

Convergence des sommes partielles dans $\mathcal{D}([0, 1]^d)$

Que ce soit dans les résultats pré-existants ou dans ceux montrés dans le chapitre précédent, le comportement asymptotique des sommes partielles de champs aléatoires à longue mémoire a été étudié au travers de la convergence des lois fini-dimensionnelles. Il est intéressant, en vue d'applications, d'étendre cette convergence à une convergence fonctionnelle sur $\mathcal{D}([0, 1]^d)$. Nous présentons à cette fin un critère d'équitension des champs aléatoires dû à Bickel et Wichura (1971) que nous adaptons au cas des sommes partielles dans le corollaire 2 ci-dessous.

Nous appliquerons ce critère d'équitension à différents cas de longue mémoire isotrope et non-isotrope dans les sections 4.2 et 4.3.

La section 4.4 résume les situations de forte dépendance où la convergence de S_n dans $\mathcal{D}([0, 1]^d)$ est établie, en s'appuyant d'une part sur la convergence en loi fini-dimensionnelle montrée notamment dans le chapitre précédent et d'autre part sur l'équitension étudiée ici.

4.1 Critère d'équitension pour les sommes partielles

Soit $C = [s_1, t_1[\times \cdots \times [s_d, t_d[$ un sous ensemble de $[0, 1]^d$ et soit S_n un processus dans $\mathcal{D}([0, 1]^d)$. On note $S_n(C)$ la quantité

$$S_n(C) = \sum_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_d = 0, 1} (-1)^{d + \sum_{i=1}^d \varepsilon_i} S(s_1 + \varepsilon_1(t_1 - s_1), \dots, s_d + \varepsilon_d(t_d - s_d)). \quad (4.1.1)$$

Les théorèmes 2 et 3 de Bickel et Wichura (1971) nous donnent le critère d'équitension suivant.

Théorème 14 (Bickel et Wichura (1971)). *Soit $S_n(t)$, $t \in [0, 1]^d$, un processus de $\mathcal{D}([0, 1]^d)$ dont les lois fini-dimensionnelles convergent en loi vers celle d'un processus $Y(t)$.*

On suppose que $Y(t)$ est continu en $t = 1$ et que $S_n(0) = 0$.

S'il existe $\beta > 1$, $\gamma > 1$ et une mesure finie positive μ sur $[0, 1]^d$ tels que, pour tous $C = [s_1, t_1[\times \cdots \times [s_d, t_d[$ et $C' = [s'_1, t'_1[\times \cdots \times [s'_d, t'_d[$,

$$\forall n \quad E(|S_n(C)|^{\gamma_1} |S_n(C')|^{\gamma_2}) \leq (\mu(C))^{\beta_1} (\mu(C'))^{\beta_2}, \quad (4.1.2)$$

avec $\beta_1 + \beta_2 = \beta$, $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$, où $S_n(C)$ et $S_n(C')$ sont définis par (4.1.1), alors

$$S_n \xrightarrow{\mathcal{D}([0,1]^d)} Y.$$

Le corollaire suivant, dont les conditions sont plus pratiques à vérifier, concerne le cas particulier où S_n est le processus des sommes partielles d'un champ aléatoire stationnaire.

Corollaire 2. On considère un champ aléatoire stationnaire $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ et ses sommes partielles

$$S_n(t) = d_n^{-1} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d}, \quad t \in [0, 1]^d. \quad (4.1.3)$$

Si S_n converge au sens des lois fini-dimensionnelles vers Y et s'il existe $c > 0$ et $\beta > 1$ tel que pour tous p_1, \dots, p_d appartenant à $\{1, \dots, n\}$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=1}^d \frac{p_i}{n} \right)^{-\beta} E \left(d_n^{-1} \sum_{k_1=0}^{p_1} \cdots \sum_{k_d=0}^{p_d} X_{k_1, \dots, k_d} \right)^2 \leq c, \quad (4.1.4)$$

alors

$$S_n \xrightarrow{\mathcal{D}([0,1]^d)} Y.$$

De plus le champ Y admet une version à trajectoires continues.

Démonstration. Bickel et Wichura (1971) montrent en remarque de leur théorème 3 qu'il suffit de vérifier la condition (4.1.2) pour des ensembles du type $C_n = [i_1/n, j_1/n[\times \cdots \times [i_d/n, j_d/n[$ ($i_l, j_l = 0 \dots n$, $l = 1, \dots, d$). Cette condition, en employant les mêmes notations, se lit alors

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\mu(C_n))^{-\beta_1} (\mu(C'_n))^{-\beta_2} E(|S_n(C)|^{\gamma_1} |S_n(C')|^{\gamma_2}) \leq 1. \quad (4.1.5)$$

Dans le cas $d = 2$, d'après (4.1.1) on a

$$\begin{aligned} & S_n \left(\left[\frac{i_1}{n}, \frac{j_1}{n} \right[\times \left[\frac{i_2}{n}, \frac{j_2}{n} \right[\right) \\ &= S_n \left(\frac{i_1}{n}, \frac{i_2}{n} \right) - S_n \left(\frac{j_1}{n}, \frac{i_2}{n} \right) - S_n \left(\frac{i_1}{n}, \frac{j_2}{n} \right) + S_n \left(\frac{j_1}{n}, \frac{j_2}{n} \right) \\ &= d_n^{-1} \left(\sum_{k_1=0}^{i_1} \sum_{k_2=0}^{i_2} X_{k_1, k_2} - \sum_{k_1=0}^{j_1} \sum_{k_2=0}^{i_2} X_{k_1, k_2} - \sum_{k_1=0}^{i_1} \sum_{k_2=0}^{j_2} X_{k_1, k_2} + \sum_{k_1=0}^{j_1} \sum_{k_2=0}^{j_2} X_{k_1, k_2} \right) \\ &= d_n^{-1} \sum_{k_1=i_1}^{j_1} \sum_{k_2=i_2}^{j_2} X_{k_1, k_2}. \end{aligned}$$

On obtient par récurrence le même résultat quelque soit d :

$$S_n(C_n) = d_n^{-1} \sum_{k_1=i_1}^{j_1} \cdots \sum_{k_d=i_d}^{j_d} X_{k_1, \dots, k_d}.$$

Si $C'_n = [i'_1/n, j'_1/n[\times \cdots \times [i'_d/n, j'_d/n[$, en utilisant l'inégalité de Schwartz et la stationnarité de X , on obtient

$$\begin{aligned} & \left[E(|S_n(C_n)| |S_n(C'_n)|) \right]^2 \\ & \leq E \left(\frac{1}{d_n} \sum_{k_1=i_1}^{j_1} \cdots \sum_{k_d=i_d}^{j_d} X_{k_1, \dots, k_d} \right)^2 E \left(\frac{1}{d_n} \sum_{k_1=i'_1}^{j'_1} \cdots \sum_{k_d=i'_d}^{j'_d} X_{k_1, \dots, k_d} \right)^2 \\ & \leq E \left(\frac{1}{d_n} \sum_{k_1=0}^{j_1-i_1} \cdots \sum_{k_d=0}^{j_d-i_d} X_{k_1, \dots, k_d} \right)^2 E \left(\frac{1}{d_n} \sum_{k_1=0}^{j'_1-i'_1} \cdots \sum_{k_d=0}^{j'_d-i'_d} X_{k_1, \dots, k_d} \right)^2. \end{aligned}$$

Ainsi, si (4.1.4) est vraie alors la condition (4.1.5) est remplie avec $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $2\beta_1 = 2\beta_2 = \beta$ et μ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]^d$ (à un facteur multiplicatif près).

La continuité du champ aléatoire limite Y se montre exactement comme celle de B dans le lemme 11 prouvé en section 3.4.1, où le rôle de S_n^ξ est joué par S_n et où la normalisation $n^{d/2}$ est remplacée par d_n , de telle sorte qu'en utilisant l'hypothèse (4.1.4) on aboutit à

$$E(S_n(s) - S_n(t))^2 \leq c \sum_{l=0}^{d-1} \sum_{C_d^l} \prod_{j \in C_d^l} (t_j \wedge s_j + n^{-1})^\beta \left(\prod_{j \in \overline{C_d^l}} (s_j - t_j \wedge s_j + n^{-1})^\beta + \prod_{j \in \overline{C_d^l}} (t_j - t_j \wedge s_j + n^{-1})^\beta \right)$$

dont le majorant converge bien vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$ et $s \rightarrow t$.

En remarquant enfin que $S_n(0) = 0$, toutes les conditions du théorème 14 sont remplies et la convergence annoncée dans le corollaire s'en déduit. \square

4.2 Équitension en longue mémoire isotrope

Nous montrons l'équitension des sommes partielles dans la situation standard de longue mémoire isotrope : lorsque le champ est une fonctionnelle de champs gaussiens, hypothèse de travail de Dobrushin et Major (1979).

Proposition 7. *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire gaussien stationnaire centré. Soit H une fonction mesurable telle que*

$$\int_0^\infty H(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^\infty H^2(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx < \infty.$$

Notons m son rang de Hermite.

On suppose que (X_n) admet comme fonction de covariance

$$r(k) = |k|^{-\alpha} L(|k|) b\left(\frac{k}{|k|}\right), \quad (4.2.1)$$

avec $r(0) = 1$, où $0 < m\alpha < d$ et où L est une fonction à variation lente à l'infini et b une fonction continue sur la sphère unité de \mathbb{R}^d .

Alors le processus des sommes partielles de $H(X_n)$,

$$\frac{1}{n^{d-m\alpha/2} (L(n))^{m/2}} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} H(X_{k_1, \dots, k_d}),$$

est équitendu dans $\mathcal{D}([0, 1]^d)$.

Démonstration. On utilise le corollaire 2 et l'on doit évaluer, pour p_1, \dots, p_d appartenant à $\{1, \dots, n\}$,

$$E \left(\frac{1}{n^{d-m\alpha/2} (L(n))^{m/2}} \sum_{k_1=0}^{p_1} \cdots \sum_{k_d=0}^{p_d} H(X_k) \right)^2. \quad (4.2.2)$$

En utilisant la décomposition de $H(X_k)$ dans la base de Hermite

$$H(X_k) = \sum_{i=m}^{\infty} \frac{J_i}{i!} H_i(X_k),$$

où

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \frac{J_i^2}{i!} < \infty, \quad (4.2.3)$$

et la relation

$$\text{cov}(H_k(X_i), H_l(X_j)) = \delta_{k,l} k! r(j-i)^k,$$

où H_k est le polynôme de Hermite d'ordre k , on obtient

$$\begin{aligned} E \left(\sum_{k_1=0}^{p_1} \cdots \sum_{k_d=0}^{p_d} H(X_k) \right)^2 &= \sum_{k,l=0}^{p_1 \dots p_d} \sum_{i=m}^{\infty} \frac{J_i^2}{i!} r^i(l-k) \\ &\leq \sum_{k,l=0}^{p_1 \dots p_d} r^m(l-k) \sum_{i=m}^{\infty} \frac{J_i^2}{i!} \\ &\leq c \sum_{k,l=0}^{p_1 \dots p_d} r^m(l-k), \end{aligned}$$

car $0 \leq r(l - k) \leq 1$ et en utilisant (4.2.3). On a donc

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{k_1=0}^{p_1} \dots \sum_{k_d=0}^{p_d} H(X_k)\right)^2 &\leq c \sum_{k=-p_1+1, \dots, -p_d+1}^{p_1-1, \dots, p_d-1} |k|^{-m\alpha} L(|k|)^m b^m \left(\frac{k}{|k|}\right) \prod_{j=1}^d (p_j - |k_j|) \\ &\leq c \prod_{j=1}^d p_j \left(1 + 2^d \sum_{k=1}^{p_1, \dots, p_d} (|k|)^{-m\alpha} L(|k|)^m\right), \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

la fonction b étant bornée.

Le théorème de Potter sur les fonctions à variation lente (cf Bingham et al. (1987)) affirme que si $y \leq x$ alors pour tout $\eta > 0$, il existe une constante c telle que

$$L(y) \leq c \left(\frac{y}{x}\right)^{-\eta} L(x). \quad (4.2.5)$$

Nous appliquons cette inégalité avec $y = |k| = k_1 + \dots + k_d$ et $x = dn$ en choisissant

$$\eta = \frac{d}{2m} - \frac{\alpha}{2} > 0. \quad (4.2.6)$$

Nous utilisons de plus le fait que la moyenne arithmétique de quantités positives est toujours supérieure à leur moyenne géométrique et (4.2.4) est majoré par

$$\begin{aligned} c \prod_{j=1}^d p_j \left(1 + \sum_{k=1}^{p_1, \dots, p_d} \prod_{j=1}^d k_j^{-(\alpha+\eta)m/d} L(dn)^m n^{m\eta}\right) \\ \leq c \prod_{j=1}^d p_j \left(1 + L(dn)^m n^{m\eta} \prod_{j=1}^d p_j^{-(\alpha+\eta)m/d+1}\right). \end{aligned}$$

Ainsi (4.2.2) est majorée par

$$\begin{aligned} cn^{m\alpha-2d} L(n)^{-m} \left(\prod_{j=1}^d p_j + L(dn)^m n^{m\eta} \prod_{j=1}^d p_j^{-(\alpha+\eta)m/d+2}\right) \\ \leq c \left(\frac{L(dn)}{L(n)}\right)^m \prod_{j=1}^d \left(\frac{p_j}{n}\right)^\beta \left(n^{-m\eta} L(dn)^{-m} \prod_{j=1}^d p_j^{1-\beta} + 1\right), \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

avec $\beta = -(\alpha + \eta)m/d + 2$. D'après (4.2.6) et comme $0 < m\alpha < d$, on a $\beta > 1$. Ceci montre par ailleurs que le terme entre parenthèses dans (4.2.7) reste borné. De plus L étant une fonction à variations lentes, $L(dn)/L(n)$ est borné. Ainsi

$$\forall (p_1, \dots, p_d) \in \{1, \dots, n\}^d,$$

$$E\left(\frac{1}{n^{d-m\alpha/2} (L(n))^{m/2}} \sum_{k_1=0}^{p_1} \dots \sum_{k_d=0}^{p_d} H(X_k)\right)^2 \leq c \left(\prod_{j=1}^d \frac{p_j}{n}\right)^\beta,$$

avec $\beta > 1$ et la condition (4.1.4) du corollaire 2 est vérifiée. \square

4.3 Équitension en longue mémoire non-isotrope

Nous considérons dans cette partie différentes situations de longue mémoire non-isotrope pour lesquelles nous montrons l'équitension des sommes partielles. Le champ X considéré est supposé issu du filtrage d'un bruit ξ à travers un filtre a comme dans (3.1.2) et les conditions de dépendance que nous considérons portent comme précédemment sur la fonction a .

L'objectif est de montrer l'équitension de S_n dans les situations de forte dépendance considérées lors de l'étude des lois fini-dimensionnelles du chapitre précédent : dans le (ii) du Théorème 7 en dimension $d \leq 2$ ou dans les Théorèmes 10 et 11 en dimension d quelconque.

A défaut de pouvoir le faire en toute généralité pour des raisons techniques, nous restreignons un peu notre étude.

En dimension $d = 2$, nous considérons des filtres homogènes de degré $-1 < \alpha < 0$ et nous scindons l'étude selon que $-1 < \alpha < -1/2$ et $-1/2 < \alpha < 0$. Dans le premier cas, l'équitension est obtenue dès que a est équivalent en l'origine à une fonction homogène de degré α : le filtre a n'a en fait pas besoin d'être supposé homogène sur tout $[-\pi, \pi]^2$. Par contre, dans le second cas, lorsque $-1/2 < \alpha < 0$, nous supposons que a est un polynôme homogène à une certaine puissance : a appartient donc à une classe restreinte de fonctions homogènes.

En dimension d quelconque, nous considérons d'une part des filtres de type produit tensoriel, chaque composante du produit étant homogène à une certaine puissance, d'autre part des filtres singuliers sur un sous-espace linéaire de $[-\pi, \pi]^d$ comme dans le Théorème 11.

Proposition 8 ($d = 2$). *Soit $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}^2}$ un champ aléatoire stationnaire vérifiant **H 1**. Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}^2}$ le champ aléatoire défini par (3.1.2) obtenu par le filtrage de ξ à travers $a \in L^2([-\pi, \pi]^2)$ où a vérifie l'une des deux conditions suivantes :*

(i) *Pour tout $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$,*

$$a(x, y) = |P_k(x, y)|^{\alpha/k}, \quad (4.3.1)$$

où $-1/2 < \alpha < 0$ et où P_k est un polynôme homogène de degré k à deux variables, c'est à dire $P_k(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|^k P_k(x, y)$.

(ii) *$a(x) \sim \tilde{a}(x)$ en $x = 0$ où \tilde{a} est une fonction homogène de degré α avec $-1 < \alpha < -1/2$.*

Alors le processus des sommes partielles de X défini par (4.1.3) est tendu dans $D([0, 1]^2)$.

Proposition 9 (d quelconque). *Soit $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire stationnaire vérifiant **H 1**. Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ le champ aléatoire défini par (3.1.2) obtenu par le filtrage de ξ à travers $a \in L^2([-\pi, \pi]^d)$ où a vérifie l'une des deux conditions suivantes :*

(i) *Pour tout $x = (x_1, \dots, x_d)$, $a(x) = \prod_{i=1}^d a_i(x_i)$ où les a_i sont équivalents en 0 à une fonction homogène de degré α_i , $-1/2 < \alpha_i < 0$.*

(ii) Pour tout $x = (x_1, \dots, x_d)$,

$$a(x) = \left| \sum_{i=1}^d c_i x_i \right|^{\alpha/2}, \quad -1 < \alpha < 0,$$

où $(c_1, \dots, c_d) \in \mathbb{R}^d$.

Alors le processus des sommes partielles de X défini par (4.1.3) est tendu dans $D([0, 1]^d)$.

4.4 Convergence de S_n dans $\mathcal{D}([0, 1]^d)$: bilan

Nous résumons les situations de forte dépendance pour lesquelles nous avons établi la convergence dans $\mathcal{D}([0, 1]^d)$ des sommes partielles. Celle-ci provient d'une part de la convergence des lois fini-dimensionnelles montrée dans des travaux préexistants en longue mémoire isotrope (par exemple dans Dobrushin et Major (1979)) ou étudiée dans le chapitre précédent, d'autre part de l'équitension des sommes partielles prouvée dans les sections précédentes.

Nous focalisons tout d'abord le cas $d \leq 2$ puis, pour d quelconque, nous donnons deux résultats : le premier en longue mémoire isotrope dans le cadre de Dobrushin et Major (1979), le second dans deux situations de longue mémoire non-isotrope.

Le théorème suivant se restreint à $d \leq 2$. Il se déduit du Théorème 7 et de la Proposition 8.

Théorème 15. Soit $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}^2}$ un champ aléatoire stationnaire vérifiant **H1**. Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}^2}$ le champ aléatoire défini par (3.1.2) obtenu par le filtrage de ξ à travers $a \in L^2([-\pi, \pi]^2)$.

(i) Si, pour tout $(x, y) \in [-\pi, \pi]^2$,

$$a(x, y) = |P_k(x, y)|^{\alpha/k},$$

où $-1/2 < \alpha < 0$ et où P_k est un polynôme homogène de degré k à deux variables (c'est à dire $P_k(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|^k P_k(x, y)$), alors

$$\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \sum_{k_2=0}^{[nt_2]} X_{k_1, k_2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}([0, 1]^2)} I \left(|P_k(x, y)|^{\alpha/k} \prod_{i=1}^2 D(x_i, t_i) \right),$$

où I est l'application linéaire définie dans le Théorème 6.

(ii) Si $a(x) \sim \tilde{a}(x)$ en $x = 0$ où \tilde{a} est une fonction homogène de degré α avec $-1 < \alpha < -1/2$, alors

$$\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \sum_{k_2=0}^{[nt_2]} X_{k_1, k_2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}([0, 1]^2)} I \left(\tilde{a}(x) \prod_{i=1}^2 D(x_i, t_i) \right),$$

où I est l'application linéaire définie dans le Théorème 6.

Remarque 20. Dans le cas où ξ est un bruit blanc fort, la limite obtenue dans le théorème précédent s'écrit comme une intégrale stochastique par rapport à la mesure spectrale d'un bruit blanc gaussien (voir la remarque 14 du chapitre précédent).

Le Théorème 16 ci-dessous complète celui de Dobrushin et Major (1979) en étendant la convergence fini-dimensionnelle des sommes partielles en une convergence fonctionnelle dans $\mathcal{D}([0, 1]^d)$ grâce à l'équitension établie à la Proposition 7. Dans le cas particulier où $d = 1$, le Théorème 16 équivaut au Théorème 5.6 de Taqqu (1979).

Théorème 16. *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire gaussien stationnaire centré. Soit H une fonction mesurable telle que*

$$\int_0^\infty H(x)e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^\infty H^2(x)e^{-\frac{x^2}{2}} dx < \infty.$$

Notons m son rang de Hermite.

On suppose que (X_n) admet comme fonction de covariance

$$r(k) = |k|^{-\alpha} L(|k|) b\left(\frac{k}{|k|}\right),$$

avec $r(0) = 1$, où $0 < m\alpha < d$ et où L est une fonction à variation lente à l'infini et b une fonction continue sur la sphère unité de \mathbb{R}^d .

Alors

$$\frac{1}{n^{d-m\alpha/2} (L(n))^{m/2}} \sum_{j_1=1}^{[nt_1]} \cdots \sum_{j_d=1}^{[nt_d]} H(X_{j_j}) \xrightarrow{\mathcal{D}([0,1]^d)} c_m Z_m(t),$$

où Z_m est le processus de Hermite de degré m défini par (1.3.4) et où c_m est le coefficient d'ordre m dans le développement de Hermite de H .

Enfin le Théorème suivant se place dans deux situations de longue mémoire non-isotrope en dimension quelconque. Le champ X , défini par (3.1.2), est obtenu par filtrage d'un bruit. Le premier cas concerne des filtres singuliers sur tout un sous-espace linéaire de $[-\pi, \pi]^d$ et le résultat découle du Théorème 11 et de la Proposition 9. Le second cas concerne des filtres de type produit tensoriel et la limite fonctionnelle des sommes partielles est dans un cas particulier le drap Brownien fractionnaire (voir la remarque ci-dessous); ce résultat se déduit du Théorème 10 et de la Proposition 9.

Théorème 17. *Soit $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire stationnaire vérifiant **H1**. Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ le champ aléatoire défini par (3.1.2) obtenu par le filtrage de ξ à travers a .*

(i) Si pour tout $x \in [-\pi, \pi]^d$

$$a(x) = \left| \sum_{i=1}^d c_i x_i \right|^\alpha,$$

où $-1/2 < \alpha < 0$ et où les c_i sont des constantes réelles. Alors

– Si $d \leq 3$,

$$\frac{1}{n^{d/2-\alpha}} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}([0,1]^d)} I \left(a(x) \prod_{i=1}^d D(x_i, t_i) \right), \quad (4.4.1)$$

où I est l'application linéaire définie dans le Théorème 6.

– Si $d \geq 4$ et si $-\frac{1}{d-2} < 2\alpha < 0$ alors la convergence (4.4.1) a encore lieu.

(ii) Si pour tout $x = (x_1, \dots, x_d) \in [-\pi, \pi]^d$

$$a(x_1, \dots, x_d) = \prod_{j=1}^d a_j(x_j),$$

avec $a_j(x_j) \sim \tilde{a}_j(x_j)$ en $x_j = 0$ où \tilde{a}_j est homogène de degré $\alpha_j \in]-1/2, 0[$ garantissant $a_j \in L^2([-\pi, \pi])$,

$$\frac{1}{n^{(d/2-\sum_{j=1}^d \alpha_j)}} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}([0,1]^d)} I \left(\prod_{j=1}^d \tilde{a}_j(x_j) \prod_{j=1}^d D(x_j, t_j) \right), \quad (4.4.2)$$

où I est l'application linéaire définie dans le Théorème 6.

Remarque 21. Dans le cas où ξ est un bruit blanc fort, l'application I peut s'écrire comme une intégrale stochastique et lorsque pour tout j , $\tilde{a}_j(x) = |x|^{\alpha_j}$ avec $-1/2 < \alpha_j < 0$, la limite de (4.4.2) correspond au drap brownien fractionnaire

$$\frac{1}{n^{(d/2-\sum_{j=1}^d \alpha_j)}} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}([0,1]^d)} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^d \frac{e^{it_j x_j} - 1}{ix_j |x_j|^{-\alpha_j}} dW_0(x),$$

où W_0 est la mesure spectrale associée au bruit blanc gaussien.

4.5 Démonstrations

4.5.1 Démonstration de la Proposition 8

Preuve du (i) de la Proposition 8

D'après le corollaire 2, il suffit de montrer qu'il existe une constante strictement positive c et $\beta > 1$ tels que

$$E \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^p \sum_{k_2=0}^q X_{k_1, k_2} \right)^2 \leq c \left(\frac{p}{n} \frac{q}{n} \right)^\beta.$$

On sait que $X_{k_1, k_2} = \int_{[-\pi, \pi]^2} a(\lambda_1, \lambda_2) e^{i(k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2)} dW(\lambda_1, \lambda_2)$, où W est la mesure spectrale de ξ . Ainsi

$$E \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^p \sum_{k_2=0}^q X_{k_1, k_2} \right)^2 \leq M \frac{1}{n^{2-2\alpha}} \int_{[-\pi, \pi]^2} a^2(x, y) \frac{\sin^2(px/2)}{\sin^2(x/2)} \frac{\sin^2(qy/2)}{\sin^2(y/2)} dx dy,$$

où M est le majorant de la densité spectrale de ξ . Par suite

$$E \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^p \sum_{k_2=0}^q X_{k_1, k_2} \right)^2 \leq c \frac{p^2 q^2}{n^{2-2\alpha}} \int_{[-\pi, \pi]^2} a^2(x, y) (1 \wedge (px)^{-2}) (1 \wedge (qy)^{-2}) dx dy, \quad (4.5.1)$$

où c est une constante strictement positive qui pourra varier dans la suite de ligne à ligne.

Par hypothèse $a(x, y) = |P_k(x, y)|^{\alpha/k}$ où P_k est un polynôme à deux variables, homogène de degré k que l'on peut écrire

$$P_k(x, y) = x^k P_k(1, y/x). \quad (4.5.2)$$

Posons $Q_k(t) = P_k(1, t)$; Q_k est un polynôme réel de degré k que l'on peut factoriser de la façon suivante

$$Q_k(t) = R(t) \prod_{i=1}^r |t - r_i|^{\tau_i},$$

où les r_i sont les r racines réels de Q_k d'ordres de multiplicité respectifs τ_i et R est un polynôme irréductible dans \mathbb{R} qui vérifie donc $|R(t)| \geq c$ pour un certain $c > 0$.

Nous allons distinguer les cas où $r = 0$ (Q_k n'admet aucune racine réelle), $r = 1$ et $r \geq 2$.

Si $r = 0$, $a(x, y) = |x|^\alpha |Q_k(y/x)|^{\alpha/k}$ où Q_k n'admet aucune racine réelle. L'hypothèse $a \in L^2([-\pi, \pi]^2)$ impose dans ce cas $\alpha > -1/2$. En partant de (4.5.1), on a donc

$$\begin{aligned} E \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^p \sum_{k_2=0}^q X_{k_1, k_2} \right)^2 &\leq c \frac{p^2 q^2}{n^{2-2\alpha}} \int_{[-\pi, \pi]^2} |x|^{2\alpha} (1 \wedge (px)^{-2}) (1 \wedge (qy)^{-2}) dx dy \\ &\leq c \left(\frac{p}{n}\right)^{1-2\alpha} \left(\frac{q}{n}\right) \int_{\mathbb{R}^2} |u|^{2\alpha} (1 \wedge u^{-2}) (1 \wedge v^{-2}) dudv, \end{aligned}$$

en ayant posé $u = px$ et $v = qy$. La dernière intégrale est finie et l'on a donc

$$E \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^p \sum_{k_2=0}^q X_{k_1, k_2} \right)^2 \leq c \left(\frac{p}{n}\right)^{1-2\alpha} \left(\frac{q}{n}\right), \quad (4.5.3)$$

où c est une constante strictement positive ne dépendant pas de p et q .

Si $r = 1$, en définissant $\gamma_1 = \alpha(1 - \tau_1/k)$,

$$\begin{aligned}
& E \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^p \sum_{k_2=0}^q X_{k_1, k_2} \right)^2 \\
& \leq c \frac{p^2 q^2}{n^{2-2\alpha}} \int_{[-\pi, \pi]^2} |x|^{2\alpha} \left| \frac{y}{x} - r_1 \right|^{2\alpha\tau_1/k} (1 \wedge (px)^{-2}) (1 \wedge (qy)^{-2}) dx dy \\
& \leq c \frac{p^2 q^2}{n^{2-2\alpha}} \int_{[-\pi, \pi]^2} |x|^{2\gamma_1} |y - r_1 x|^{2\alpha\tau_1/k} (1 \wedge (px)^{-2}) (1 \wedge (qy)^{-2}) dx dy \\
& \leq c \frac{1}{n^{2-2\alpha}} (pq)^{1-\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} |u|^{2\gamma_1} |v - r_1 u|^{2\alpha\tau_1/k} \left(1 \wedge \frac{q}{pu^2}\right) \left(1 \wedge \frac{p}{qv^2}\right) dudv, \quad (4.5.4)
\end{aligned}$$

en ayant posé $u = x\sqrt{pq}$ et $v = y\sqrt{pq}$. Nous scindons l'intégrale précédente en deux selon les domaines $A_1 = \{|v - r_1 u| > 1\}$ et $A_2 = \{|v - r_1 u| \leq 1\}$.

$$\begin{aligned}
& \int_{A_1} |u|^{2\gamma_1} |v - r_1 u|^{2\alpha\tau_1/k} \left(1 \wedge \frac{q}{pu^2}\right) \left(1 \wedge \frac{p}{qv^2}\right) dudv \\
& \leq \int_{A_1} |u|^{2\gamma_1} \left(1 \wedge \frac{q}{pu^2}\right) \left(1 \wedge \frac{p}{qv^2}\right) dudv,
\end{aligned}$$

car $\alpha < 0$. En posant à présent $s = u\sqrt{p/q}$ et $t = v\sqrt{q/p}$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{A_1} |u|^{2\gamma_1} |v - r_1 u|^{2\alpha\tau_1/k} \left(1 \wedge \frac{q}{pu^2}\right) \left(1 \wedge \frac{p}{qv^2}\right) dudv \\
& \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\gamma_1} \int_{\mathbb{R}^2} |s|^{2\gamma_1} (1 \wedge s^{-2}) (1 \wedge t^{-2}) ds dt. \quad (4.5.5)
\end{aligned}$$

La dernière intégrale est finie car $2\gamma_1 > 2\alpha > -1$.

Par ailleurs en effectuant le changement de variables $s = u\sqrt{p/q}$ et $t = v - r_1 u$

$$\begin{aligned}
& \int_{A_2} |u|^{2\gamma_1} |v - r_1 u|^{2\alpha\tau_1/k} \left(1 \wedge \frac{q}{pu^2}\right) \left(1 \wedge \frac{p}{qv^2}\right) dudv \\
& \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\gamma_1 + \frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} |s|^{2\gamma_1} 1 \wedge s^{-2} ds \int_{|t| \leq 1} t^{2\alpha\tau_1/k} dt, \quad (4.5.6)
\end{aligned}$$

où toutes les intégrales sont finies.

Finalement, lorsque $r = 1$, par (4.5.4), (4.5.5) et (4.5.6),

$$E \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^p \sum_{k_2=0}^q X_{k_1, k_2} \right)^2 \leq c \left[\left(\frac{p}{n}\right)^{1-\alpha-\gamma_1} \left(\frac{q}{n}\right)^{1-\alpha+\gamma_1} \vee \left(\frac{p}{n}\right)^{1/2-\alpha-\gamma_1} \left(\frac{p}{n}\right)^{3/2-\alpha+\gamma_1} \right],$$

où c est une constante strictement positive ne dépendant pas de p et q .

Enfin, si $r \geq 2$, en posant $\gamma = \alpha(1 - \sum_{i=1}^r \tau_i/k)$,

$$\begin{aligned}
& E \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^p \sum_{k_2=0}^q X_{k_1, k_2} \right)^2 \\
& \leq c \frac{p^2 q^2}{n^{2-2\alpha}} \int_{[-\pi, \pi]^2} |x|^{2\alpha} \prod_{i=1}^r \left| \frac{y}{x} - r_i \right|^{2\alpha\tau_i/k} (1 \wedge (px)^{-2}) (1 \wedge (qy)^{-2}) dx dy \\
& \leq c \frac{p^2 q^2}{n^{2-2\alpha}} \int_{[-\pi, \pi]^2} |x|^{2\gamma} \prod_{i=1}^r |y - r_i x|^{2\alpha\tau_i/k} (1 \wedge (px)^{-2}) (1 \wedge (qy)^{-2}) dx dy \\
& \leq c \frac{1}{n^{2-2\alpha}} (pq)^{1-\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} |u|^{2\gamma} \prod_{i=1}^r |v - r_i u|^{2\alpha\tau_i/k} \left(1 \wedge \frac{q}{pu^2}\right) \left(1 \wedge \frac{p}{qv^2}\right) dudv, \quad (4.5.7)
\end{aligned}$$

en ayant posé $u = x\sqrt{pq}$ et $v = y\sqrt{pq}$. Nous scindons à présent la dernière intégrale selon les domaines $A = \cap_{i=1}^r \{|v - r_i u| > 1\}$ et $B = \cup_{i=1}^r \{|v - r_i u| \leq 1\}$.

$$\begin{aligned}
& \int_A |u|^{2\gamma} \prod_{i=1}^r |v - r_i u|^{2\alpha\tau_i/k} \left(1 \wedge \frac{q}{pu^2}\right) \left(1 \wedge \frac{p}{qv^2}\right) dudv \\
& \leq c \int_{\mathbb{R}^2} |u|^{2\gamma} \left(1 \wedge \frac{q}{pu^2}\right) \left(1 \wedge \frac{p}{qv^2}\right) dudv \\
& \leq c \left(\frac{q}{p}\right)^\gamma \int_{\mathbb{R}^2} |s|^{2\gamma} (1 \wedge s^{-2}) (1 \wedge t^{-2}) ds dt, \quad (4.5.8)
\end{aligned}$$

en posant $s = u\sqrt{p/q}$ et $t = v\sqrt{q/p}$.

Par ailleurs, sur B , soit il existe un unique indice $i = i_0$ tel que $|v - r_{i_0} u| \leq 1$ et pour tout $j \neq i_0$, $|v - r_j u| > 1$, notons alors B_{i_0} cet ensemble et $C_1 = \cup_{i_0=1}^r B_{i_0}$, soit il existe au moins deux indices i_0 et $j_0 \neq i_0$ tels que $|v - r_{i_0} u| \leq 1$ et $|v - r_{j_0} u| \leq 1$, notons l'union de ces ensembles C_2 .

$$\begin{aligned}
& \int_{C_1} |u|^{2\gamma} \prod_{i=1}^r |v - r_i u|^{2\alpha\tau_i/k} \left(1 \wedge \frac{q}{pu^2}\right) \left(1 \wedge \frac{p}{qv^2}\right) dudv \\
& \leq c \sum_{i_0=1}^r \int_{B_{i_0}} |u|^{2\gamma} |v - r_{i_0} u|^{2\alpha\tau_{i_0}/k} \left(1 \wedge \frac{q}{pu^2}\right) \left(1 \wedge \frac{p}{qv^2}\right) dudv.
\end{aligned}$$

On effectue le changement de variables $s = u\sqrt{p/q}$ et $t = v - r_{i_0} u$ et

$$\begin{aligned}
& \int_{C_1} |u|^{2\gamma} \prod_{i=1}^r |v - r_i u|^{2\alpha\tau_i/k} \left(1 \wedge \frac{q}{pu^2}\right) \left(1 \wedge \frac{p}{qv^2}\right) dudv \\
& \leq c \sum_{i_0=1}^r \left(\frac{q}{p}\right)^{\gamma+1/2} \int_{\mathbb{R}} |s|^{2\gamma} 1 \wedge s^{-2} ds \int_{|t|<1} |t|^{2\alpha\tau_{i_0}/k} dt \\
& \leq c \left(\frac{q}{p}\right)^{\gamma+1/2}. \quad (4.5.9)
\end{aligned}$$

Et sur C_2 , en nommant K_{i_0, j_0} un ensemble compact de \mathbb{R}^2 incluant $\{|v - r_{i_0}u| \leq 1\} \cap \{|v - r_{j_0}u| \leq 1\}$, puis K un ensemble compact contenant tous les K_{i_0, j_0} ,

$$\begin{aligned} & \int_{C_2} |u|^{2\gamma} \prod_{i=1}^r |v - r_i u|^{2\alpha\tau_i/k} \left(1 \wedge \frac{q}{pu^2}\right) \left(1 \wedge \frac{p}{qv^2}\right) dudv \\ & \leq c \sum_{i_0=1}^r \sum_{j_0=1}^r \int_{K_{i_0, j_0}} |u|^{2\gamma} \prod_{i=1}^r |v - r_i u|^{2\alpha\tau_i/k} dudv \\ & \leq c \int_K |u|^{2\gamma} \prod_{i=1}^r |v - r_i u|^{2\alpha\tau_i/k} dudv, \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

où toutes les intégrales sont finies.

Finalement, lorsque $r = 2$, partant de (4.5.7) et d'après (4.5.8), (4.5.9) et (4.5.10), on obtient

$$\begin{aligned} & E \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^p \sum_{k_2=0}^q X_{k_1, k_2} \right)^2 \\ & \leq \frac{c}{n^{2-2\alpha}} \left[(p^{1-\alpha-\gamma} q^{1-\alpha+\gamma}) \vee (p^{1/2-\alpha-\gamma} q^{3/2-\alpha+\gamma}) \vee (p^{1-\alpha} q^{1-\alpha}) \right], \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

où c est une constante strictement positive indépendante de p , q et n .

Le raisonnement précédent se base sur la factorisation (4.5.2). Nous pouvons de même factoriser le polynôme P_k par y ce qui conduit à l'étude du polynôme réel $Q'_k(t) = P_k(t, 1)$. Soit r' le nombre de racines réelles de Q'_k , selon que $r' = 0$, $r' = 1$ ou $r' \geq 2$, nous obtenons respectivement les inégalités (4.5.3), (4.5.7) et (4.5.11) où les rôles de p et q sont inversés et où γ est remplacé par $\gamma' = \alpha(1 - \sum_{i=1}^{r'} \tau'_i/k)$ en notant τ'_i les ordres de multiplicités des racines réelles de Q'_k .

Pour conclure, il suffit de considérer les différents cas selon les valeurs possibles de r et r' . Traitons le cas $r \geq 2$ et $r' \geq 2$, les autres situations se démontrent de la même manière. Si $r \geq 2$ et $r' \geq 2$, l'inégalité (4.5.11) est vérifiée à la fois telle quelle et en inversant les rôles de p et q de telle sorte que

$$\begin{aligned} & E \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^p \sum_{k_2=0}^q X_{k_1, k_2} \right)^2 \\ & \leq \frac{c}{n^{2-2\alpha}} \left(\left[(p^{1-\alpha-\gamma} q^{1-\alpha+\gamma}) \vee (p^{1/2-\alpha-\gamma} q^{3/2-\alpha+\gamma}) \vee (p^{1-\alpha} q^{1-\alpha}) \right] \right. \\ & \quad \left. \wedge \left[(q^{1-\alpha-\gamma'} p^{1-\alpha+\gamma'}) \vee (q^{1/2-\alpha-\gamma'} p^{3/2-\alpha+\gamma'}) \vee (q^{1-\alpha} p^{1-\alpha}) \right] \right). \end{aligned}$$

Supposons $p < q$, alors il est aisé de montrer que

$$(p^{1-\alpha-\gamma} q^{1-\alpha+\gamma}) \vee (p^{1/2-\alpha-\gamma} q^{3/2-\alpha+\gamma}) \vee (p^{1-\alpha} q^{1-\alpha}) = p^{1/2-\alpha-\gamma} q^{3/2-\alpha+\gamma}.$$

De même, si $p < q$,

$$\left(q^{1-\alpha-\gamma'} p^{1-\alpha+\gamma'}\right) \vee \left(q^{1/2-\alpha-\gamma'} p^{3/2-\alpha+\gamma'}\right) \vee \left(q^{1-\alpha} p^{1-\alpha}\right) = q^{1-\alpha-\gamma'} p^{1-\alpha+\gamma'}.$$

De plus,

$$p^{1/2-\alpha-\gamma'} q^{3/2-\alpha+\gamma} \wedge q^{1-\alpha-\gamma'} p^{1-\alpha+\gamma'} \leq q^{1-\alpha-\gamma'} p^{1-\alpha+\gamma'}.$$

On montre enfin facilement que lorsque $p < q$

$$\left(\frac{q}{n}\right)^{1-\alpha-\gamma'} \left(\frac{p}{n}\right)^{1-\alpha+\gamma'} \leq \left(\frac{p}{n} \frac{q}{n}\right)^\beta.$$

où β est choisi tel que $1 < \beta < 1 - \alpha + \gamma'$ ce qui est possible car $\gamma' = \alpha(1 - \sum_{i=1}^{r'} \tau'_i/k) > \alpha$.

Lorsque $p > q$, on procède de la même manière et on obtient ainsi le résultat recherché

$$E \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^p \sum_{k_2=0}^q X_{k_1, k_2} \right)^2 \leq c \left(\frac{p}{n} \frac{q}{n} \right)^\beta, \quad (4.5.12)$$

où β est choisi tel que $1 < \beta < (1 - \alpha + \gamma) \wedge (1 - \alpha + \gamma')$.

Preuve du (ii) de la Proposition 8

D'après le corollaire 2, il suffit de montrer qu'il existe une constante strictement positive c et $\beta > 1$ tels que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{p}{n} \frac{q}{n}\right)^\beta} E \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^p \sum_{k_2=0}^q X_{k_1, k_2} \right)^2 \leq c.$$

On sait que $X_{k_1, k_2} = \int_{[-\pi, \pi]^2} a(\lambda_1, \lambda_2) e^{i(k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2)} dW(\lambda_1, \lambda_2)$, où W est la mesure spectrale de ξ . Ainsi

$$E \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^p \sum_{k_2=0}^q X_{k_1, k_2} \right)^2 \leq M \frac{1}{n^{2-2\alpha}} \int_{[-\pi, \pi]^2} |a|^2(x, y) \frac{\sin^2(px/2)}{\sin^2(x/2)} \frac{\sin^2(qy/2)}{\sin^2(y/2)} dx dy,$$

où M est le majorant de la densité spectrale de ξ . On utilise à présent le lemme suivant

Lemme 16. Soit $a \in L^2([-\pi, \pi]^2)$ tel que $a(x) \sim \tilde{a}(x)$ en $x = 0$ avec \tilde{a} une fonction homogène de degré $\alpha < -1/2$ telle que

$$n^{2\alpha-2} \int_{[-\pi, \pi]^2} |\tilde{a}|^2(x, y) \frac{\sin^2(px/2)}{\sin^2(x/2)} \frac{\sin^2(qy/2)}{\sin^2(y/2)} dx dy \leq c \left(\frac{p}{n} \frac{q}{n} \right)^\beta. \quad (4.5.13)$$

Alors

$$n^{2\alpha-2} \int_{[-\pi, \pi]^2} |a|^2(x, y) \frac{\sin^2(px/2)}{\sin^2(x/2)} \frac{\sin^2(qy/2)}{\sin^2(y/2)} dx dy = O \left(\left(\frac{p}{n} \frac{q}{n} \right)^\beta \right),$$

lorsque $n \rightarrow \infty$.

Sa démonstration est donnée à la suite de celle-ci. D'après le lemme 16, il suffit de montrer que

$$n^{2\alpha-2} \int_{[-\pi, \pi]^2} |\tilde{a}|^2(x, y) \frac{\sin^2(px/2)}{\sin^2(x/2)} \frac{\sin^2(qy/2)}{\sin^2(y/2)} dx dy \leq c \left(\frac{p}{n} \frac{q}{n} \right)^\beta. \quad (4.5.14)$$

Après le changement de variables $u = px$ et $v = py$ et en utilisant l'homogénéité de \tilde{a} , on obtient

$$\begin{aligned} n^{2\alpha-2} \int_{[-\pi, \pi]^2} |\tilde{a}|^2(x, y) \frac{\sin^2(px/2)}{\sin^2(x/2)} \frac{\sin^2(qy/2)}{\sin^2(y/2)} dx dy \\ \leq cn^{2\alpha-2} p^{-2\alpha} q^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{a}|^2(u, v) (1 \wedge u^{-2}) \left(1 \wedge \frac{p^2}{q^2 v^2} \right) dudv \\ \leq cn^{2\alpha-2} p^{-2\alpha} q^2 \left(1 \vee \frac{p^2}{q^2} \right) \int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{a}|^2(u, v) (1 \wedge u^{-2}) (1 \wedge v^{-2}) dudv, \end{aligned}$$

où c est une constante strictement positive indépendante de p , q et n qui peut varier de ligne à ligne. La dernière intégrale est finie (cf lemme 8 du chapitre précédent) et, puisque l'on peut mener exactement les mêmes majorations en inversant les rôles joués par p et q , on obtient

$$\begin{aligned} n^{2\alpha-2} \int_{[-\pi, \pi]^2} |\tilde{a}|^2(x, y) \frac{\sin^2(px/2)}{\sin^2(x/2)} \frac{\sin^2(qy/2)}{\sin^2(y/2)} dx dy \\ \leq c \left[p^{-2\alpha} q^2 \left(1 \vee \frac{p^2}{q^2} \right) \right] \wedge \left[q^{-2\alpha} p^2 \left(1 \vee \frac{q^2}{p^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Il est aisé de montrer que ce majorant est inférieur à $c \left(\frac{p}{n} \frac{q}{n} \right)^\beta$ avec $\beta = 1/2 - \alpha > 1$ ce qui achève la démonstration.

Preuve du lemme 16

Soit $\delta > 0$ tel que si $\|(x, y)\| < \delta$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme uniforme, alors $\left| \frac{a^2(x, y)}{\tilde{a}^2(x, y)} \right| < 2$. On utilise la décomposition suivante

$$\begin{aligned} E \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^p \sum_{k_2=0}^q X_{k_1, k_2} \right)^2 \\ \leq M \frac{1}{n^{2-2\alpha}} \int_{[-\pi, \pi]^2} |a|^2(x, y) \frac{\sin^2(px/2)}{\sin^2(x/2)} \frac{\sin^2(qy/2)}{\sin^2(y/2)} dx dy \\ \leq M \frac{1}{n^{2-2\alpha}} \left[\int_{\|(x, y)\| < \delta} \frac{|a|^2(x, y)}{|\tilde{a}|^2(x, y)} |\tilde{a}|^2(x, y) \frac{\sin^2(px/2)}{\sin^2(x/2)} \frac{\sin^2(qy/2)}{\sin^2(y/2)} dx dy \right. \\ \left. + \int_{\|(x, y)\| > \delta} |a|^2(x, y) \frac{\sin^2(px/2)}{\sin^2(x/2)} \frac{\sin^2(qy/2)}{\sin^2(y/2)} dx dy \right]. \end{aligned} \quad (4.5.15)$$

Par hypothèse il existe $c > 0$ et $\beta > 1$ tels que la première intégrale dans (4.5.15) est majorée par

$$\frac{2}{n^{2-2\alpha}} \int_{[-\pi, \pi]^2} |\tilde{a}|^2(x, y) \frac{\sin^2(px/2)}{\sin^2(x/2)} \frac{\sin^2(qy/2)}{\sin^2(y/2)} dx dy \leq c \left(\frac{p}{n} \frac{q}{n} \right)^\beta. \quad (4.5.16)$$

Il reste donc à traiter la seconde intégrale dans (4.5.15). Nous allons montrer que si $\alpha < -1/2$,

$$n^{2\alpha-2} \int_{\|(x,y)\|>\delta} |a|^2(x, y) \frac{\sin^2(px/2)}{\sin^2(x/2)} \frac{\sin^2(qy/2)}{\sin^2(y/2)} dx dy = O \left(\left(\frac{p}{n} \frac{q}{n} \right)^\beta \right) \quad (4.5.17)$$

lorsque $n \rightarrow \infty$.

En notant F_p le noyau de Fejer défini par (3.5.5) dans la section 3.5 du chapitre précédent,

$$\begin{aligned} & \int_{\|(x,y)\|>\delta} |a|^2(x, y) \frac{\sin^2(px/2)}{\sin^2(x/2)} \frac{\sin^2(qy/2)}{\sin^2(y/2)} dx dy \\ & \leq pq \int_{\|(x,y)\|>\delta} |a|^2(x, y) F_p(x) F_q(y) dx dy \\ & \leq pq \int_{-\pi}^{\pi} F_q(y) \left(\int_{|x|>\delta} |a|^2(x, y) F_p(x) dx \right) dy \\ & \quad + pq \int_{-\pi}^{\pi} F_q(x) \left(\int_{|y|>\delta} |a|^2(x, y) F_q(y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Les deux dernières intégrales se traitent de la même manière. Observons la première en utilisant la propriété du noyau de Fejer :

$$\forall \delta > 0 \quad \sup_{|x|>\delta} F_n(x) \leq \frac{\pi}{2n\delta^2}.$$

Ainsi

$$pq \int_{-\pi}^{\pi} F_q(y) \left(\int_{|x|>\delta} |a|^2(x, y) F_p(x) dx \right) dy \leq c \frac{pq}{p\delta^2} \int_{-\pi}^{\pi} F_q(y) b(y) dy,$$

où $b(y) = \int_{-\pi}^{\pi} |a|^2(x, y) dx$.

On obtient, en notant $d(x) = \int_{-\pi}^{\pi} |a|^2(x, y) dy$,

$$\begin{aligned} & \frac{n^{2\beta}}{(pq)^\beta} n^{2\alpha-2} \int_{\|(x,y)\|>\delta} |a|^2(x, y) \frac{\sin^2(px/2)}{\sin^2(x/2)} \frac{\sin^2(qy/2)}{\sin^2(y/2)} dx dy \\ & \leq \frac{n^{2\beta}}{(pq)^\beta} n^{2\alpha-2} \left(\frac{q}{\delta^2} \int_{-\pi}^{\pi} F_q(y) b(y) dy + \frac{p}{\delta^2} \int_{-\pi}^{\pi} F_p(x) d(x) dx \right) \\ & \leq cn^{2\beta+2\alpha-1} \left(\frac{u_{n,q}}{p^\beta q^{\beta-1}} + \frac{v_{n,p}}{p^{\beta-1} q^\beta} \right), \quad (4.5.18) \end{aligned}$$

où $u_{n,q} = n^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} F_q(y)b(y)dy$ et $v_{n,p} = n^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} F_p(x)d(x)dx$.

Or on sait que $\int_{-\pi}^{\pi} F_q(y)b(y)dy = o(q)$ lorsque $q \rightarrow \infty$ (voir la Proposition 6 du chapitre précédent), ainsi $u_{n,q}$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$ quelque soit $q \leq n$; de même $v_{n,p}$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$.

Pour finir on sait que l'inégalité (4.5.13) est vraie pour $\beta > 1$, elle est donc vraie également si l'on impose $1 < \beta < 1/2 - \alpha$ ce qui est possible dans le cas $\alpha < -1/2$. Finalement d'après (4.5.16) et (4.5.18)

$$\frac{n^{2\beta}}{(pq)^\beta} E \left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k_1=0}^p \sum_{k_2=0}^q X_{k_1, k_2} \right)^2 \leq c(1 + n^{2\beta+2\alpha-1}(u_{n,q} + v_{n,p})). \quad (4.5.19)$$

Le majorant est borné et le lemme est prouvé.

4.5.2 Démonstration de la Proposition 9

Pour la démonstration du (i), en utilisant le corollaire 2 et la représentation spectrale de X , il faut montrer que pour tout (p_1, \dots, p_d) appartenant à $\{1, \dots, n\}$,

$$\prod_{i=1}^d \left[n^{2\alpha_i-1} \int_{-\pi}^{\pi} |a|^2(x_i) \frac{\sin^2(p_i x_i/2)}{\sin^2(x_i/2)} dx_i \right] = O \left(\prod_{i=1}^d \frac{p_i}{n} \right)^\beta, \quad (4.5.20)$$

lorsque $n \rightarrow \infty$ où $\beta > 1$. Il suffit de le montrer pour chaque composante. Fixons i dans $\{1, \dots, d\}$, comme $a_i(x_i) \sim \tilde{a}_i(x_i)$ en $x_i = 0$, d'après le Lemme 16 (adapté trivialement à la dimension 1), il suffit de montrer que

$$n^{2\alpha_i-1} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{a}|^2(x_i) \frac{\sin^2(p_i x_i/2)}{\sin^2(x_i/2)} dx_i \leq c \left(\frac{p_i}{n} \right)^{\beta_i},$$

ce que le changement de variable $x_i \mapsto x_i/p_i$ nous fournit directement avec $\beta_i = 1 - 2\alpha_i$. Dans le cas général où $a(x) = \prod_{i=1}^d a_i(x_i)$, (4.5.20) s'en déduit avec $\beta = \min(1 - 2\alpha_i, i = 1, \dots, d)$.

Montrons à présent le (ii) en utilisant le corollaire 2. D'après la représentation spectrale de X , pour tout (p_1, \dots, p_d) dans $\{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} E \left(\sum_{k_1=0}^{p_1} \dots \sum_{k_d=0}^{p_d} X_{k_1, \dots, k_d} \right)^2 &\leq c \int_{[-\pi, \pi]^d} \left| \sum_{i=1}^d c_i x_i \right|^{2\alpha} \prod_{j=1}^d \frac{\sin^2(p_j x_j/2)}{\sin^2(x_j/2)} dx \\ &\leq c \prod_{j=1}^d \frac{1}{p_j} \int_{\prod_{j=1}^d [-p_j \pi, p_j \pi]} \left| \sum_{i=1}^d c_i \frac{x_i}{p_i} \right|^{2\alpha} \prod_{j=1}^d \frac{\sin^2(x_j/2)}{\sin^2(x_j/2p_j)} dx \\ &\leq p_1^{1-2\alpha} \prod_{j=2}^d p_j \int_{\mathbb{R}^d} \left| c_1 x_1 + \sum_{i=2}^d \frac{c_i p_1}{p_i} x_i \right|^{2\alpha} \prod_{j=1}^d \frac{\sin^2(x_j/2)}{(x_j/2)^2} dx. \end{aligned} \quad (4.5.21)$$

L'intégrale dans (4.5.21) est finie. On peut le vérifier en effectuant le changement de variables $u = c_1 x_1 + \sum_{i=2}^d \frac{c_i p_1}{p_i} x_i$ et $x_i = x_i$ pour $i \geq 2$ sur le domaine $\{|u| < 1\}$, l'intégrabilité sur $\{|u| > 1\}$ étant évidente.

On a donc montré

$$E \left(n^{\alpha-d/2} \sum_{k_1=0}^{p_1} \dots \sum_{k_d=0}^{p_d} X_{k_1, \dots, k_d} \right)^2 \leq c n^{2\alpha-d} p_1^{1-2\alpha} \prod_{j=2}^d p_j.$$

Cette inégalité reste vraie en permutant les p_j entre eux, ainsi

$$\begin{aligned} E \left(n^{\alpha-d/2} \sum_{k_1=0}^{p_1} \dots \sum_{k_d=0}^{p_d} X_{k_1, \dots, k_d} \right)^2 &\leq c n^{2\alpha-d} \min_{i=1, \dots, d} \left\{ p_i^{1-2\alpha} \prod_{j \neq i} p_j \right\} \\ &\leq c n^{2\alpha-d} p_-^{1-2\alpha} \prod_{p_j \neq p_-} p_j = c \left(\frac{p_-}{n} \right)^{1-2\alpha} \prod_{p_j \neq p_-} \frac{p_j}{n}, \end{aligned}$$

en notant $p_- = \min\{p_j\}$. Un passage au logarithme montre facilement que

$$\left(\frac{p_-}{n} \right)^{1-2\alpha} \prod_{p_j \neq p_-} \frac{p_j}{n} \leq \left(\prod_{j=1}^d \frac{p_j}{n} \right)^{1-2\alpha/d}.$$

On obtient donc finalement

$$\forall (p_1, \dots, p_d) \in \{1, \dots, n\}^d, \quad E \left(n^{\alpha-d/2} \sum_{k_1=0}^{p_1} \dots \sum_{k_d=0}^{p_d} X_{k_1, \dots, k_d} \right)^2 \leq c \left(\prod_{j=1}^d \frac{p_j}{n} \right)^\beta,$$

où $\beta = 1 - 2\alpha/d > 1$. La condition (4.1.4) du corollaire 2 est donc vérifiée.

Chapitre 5

Tester la faible dépendance contre la forte dépendance dans les champs aléatoires

Nous présentons une procédure pour tester la faible dépendance contre la forte dépendance d'un champ aléatoire $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ du second ordre et stationnaire.

En dimension $d = 1$, la plupart des procédures construites pour tester la faible dépendance contre la forte dépendance se basent sur une estimation des variations des sommes partielles de X (on trouve par ailleurs des tests d'adéquation à des familles de modèles). Dans tous les tests développés, l'alternative consiste en des modèles de processus à longue mémoire, typiquement des processus FARIMA. Lo (1991) a proposé un test reposant sur la statistique R/S qui estime la taille de l'ensemble des valeurs prises par les sommes partielles de X . Ce test, très utilisé en pratique, a été critiqué pour sa faible puissance. Le test KPSS a été initialement développé par Kwiatkowski et al. (1992) pour tester la stationnarité (sous des hypothèses de faible dépendance) contre la présence d'une tendance déterministe ou la présence d'une racine unité. Lee et Schmidt (1996) ont remarqué que le test KPSS peut être adapté pour tester la courte mémoire contre la longue mémoire ; dans ce cas, la statistique de test repose sur une estimation du moment d'ordre deux des sommes partielles de X . Dans Giraitis et al. (2003), les auteurs introduisent la statistique V/S basée sur une estimation de la variance des sommes partielles de X ; le test qu'ils développent à partir de la statistique V/S pour tester la faible dépendance contre la forte dépendance s'avère plus puissant que le test basé sur la statistique R/S et que le test $KPSS$. Il est à noter que récemment, Giraitis et al. (2002) ont proposé un test basé lui aussi sur la statistique V/S qui permet de discriminer la stationnarité de la présence de tendance déterministe ou de la présence d'une racine unité ; leur procédure, contrairement au test KPSS, englobe sous l'hypothèse nulle à la fois des processus stationnaires faiblement dépendants, mais aussi des processus à longue mémoire.

Nous présentons en première partie la généralisation à la dimension $d \geq 2$ de la statistique V/S introduite par Giraitis et al. (2003) en dimension $d = 1$. Nous donnons également dans cette partie les hypothèses sous lesquelles nous prouvons la consistance

du test : l'hypothèse nulle concerne la faible dépendance et l'hypothèse alternative englobe des situations variées de longue mémoire.

La seconde partie présente les résultats théoriques qui valident la procédure de test. La troisième partie est consacrée d'une part à la simulation de la loi limite reconstruite sous l'hypothèse nulle, d'autre part à la mise en oeuvre du test sur des champs simulés.

Enfin la quatrième partie contient les preuves des lemmes.

5.1 Hypothèses et statistique du test

L'hypothèse nulle du test est une hypothèse de courte mémoire. Il y a de nombreuses manières de supposer un champ faiblement dépendant, aussi nous nous focaliserons sur les hypothèses nécessaires pour valider le test, à savoir un contrôle des moments et la validité du théorème central limite fonctionnel classique. Ces hypothèses que nous noterons **CM** sont référencées ci-dessous. Nous montrerons par ailleurs la consistance du test sous l'hypothèse alternative **LM** qui est un cadre très général de longue mémoire.

CM : Hypothèses de courte mémoire. X est un champ aléatoire stationnaire du second ordre de fonction de covariance r tel que

CM1

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} |r(j)| < \infty \quad \text{et} \quad \sigma^2 := \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} r(j) > 0. \quad (5.1.1)$$

CM2

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}^d} \sum_{(j,k) \in \mathbb{Z}^{2d}} |c_4(i, j, k)| < \infty,$$

où $c_4(i, j, k)$ représente les cumulants d'ordre 4 de X (la Définition 7 du chapitre 7 rappelle ce que sont les cumulants d'un champ aléatoire).

CM3

$$\frac{n^{-d/2}}{\sigma} \sum_{k_1=1}^{[nt_1]} \dots \sum_{k_d=1}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d} \xrightarrow{\mathcal{D}([0,1]^d)} B(t),$$

où B est le drap brownien sur $[0, 1]^d$.

LM : Hypothèses de longue mémoire. X étant un champ aléatoire stationnaire du second ordre, on suppose qu'il existe une suite normalisatrice d_n vérifiant $d_n = n^\gamma L(n)$ où $\gamma > d/2$ et où L est une fonction à variation lente à l'infini, telle que

$$d_n^{-1} \sum_{k_1=1}^{[nt_1]} \dots \sum_{k_d=1}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d} \xrightarrow{\mathcal{D}([0,1]^d)} Y(t), \quad (5.1.2)$$

où Y est un champ aléatoire non dégénéré mesurable.

Remarque 22. L'hypothèse **CM1** est classique en courte mémoire, **CM2** est une hypothèse technique et **CM3** est vérifiée dans toutes les situations de faible dépendance étudiées jusqu'à présent (voir la partie 1.3.1).

Remarque 23. Il n'existe aucun exemple de champ à longue mémoire en dimension $d = 2$ ne vérifiant pas **LM**. La partie 4.4 du chapitre 2 donne des conditions très générales sous lesquelles **LM** est vérifiée.

Pour procéder au test, on utilise la statistique de variance renormalisée nommée également V/S, généralisation en dimension $d > 1$ de celle proposée par Giraitis et al. (2003) en dimension $d = 1$.

Introduisons dans un premier temps les notations. Soit, pour $j = (j_1, \dots, j_d)$,

$$S_j^* = \sum_{i_1=1}^{j_1} \dots \sum_{i_d=1}^{j_d} (X_{i_1, \dots, i_d} - \bar{X}_n),$$

où $\bar{X}_n = n^{-d} \sum_{j \in A_n} X_j$ avec $A_n = \{1, \dots, n\}^d$. Soit q un entier dans $[1, n]$. On prendra comme estimateur de σ^2 , défini en (5.1.1),

$$\hat{s}_n^2 = \sum_{j \in B_{q-1}} \omega_{q,j} \hat{r}(j), \quad (5.1.3)$$

où $B_q = \{-q, \dots, q\}^d$, où $\omega_{q,j} = \prod_{i=1}^d (1 - \frac{|j_i|}{q})$ sont des poids assurant la positivité de \hat{s}_n^2 (cf la remarque 24 ci-dessous) et avec

$$\hat{r}(j) = \frac{1}{n^d} \sum_{k_1=1}^{n-|j_1|} \dots \sum_{k_d=1}^{n-|j_d|} (X_{k_1, \dots, k_d} - \bar{X}_n) (X_{k_1+|j_1|, \dots, k_d+|j_d|} - \bar{X}_n).$$

La statistique V/S est finalement définie par

$$M_n = n^{-d} \frac{\widehat{Var}(S_j^*, j \in A_n)}{\hat{s}_n^2},$$

où $\widehat{Var}(S_j^*, j \in A_n) = n^{-d} \sum_{j \in A_n} (S_j^* - \bar{S}_n^*)^2$ ce qui donne en développant

$$M_n = \frac{n^{-2d}}{\hat{s}_n^2} \left[\sum_{j \in A_n} S_j^{*2} - n^{-d} \left(\sum_{j \in A_n} S_j^* \right)^2 \right]. \quad (5.1.4)$$

Remarque 24. Il est à noter que $\hat{s}_n^2 = \hat{f}_q(0)$ où \hat{f}_q est l'estimateur de la densité spectrale de X à l'aide des fenêtres de Bartlett (cf par exemple Brockwell et Davis (1991)) i.e.

$$\hat{f}_q(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{j \in B_{q-1}} \omega_{q,j} \hat{r}(j) e^{-i\langle j, \lambda \rangle}.$$

Soit $I_n(\nu) = n^{-d} \left| \sum_{j \in A_n} (X_j - \bar{X}_n) e^{-i\langle j, \nu \rangle} \right|^2$ le périodogramme de X . En notant $E = [-\pi, \pi]^d$, comme $\hat{r}(j) = (2\pi)^{-d} \int_E e^{i\langle j, \lambda \rangle} I_n(\nu) d\nu$,

$$\hat{f}_q(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_E I_n(\nu) \prod_{i=1}^d \frac{1}{2\pi q} \frac{\sin^2 q(\lambda_i - \nu_i)/2}{\sin^2(\lambda_i - \nu_i)/2} d\nu.$$

Donc \hat{f}_q est toujours positif et \hat{s}_n^2 également.

5.2 Comportement asymptotique de M_n

Dans ce qui suit, l'entier q intervenant dans la définition 5.1.3 est en réalité une fonction q_n de n . Pour alléger les notations, l'indice n sera parfois omis au profit de la notation $q_n = q$. Les deux propositions suivantes établissent la consistance du test sous l'hypothèse nulle **CM** et sous l'hypothèse alternative **LM** dès que la suite q_n est choisie convenablement.

Proposition 10. *Sous l'hypothèse **CM** et en choisissant q_n tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n/n = 0$, on a*

$$M_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_{[0,1]^d} \left(B(t) - \left(\prod_{i=1}^d t_i \right) B(1) \right)^2 dt - \left[\int_{[0,1]^d} \left(B(t) - \left(\prod_{i=1}^d t_i \right) B(1) \right) dt \right]^2, \quad (5.2.1)$$

où B est le drap brownien standard sur $[0, 1]^d$.

Démonstration. On remarque que si $\frac{k}{n} \leq t_1 < \frac{k+1}{n}$, alors $S^*([nt_1] + 1, \dots, [nt_d] + 1) = S^*(k + 1, [nt_2] + 1, \dots, [nt_d] + 1)$. Ainsi

$$n^{-d} \sum_{j \in A_n} S_j^* = \int_{[0,1]^d} S^*([nt_1] + 1, \dots, [nt_d] + 1) dt.$$

La même égalité est vraie en remplaçant S^* par S^{*2} et la représentation (5.1.4) de M_n devient

$$M_n = \frac{n^{-d}}{\hat{s}_n^2} \left[\int_{[0,1]^d} S^{*2}([nt_1] + 1, \dots, [nt_d] + 1) dt - \left(\int_{[0,1]^d} S^*([nt_1] + 1, \dots, [nt_d] + 1) dt \right)^2 \right].$$

Posons $S_n(t) = S_n(t_1, \dots, t_d) = n^{-d/2} \sum_{k_1=1}^{[nt_1]} \dots \sum_{k_d=1}^{[nt_d]} X_{k_1, \dots, k_d}$, alors

$$M_n = \frac{1}{\hat{s}_n^2} \left[\int_{[0,1]^d} \left(S_n(t) - \prod_{i=1}^d \frac{[nt_i] + 1}{n} S_n(1) \right)^2 dt - \left(\int_{[0,1]^d} S_n(t) - \prod_{i=1}^d \frac{[nt_i] + 1}{n} S_n(1) dt \right)^2 \right]. \quad (5.2.2)$$

Ainsi $\hat{s}_n^2 M_n$ s'écrit comme l'action sur la fonction $S_n(\cdot)$ d'une fonctionnelle continue. La convergence vérifiée en **CM3** et l'utilisation du théorème de continuité nous donne la convergence en loi de $\frac{\hat{s}_n^2}{\sigma^2} M_n$ vers la limite annoncée en (5.2.1). Il suffit pour conclure d'utiliser la convergence en probabilité de \hat{s}_n^2 vers σ^2 établie dans le lemme suivant

Lemme 17. *Sous les hypothèses de la Proposition 10,*

$$\hat{s}_n^2 \xrightarrow{P} \sigma^2.$$

La démonstration du lemme 17 est donnée dans la partie 5.4; on y remarque qu'en fait la condition **CM3** est inutile pour prouver le lemme 19. \square

Proposition 11. *Sous l'hypothèse **LM** et en choisissant q_n tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty$ et pour tout $\delta > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n/n^\delta = 0$, on a*

$$M_n \xrightarrow{P} \infty.$$

Démonstration. D'après l'écriture (5.2.2) de M_n , on peut utiliser la convergence (5.1.2) et le théorème de continuité pour obtenir la convergence suivante :

$$\hat{s}_n^2 \frac{n^d}{d_n^2} M_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_{[0,1]^d} \left(Y(t) - \left(\prod_{i=1}^d t_i \right) Y(1) \right)^2 dt - \left(\int_{[0,1]^d} Y(t) - \left(\prod_{i=1}^d t_i \right) Y(1) dt \right)^2.$$

On utilise enfin le lemme suivant :

Lemme 18. *Sous les hypothèses de la Proposition 11,*

$$\frac{n^d}{d_n^2} \hat{s}_n^2 \xrightarrow{P} 0,$$

lorsque $n \rightarrow \infty$.

La démonstration du lemme 18 est donnée dans la partie 5.4. \square

La condition sur la vitesse de divergence de q imposée dans la Proposition 11 n'est pas celle que l'on rencontre dans les travaux équivalents en dimension $d = 1$ (comme par exemple dans Giraitis et al. (2003) ou dans Giraitis et al. (2002)). Dans ces articles, la suite q est supposée vérifier les mêmes conditions de divergence sous l'hypothèse nulle et sous l'hypothèse alternative, c'est à dire $q \rightarrow \infty$ et $q/n \rightarrow 0$. En pratique, la suite q est à choisir en fonction de n et il n'est pas plus contraignant de lui imposer les conditions de divergence présentes dans la Proposition 11 que celles présentes dans la Proposition 10. Nous montrons néanmoins qu'en se plaçant sous l'hypothèse alternative **LM'** suivante, nous retrouvons les hypothèses sur q de la Proposition 10. Cela montre que les hypothèses sur q imposées dans la Proposition 11 ne semblent pas témoigner d'une spécificité due à la dimension. Nous nous focalisons pour cela sur des modèles de champs à longue mémoire plus particuliers que dans **LM** :

LM' : X est un champ aléatoire centré, admettant une densité spectrale et vérifiant une des deux hypothèses suivantes

- (i) Sa densité spectrale f est homogène de degré $2\alpha < 0$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \prod_{i=1}^d [1 \wedge \lambda_i^{-2}] d\lambda < \infty$$

et **LM** est vérifiée avec $d_n = n^{d/2-\alpha}$.

(ii) En dimension $d \leq 2$, la densité spectrale de $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ est équivalente en 0 à une fonction homogène \tilde{f} de degré $2\alpha < 0$ garantissant $\int_E \tilde{f}(x) dx < \infty$. On suppose de plus **LM** avec $d_n = n^{d/2-\alpha}$.

Remarque 25. Les hypothèses de longue mémoire **LM'** sont vérifiées pour les champs obtenus par filtrage considérés dans le chapitre 2 (voir les Théorèmes 15 et 17).

Proposition 12. *Sous l'hypothèse **LM'** et en choisissant q fonction de n tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} q = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} q/n = 0$, on a*

$$M_n \xrightarrow{P} \infty.$$

Démonstration. La démonstration est identique à celle de la Proposition 11. Elle repose sur le lemme suivant.

Lemme 19. *Sous l'hypothèse **LM'**, en choisissant q fonction de n tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} q = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} q/n = 0$, on a*

$$\frac{n^d}{d_n^2} \hat{\xi}_n^2 \xrightarrow{P} 0,$$

lorsque $n \rightarrow \infty$.

La démonstration de ce lemme est donnée dans la partie 5.4. □

5.3 Simulations en dimension $d = 2$

Nous simulons dans un premier temps la loi asymptotique de M_n sous l'hypothèse nulle. D'après la Proposition 10 il s'agit de la loi de

$$\int_{[0,1]^2} \left(B(t) - \left(\prod_{i=1}^2 t_i \right) B(1) \right)^2 dt - \left[\int_{[0,1]^2} \left(B(t) - \left(\prod_{i=1}^2 t_i \right) B(1) \right) dt \right]^2, \quad (5.3.1)$$

où B est le drap brownien standard sur $[0, 1]^2$. L'expression (5.3.1) se réécrit après développement

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^2} B(t_1, t_2)^2 dt_1 dt_2 - 2B(1, 1) \int_{[0,1]^2} t_1 t_2 B(t_1, t_2) dt_1 dt_2 - \left(\int_{[0,1]^2} B(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right)^2 \\ & \quad + \frac{B(1, 1)}{2} \int_{[0,1]^2} B(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \frac{7}{144} B(1, 1)^2. \end{aligned}$$

Pour simuler une réalisation suivant cette loi, nous approchons chaque intégrale par une somme de Riemann

$$\int_{[0,1]^2} B(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \approx \frac{1}{n^2} \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n B\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right),$$

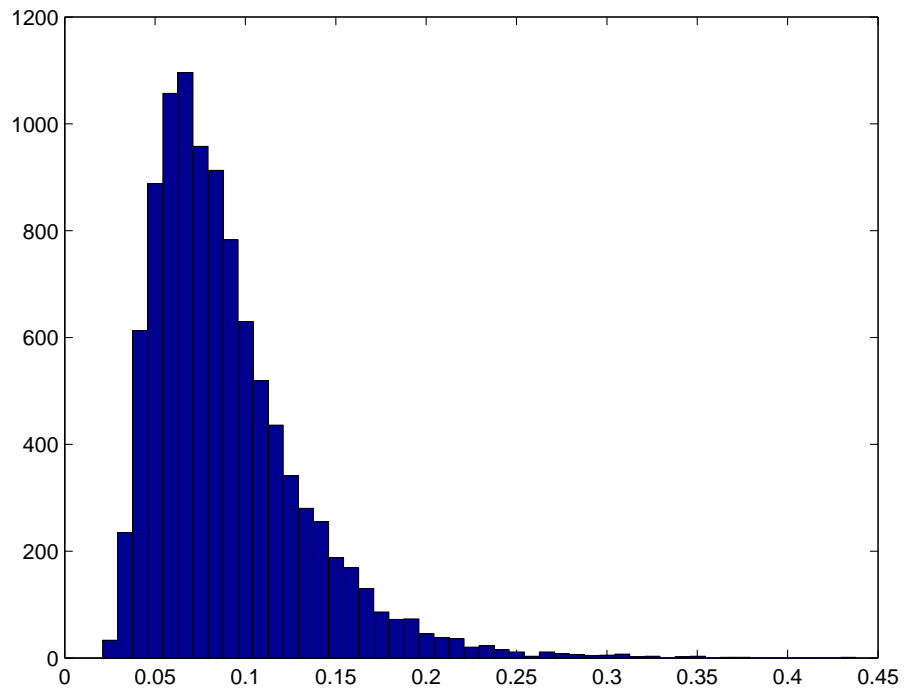
$$\int_{|[0,1]^2} B(t_1, t_2)^2 dt_1 dt_2 \approx \frac{1}{n^2} \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n B\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right)^2,$$

$$\int_{|[0,1]^2} t_1 t_2 B(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \approx \frac{1}{n^2} \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \frac{k_1}{n} \frac{k_2}{n} B\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right);$$

et, étant donné une réalisation d'un bruit blanc gaussien $(\varepsilon_j)_{j \in \mathbb{Z}^2}$, une réalisation de $(B(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}))_{1 \leq k_1, k_2 \leq n}$ est donnée par

$$B\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} \varepsilon_{j_1, j_2}, \quad \forall (k_1, k_2) \in \{1, \dots, n\}^2.$$

Nous avons choisi $n = 7000$ dans les approximations précédentes et 10 000 réalisations de la loi (5.3.1) ont alors été tirées. L'histogramme de l'échantillon résultant est le suivant :



A partir de l'échantillon, nous relevons les statistiques suivantes :

m	v	$c_{90\%}$	$c_{95\%}$
0,0897	0,0018	0,1448	0,1692

où m représente la moyenne, v la variance empirique, $c_{90\%}$ et $c_{95\%}$ les quantiles d'ordre respectifs 90% et 95%.

Les simulations qui suivent ont pour objectif d'évaluer la qualité du test dans différentes situations de dépendance. Sous l'hypothèse alternative, les champs fortement dépendants sont simulés soit par filtrage soit par agrégation conformément aux modèles présentés dans le chapitre 2. Le temps de calcul nécessaire à ces simulations est malheureusement trop long pour considérer de gros échantillons. Nous restreignons à des champs de taille 50×50 . Nos simulations sont donc insuffisantes à une évaluation convenable du test ; elles soulignent néanmoins un lien étroit entre sa puissance et la structure de forte dépendance du champ sous l'alternative.

5.3.1 Choix de q

A n fixé, le choix de q intervenant dans la définition de M_n est problématique. Nous décidons de le choisir en fonction de la qualité du test sous l'hypothèse nulle. Plus précisément, nous retenons le q pour lequel la loi de M_n sous différentes situations de faible dépendance est la plus proche possible de la loi asymptotique (5.3.1).

Nous avons calculé M_n pour $n = 50$ et pour différentes valeurs de q sur 10000 champs i.i.d gaussiens. En notant $\overline{M_n}$ la moyenne de l'échantillon résultant, \hat{s}_n^2 sa variance et $\hat{c}_{95\%}$ son quantile d'ordre 95%, nous obtenons :

	$q = 4$	$q = 6$	$q = 8$	$q = 10$	$q = 12$	$q = 14$
$\overline{M_n}$	0,0919	0,0923	0,0929	0,0939	0,0953	0,0970
\hat{s}_n^2	0,0016	0,0015	0,0013	0,0011	0,0010	0,0009
$\hat{c}_{95\%}$	0,1720	0,1678	0,1644	0,1599	0,1566	0,1531

Le calcul de M_n sur 10000 réalisations d'un champ autorégressif de type produit suivant la représentation $(1 - 0.5L_1)(1 - 0.3L_2)X_{n_1, n_2} = \varepsilon_{n_1, n_2}$ donne :

	$q = 6$	$q = 8$	$q = 10$	$q = 12$	$q = 14$
$\overline{M_n}$	0,1300	0,1157	0,1087	0,1051	0,1035
\hat{s}_n^2	0,0035	0,0024	0,0018	0,0015	0,0012
$\hat{c}_{95\%}$	0,2464	0,2133	0,1922	0,1784	0,1697

Au vu des résultats précédents, nous choisissons de retenir $q = 8$ pour $n = 50$, ce qui semble un compromis acceptable entre les performances relevées dans le cas d'un champ i.i.d et dans le cas du champ autorégressif précédent.

Remarque 26. La différence notable entre les répartitions empiriques rencontrées ci-dessus et la loi asymptotique (5.3.1) confirme l'insuffisance de la taille de nos échantillons pour une évaluation correcte du test.

5.3.2 Simulations sous différentes alternatives

Nous implémentons le test sur différents champs aléatoires à longue mémoire provenant de modèles présentées dans le chapitre 2. Tous les champs simulés sont gaussiens de taille 50×50 . Le calcul de M_n se fait avec le choix $q = 8$.

Nous avons simulé dans un premier temps des champs à longue mémoire de type produit semblables à ceux présentés dans l'exemple 1 de la partie 2.2.2 où nous avons choisi g_a et g_b toutes deux proportionnelles à $(1 - x)^\gamma$ et $N = 1000$. L'implémentation du test sur 1000 réalisations de ces champs conduit à l'estimation de la puissance \hat{p} suivante :

γ	0, 25	0, 5	0, 75
\hat{p}	81%	75, 4%	62, 4%

La puissance du test est bonne. Elle se dégrade comme attendu lorsque γ croît car la forte dépendance est alors de moins en moins prononcée.

Nous avons ensuite implémenté le test sur 1000 réalisations d'un champ à longue mémoire isotrope construit comme dans l'exemple 7 de la partie 2.1.2 avec $\theta = 0$, $e = 1$ et α valant -0.48, -0.35 puis -0.2. Les résultats sont les suivants :

α	-0, 48	-0, 35	-0, 2
\hat{p}	75%	58, 1%	32, 7%

Lorsque la forte dépendance est isotrope, la puissance du test semble moins bonne que dans le cas d'une longue mémoire de type produit. La puissance reste cependant acceptable lorsque la forte dépendance est prononcée (lorsque $|\alpha|$ est élevé) mais elle décroît lorsque $|\alpha|$ décroît.

Enfin, suivant la procédure d'agrégation de l'exemple 2 de la partie 2.2.2 où nous avons choisi $k = 1$, $N = 1000$ et g proportionnelle à $(1 - x)^\gamma$, nous avons simulé des champs à longue mémoire non-isotrope dont la forte dépendance n'a lieu que dans une direction. L'implémentation du test sur 1000 réalisations donne :

γ	0, 25	0, 5	0, 75
\hat{p}	27%	27%	24, 5%

Dans ce cas, la puissance est assez faible. Cela peut s'expliquer par la petite taille de l'échantillon qui ne permet pas de capter la forte dépendance, présente uniquement dans une seule direction.

5.4 Preuve des lemmes

Preuve du lemme 17

La démonstration est une adaptation de celle de Giraitis et al. (2003) au cadre des champs.

En notant

$$\tilde{r}_j = \frac{1}{n^d} \sum_{k_1=1}^{n-|j_1|} \cdots \sum_{k_d=1}^{n-|j_d|} (X_{k_1, \dots, k_d} - \mu) (X_{k_1+|j_1|, \dots, k_d+|j_d|} - \mu)$$

où μ est l'espérance de X , on décompose \hat{s}_n^2 de la façon suivante

$$\hat{s}_n^2 = \sum_{j \in B_{q-1}} \omega_{q,j} \tilde{r}_j + \sum_{j \in B_{q-1}} \omega_{q,j} (\hat{r}_j - \tilde{r}_j) := u_n + v_n, \quad (5.4.1)$$

où u_n représente la première somme et v_n la seconde. Nous allons montrer dans un premier temps que $E(|v_n|) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ puis que $u_n \rightarrow \sigma^2$ en probabilité.

Quelques manipulations conduisent à

$$\hat{r}_j - \tilde{r}_j = \prod_{i=1}^d \left(1 - \frac{|j_i|}{n}\right) (\bar{X}_n - \mu)^2 - n^{-d} (\bar{X}_n - \mu) \sum_{k_1=1}^{n-|j_1|} \cdots \sum_{k_d=1}^{n-|j_d|} ((X_k - \mu) + (X_{k+|j|} - \mu)).$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned} E(|v_n|) &\leq \sum_{j \in B_{q-1}} E |\hat{r}_j - \tilde{r}_j| \\ &\leq \sum_{j \in B_{q-1}} \left\{ E (\bar{X}_n - \mu)^2 + n^{-d} \sqrt{E (\bar{X}_n - \mu)^2} \left[\sqrt{E \left(\sum_{k_1=1}^{n-|j_1|} \cdots \sum_{k_d=1}^{n-|j_d|} (X_k - \mu) \right)^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{E \left(\sum_{k_1=|j_1|}^n \cdots \sum_{k_d=|j_d|}^n (X_k - \mu) \right)^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse **CM1**, si $r_i < s_i$ pour tout $i = 1 \dots d$,

$$E \left(\sum_{i_1=r_1}^{s_1} \cdots \sum_{i_d=r_d}^{s_d} (X_i - \mu) \right)^2 = \sum_{i_1, i'_1=r_1}^{s_1} \cdots \sum_{i_d, i'_d=r_d}^{s_d} r(i - i') \leq c \prod_{i=1}^d (s_i - r_i),$$

où c est une constante strictement positive. Ainsi

$$E(|v_n|) \leq c \sum_{j \in B_{q-1}} \left(n^{-d} + 2n^{-d} n^{-d/2} \prod_{i=1}^d \sqrt{n - |j_i|} \right) \leq cq^d n^{-d}$$

et la convergence vers 0 du terme de droite est assurée dès que q/n tend vers 0.

Montrons maintenant que u_n , définie en (5.4.1), converge en probabilité vers σ^2 lorsque n tend vers l'infini. On remarque tout d'abord que

$$E(u_n) = \sum_{j \in B_{q-1}} \omega_{q,j} \left(\prod_{i=1}^d \frac{n - |j_i|}{n} \right) r(j) \rightarrow \sigma^2;$$

il suffit pour le voir de séparer la somme en deux selon que, pour $i = 1 \dots d$, $|j_i| \leq \lfloor \sqrt{q} \rfloor$ ou $|j_i| > \lfloor \sqrt{q} \rfloor$.

D'après (5.4.1), il suffit donc, pour prouver que \hat{s}_n^2 converge en probabilité vers σ^2 , de montrer que $E(u_n - E(u_n))^2$ converge vers 0.

$$\begin{aligned} E(u_n - E(u_n))^2 &= E \left(\sum_{j \in B_{q-1}} \omega_{q,j} [\tilde{r}(j) - E(\tilde{r}(j))] \right)^2 \\ &= \sum_{j, j' \in B_{q-1}^2} \omega_{q,j} \omega_{q,j'} \text{cov}(\tilde{r}(j), \tilde{r}(j')) \\ &\leq \sum_{j, j' \in B_{q-1}^2} |\text{cov}(\tilde{r}(j), \tilde{r}(j'))| \\ &\leq \frac{1}{n^{2d}} \sum_{j, j' \in B_{q-1}^2} \sum_{k, k' \in A_n^2} |\text{cov}((X_k - \mu)(X_{k+|j|} - \mu), (X_{k'} - \mu)(X_{k'+|j'|} - \mu))|. \end{aligned}$$

Or, d'après la définition des cumulants,

$$\begin{aligned} &\text{cov}((X_k - \mu)(X_{k+|j|} - \mu), (X_{k'} - \mu)(X_{k'+|j'|} - \mu)) = \\ &\text{cum}(X_k, X_{k+|j|}, X_{k'}, X_{k'+|j'|}) + r(k - k')r(k' - k + |j'| - |j|) + r(k - k' - |j'|)r(k - k' + |j|). \end{aligned}$$

D'une part, en utilisant **CM2**,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n^{2d}} \sum_{j, j' \in B_{q-1}^2} \sum_{k, k' \in A_n^2} |\text{cum}(X_k, X_{k+|j|}, X_{k'}, X_{k'+|j'|})| \\ &\leq \frac{1}{n^{2d}} \sum_{j \in B_{q-1}} \sum_{k \in A_n} \sum_{i, i' \in B_{2n}} |\text{cum}(X_0, X_{|j|}, X_i, X_{i'})| \\ &\leq \frac{1}{n^d} \sum_{j \in B_{q-1}} \sum_{i, i' \in B_{2n}} |c_4(|j|, i, i')| \\ &\leq c \left(\frac{q}{n} \right)^d, \end{aligned}$$

où c est une constante strictement positive.

D'autre part

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n^{2d}} \sum_{j, j' \in B_{q-1}^2} \sum_{k, k' \in A_n^2} |r(k - k')r(k' - k + |j'| - |j|) + r(k - k' - |j'|)r(k - k' + |j|)| \\ &\leq \frac{1}{n^{2d}} \sum_{j \in B_{q-1}} \sum_{k \in A_n} \sum_{i, i' \in B_{2n}} 2|r(i)r(i')| \\ &\leq c \left(\frac{q}{n} \right)^d, \end{aligned}$$

où c est une constante strictement positive.

Finalement $E(u_n - E(u_n))^2$ converge vers 0 dès que $q/n \rightarrow 0$ et le lemme est montré.

Preuve du lemme 18

On part de la même décomposition qu'en (5.4.1). On remarque que $E(|v_n|) < cq^d$ de façon trivial. D'autre part

$$\begin{aligned} E(u_n) &= \sum_{j \in B_{q-1}} r(j) \prod_{k=1}^d \left(1 - \frac{|j_k|}{q}\right) \left(1 - \frac{|j_k|}{n}\right) \\ &= \sum_{j \in B_{q-1}} \int_E e^{i\langle j, \lambda \rangle} f(\lambda) d\lambda \prod_{k=1}^d \left(1 - \frac{|j_k|}{q}\right) \left(1 - \frac{|j_k|}{n}\right) \\ &= \int_E f(\lambda) \prod_{k=1}^d \sum_{j=-q+1}^{q-1} e^{ij\lambda_k} \left(1 - \frac{|j|}{q}\right) \left(1 - \frac{|j|}{n}\right) d\lambda. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E(\hat{s}_n^2) \leq cq^d,$$

et donc

$$\frac{n^d}{d_n^2} E(\hat{s}_n^2) \leq cq^d \frac{n^d}{n^{2\gamma} L(n)}$$

ce qui montre le lemme 18 puisque $qn^{-\delta} \rightarrow 0$ pour tout $\delta > 0$.

Preuve du lemme 19

Nous devons montrer que $n^{2\alpha} \hat{s}_n^2$ converge vers 0 en probabilité.

$$\begin{aligned} E(\hat{s}_n^2) &= \sum_{j \in B_{q-1}} \omega_{q,j} E(\hat{r}_j) \\ &= \sum_{j \in B_{q-1}} r(j) \prod_{k=1}^d \left(1 - \frac{|j_k|}{q}\right) \left(1 - \frac{|j_k|}{n}\right) \\ &= \sum_{j \in B_{q-1}} \int_E e^{i\langle j, \lambda \rangle} f(\lambda) d\lambda \prod_{k=1}^d \left(1 - \frac{|j_k|}{q}\right) \left(1 - \frac{|j_k|}{n}\right) \\ &= \int_E f(\lambda) \prod_{k=1}^d \sum_{j=-q+1}^{q-1} e^{ij\lambda_k} \left(1 - \frac{|j|}{q}\right) \left(1 - \frac{|j|}{n}\right) d\lambda. \end{aligned}$$

Le lemme suivant donne quelques propriétés du noyau

$$K_n(x) = \sum_{j=-q+1}^{q-1} e^{ijx} \left(1 - \frac{|j|}{q}\right) \left(1 - \frac{|j|}{n}\right), \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Lemme 20. *Pour tout $x \in [-\pi, \pi]$,*

$$K_n(x) = K_{1,n}(x) + K_{2,n}(x) \tag{5.4.2}$$

où

$$K_{1,n}(x) = \frac{n - q \sin^2(qx/2)}{nq \sin^2(x/2)},$$

$$K_{2,n}(x) = \frac{1}{\sin^4(x/2)} \left(\frac{1}{n} \sin^2(x/2) - \frac{1}{4qn} \sin qx \sin x \right).$$

On a de plus les propriétés suivantes.

(i) $\sup_{x \in [-\pi, \pi]} K_{1,n}(x) \leq cq$ et $\sup_{|x| > \delta} K_{1,n}(x) \leq cq^{-1}$, où c est une constante strictement positive indépendante de n .

(ii) $\forall x \in [-q\pi, q\pi], K_{1,n}(x/q) \leq cq(1 \wedge x^{-2})$.

(iii) $\sup_{x \in [-\pi, \pi]} K_{2,n}(x) \leq c \frac{q^2}{n}$ et $\sup_{|x| > \delta} K_{2,n}(x) \leq cn^{-1}$, où c est une constante strictement positive indépendante de n .

(iv) $\forall x \in [-q\pi, q\pi], K_{2,n}(x/q) \leq c \frac{q^2}{n} (1 \wedge x^{-2})$.

Démonstration du lemme 20.

$$K_n(x) = \sum_{j=-q+1}^{q-1} e^{ijx} \left(1 - \frac{|j|}{q}\right) \left(1 - \frac{|j|}{n}\right)$$

$$= \sum_{j=-q+1}^{q-1} e^{ijx} - 2 \frac{n+q}{nq} \sum_{j=1}^{q-1} j \cos(jx) + \frac{2}{nq} \sum_{j=1}^{q-1} j^2 \cos(jx). \tag{5.4.3}$$

Le développement de $\sum_{j=1}^{q-1} e^{ijx}$ ainsi que celui de ses dérivées par rapport à x nous donne

$$\sum_{j=1}^{q-1} j \cos(jx) = \frac{q \cos(q-1)x - (q-1) \cos qx - 1}{4 \sin^2(x/2)},$$

$$\sum_{j=1}^{q-1} j^2 \cos(jx) =$$

$$\frac{(q-1)^2 \cos(q+1)x - q(3q-4) \cos qx + (q-1)(3q+1) \cos(q-1)x - q^2 \cos(q-2)x}{16 \sin^4(x/2)}.$$

On peut remanier ces expressions à l'aide de formules trigonométriques pour obtenir

$$\begin{aligned}\sum_{j=-q+1}^{q-1} e^{ijx} &= \frac{\sin(q-1/2)x}{\sin(x/2)}, \\ \sum_{j=1}^{q-1} j \cos(jx) &= \frac{q \sin(q-1/2)x}{2 \sin(x/2)} - \frac{\sin^2(qx/2)}{2 \sin^2(x/2)}, \\ \sum_{j=1}^{q-1} j^2 \cos(jx) &= \frac{q^2 \sin(q-1/2)x}{2 \sin(x/2)} + \frac{q \cos qx}{2 \sin^2(x/2)} - \frac{\sin qx \sin x}{8 \sin^4(x/2)}.\end{aligned}$$

Les trois expressions précédentes, utilisées dans (5.4.3), nous donnent (5.4.2).

A une constante multiplicative près, $K_{1,n}$ est toujours inférieur au noyau de Fejer F_q ce qui nous donne les propriétés (i) et (ii). Pour le (iii), le développement en série entière de $K_{2,n}(x)$ pour $|x| < \pi/q$ donne

$$K_{2,n}(x) = \frac{2q^2}{3n} \left(1 + \frac{1}{2q^2}\right) - \frac{q^4}{30n} \left(1 - \frac{1}{q^4}\right) x^2 + O(x^4).$$

Ainsi $K_{2,n}(x) \leq c \frac{q^2}{n}$ pour tout $|x| < \pi/q$ où c est une constante strictement positive. Par ailleurs en écrivant $K_{2,n}(x)$ sous la forme suivante

$$K_{2,n}(x) = \frac{4}{nx^2} \left(\frac{(x/2)^2}{\sin^2(x/2)} - \cos(x/2) \frac{\sin qx}{qx} \frac{(x/2)^3}{\sin^3(x/2)} \right), \quad (5.4.4)$$

on voit que $K_{2,n}(x) \leq c \frac{q^2}{n}$ pour $|x| \geq \pi/q$ où c est une constante strictement positive. Maintenant si $|x| \geq \delta$, l'écriture (5.4.4) nous montre directement que $K_{2,n} \leq cn^{-1}$ où c ne dépend que de δ . Le (iii) est ainsi montré.

Enfin d'après (5.4.4), il est clair que $K_{2,n}(x/q) \leq c \frac{q^2}{n} x^{-2}$ de telle sorte que, grâce à (iii), on peut trouver une constante strictement positive c telle que pour tout x dans $[-q\pi, q\pi]$, $K_{2,n}(x/q) \leq c \frac{q^2}{n} (1 \wedge x^{-2})$. \square

Nous utilisons à présent les propriétés de K_n pour étudier

$$E(\hat{s}_n^2) = \int_E f(\lambda) \prod_{k=1}^d \sum_{j=-q+1}^{q-1} e^{ij\lambda_k} \left(1 - \frac{|j|}{q}\right) \left(1 - \frac{|j|}{n}\right) d\lambda \quad (5.4.5)$$

lorsque le champ X vérifie **LM'**.

Supposons dans un premier temps que X vérifie l'hypothèse (i) de **LM'**. L'expression (5.4.5) s'écrit

$$\begin{aligned}E(\hat{s}_n^2) &= \int_E f(\lambda) \prod_{k=1}^d (K_{1,n}(\lambda_k) + K_{2,n}(\lambda_k)) d\lambda \\ &= \sum_{k=0}^d \sum_{i \in C_d^k} \int_E f(\lambda) \prod_{j=1}^k K_{1,n}(\lambda_{i_j}) \prod_{j=k+1}^d K_{2,n}(\lambda_{i_j}) d\lambda,\end{aligned} \quad (5.4.6)$$

où C_d^k est l'ensemble des vecteurs (i_1, \dots, i_d) dont les k premiers éléments (i_1, \dots, i_k) sont les combinaisons de k éléments dans $\{1, \dots, d\}$ et les $n - k$ autres éléments sont le complémentaire de (i_1, \dots, i_k) dans $(1, \dots, d)$. On convient que pour toute suite u_j $\prod_{j=1}^0 u_j = 1$ et $\prod_{j=d+1}^d u_j = 1$.

Un changement de variables et l'homogénéité de f donnent

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^d \sum_{i \in C_d^k} \int_E f(\lambda) \prod_{j=1}^k K_{1,n}(\lambda_{i_j}) \prod_{j=k+1}^d K_{2,n}(\lambda_{i_j}) d\lambda \\ = \sum_{k=0}^d \sum_{i \in C_d^k} q^{-2\alpha} \int_{qE} f(\lambda) \prod_{j=1}^k \frac{1}{q} K_{1,n} \left(\frac{\lambda_{i_j}}{q} \right) \prod_{j=k+1}^d \frac{1}{q} K_{2,n} \left(\frac{\lambda_{i_j}}{q} \right) d\lambda. \end{aligned}$$

On utilise à présent le (ii) et le (iv) du lemme 20 et

$$E(\hat{s}_n^2) \leq cq^{-2\alpha} \sum_{k=0}^d \sum_{i \in C_d^k} \prod_{j=k+1}^d \frac{q}{n} \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda) \prod_{j=1}^d [1 \wedge \lambda_j^{-2}] d\lambda. \quad (5.4.7)$$

Comme $q/n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, on obtient $E(\hat{s}_n^2) = o(n^{-2\alpha})$, le résultat recherché.

Supposons à présent que X vérifie l'hypothèse (ii) de **LM'**. On montre le résultat pour $d = 2$, le cas $d = 1$ s'en déduit facilement.

$$\begin{aligned} E(\hat{s}_n^2) = \int_E (f(\lambda) - \tilde{f}(\lambda)) \prod_{k=1}^2 (K_{1,n}(\lambda_k) + K_{2,n}(\lambda_k)) d\lambda \\ + \int_E \tilde{f}(\lambda) \prod_{k=1}^2 (K_{1,n}(\lambda_k) + K_{2,n}(\lambda_k)) d\lambda. \quad (5.4.8) \end{aligned}$$

La dernière intégrale est un $o(n^{-2\alpha})$. En effet, le raisonnement conduisant à (5.4.7) peut être réitéré car \tilde{f} est homogène et vérifie nécessairement $\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(\lambda) \prod_{i=1}^2 [1 \wedge \lambda_i^{-2}] d\lambda < \infty$ lorsque $d \leq 2$ (voir le lemme 8 du chapitre 3).

En notant $\|\cdot\|$ la norme sup dans \mathbb{R}^2 , la première intégrale de (5.4.8) se décompose en

$$\begin{aligned} \int_{\|\lambda\| < \delta} (f(\lambda) - \tilde{f}(\lambda)) \prod_{k=1}^2 (K_{1,n}(\lambda_k) + K_{2,n}(\lambda_k)) d\lambda \\ + \int_{\|\lambda\| > \delta} (f(\lambda) - \tilde{f}(\lambda)) \prod_{k=1}^2 (K_{1,n}(\lambda_k) + K_{2,n}(\lambda_k)) d\lambda. \quad (5.4.9) \end{aligned}$$

Puisque $f \sim \tilde{f}$ en 0, on peut choisir δ tel que

$$\int_{\|\lambda\| < \delta} (f(\lambda) - \tilde{f}(\lambda)) \prod_{k=1}^2 (K_{1,n}(\lambda_k) + K_{2,n}(\lambda_k)) d\lambda \leq \int_E \tilde{f}(\lambda) \prod_{k=1}^d (K_{1,n}(\lambda_k) + K_{2,n}(\lambda_k)) d\lambda$$

qui est alors un $o(n^{-2\alpha})$. Il reste à traiter la dernière intégrale dans (5.4.9).

$$\begin{aligned} & \int_{|\lambda|>\delta} (f(\lambda) - \tilde{f}(\lambda)) \prod_{k=1}^2 (K_{1,n}(\lambda_k) + K_{2,n}(\lambda_k)) d\lambda \\ & \leq \int_{|\lambda_1|>\delta} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\lambda) - \tilde{f}(\lambda)) \prod_{k=1}^2 (K_{1,n}(\lambda_k) + K_{2,n}(\lambda_k)) d\lambda_1 d\lambda_2 \\ & \quad + \int_{|\lambda_2|>\delta} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\lambda) - \tilde{f}(\lambda)) \prod_{k=1}^2 (K_{1,n}(\lambda_k) + K_{2,n}(\lambda_k)) d\lambda_2 d\lambda_1. \end{aligned}$$

Ces deux dernières intégrales se traitent de la même manière. Montrons par exemple que la première est un $o(1)$ donc à plus forte raison un $o(n^{-2\alpha})$. D'après les propriétés (i) et (iii) du lemme 20, on a pour n assez grand,

$$\begin{aligned} & \int_{|\lambda_1|>\delta} \int_{-\pi}^{\pi} (f(\lambda) - \tilde{f}(\lambda)) \prod_{k=1}^2 (K_{1,n}(\lambda_k) + K_{2,n}(\lambda_k)) d\lambda_1 d\lambda_2 \\ & \leq \frac{c}{q} \int_{-\pi}^{\pi} (K_{1,n}(\lambda_2) + K_{2,n}(\lambda_2)) \left(\int_{-\pi}^{\pi} (f(\lambda) - \tilde{f}(\lambda)) d\lambda_1 \right) d\lambda_2, \quad (5.4.10) \end{aligned}$$

où c est une constante strictement positive dépendant de δ . Soit $g(\lambda_2) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(\lambda) - \tilde{f}(\lambda)) d\lambda_1$. D'après le lemme 20, la fonction

$$\frac{1}{q} (K_{1,n}(\lambda_2) + K_{2,n}(\lambda_2)) g(\lambda_2)$$

est, à une constante près, uniformément bornée par g qui est intégrable sur $[-\pi, \pi]$. De plus elle tend presque sûrement vers 0. Par application du théorème de convergence dominée le majorant dans (5.4.10) converge donc vers 0.

