

Développement des séries génératrices des marches unidimensionnelles

Informellement, une marche est une suite de déplacements élémentaires effectués dans un ensemble (par exemple sur une grille). L'étude combinatoire des marches est un sujet très riche, qui touche à de nombreux domaines des mathématiques (combinatoire des mots, physique statistique, probabilités, dénombrements, ...) et qui peut-être abordé avec des points de vue variés. C'est un domaine où les méthodes de calcul formel ont connu un certain succès, certes en offrant la possibilité d'expérimenter par le calcul, mais aussi dans certains cas comme outil de preuve. C'est ainsi par exemple qu'une conjecture de Gessel sur une famille particulière de marches dans le plan a été prouvée rigoureusement à l'aide de l'ordinateur en 2009¹, alors que la première preuve « humaine » n'est apparue que très récemment, en 2016². Ici, je vais m'intéresser à un problème d'ordre calculatoire sur les marches unidimensionnelles. Dans l'exemple 24 p. 37, nous étions parvenus à calculer les valeurs d'une suite de probabilités b_n . Il se trouve que les nombres b_n sont liés au comptage d'une famille de marches unidimensionnelles, et on aimerait généraliser ce type de dénombrement à d'autres familles de marches. Ce problème a déjà été abordé par Banderier et Flajolet³. Après avoir discuté les avantages et inconvénients de leur méthode, je vais présenter une nouvelle méthode pour compter les marches unidimensionnelles. Sans plus attendre, définissons plus précisément les marches à étudier et le vocabulaire associé.

1. KAUSERS, KOUTSCHAN et ZEILBERGER, "Proof of Ira Gessel's Lattice Path Conjecture".

2. BOSTAN, KURKOVA et RASCHEL, "A human proof of Gessel's lattice path conjecture".

3. BANDERIER et FLAJOLET, "Basic Analytic Combinatorics of Directed Lattice Paths".

5.1 Définitions et énoncé du problème

Définition 102.

1. On appelle *pas* tout vecteur de la forme $(1, u)$, avec $u \in \mathbb{Z}$.
2. Si S est un ensemble fini de pas, une S -*marche* est une suite $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ de points de $\mathbb{Z}^2$ telle que

$$\cdot A_0 = (0, 0) ;$$

$$\cdot \overrightarrow{A_{k-1}A_k} \text{ est un pas appartenant à } S.$$

n est alors la *longueur* de la marche. Pour tout $k \geq 0$, l'ordonnée de A_k est l'*altitude* de la marche au temps k . L'altitude au temps n est appelée l'*altitude finale* de la marche.

3. Si S est un ensemble fini de pas, on définit le *polynôme caractéristique* de S , noté χ_S par

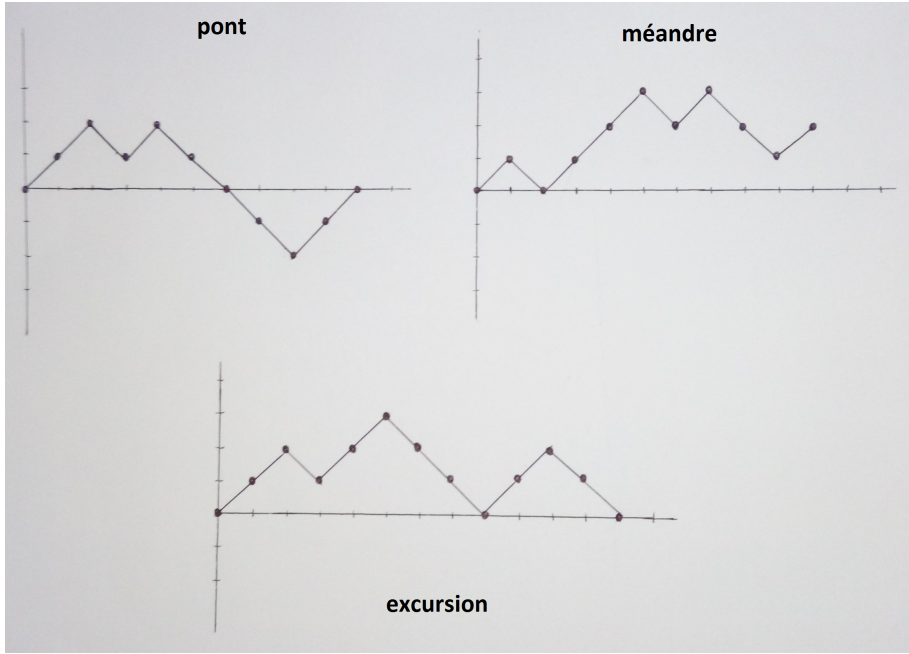
$$\chi_S(y) = \sum_{(1,u) \in S} y^u.$$

Remarquons que les marches qui viennent d'être définies, bien qu'évoluant dans la grille $\mathbb{Z}^2$, sont essentiellement unidimensionnelles. En effet, on peut les voir comme des marches sur $\mathbb{Z}$, l'axe vertical, alors que l'axe horizontal ne sert qu'à représenter le temps qui augmente de 1 à chaque pas.

À l'instar de Banderier et Flajolet, nous considérons trois familles particulières de marches, illustrées dans le dessin ci-dessous.

Définition 103. Soit S un ensemble de pas, et soit $\mathcal{M}$ une S -marche. On dit que $\mathcal{M}$ est

1. un *pont* si son altitude finale est 0 ;
2. un *méandre* si son altitude est positive après chaque pas ;
3. une *excursion* si c'est à la fois un pont et un méandre.

Les trois familles de marches ($S = \{-1, 1\}$)

Définition 104. Soit S un ensemble fini de pas.

1. On note $W_S \in \mathbb{Q}[[x, y]]$ la série génératrice des S -marches indexées par leur longueur et leur altitude finale, c'est-à-dire

$$W_S(x, y) = \sum_{n, k \geq 0} w_{n, k} x^n y^k,$$

où $w_{n, k}$ est le nombre de marches de longueur n ayant pour altitude finale k .

2. On note $B_S \in \mathbb{Q}[[x]]$ (resp. E_S , M_S) la série génératrice des ponts (resp. excursions, méandres) indexés par leur longueur, c'est-à-dire

$$B_S(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n,$$

où b_n est le nombre de ponts de longueur n . (Idem pour les excursions et les méandres.)

Lorsque le contexte sera clair, on omettra de préciser l'ensemble S de pas en indice.

Exemple 105. (1) L'exemple intéressant le plus simple est $S = \{-1, 1\}$. Les S -excursions ne sont autres que les chemins de Dyck, bien-connus en combinatoire. Les chemins de Dyck sont en bijection avec les mots bien parenthésés sur l'alphabet $\{(\,,)\}$: on peut voir tous les pas 1 comme des parenthèses ouvrantes et les pas -1

comme des parenthèses fermantes. La condition de positivité des excursions traduit le fait que le nombre de parenthèses ouvrantes doit être plus grand que le nombre de parenthèses fermantes dans tout préfixe.

(2) Si $S = \{-1, 0, 1\}$, les S -marches sont exactement les déroulements possibles d'un scrutin à deux candidats (exemple 24). En effet, les pas 1 et -1 correspondent aux votes respectifs pour les deux candidats, tandis que les pas 0 correspondent aux votes blancs. L'altitude finale mesure alors le score de l'élection. Ainsi, les S -ponts sont les déroulements qui se terminent par une égalité.

On rappelle maintenant quelques résultats classiques sur les séries génératrices des diverses familles de marches unidimensionnelles.

Proposition 106. *Les séries W , B , E et M vérifient les propriétés suivantes :*

1. $W(x, y)$ est une série rationnelle. Explicitement :

$$W(x, y) = \frac{1}{1 - x\chi(y)}.$$

2. $B(x)$, $E(x)$ et $M(x)$ sont des séries algébriques.

3. $B(x) = [y^0]W(x, y)$.

4.

$$E(x) = \exp\left(\int \frac{B(x) - 1}{x} dx\right).$$

Démonstration. Ces résultats sont tous prouvés chez Banderier et Flajolet⁴. $\square$

5.2 Calcul des séries génératrices

À partir de maintenant, on fixe un ensemble fini de pas S . On note u^- (resp. u^+) le plus grand entier $u \in \mathbb{Z}$ tel que $(1, -u) \in S$ (resp. $(1, u) \in S$). On définit également $d = u^+ + u^-$. L'entier d mesure l'amplitude verticale de S ; ceci fait de d une bonne échelle pour la complexité des algorithmes à venir. On supposera de plus que u^+ et u^- sont tous les deux strictement positifs, car dans le cas contraire l'étude des ponts, excursions et méandres devient triviale. (Par exemple si $u^- < 0$, alors il n'y a ni ponts ni excursions, et toutes les marches sont des méandres.)

La question à laquelle nous souhaitons répondre est la suivante :

Problème 107. *Soit N un entier naturel. Calculer en bonne complexité les $N + 1$ premiers termes de la suite (u_n) , où u_n est le nombre de ponts (resp. excursions, méandres) de longueur n .*

5.2.1 Méthode directe

Notons $w_{n,k}$ le nombre de marches de longueur n et d'altitude finale k . Alors la définition des marches donne directement la récurrence

$$w_{n,k} = \sum_{(1,u) \in S} w_{n-1,k-u}, \quad (5.1)$$

4. BANDERIER et FLAJOLET, "Basic Analytic Combinatorics of Directed Lattice Paths", §2.1-2.2.

avec les conditions initiales $w_{n,k} = 0$ si $n < 0$, et $w_{0,0} = 1$. Si l'on note $\tilde{w}_{n,k}$ le nombre de méandres de longueur n et d'altitude finale k , alors $\tilde{w}_{n,k}$ satisfait également la récurrence (5.1), mais avec les conditions initiales supplémentaires $\tilde{w}_{n,k} = 0$ si $k < 0$. Alors les ponts (resp. excursions, méandres) sont comptés par les nombres $w_{n,0}$ (resp. $\tilde{w}_{n,0}$, $\sum_k \tilde{w}_{n,k}$).

On peut calculer ces quantités en déroulant la récurrence (5.1). Chaque utilisation de la récurrence requiert $O(d)$ opérations, et dans le pire des cas on a besoin de calculer $O(dN^2)$ termes de la suite (si l'ensemble des pas est $S = \{(1, 1), \dots, (1, d)\}$ par exemple). Avec cette méthode, on calcule donc les N premiers termes d'une des trois séries en $O(d^2N^2)$ opérations dans $\mathbb{Q}$.

Cette complexité quadratique en N n'est pas satisfaisante, et toute méthode qui repose sur le développement complet de la série génératrice $W(x, y)$ sera inéluctablement quadratique en N par nature. Les deux autres méthodes que je vais présenter ont pour principal atout d'avoir une complexité linéaire ou quasi-linéaire en N . Comme il sera expliqué, cette amélioration a lieu au prix d'un pré-calcul. Lors de l'analyse de la complexité des algorithmes, ce pré-calcul doit bien sûr être pris en compte, et nous allons voir qu'il a son importance : il peut dominer la complexité si l'on ne prend pas garde.

5.2.2 En passant par une équation algébrique

On a vu dans la proposition 106 que les séries B , E , et M sont algébriques. Banderier et Flajolet⁵ ont esquissé une méthode reposant sur ce fait pour effectuer le calcul des N premiers termes. Les séries E et M peuvent être exprimées comme des produits de petites branches du polynôme caractéristique χ_S (voir leur théorème⁶ pour un énoncé précis). De là, une équation algébrique peut être obtenue à l'aide de l'algorithme Platypus qui calcule un polynôme annulant un produit de racines d'un polynôme donné. À partir d'une équation $P(x, E(x)) = 0$, on peut trouver un polynôme annulant B à l'aide de la formule $B = xE'/E + 1$, à savoir $\text{Résultant}_E((B - 1)E\partial_y P + x\partial_x P, P)$.

Une fois que l'on connaît un polynôme pour l'une de ces trois séries, il peut être utilisé pour calculer une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux satisfaite par ses coefficients (voir le théorème 117 de l'annexe A et la proposition 25). La méthode directe exposée ci-dessus permet de calculer assez de conditions initiales pour dérouler la récurrence (il en faut au plus un nombre polynomial en le degré de l'équation algébrique calculée d'après la proposition 34 p. 42). Ainsi, cette approche permet de calculer les N premiers termes de B , E et M en $O(N)$ opérations. Pour que ceci soit une amélioration par rapport à la méthode naïve, il faut que la dépendance en d de la constante dans le $O()$ ne soit pas trop grande et que le pré-calcul ne soit pas trop coûteux.

En effet, le coût du pré-calcul d'une équation algébrique n'est pas négligeable. Bousquet-Mélou⁷ a obtenu la borne $\binom{d}{u-}$ sur le degré de l'équation pour les excursions et a montré que cette borne est génériquement atteinte. Le degré de l'équa-

5. Ibid., §2.3.

6. Ibid., Th. 1.

7. BOUSQUET-MÉLOU, "Discrete excursions", §2.1.

tion algébrique peut donc être exponentiellement grand par rapport à d . Empiriquement, on constate que les équations algébriques pour B et M peuvent elles aussi avoir un degré exponentiellement grand.

Notre première contribution est de remarquer que la situation pour les équations différentielles et les récurrences est différente : B satisfait une équation différentielle dont le degré n'est que polynomial (voir ci-dessous), alors que (empiriquement) celles de E et M peuvent avoir une taille exponentielle. Qui dit grosse équation différentielle dit grosse récurrence, ce qui entraîne une grosse constante dans la complexité du pré-calcul et dans le déroulement de la récurrence. Le théorème 111 du paragraphe suivant montre que l'on peut se contenter d'un pré-calcul de complexité polynomiale avec une nouvelle méthode, ce qui est une amélioration importante dès que d devient non-négligeable.

Exemple 108. Avec l'ensemble de pas $S = \{(1, d), (1, 1), (1, -d)\}$ et $d \geq 2$, la série génératrice W_S vaut

$$W_S(x, y) = \frac{y^d}{y^d - x(1 + y^{d+1} + y^{2d})}.$$

Les expériences mettent en évidence que le bidegré du polynôme minimal de B_S est $\left(2d \binom{2d-2}{d-1}, \binom{2d}{d}\right)$, ce qui montre bien une croissance exponentielle en d . Par ailleurs, on constate expérimentalement que B_S satisfait une équation différentielle d'ordre $2d - 1$ avec des coefficients de degré $d^2 + 3d - 2$ lorsque d est pair, et $d^2 + 3d - 4$ si d est impair.

5.2.3 Nouvelle méthode

Je vais maintenant présenter une méthode, mise au point avec Bostan et Salvy⁸ qui a une complexité quasi-linéaire en N et qui évite le pré-calcul d'une équation algébrique. Elle repose sur le fait que les coefficients constants de fractions rationnelles, comme celui du point 3 de la proposition 106, satisfont des équations différentielles de taille polynomiale en le degré de la fraction rationnelle⁹. Nous allons traiter les trois séries B, E et M au cas par cas, et les résultats seront résumés dans le théorème 111.

5.2.4 Ponts

Pour développer $B(x)$, on utilise la formule (3) de la proposition 106, que l'on peut réécrire :

$$B(x) = [y^{-1}] \frac{W(x, y)}{y}.$$

De plus, $W(x, y)/y$ est de la forme P/Q , où $\text{bideg} Q \leq (1, d)$ et $\text{bideg} P \leq (0, d - 1)$. Les conditions sont réunies pour appliquer le théorème 23 : l'algorithme Hermite-Telescoping de Bostan, Chen *et al.*¹⁰ permet de calculer un télescopeur minimal

8. BOSTAN, DUMONT et SALVY, "Algebraic Diagonals and Walks".

9. BOSTAN, CHEN, CHYZAK et LI, "Complexity of creative telescoping for bivariate rational functions".

10. Ibid., Fig. 3.

pour P/Q d'ordre au plus d et de degré $O(d^2)$ en $\tilde{O}(d^5)$ opérations dans $\mathbb{Q}$. Ce télescopeur n'est autre que la résolvante différentielle de B que l'on peut convertir en temps quasi-optimal en une récurrence d'ordre $O(d^2)$ (proposition 25).

À ce stade, on est donc capable de calculer $B(x) \bmod x^{N+1}$ en $O(d^2N)$ dès lors que l'on connaît un nombre suffisant de conditions initiales pour lancer la récurrence. La proposition suivante donne un majorant du nombre de telles conditions initiales à calculer.

Proposition 109. *Soit S un ensemble fini de pas, et $d = \max_{(1,u),(1,v) \in S} |u - v|$. Soit P le polynôme minimal de B_S , et L_P sa résolvante différentielle.*

Alors l'exposant de L_P est au plus $O(d^3)$.

Démonstration. À la lumière de la proposition 8, la formule

$$B(x) = [y^{-1}] \frac{W(x, y)}{y}$$

implique que B est une somme de résidus de la fraction $W(x, y)/y$. Notons alors R le polynôme qui annule ces résidus calculé par l'algorithme PolynômeRésidus (p. 67), et L_R sa résolvante différentielle. Comme W a un bidegré $(1, d)$ le théorème 69 montre que le bidegré de R est au plus $(O(d), d)$.

Maintenant, comme B est annulée par $\Sigma_c R$ (voir définition 74 p. 73) pour un certain c , P est un diviseur de $\Sigma_c R$. Donc toutes les racines de P sont des sommes de racines de R , ce qui implique en particulier que toutes les solutions de L_P sont des solutions de L_R . De là, le lemme 32 et la proposition 34 donnent la majoration attendue. $\square$

Ainsi, on peut calculer un nombre suffisant de conditions initiales par la méthode directe en $O(d^5)$ opérations dans $\mathbb{Q}$. Le coût total du pré-calcul est donc $\tilde{O}(d^5)$.

5.2.5 Excursions

Si $B(x) \bmod x^{N+1}$ est connu, il est alors possible d'en déduire $E(x) \bmod x^{N+1}$ en utilisant la formule (4) de la proposition 106. Développer $E(x)$ se ramène alors au calcul de l'exponentielle d'une série, ce qui peut se faire en $\tilde{O}(N)$ opérations dans $\mathbb{Q}$ par la proposition 131 de l'annexe B.

5.2.6 Méandres

De même que dans le cas des excursions, la dérivée logarithmique de $M(x)$ peut être obtenue comme un coefficient constant. Ceci fait l'objet de la proposition suivante.

Proposition 110. *Soit S un ensemble fini de pas. On définit la série $A_S \in \mathbb{Q}[[x]]$ de la façon suivante :*

$$A_S(x) = [y^{-1}] \frac{W(x, y)}{1 - y}.$$

Alors la série génératrice $M_S(x)$ des méandres est reliée à $A_S(x)$ par la formule

$$M_S(x) = \frac{\exp\left(-\int \frac{A_S(x)}{x} dx\right)}{1 - x\chi_S(1)}.$$

Démonstration. Notons $y_1, y_2, \dots, y_{u^-}$ les petites branches du polynôme $y^{u^-} - xy^{u^-}\chi(y)$. Banderier et Flajolet ont montré¹¹ que

$$M(x) = \frac{1}{1 - x\chi(1)} \prod_{i=1}^{u^-} (1 - y_i). \quad (5.2)$$

Par ailleurs, la définition de $A(x)$ et la proposition 8 donnent

$$A(x) = [y^{-1}] \frac{W(x, y)}{1 - y} dy = \sum_{i=1}^{u^-} \text{Res} \left(\frac{1}{(1 - y)(1 - x\chi(y))}, y_i \right) = - \sum_{i=1}^{u^-} \frac{1}{(1 - y_i)x\chi'(y_i)}.$$

Ensuite, en dérivant l'équation $1 - x\chi(y) = 0$ par rapport à x , on obtient

$$-x\chi'(y_i) = \frac{1}{xy'_i},$$

et donc

$$A(x) = x \sum_{i=1}^{u^-} \frac{y'_i}{1 - y_i}.$$

En prenant l'exponentielle de cette égalité, il vient

$$\prod_{i=1}^{u^-} (1 - y_i) = \exp\left(-\int \frac{A(x)}{x} dx\right).$$

En combinant cette égalité et l'équation (5.2), on obtient bien le résultat attendu. $\square$

À la lumière de ce dernier résultat, on peut appliquer la même méthode que dans le cas des excursions. On commence par calculer une équation satisfaite par $A(x)$ en utilisant les méthodes de Bostan, Chyzak *et al.* et on la convertit en récurrence. Le calcul des conditions initiales pour A peut être effectué naïvement en développant $yW(x, y)/(1 - y)$. La formule de la proposition 110 permet alors de calculer $M(x) \bmod x^{N+1}$ à partir de $A(x) \bmod x^{N+1}$. L'analyse de complexité est tout à fait similaire : le pré-calcul s'effectue en $\tilde{O}(d^5)$ opérations dans $\mathbb{Q}$.

5.2.7 Algorithme

Les discussions des trois paragraphes précédents sont résumées par le théorème suivant, implémenté en pratique par l'algorithme Marches (algorithme 10).

Théorème 111. *Soit S un ensemble fini de pas, et $d = u^- + u^+$. Il est possible de développer la série B_S (resp. E_S , M_S) à l'ordre N en $O(d^2N)$ (resp. $\tilde{O}(d^2N)$) opérations dans $\mathbb{Q}$, après un pré-calcul en $\tilde{O}(d^5)$ opérations dans $\mathbb{Q}$.*

11. BANDERIER et FLAJOLET, "Basic Analytic Combinatorics of Directed Lattice Paths", Cor. 1.

Algorithme **Marches**(S, N)

Entrée Un ensemble de pas S et un entier positif N

Sortie $B_S, E_S, M_S \bmod x^{N+1}$

$F \leftarrow W(x, y)/y$ [cas B, E] ou $W(x, y)/(1 - y)$ [cas M];
 $D \leftarrow \mathbf{HermiteTelescoping}(F)^a$;
 $R \leftarrow$ la récurrence d'ordre r associée à D;
 $I \leftarrow [y^0]W(x, y) \bmod x^{r+1}$ [cas B, E]
 $\quad [y^0]yW(x, y)/(1 - y) \bmod x^{r+1}$ [cas M];
 $B \leftarrow [y^0]W(x, y) \bmod x^{N+1}$ (à partir de R, I);
 $A \leftarrow [y^0]yW(x, y)/(1 - y) \bmod x^{N+1}$ (à partir de R, I);
 $E \leftarrow \exp\left(\int (B(x) - 1)/x dx\right) \bmod x^{N+1}$;
 $M \leftarrow \exp\left(-\int (A(x)/x)/(1 - \chi(1)x) dx\right) \bmod x^{N+1}$;
renvoyer B, E, M

^a. BOSTAN, CHEN, CHYZAK et LI, "Complexity of creative telescoping for bivariate rational functions", Fig. 3.

Algorithme 10: Développement des séries génératrices des ponts, méandres et excursions

