domaine

En ce qui concerne le caractère non simplement connexe du domaine, nous supposerons qu'il existe des surfaces ouvertes connexes Σ_j , j=1...J appelées « coupures » telles que :

- i) chaque surface Σ_j est une partie ouverte d'une variété régulière;
- ii) la frontière de Σ_j est contenue dans $\partial\Omega$, $j=1\ldots J$;
- *iii*) l'intersection $\overline{\Sigma_j} \cap \overline{\Sigma_k}$ est vide pour $j \neq k$;
- iv) l'ensemble ouvert $\Omega := \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^J \Sigma_i$ est pseudo-lipschitzien et simplement connexe.

Le domaine Ω est dit topologiquement trivial quand on peut prendre J=0. L'opérateur de prolongement de L²($\dot{\Omega}$) dans L²(Ω) est noté $\ddot{\cdot}$ tandis que $[\cdot]_{\Sigma_j}$ désigne le saut à travers Σ_j , $j=1\ldots J$. Dans cette définition du saut, nous supposons qu'une convention a été déterminée pour le signe. Nous supposons également qu'un vecteur unitaire \boldsymbol{n} normal à $\partial \dot{\Omega}$ a été fixé sur Σ_j , $j=1\ldots J$. Introduisons l'espace des potentiels scalaires

$$\Theta(\dot{\Omega}) := \left\{ \varphi \in \mathrm{H}^1(\dot{\Omega}) \mid \int_{\Omega} \widetilde{\varphi} = 0 \text{ et } [\varphi]_{\Sigma_j} = cste, \ j = 1 \dots J \right\}.$$

Présentons un résultat de décomposition de cet espace.

Proposition 9.8.3 Supposons l'hypothèse (\mathcal{H}_{μ}) vérifiée. Alors pour $j = 1 \dots J$, il existe une unique solution q_j au problème

$$| Trouver q_{j} \in \Theta(\dot{\Omega}) \ tel \ que :$$

$$| \operatorname{div}(\mu \nabla q_{j}) = 0 \qquad dans \ \dot{\Omega}$$

$$| \mu \partial_{n} q_{j} = 0 \qquad sur \ \partial \Omega$$

$$| [q_{j}]_{\Sigma_{k}} = \delta_{jk}, \quad k = 1 \dots J$$

$$| [\mu \partial_{n} q_{j}]_{\Sigma_{k}} = 0, \quad k = 1 \dots J.$$

$$(9.26)$$

On a alors

$$\Theta(\dot{\Omega}) = \mathrm{H}^1_{\#}(\Omega) \oplus \mathrm{vect}(q_j)_{j=1}^J.$$

Preuve. Puisque nous avons supposé l'hypothèse (\mathscr{H}_{μ}) vérifiée, le problème (9.26) possède au plus une solution. Construisons cette solution. Pour $1 \leq j \leq J$, donnons-nous une fonction $r_j \in \Theta(\dot{\Omega})$ telle que $[r_j]_{\Sigma_k} = \delta_{jk}$ pour $k = 1 \dots J$. Définissons alors $q_j = r_j - \varphi$ où φ est l'unique élément de $H^1_{\#}(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} \mu \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi' = \int_{\Omega} \mu \widetilde{\nabla r_j} \cdot \nabla \varphi', \qquad \forall \varphi' \in \mathrm{H}^1_{\#}(\Omega).$$

On vérifie classiquement que q_j vérifie le problème (9.26). Ceci permet d'obtenir le résultat de décomposition de l'espace $\Theta(\dot{\Omega})$.

Introduisons

$$\hat{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega)\,:=\left\{\boldsymbol{u}\in\mathbf{H}(\mathbf{rot}\,;\,\Omega)\,|\,(\varepsilon\boldsymbol{u},\widetilde{\nabla\varphi})_{\Omega}=0,\,\,\forall\varphi\in\Theta(\dot{\Omega})\right\}.$$

Observons qu'on a $\hat{\mathbf{V}}_T(\mu; \Omega) \subset \mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$. En travaillant comme dans la preuve du Lemme 9.8.2, nous pouvons préciser la relation entre ces deux espaces.

Lemme 9.8.4 Pour j=1...J, il existe $\mathbf{Q}_j \in \mathbf{V}_T(\mu;\Omega)$ tel que $(\mu \mathbf{Q}_j, \widetilde{\nabla q_k})_{\Omega} = \delta_{jk}$, pour k=1...J. On déduit

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{V}_T(\mu;\,\Omega) & = & \hat{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega) \,\oplus\, \mathrm{vect}(\boldsymbol{Q}_j)_{j=1}^J \\ et & \mathbf{H}(\mathbf{rot};\,\Omega) & = & \hat{\mathbf{V}}_T(\mu;\,\Omega) \,\oplus\, \mathrm{vect}(\boldsymbol{Q}_j)_{j=1}^J \,\oplus\, \nabla \mathrm{H}^1_\#(\Omega). \end{array}$$

Remarque 9.8.5 Le théorème 3.12 de [2] indique que tout élément \mathbf{u} de $\hat{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega)$ s'écrit de façon unique sous la forme $\mathbf{u} = \varepsilon^{-1}\mathbf{rot} \ \psi$ avec ψ appartenant à $\hat{\mathbf{V}}_T(1;\Omega)$. De façon analogue, le théorème 3.17 de [2] assure que pour tout $\mathbf{u} \in \hat{\mathbf{V}}_T(\mu;\Omega)$, il existe un unique $\psi \in \hat{\mathbf{V}}_N(1;\Omega)$ tel que $\mathbf{u} = \mu^{-1}\mathbf{rot} \ \psi$. Dans la suite, nous allons adapter les preuves des sections précédentes en utilisant ces résultats d'existence de potentiels vecteurs.

Supposons les hypothèses $(\mathcal{H}_{\varepsilon})$ et (\mathcal{H}_{μ}) vérifiées. Remarquons que les Théorèmes 9.2.3, 9.2.7 d'équivalence entre les équations de Maxwell initiales et les formulations dans $\mathbf{V}_{N}(\varepsilon;\Omega)$, $\mathbf{V}_{T}(\mu;\Omega)$ ne nécessitent pas d'hypothèse sur la topologie du domaine. Ils sont donc vrais pour la géométrie que nous sommes en train de considérer. Dans la suite, nous travaillerons avec ces formulations dans $\mathbf{V}_{N}(\varepsilon;\Omega)$, $\mathbf{V}_{T}(\mu;\Omega)$. Nous aurons besoin de prouver les résultats de compacité des Théorèmes 9.4.1, 9.4.3 dans le cas où Ω n'est pas simplement connexe à frontière non connexe. Ce sera l'objet du paragraphe suivant.

Remarque 9.8.6 Est-il possible de travailler avec des formulations posées dans $\hat{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega)$, $\hat{\mathbf{V}}_T(\mu;\Omega)$? A priori, le champ électrique solution des équations de Maxwell n'a pas de raison d'appartenir à l'espace $\hat{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega)$. Pour le voir, utilisons le Lemme 9.8.2 et décomposons \mathbf{E} sous la forme

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\hat{E}} + \sum_{i=1}^{I} \alpha_i \boldsymbol{P}_i,$$

avec $\hat{\boldsymbol{E}} \in \hat{\mathbf{V}}_N(\varepsilon; \Omega)$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_I) \in \mathbb{C}^I$. Pour $i = 1 \dots I$, en testant avec ∇p_i dans (9.6), on trouve $\alpha_i = (\varepsilon \boldsymbol{E}, \nabla p_i)_{\Omega} = (i\omega)^{-1} (\boldsymbol{J}, \nabla p_i)_{\Omega} = (i\omega)^{-1} (\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n}, 1)_{\Gamma_i}$

Ci-dessus, nous avons utilisé les propriétés div $\mathbf{J}=0$ dans Ω et $p_i=\delta_{ik}$ sur Γ_k , $k=1\ldots I$. Ainsi, s'il existe $0\leq i\leq I$ tel que $(\mathbf{J}\cdot\mathbf{n},1)_{\Gamma_i}\neq 0$, alors \mathbf{E} n'appartient pas à $\hat{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega)$. Mais ceci montre aussi que pour connaître le champ \mathbf{E} , il suffit de déterminer $\hat{\mathbf{E}}$. En suivant le même raisonnement, on vérifie que le champ magnétique constitue toujours un élément de $\hat{\mathbf{V}}_T(\mu;\Omega)$, indépendamment du terme source \mathbf{J} . Cependant, il ne semble pas évident qu'on puisse écrire des formulations dans $\hat{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega)$, $\hat{\mathbf{V}}_T(\mu;\Omega)$ équivalentes aux équations de Maxwell initiales. Nous n'approfondirons donc pas cette piste.

9.8.1 Géométries non triviales : résultats de compacité

Travaillons d'abord sur l'espace des champs électriques.

Théorème 9.8.7 Soit Ω un ouvert borné connexe à frontière lipschitzienne. Supposons l'hypothèse $(\mathcal{H}_{\varepsilon})$ vérifiée. Alors l'injection de $\mathbf{V}_{N}(\varepsilon;\Omega)$ dans $\mathbf{L}^{2}(\Omega)$ est compacte.

Preuve. Soit (\boldsymbol{u}_n) une suite bornée de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, en utilisant le Lemme 9.8.2, définissons $\boldsymbol{v}_n\in\hat{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega)$ et $(\alpha_{1n},\ldots,\alpha_{In})\in\mathbb{C}^I$ les éléments tels que $\boldsymbol{u}_n=\boldsymbol{v}_n+\sum_{i=1}^I\alpha_{in}\boldsymbol{P}_i$. Pour montrer le Théorème 9.8.7, il suffit de prouver qu'on peut extraire de (\boldsymbol{v}_n) une sous-suite qui converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Définissons $\boldsymbol{F}_n=\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}_n$. La suite (\boldsymbol{F}_n) est bornée dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $(\varepsilon\boldsymbol{v}_n,\nabla\varphi)_{\Omega}=0$ pour tout $\varphi\in\mathrm{H}^1_{\Gamma}(\Omega)$. D'après le théorème 3.12 de [2], il existe donc $\boldsymbol{w}_n\in\hat{\mathbf{V}}_T(1;\Omega)$ tel que $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n=\varepsilon\boldsymbol{v}_n$. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\boldsymbol{v}_n=\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n$. Montrons qu'on peut extraire de $(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n)$ une sous-suite qui converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Nous savons que $\boldsymbol{w} \mapsto \|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}\|_{\Omega}$ définit une norme sur $\hat{\mathbf{V}}_T(1;\Omega)$ (cf. [2, corollaire 3.16]). Par conséquent, la suite (\boldsymbol{w}_n) est bornée dans $\hat{\mathbf{V}}_T(1;\Omega)$. Puisque $\mathbf{rot}\,\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n = \boldsymbol{F}_n$ dans Ω et $(\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n) \times \boldsymbol{n} = 0$ sur $\partial\Omega$, on a $(\varepsilon^{-1}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}_n,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w}')_{\Omega} = (\boldsymbol{F}_n,\boldsymbol{w}')_{\Omega}$ pour tout $\boldsymbol{w}' \in \hat{\mathbf{V}}_T(1;\Omega)$. Maintenant, construisons un opérateur continu $\hat{\mathbb{T}}$ de $\hat{\mathbf{V}}_T(1;\Omega)$ dans $\hat{\mathbf{V}}_T(1;\Omega)$ pour restaurer une certaine positivité. Considérons $\boldsymbol{w} \in \hat{\mathbf{V}}_T(1;\Omega)$.

i) Définissons d'abord φ l'unique élément de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} \varepsilon \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi' = \int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{\mathbf{rot}} \, \boldsymbol{w} \cdot \nabla \varphi', \qquad \forall \varphi' \in \mathrm{H}^{1}_{0}(\Omega).$$

La fonction φ est bien définie car nous avons supposé l'hypothèse $(\mathcal{H}_{\varepsilon})$ vérifiée.

ii) Définissant $\beta_i := (\varepsilon \operatorname{\mathbf{rot}} \boldsymbol{w}, \nabla p_i)_{\Omega}$ pour $i = 1 \dots I$, remarquons ensuite qu'on a $(\varepsilon(\operatorname{\mathbf{rot}} \boldsymbol{w} - \sum_{i=1}^{I} \beta_i \boldsymbol{P}_i - \nabla \varphi), \nabla \varphi')_{\Omega} = 0$ pour tout $\varphi' \in \mathrm{H}^1_{\Gamma}(\Omega)$. Par conséquent, d'après le théorème 3.12 de [2], il existe un unique potentiel $\hat{\mathbb{T}} \boldsymbol{w} \in \hat{\mathbf{V}}_T(1;\Omega)$ tel que $\operatorname{\mathbf{rot}} \hat{\mathbb{T}} \boldsymbol{w} = \varepsilon(\operatorname{\mathbf{rot}} \boldsymbol{w} - \sum_{i=1}^{I} \beta_i \boldsymbol{P}_i - \nabla \varphi)$. Ceci définit un opérateur $\hat{\mathbb{T}}$ continu de $\hat{\mathbf{V}}_T(1;\Omega)$ dans $\hat{\mathbf{V}}_T(1;\Omega)$.

Puisque $\hat{\mathbb{T}}$ est continu, la suite $(\hat{\mathbb{T}}\boldsymbol{w}_n)$ est bornée dans $\hat{\mathbf{V}}_T(1;\Omega)$. On peut donc extraire une soussuite de (\boldsymbol{w}_n) , toujours notée (\boldsymbol{w}_n) , telle que $(\hat{\mathbb{T}}\boldsymbol{w}_n)$ converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Puisque pour $i=1\ldots I$, la suite (β_{in}) , avec $\beta_{in}=(\varepsilon \operatorname{rot}\boldsymbol{w}_n,\nabla p_i)$, est bornée dans \mathbb{C} , on peut extraire une sous-suite de (\boldsymbol{w}_n) , toujours notée (\boldsymbol{w}_n) , telle que (β_{in}) converge. Introduisons $\boldsymbol{w}_{nm}:=\boldsymbol{w}_n-\boldsymbol{w}_m,\,\boldsymbol{F}_{nm}:=\boldsymbol{F}_n-\boldsymbol{F}_m$ et $\beta_{inm}:=\beta_{in}-\beta_{im}$. On a

$$\begin{array}{lcl} \left| (\boldsymbol{F}_{nm}, \, \hat{\mathbb{T}} \boldsymbol{w}_{nm})_{\Omega} \right| & = & \left| (\varepsilon^{-1} \mathbf{rot} \, \boldsymbol{w}_{nm}, \mathbf{rot} \, \hat{\mathbb{T}} \boldsymbol{w}_{nm})_{\Omega} \right| \\ & \geq & \left\| \mathbf{rot} \, \boldsymbol{w}_{nm} \right\|_{\Omega}^{2} - \sum_{i=1}^{I} |\beta_{inm}| |(\mathbf{rot} \, \boldsymbol{w}_{nm}, \boldsymbol{P}_{i})_{\Omega}|. \end{array}$$

Cette estimation montre que (**rot** w_n) constitue une suite de Cauchy de $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Par conséquent, elle converge. Ainsi, on peut extraire de (v_n) = (ε^{-1} **rot** w_n) une sous-suite qui converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

En procédant de façon analogue, on montre le

Théorème 9.8.8 Soit Ω un ouvert borné connexe à frontière lipschitzienne. Supposons l'hypothèse (\mathcal{H}_{μ}) vérifiée. Alors l'injection de $\mathbf{V}_{T}(\mu;\Omega)$ dans $\mathbf{L}^{2}(\Omega)$ est compacte.

9.8.2 Géométries non triviales : retour aux problèmes initiaux

Énonçons maintenant le résultat principal de cette section concernant le caractère bien posé des équations de Maxwell dans un domaine non simplement connexe à frontière non connexe.

Théorème 9.8.9 Soit Ω un ouvert borné connexe à frontière lipschitzienne. Considérons $J \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ tel que div J = 0. Supposons les hypothèses $(\mathscr{H}_{\varepsilon})$ et (\mathscr{H}_{μ}) vérifiées. Alors on a le résultat suivant.

- Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, l'opérateur champ électrique $\mathscr{A}_N(\omega) : \mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega) \to \mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega)$ défini en (9.8) constitue un opérateur Fredholm d'indice zéro. De plus, pour $\omega \in \mathbb{C}^*$, $\mathbf{E} \in \mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega)$ satisfait $(\mathscr{A}_N(\omega)\mathbf{E}, \mathbf{E}')_{\mathbf{rot}} = i\omega(\mathbf{J}, \mathbf{E}')_{\Omega}$, pour tout $\mathbf{E}' \in \mathbf{V}_N(\varepsilon; \Omega)$, si et seulement si le couple $(\mathbf{E}, (i\omega\mu)^{-1}\mathbf{rot} \mathbf{E})$ vérifie les équations de Maxwell (9.1)-(9.2).
- Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, l'opérateur champ magnétique $\mathscr{A}_T(\omega) : \mathbf{V}_T(\mu;\Omega) \to \mathbf{V}_T(\mu;\Omega)$ défini en (9.11) constitue un opérateur Fredholm d'indice zéro. De plus, pour $\omega \in \mathbb{C}^*$, $\mathbf{H} \in \mathbf{V}_T(\mu;\Omega)$ satisfait $(\mathscr{A}_T(\omega)\mathbf{H}, \mathbf{H}')_{\mathbf{rot}} = (\varepsilon^{-1}\mathbf{J}, \mathbf{rot} \mathbf{H}')_{\Omega}$, pour tout $\mathbf{H}' \in \mathbf{V}_T(\mu;\Omega)$, si et seulement si le couple $(i(\omega\varepsilon)^{-1}(\mathbf{rot} \mathbf{H} \mathbf{J}), \mathbf{H})$ vérifie les équations de Maxwell (9.1)-(9.2).

Preuve. Montrons que $\mathscr{A}_N(\omega)$ est un opérateur Fredholm d'indice zéro. En utilisant le Théorème 9.8.7, on prouve que $\mathscr{A}_N(\omega) - \mathscr{A}_N(0)$ constitue un opérateur compact de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ pour tout $\omega \in \mathbb{C}$. Il suffit donc de montrer que $\mathscr{A}_N(0)$ est Fredholm d'indice zéro. De nouveau, nous allons construire une paramétrix à droite $\mathbb{T}^{\varepsilon} : \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega) \to \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ pour l'opérateur $\mathscr{A}_N(0)$. Considérons $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$.

i) Définissons d'abord φ l'unique élément de $\mathrm{H}^1_{\#}(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} \mu \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi' = \int_{\Omega} \mu \operatorname{\mathbf{rot}} \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi', \qquad \forall \varphi' \in \mathrm{H}^{1}_{\#}(\Omega).$$

La fonction φ est bien définie puisque nous avons supposé l'hypothèse (\mathcal{H}_{μ}) vérifiée.

ii) Définissant $\beta_j := (\mu \operatorname{\mathbf{rot}} \boldsymbol{w}, \nabla q_j)_{\Omega}$ pour $j = 1 \dots J$, remarquons ensuite qu'on a $(\mu(\operatorname{\mathbf{rot}} \boldsymbol{w} - \sum_{j=1}^{J} \beta_j \boldsymbol{Q}_j - \nabla \varphi), \nabla \varphi')_{\Omega} = 0$ pour tout $\varphi' \in \Theta(\dot{\Omega})$. Par conséquent, d'après le théorème 3.17 de [2], il existe un unique potentiel $\boldsymbol{\psi} \in \hat{\mathbf{V}}_N(1; \Omega)$ tel que $\operatorname{\mathbf{rot}} \boldsymbol{\psi} = \mu(\operatorname{\mathbf{rot}} \boldsymbol{w} - \sum_{j=1}^{J} \beta_j \boldsymbol{Q}_j - \nabla \varphi)$.

iii) Considérons ζ l'unique élément de $H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} \varepsilon \nabla \zeta \cdot \nabla \zeta' = \int_{\Omega} \varepsilon \, \psi \cdot \nabla \zeta', \qquad \forall \zeta' \in H^1_0(\Omega).$$

La fonction ζ est bien définie puisque nous avons supposé l'hypothèse $(\mathcal{H}_{\varepsilon})$ vérifiée.

iv) Enfin, définissons l'opérateur $\mathbb{T}^{\varepsilon}: \mathbf{V}_{N}(\varepsilon; \Omega) \to \mathbf{V}_{N}(\varepsilon; \Omega)$ qui à $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}_{N}(\varepsilon; \Omega)$ fait correspondre $\mathbb{T}^{\varepsilon}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\psi} - \nabla \zeta$ ainsi que l'opérateur $K^{\varepsilon}: \mathbf{V}_{N}(\varepsilon; \Omega) \to \mathbf{V}_{N}(\varepsilon; \Omega)$ tel que

$$(K^{\varepsilon} oldsymbol{u}, oldsymbol{v})_{\mathbf{rot}} = (oldsymbol{u}, oldsymbol{v})_{\Omega} + \sum_{j=1}^{J} (\mu \operatorname{\mathbf{rot}} oldsymbol{u}, \widetilde{
abla_{q_{j}}})_{\Omega} (oldsymbol{Q}_{j}, \operatorname{\mathbf{rot}} oldsymbol{v})_{\Omega}, \qquad orall oldsymbol{v} \in \mathbf{V}_{N}(arepsilon; \Omega).$$

D'après le Théorème 9.8.7, nous savons que l'injection de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte. Par conséquent, $K^{\varepsilon}: \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega) \to \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$ est la somme d'un opérateur compact et d'un opérateur de rang fini. C'est donc un opérateur compact de $\mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$. Par ailleurs, pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_N(\varepsilon;\Omega)$, on trouve

$$\begin{array}{lcl} (\mathscr{A}_N(0)(\mathbb{T}^\varepsilon \boldsymbol{u}),\boldsymbol{v})_{\mathbf{rot}} & = & (\mu^{-1}\mathbf{rot}\;(\mathbb{T}^\varepsilon \boldsymbol{u}),\mathbf{rot}\;\boldsymbol{v})_{\Omega} \\ & = & (\mathbf{rot}\;\boldsymbol{u},\mathbf{rot}\;\boldsymbol{v})_{\Omega} + (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{\Omega} - (K^\varepsilon \boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{\mathbf{rot}}\;. \end{array}$$

Ainsi, nous avons $\mathscr{A}_T(0) \circ \mathbb{T}^{\varepsilon} + K^{\varepsilon} = \text{Id.}$ Nous déduisons que \mathbb{T}^{ε} constitue une paramétrix à droite pour $\mathscr{A}_N(0)$. Ceci prouve que l'opérateur autoadjoint $\mathscr{A}_N(0)$ est Fredholm d'indice zéro. On montre de la même façon que $\mathscr{A}_T(\omega) : \mathbf{V}_T(\mu; \Omega) \to \mathbf{V}_T(\mu; \Omega)$ est un opérateur Fredholm d'indice zéro pour tout $\omega \in \mathbb{C}$. Finalement, l'équivalence avec les équations de Maxwell (9.1)-(9.2) provient des Théorèmes 9.2.3 et 9.2.7.

Remarque 9.8.10 De nouveau, pour appliquer le théorème de Fredholm analytique et prouver que les équations de Maxwell (9.1)-(9.2) possèdent une unique solution pour tout $\omega \in \mathbb{C} \backslash \mathscr{S}$, où \mathscr{S} est un ensemble dénombrable possédant l'infini comme seul point d'accumulation possible, il reste à montrer qu'il existe $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\mathscr{A}_N(\omega)$ ou $\mathscr{A}_T(\omega)$ est inversible. Ce résultat ne paraît pas simple à obtenir. Observons tout de même, d'après la Remarque 9.8.6, que les éléments du noyau de $\mathscr{A}_N(\omega)$ (resp. $\mathscr{A}_T(\omega)$) appartiennent à $\hat{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega)$ (resp. $\hat{\mathbf{V}}_T(\mu;\Omega)$). D'autre part, l'application $\mathbf{u} \mapsto \|\mathbf{rot} \ \mathbf{u}\|_{\Omega}$ définit une norme sur $\hat{\mathbf{V}}_N(\varepsilon;\Omega)$ et sur $\hat{\mathbf{V}}_T(\mu;\Omega)$. Mais il manque encore un ingrédient pour conclure.

Profitons de cette fin de chapitre pour présenter un exemple particulièrement surprenant prouvant la nécessité de la condition d'inversibilité en un point dans l'énoncé du théorème de Fredholm analytique. D'après [151, p.211], cet exemple est dû à Seeley.

 \diamond Exemple. Considérons l'anneau $\Omega := \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid \pi < r < 2\pi \text{ et } 0 \leq \theta < 2\pi\} \subset \mathbb{R}^2$. Introduisons l'opérateur $A : \mathrm{H}^1_0(\Omega) \to \mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ tel que

$$Au = e^{-2i\theta} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u \right) \quad \text{pour tout } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega).$$

Puisque nous avons exclu l'origine en travaillant sur un anneau, on peut montrer que A est un opérateur Fredholm d'indice zéro. Notons

$$J_0(t) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it \sin s} \, ds$$

la fonction de Bessel d'ordre 0. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, définissons alors la fonction $u_{\lambda} \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ telle que

$$u_{\lambda}(r,\theta) := J_0(\lambda^{1/2}e^{i\theta})\sin r.$$

On peut vérifier que $Au_{\lambda} = \lambda u_{\lambda}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Autrement dit, le spectre ponctuel de l'opérateur A couvre tout le plan complexe. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'opérateur $B(\lambda) = A - \lambda \operatorname{Id}$ est Fredholm d'indice zéro. La famille $\{B(\lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{C}}$ dépend analytiquement de λ . Cependant, il n'existe pas de paramètre $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $B(\lambda_0)$ soit inversible.

Lorsque ε et μ changent de signe, l'étude du problème spectral « trouver $(\lambda, u) \in \mathbb{C} \times \mathrm{H}_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ tel que div $(\mu^{-1}\nabla u) + \lambda \varepsilon u = 0$ » semble compliquée. Peut-on rencontrer ce phénomène de spectre ponctuel couvrant tout le plan complexe? La question est ouverte.