

Décollement d'un film soumis à l'injection d'un fluide non-newtonien

Ce chapitre est consacré à l'écriture et la résolution de l'ensemble d'équations modélisant l'évolution d'un film élastique collé à un substrat parfaitement rigide dont l'interface est complètement remplie d'un fluide visqueux. Dans l'objectif d'écrire un modèle simple admettant des solutions pouvant s'exprimer explicitement, le retardement entre fronts de propagation du fluide et de la fissure est supposé nul. La section 2.1 sera consacrée à la formulation du problème, qui sera adimensionnée à la section 2.2. Il sera ensuite analysé en utilisant la méthode des développements asymptotiques (section 2.3), et enfin les résultats seront discutés (section 2.4).

Le modèle proposé dans ce chapitre prend cependant en compte les trois aspects principaux décrits dans le chapitre précédent, à savoir la réponse élastique du film soumis à l'injection du fluide, l'écoulement développé à l'interface et l'évolution de la région décollée, qui sera désormais nommée « fissure ». Celle-ci sera supposée infinie dans une direction, selon laquelle le problème est donc supposé invariant.

La formulation de l'ensemble des équations constituant le modèle peut alors se faire avec des fonctions dépendant d'une unique variable spatiale. Dans ce contexte la réponse élastique du film sera modélisée comme un fil simplement appuyé sur les extrémités de la région décollée [46]. L'écoulement sera modélisé

en supposant valable l'approximation de lubrification. Il sera donc décrit par l'équation de Reynolds, choisie pour modéliser la nature visqueuse du fluide qui sera adaptée à un comportement en loi de puissances [25]. Enfin, la propagation de la fissure sera traitée selon l'approche énergétique de la théorie de Griffith [24].

2.1 Formulation du problème

En considérant que la fissure est complètement remplie de fluide à chaque instant du temps, on peut décrire la géométrie du film à l'aide de la fonction $H(T, X)$ représentant la hauteur du film et du fluide à l'instant T . On considère aussi que le volume du fluide augmente en raison d'une injection de fluide à débit $Q(T)$ au centre de la fissure pour tout instant $T > 0$. Le problème est représenté sur la figure 2.1.

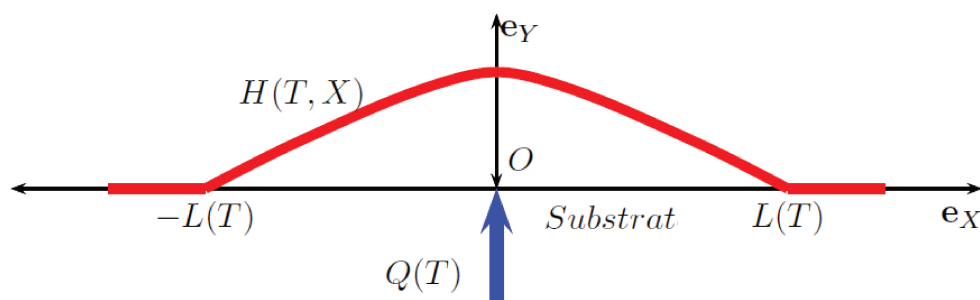


FIGURE 2.1 – Schéma représentant le problème.

Le problème consiste alors à trouver la hauteur $H(T, X, Z)$, la pression au sein de fluide $P(T, X, Z)$ et la demi-longueur de fissure $L(T)$ décrivant l'état du système à l'instant T soumis à l'action du chargement $Q(T)$, en considérant les conditions initiales $L(0) = L_r$ la longueur initiale de la fissure et $H(0, X) = H_r(X)$ la forme initiale du film contenant un volume initial de fluide $V_r = \int_{-L_r}^{L_r} H_r(X) dX$.

Dans les paragraphes suivants, on décrit la façon dont on modélise la réponse élastique du film, l'écoulement du fluide et la propagation de fissure, afin d'établir l'ensemble des équations modélisant le problème.

2.1.1 Film élastique

Le film collé au substrat est modélisé comme un fil flexible, décollé uniquement sur la région $] -L, L[$. La réponse élastique du film est alors déterminée à l'aide de l'équation d'équilibre du fil écrite sur cette région.

Si l'on suppose que l'écoulement de fluide développé à l'intérieur de la fissure transmet la pression du fluide sur le film comme une charge perpendiculaire $P(T, X)\mathbf{n}$ (avec \mathbf{n} le vecteur normal au fil), alors l'équation d'équilibre du fil s'écrit [46],

$$\frac{\partial(N\mathbf{t})}{\partial S} + P\mathbf{n} = 0, \quad (2.1)$$

avec, N l'effort normal dans le fil, S la coordonnée curviligne décrivant le fil et \mathbf{t}, \mathbf{n} les vecteurs tangent et normal au point de coordonnée S . Dans le cas d'un fil dont son déplacement vertical est décrite par la fonction $H(T, X)$, la courbure κ du fil est déterminé par la relation

$$\frac{d\mathbf{t}}{dS} = \kappa\mathbf{n},$$

soit

$$\kappa = \frac{\frac{\partial^2 H}{\partial^2 X}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)^2}}.$$

Alors, l'équation (2.1) donne

$$N\kappa + P = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial S} = 0,$$

d'où on conclut que l'effort normal est constant et positif le long du fil. La restriction sur la positivité est liée à la stabilité de la position du fil, résultant de l'équation d'équilibre précédent [46], et il est liée alors au choix de la modélisation du film comme un fil. Dans le cas d'un effort normal nul, les modèles d'arc ou de poutre résultent plus pertinents. De plus, l'équation d'équilibre s'écrit,

$$N \frac{\frac{\partial^2 H}{\partial^2 X}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)^2}} + P = 0, \quad \forall X \in] -L, L[.$$

Si on fait de plus l'hypothèse des petits déplacements, c'est à dire, on postule que $(\frac{\partial H}{\partial X})^2 \ll 1$, alors l'équation d'équilibre du film s'écrit

$$N \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} + P = 0, \quad \forall X \in]-L, L[. \quad (2.2)$$

Cette équation doit être accompagnée de deux conditions aux limites. On considère d'une part que le déplacement en pointe de fissure est nul à chaque instant du temps, alors on doit satisfaire

$$H(T, L(T)) = 0, \quad \forall T > 0. \quad (2.3)$$

D'autre part, si l'on considère que le chargement produit par le fluide (pression P) est symétrique par rapport à l'axe OY , alors on peut écrire la condition

$$\frac{\partial H}{\partial X}(T, 0) = 0, \quad \forall T, \quad (2.4)$$

et donc analyser l'équation (2.2) uniquement sur la région $]0, L(T)[$ (cf figure 2.2).

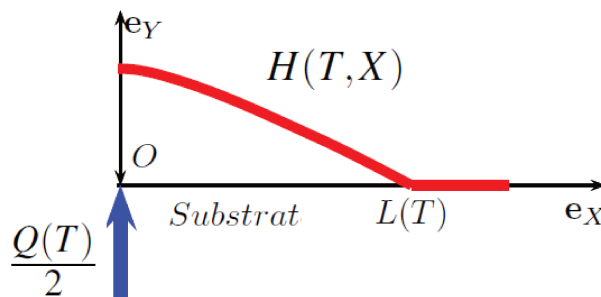


FIGURE 2.2 – Schéma représentant le problème sur la région $]0, L(T)[$.

2.1.2 Écoulement de fluide visqueux

Le fluide injecté engendre un écoulement dans la fissure qui peut être décrit de façon bidimensionnelle dans le plan OXY . En considérant valable l'hypothèse

de lubrification, les équations de Navier-Stokes modélisant l'écoulement peuvent être simplifiées et réduites à une version unidimensionnelle nommée équation de Reynolds. L'hypothèse de lubrification consiste à supposer que l'écoulement se développe dans un domaine mince, c'est-à-dire que l'une des dimensions est très petite devant l'autre. Dans la plupart des applications mentionnées au chapitre 1, on observe que la dimension liée à la hauteur de la fissure $H(T, X)$ est très petite par rapport à la longueur de la fissure $L(T)$. L'hypothèse de lubrification est alors applicable.

Le présent paragraphe est consacré à la simplification des équations de la mécanique des fluides qui en résulte. En considérant la nature visqueuse et incompressible du fluide, d'après Guyon [25], les équations de Navier-Stokes s'écrivent

$$\rho(\partial_T \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U}) + \nabla P - \nabla \tau = 0, \quad (2.5)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{U}) = 0, \quad (2.6)$$

avec $\mathbf{U} = U \mathbf{e}_X + W \mathbf{e}_Y$ le champ vitesse et τ le tenseur des contraintes de viscosité du fluide.

On considère de plus des conditions d'adhérence sur les frontières du domaine. Ainsi, sur la paroi inférieure, que l'on considère statique, le champ de vitesse doit satisfaire,

$$\mathbf{U}(Y = 0) = 0, \quad (2.7)$$

et sur la paroi supérieure, que l'on considère mobile, il doit satisfaire

$$\mathbf{U}(Y = H) = \frac{\partial H}{\partial T} \mathbf{e}_Y. \quad (2.8)$$

En rappelant que l'on considère un problème invariant dans la direction Z , l'équation d'incompressibilité (2.6) s'écrit comme

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial W}{\partial Y} = 0$$

d'où, en comparant les ordres de grandeur, on observe que $W \approx \frac{H_r}{L_r} U$, alors en considérant valable l'hypothèse de lubrification ($H_r \ll L_r$), on peut conclure

que la vitesse de l'écoulement est au premier ordre purement horizontal, soit $\mathbf{U} = U\mathbf{e}_X$. Si l'on considère de plus un écoulement stationnaire et entièrement développé, les équations de Navier-Stokes peuvent s'écrire comme

$$\frac{\partial P}{\partial X} - \frac{\partial \tau_{XY}}{\partial Y} = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial P}{\partial Y} - \frac{\partial \tau_{YY}}{\partial Y} = 0. \quad (2.10)$$

Il est de plus nécessaire de se donner une loi capable de décrire le comportement visqueux du fluide. On considère que le modèle de « loi de puissance » est le plus adapté pour modéliser le comportement des fluides comme le magma [12] ou la plus part des fluides utilisées dans la fracturation hydraulique [36]. Cette loi de comportement postule que le tenseur des contraintes est liée au champ vitesse à travers du taux de glissement, qui est définie comme $\dot{\gamma} = \nabla \mathbf{U} + (\nabla \mathbf{U})^T$. En rappelant que l'on considère un écoulement horizontal, on obtient que l'unique élément non nul du tenseur de taux de glissement est $\dot{\gamma}_{XY} = \frac{\partial U}{\partial Y}$, en conséquence le tenseur des contraintes visqueuses a aussi une unique élément non nul τ_{XY} . Alors, la « loi de puissance » peut s'écrire comme

$$\tau_{XY} = M \left| \frac{\partial U}{\partial Y} \right|^{n-1} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right), \quad (2.11)$$

où le paramètre M est nommé la consistance du fluide et $n \geq 0$ est l'indice d'écoulement. Ces deux paramètres du fluide servent à modéliser le comportement du fluide visqueux. Avec ce modèle et selon la valeur de n on peut décrire des fluides rhéoépaississant ($n > 1$), fluides newtoniens ($n = 1$), rhéofluidifiant ($n \in]0, 1[$) ou fluides parfaitement plastiques ($n = 0$) (voir le chapitre 4 du Guyon [25] pour description plus précise de ces types de fluides). Alors, d'après les équations réduites de Navier-Stokes (2.10), on a

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = \frac{\partial \tau_{YY}}{\partial Y} = 0,$$

et donc la pression P est constante en Y , ce qui permet d'obtenir le champ de vitesse U en fonction du gradient du champ de pression d'après l'équation (2.9)

en considérant les conditions d'adhérence $U(Y = 0) = U(Y = H) = 0$:

$$U = \frac{n}{n+1} \frac{1}{M^{1/n}} \frac{\partial P}{\partial X} \left| \frac{\partial P}{\partial X} \right|^{(1-n)/n} \left(\left| Y - \frac{H}{2} \right|^{(n+1)/n} - \left(\frac{H}{2} \right)^{(n+1)/n} \right). \quad (2.12)$$

D'autre part, en intégrant l'équation d'incompressibilité (2.6) par rapport à $Y \in [0, H]$, on obtient une relation liant l'évolution de la forme du film et le champ de vitesse du fluide qui s'écrit comme

$$\frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial \Phi}{\partial X} = 0, \quad \forall X \in [-L, L], \quad \forall T \geq 0, \quad (2.13)$$

avec $\Phi(T, X)$ le flux traversant une section transversal au point $X \in \Omega$, définie comme

$$\Phi = \int_0^H U dY.$$

En considérant la distribution de vitesse donnée par (2.12), le flux d'un écoulement de fluide non-newtonien modélisé par une loi de puissances sera,

$$\Phi(T, X) |\Phi(T, X)|^{n-1} = -\frac{1}{\mu'} H^{2n+1} \frac{\partial P}{\partial X}, \quad (2.14)$$

où $\mu' = 2M \left(\frac{2(2n+1)}{n} \right)^n$ est la viscosité apparente du fluide.

Les équations (2.13) et (2.14), d'inconnues $H(X, T)$ et $\Phi(X, T)$ définies pour $X \in [-L(T), L(T)]$ et $T \geq 0$, forment un système dont la résolution nécessite des conditions aux extrémités et des valeurs initiales. On les munit ainsi d'une condition à l'extrémité $X = 0$ où le fluide est injecté qui se traduit par

$$\Phi(T, 0) = \frac{Q(T)}{2}, \quad (2.15)$$

et d'une en point de fissure $X = L(T)$ où le flux est nul :

$$\Phi(T, L(T)) = 0. \quad (2.16)$$

La condition initiale est définie par la forme initiale du film à l'instant $T = 0$

$$H(0, X) = H_r(X), \quad (2.17)$$

contenant un volume initial $V_r = \int_{-L}^L H_r(X) dX$.

2.1.3 Évolution de la fissuration

Pour modéliser le décollement, on suppose que l'évolution de la fissure est décrite par la théorie de Griffith sur la mécanique de la rupture [24]. Dans le contexte original de la théorie de Griffith (en absence de fluide visqueux), la croissance de la fissure dans un domaine fragile est donnée par un critère à seuil basé sur le taux de restitution d'énergie du système, que l'on notera G et son valeur critique noté G_c , lequel sera considéré comme un paramètre caractéristique du milieu qui quantifie sa capacité à résister à la propagation d'une fissure. Le critère de Griffith s'écrit alors

$$\dot{L} \geq 0, \quad G \leq G_c, \quad \dot{L}(G - G_c) = 0,$$

avec L la demi longueur de la fissure et \dot{L} la vitesse d'avancée de la fissure. Le paramètre G_c est lié à la ténacité K_{Ic} par l'équation d'Irwin [28]. Le taux de restitution d'énergie est généralement obtenu en dérivant l'énergie potentielle à l'équilibre, par rapport à la longueur de la fissure. Cela n'a aucune ambiguïté pour les processus quasi-statiques, pour lesquels une dérivée par rapport à la longueur de fissure de l'énergie potentielle à chargement fixe est bien définie. Mais dans le présent problème où nous devons également considérer l'évolution du fluide visqueux, il est plus délicat de dériver un tel taux de restitution d'énergie. En effet, nous ne pouvons pas, à priori, isoler l'énergie potentielle du solide de celle du fluide car la pression exercée par le fluide sur la fissure ne peut être considérée comme un chargement externe puisqu'elle fait partie des inconnues du problème couplé.

Dans ce contexte, nous commençons par établir l'énergie potentielle de l'ensemble du système fluide-solide sur la base de laquelle l'évolution de la fissure sera formulée. Pour cela, on multiplie d'abord l'équation (2.2) par $\frac{\partial H}{\partial T}$ et

l'équation (2.13) par P . Puis, on combine ces deux équations et on les intègre sur le domaine spatial $(0, L)$ pour obtenir

$$\int_0^{L(T)} N \frac{\partial H}{\partial T} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial X^2} \right) dX - \int_0^{L(T)} P \frac{\partial \Phi}{\partial X} dX = 0.$$

En intégrant maintenant par parties chacun des intégrales et en utilisant les conditions aux limites, on obtient

$$\int_0^{L(T)} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{N}{2} \left(\frac{\partial H}{\partial X} \right)^2 \right) dX - \int_0^{L(T)} \Phi \frac{\partial P}{\partial X} dX = \frac{Q}{2} P(T, 0).$$

Si la demi-longueur de fissure est fixée, on peut intégrer cette équation par rapport au temps et écrire

$$E(T) = E_r + \int_0^T \frac{Q(\theta)}{2} P(\theta, 0) d\theta, \quad (2.18)$$

où $E(T)$ est l'énergie potentielle du système couplé à l'équilibre qui est donnée par

$$E(T) = \int_0^{L(T)} \frac{N}{2} \left(\frac{\partial H}{\partial X} \right)^2 dx + \int_0^T \int_0^{L(T)} \left(\frac{1}{\mu} H^{\frac{2n+1}{n}} \right) \left| \frac{\partial P}{\partial X} \right|^{\frac{1-n}{n}} \left(\frac{\partial P}{\partial X} \right)^2 dX d\theta, \quad (2.19)$$

et E_r est l'énergie initiale du système.

Si maintenant on prend en compte la propagation de la fissure, on définit alors l'énergie totale du système comme la somme de l'énergie potentielle $E(T)$ et l'énergie dissipée par la propagation de la fissure $G_c L(T)$. En conséquence, on peut proposer un bilan d'énergie donné par :

$$E(T) + G_c L(T) = E_r + \int_0^T \frac{Q(\theta)}{2} P(\theta, 0) d\theta. \quad (2.20)$$

Le taux de restitution d'énergie du système couplé sera alors obtenu en prenant la dérivée par rapport au temps de l'équation (2.20) que sera présenté dans la section suivante.

2.2 Problème adimensionné

Nous introduisons ici l'ensemble des variables adimensionnées en fonction des paramètres définis dans la section précédente. Le temps adimensionné t est définie par $Q_r T = V_r t$, le débit d'injection de fluide est adimensionné par $Q(T) = Q_r q(t)$ et la longueur de la fissure par $L(T) = L_r \ell(t)$. Avec Q_r , l'amplitude maximale du débit d'injection, V_r le volume de référence et L_r la longueur de référence définies au début de la section 2.1.

Le problème considéré est un problème à « frontière libre », car la taille du domaine $\ell(t)$ est inconnue. On choisit alors de normaliser la taille du domaine décollé. La normalisation spatiale consiste à faire le changement de variable $y = X/L(T) = X/(L_r \ell(t)) \in [0, 1]$. Enfin, les fonctions décrivant le système peuvent être remplacées par les fonctions adimensionnées suivantes,

$$h(t, y) = \frac{L_r}{V_r} H(T, X), \quad p(t, y) = \frac{L_r^3}{N V_r} P(T, X),$$

$$\phi(t, y) = \frac{\Phi(T, X)}{Q_r}, \quad e(t) = \frac{L_r^3}{N V_r^2} E(T).$$

Étant donné ces variables adimensionnées, la formulation mathématique du problème couplé peut être réécrite comme suit, où par souci de lisibilité, nous adoptons la notation $(\prime) = \partial/\partial y$ pour la dérivée spatiale et $(\dot{}) = \partial/\partial t$ pour la dérivée temporelle.

L'équation d'équilibre du solide (2.2) s'écrit

$$h'' + \ell^2 p = 0 \quad \forall y \in (0, 1), \quad (2.21)$$

et ses conditions aux extrémités (2.3) et (2.4)

$$h'(t, 0) = h(t, 1) = 0. \quad (2.22)$$

Pour l'équation du bilan de masse du fluide, en raison de la dérivée temporelle, il faut prendre en compte le terme convectif lié à la propagation de la

fissure. Par conséquence, l'équation (2.13), s'écrit

$$\ell \dot{h} - h' y \dot{\ell} + \phi' = 0 \quad \forall y \in (0, 1), \quad (2.23)$$

et ses conditions aux limites (2.15), (2.16) et initiales (2.17) peuvent être écrites comme

$$\phi(t, 0) = \frac{q}{2}, \quad \phi(t, 1) = 0, \quad h(0, y) = \frac{L_r}{V_r} H_r(L_r y). \quad (2.24)$$

De façon similaire l'équation (2.14) définissant le flux de fluide au point $y \in (0, 1)$ peut être exprimée comme

$$\phi(t, y) |\phi(t, y)|^{n-1} = -\frac{1}{\mathcal{K}} \ell^{-1} h^{2n+1} p', \quad (2.25)$$

où l'on postule $p' < 0$ (condition qui devra être vérifiée a posteriori) et \mathcal{K} est un paramètre adimensionné défini par $\mathcal{K} := \frac{\mu' L_r^{2n+5} Q_r^n}{N V_r^{2n+2}}$ qui sera nommé viscosité adimensionné et représente le rapport entre les effets visqueux et la réponse élastique du fil.

Il reste à exprimer le problème d'évolution de la fissure. Compte tenu de l'adimensionnement décrit ci-dessus, nous pouvons réécrire l'énergie potentielle du système pour l'ensemble solution du problème $\{h, p, \ell\}$ comme

$$e(t) = \frac{1}{\ell(t)} \int_0^1 \frac{(h'(t, y))^2}{2} dy - \int_0^t \int_0^1 \phi(\tau, y) p'(\tau, y) dy d\tau - \int_0^t \frac{q(\tau)}{2} p(\tau, 0) d\tau. \quad (2.26)$$

Le bilan d'énergie adimensionné s'écrit alors

$$e(t) + \mathcal{G} \ell(t) = e_r + \int_0^t \frac{q(\tau)}{2} p(\tau, 0) d\tau, \quad (2.27)$$

où e_r est l'énergie initiale adimensionnée et le paramètre adimensionné $\mathcal{G} := \frac{G_c L_r^4}{N V_r^2}$ est nommé ténacité adimensionnée et représente le rapport entre l'énergie de propagation de la fissure et l'énergie élastique.

On est alors en mesure d'exprimer le taux de restitution d'énergie associé à la propagation de la fissure entraînée par le fluide. En prenant dérivant par

rapport au temps l'énergie totale (2.26), on obtient

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{-\dot{\ell}}{\ell^2} \int_0^1 \frac{h'^2}{2} dy + \frac{1}{\ell} \int_0^1 h' \dot{h}' dy - \int_0^1 \phi p' dy \frac{q}{2} p(t, 0).$$

En intégrant par parties le deuxième terme de droite, en utilisant l'équation d'équilibre dans le solide (2.21) ainsi que les conditions aux limites associées (2.22), il se réécrit $\ell \int_0^1 p \dot{h}' dy$. En remplaçant \dot{h}' selon (2.23) on peut réécrire ce terme comme $\dot{\ell} \int_0^1 y p h' dy - \int_0^1 p \phi' dy$, alors en utilisant les conditions (2.24) on peut exprimer la dérivée de l'énergie comme

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{-\dot{\ell}}{\ell^2} \int_0^1 \frac{h'^2}{2} dy + \dot{\ell} \int_0^1 y p h' dy.$$

En dérivant (2.27) par rapport au temps et en utilisant le résultat précédent, on obtient

$$\dot{\ell}(t) \left(\frac{1}{\ell^2} \int_0^1 \frac{h'^2}{2} dy - \int_0^1 y h' p dy - \mathcal{G} \right) = 0.$$

Cette équation nous donne le seuil à partir duquel la fissure se propagera. Par analogie avec l'approche originale de Griffith, nous définissons le taux de restitution d'énergie de fissuration comme

$$G = \frac{1}{\ell^2} \int_0^1 \frac{h'^2}{2} dy - \int_0^1 y h' p dy, \quad (2.28)$$

que l'on peut exprimer aussi comme (voir annexe A.1)

$$G = \int_0^1 h \left(\frac{3}{2} p + y p' \right) dy. \quad (2.29)$$

Finalement, le problème d'évolution de fissuration selon la théorie de Griffith peut être formulé comme

$$(G - \mathcal{G}) \dot{\ell} = 0, \quad (2.30)$$

avec la condition d'irréversibilité

$$\dot{\ell} \geq 0, \quad (2.31)$$

et la condition

$$G \leq \mathcal{G}. \quad (2.32)$$

Enfin, le problème adimensionné est modélisé par l'ensemble d'équations (2.21) - (2.32) qui ne dépendent que des deux paramètres \mathcal{K} et \mathcal{G} , nommées viscosité et ténacité adimensionnées.

2.3 Solution asymptotique

L'ensemble d'équations (2.21)-(2.32) est un système couplé avec des fortes non-linéarités associées au fluide et à la propagation de fissuration. Pour résoudre ce problème, nous choisissons de travailler dans un certain régime pour lequel nous serons en mesure d'exprimer des résultats analytiques, on parle ici du régime dit à « faible viscosité ». Un tel régime est souvent étudié dans la littérature sur les fractures hydrauliques, voir par exemple [10] et [8]. Il consiste à supposer que le système est tel que les effets de la ténacité plus grands que les effets de la viscosité du fluide. Pour la formulation du problème proposée ici, ceci peut être traduit par la condition $\mathcal{K} \ll \mathcal{G}$. Sur la base de ces hypothèses, nous proposons ici de fournir une analyse asymptotique en considérant $\mathcal{K} = \varepsilon \ll 1$.

L'idée de la solution par développement asymptotique est de développer les champs de solution $(t, y) \mapsto (h(t, y), p(t, y), \ell(t))$ en séries de puissances par rapport à ce petit paramètre ε ainsi que les équations d'évolution associées. On obtiendra alors de manière systématique la solution à chaque ordre dans le régime à grande ténacité.

Dans cette approche asymptotique, nous postulons les développements suivants pour la résolution du problème :

$$\begin{cases} h(t, y) = h_0(t, y) + \varepsilon h_1(t, y) + o(\varepsilon), \\ p(t, y) = p_0(t, y) + \varepsilon p_1(t, y) + o(\varepsilon), \\ \ell(t) = \ell_0(t) + \varepsilon \ell_1(t) + o(\varepsilon). \end{cases} \quad (2.33)$$

Le débit ϕ et le taux de restitution d'énergie G peuvent être aussi développés

en termes de ε

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon\phi_1 + o(\varepsilon), \quad G = G_0 + \varepsilon G_1 + o(\varepsilon), \quad (2.34)$$

où ϕ_0, ϕ_1, G_0 et G_1 sont exprimés en fonction des développements de $\{h, p, \ell\}$ en utilisant (2.25) et (2.29) (voir Annexe A.2). Les équations formulées dans les sections précédentes sont analysées à l'ordre dominant puis au premier ordre dans les paragraphes suivants.

2.3.1 Solution à l'ordre dominant

En remplaçant le développement (2.33) dans l'ensemble d'équations (2.21) - (2.32) on obtient l'équation d'équilibre élastique (2.21) à l'ordre dominant

$$h_0'' + \ell_0^2 p_0 = 0 \quad \forall y \in (0, 1), \quad (2.35)$$

munie des conditions aux extrémités

$$h_0(t, 1) = h_0'(t, 0) = 0. \quad (2.36)$$

De façon similaire le bilan de masse du fluide (2.23) à cet ordre s'écrit

$$\ell_0 \dot{h}_0 - y h_0' \dot{\ell}_0 + \phi_0' = 0 \quad \forall y \in (0, 1), \quad (2.37)$$

et d'après la définition de la fonction flux (2.25) on obtient

$$\ell_0^{-1} p_0' h_0^{2n+1} = 0 \quad \forall y \in (0, 1). \quad (2.38)$$

Les conditions sur le débit au point d'injection et en point de fissure s'écrivent à cet ordre

$$\phi_0(t, 0) = \frac{q}{2}, \quad \phi_0(t, 1) = 0, \quad (2.39)$$

et la condition initiale

$$h_0(0, y) = \frac{L_r}{V_r} H_r(L_r y). \quad (2.40)$$

Les trois principes de la formulation de Griffith (2.30)-(2.32) peuvent aussi être développés asymptotiquement et donc, à l'ordre dominant, s'écrivent

$$(G_0 - \mathcal{G})\dot{\ell}_0 = 0, \quad G_0 \leq \mathcal{G}. \quad (2.41)$$

L'ensemble d'équations (2.35), (2.37), (2.38) peuvent être résolues de façon explicite en réécrivant le chargement à l'instant t , donné par la fonction débit de fluide $q(t)$, comme un chargement en volume $v(t)$ définie par

$$v(t) := 1 + \int_0^t q(\tau) d\tau \quad .$$

L'intégration de l'équation (2.37) par rapport à y , sur tout l'intervalle $(0, 1)$, donne, en tenant compte des conditions aux extrémités (2.39),

$$\int_0^1 \partial_t(\ell_0 h_0) dy = \frac{q}{2},$$

résultat qui peut être intégré en temps à l'aide de la condition initiale (2.40) pour obtenir la condition

$$\int_0^1 h_0 dy = \frac{V(t)}{2\ell_0}. \quad (2.42)$$

L'équation (2.35) peut être résolue grâce à l'équation (2.38) qui impose la non-dépendance en y de p_0 . On peut alors obtenir h_0 en fonction de p_0 et d'après la condition (2.42) on peut obtenir la pression p_0 à l'ordre dominant de façon explicite :

$$p_0 = \frac{3V}{2\ell_0^3},$$

et la hauteur de la fissure :

$$h_0(t, y) = \frac{3V}{4\ell_0} (1 - y^2).$$

Finalement, on peut aussi calculer G_0 grâce à (2.29) :

$$G_0(t) = \int_0^1 h_0 \left(\frac{3}{2} p_0 + y p_0' \right) dy = \frac{9V^2}{8\ell_0^4},$$

et utiliser le principe de Griffith (2.30) ainsi que la condition (2.32) pour obtenir $\ell_0(t)$. On définit le volume critique de fluide $v_c := \sqrt{\frac{8\mathcal{G}}{9}}$ à partir duquel le processus de fissuration commence, et la solution des équations (2.21) - (2.32), à l'ordre dominant est :

— Si $v(t) \leq v_c$:

$$\ell_0(t) = 1, \quad (2.43)$$

$$p_0(t, y) = \frac{3}{2}v(t), \quad (2.44)$$

$$h_0(t, y) = \frac{3v(t)}{4}(1 - y^2), \quad (2.45)$$

— Si $v(t) > v_c$:

$$\ell_0(t) = \sqrt[4]{\frac{9v(t)^2}{8\mathcal{G}}}, \quad (2.46)$$

$$p_0(t, y) = \frac{3v(t)}{2\ell_0^3}, \quad (2.47)$$

$$h_0(t, y) = \frac{3v(t)}{4\ell_0}(1 - y^2). \quad (2.48)$$

Cette solution montre que la solution à l'ordre dominant ne dépend que de $V(t)$. On n'observe notamment pas d'influence de la forme de la fonction de chargement $q(t)$ ni du paramètre de viscosité n . Cette solution ne nous montre qu'un comportement global du système. On propose d'examiner l'ordre supérieur pour avoir une meilleure description de l'évolution du système.

2.3.2 Correction au premier ordre

On utilise ici la même démarche pour obtenir l'ensemble des équations à l'ordre ε , ce qui nous donnera des termes corrigeant la solution à l'ordre dominant afin d'obtenir une description plus complète de l'évolution du système.

À cet ordre, l'équation d'équilibre du solide (2.21) s'écrit

$$h_1'' + \ell_0^2 p_1 + 2\ell_0 \ell_1 p_0 = 0 \quad \forall y \in (0, 1) \quad , \quad (2.49)$$

et les conditions aux extrémités (2.23),

$$h_1(t, 1) = h_1'(t, 0) = 0 \quad . \quad (2.50)$$

De façon similaire, le bilan de masse (2.23) exprimé à cet ordre s'écrit

$$\ell_0 \dot{h}_1 + \ell_1 \dot{h}_0 - y h_0' \dot{\ell}_1 + y h_1' \dot{\ell}_0 + \phi_1' = 0 \quad \forall y \in (0, 1) \quad , \quad (2.51)$$

et l'équation de Reynolds (2.24) devient

$$\ell_0^{-1} p_0' h_0^{2n} h_1 + \ell_0^{-1} p_1' h_0^{2n+1} - \ell_0^{-2} \ell_1 p_0' h_0^{2n+1} = -\phi_0 |\phi_0|^{n-1} \quad \forall y \in]0, 1[\quad . \quad (2.52)$$

Ces equations montrent l'influence de la solution à l'ordre dominant. Les conditions aux extrémités et initiales s'écrivent à cet ordre

$$\phi_1(t, 0) = 0, \quad \phi_1(t, 1) = 0, \quad h_1(0, y) = 0 \quad . \quad (2.53)$$

Le principe de Griffith (2.30)-(2.32) exprimé à cet ordre permet de définir les conditions que $\ell_1(t)$ doit satisfaire,

$$(G_0 - G) \dot{\ell}_1 + G_1 \dot{\ell}_0 = 0. \quad (2.54)$$

Pour résoudre les équations (2.49) - (2.54), on utilise la même démarche que pour la solution à l'ordre dominant. Ainsi, on résout l'équation (2.52) pour obtenir $p_1(t, x)$ en fonction de la pression au point d'injection $p_1(t, 0)$:

$$p_1(t, y) = p_1(t, 0) - \int_0^y \frac{1}{(1-s^2)^{n+1}} \left| \alpha(t) \frac{(2+s)(1-s)}{(1+s)} + \beta(t) s \right|^n ds,$$

avec

$$\alpha(t) = \frac{4q(t)\ell_0^2(t)}{9v^2(t)} \left(\frac{4\ell_0^2(t)}{3v(t)} \right)^{1/n}, \quad \beta(t) = \frac{4\ell_0(t)\dot{\ell}_0(t)}{3v(t)} \left(\frac{4\ell_0^2(t)}{3v(t)} \right)^{1/n}. \quad (2.55)$$

On peut alors résoudre (2.49) et obtenir le terme correctif pour la hauteur de

la fissure,

$$h_1(t, y) = \left(\frac{\ell_0^2}{2} p_1(t, 0) + \ell_0 \ell_1 p_0 \right) (1 - y^2) - \ell_0^2 \int_y^1 \int_0^s \int_0^x \frac{1}{(1 - u^2)^{n+1}} \left| \alpha \frac{(2+u)(1-u)}{(1+u)} + \beta u \right|^n du dx ds. \quad (2.56)$$

On intègre l'équation (2.51) de bilan de masse au premier ordre avec les conditions aux extrémités (2.53) pour obtenir une relation de conservation de volume au premier ordre :

$$\int_0^1 h_1(t, y) dy = -\frac{v \ell_1}{2 \ell_0^2},$$

résultat qui nous permet finalement de déterminer finalement la pression en point de d'injection

$$p_1(t, 0) = 3 \int_0^1 \int_y^1 \int_0^s \int_0^x \frac{1}{(1 - u^2)^{n+1}} \left| \alpha \frac{(2+u)(1-u)}{(1+u)} + \beta u \right|^n du dx ds dy - \frac{9V \ell_1}{2 \ell_0^4}. \quad (2.57)$$

Afin de rendre la suite plus lisible, les fonctions suivantes sont définies :

$$I(t) := \int_0^1 \frac{1}{(1-y)^n (1+y)^{n+1}} \left| \alpha \frac{(2+y)(1-y)}{(1+y)} + \beta y \right|^n dy, \quad (2.58)$$

$$J(t) := \int_0^1 \frac{y}{(1-y^2)^n} \left| \alpha \frac{(2+y)(1-y)}{(1+y)} + \beta y \right|^n dy, \quad (2.59)$$

$$R(t, y) := \int_y^1 \int_0^s \int_0^x \frac{1}{(1-u^2)^{n+1}} \left| \alpha \frac{(2+u)(1-u)}{(1+u)} + \beta u \right|^n du dx ds. \quad (2.60)$$

On montre alors que (voir annexe) que la pression en point d'injection (2.57) peut se réécrire

$$p_1(t, 0) = I - 3J - \frac{9v \ell_1}{2 \ell_0^4},$$

et le terme correctif pour la hauteur de la fissure (2.56) se réécrit

$$h_1(t, y) = \left(\ell_0^2 (I - 3J) - \frac{3v \ell_1}{2 \ell_0^2} \right) \frac{(1 - y^2)}{2} - \ell_0^2 R(t, y).$$

De façon similaire à la résolution à l'ordre dominant, on peut calculer G_1 et utiliser le principe de Griffith (2.54) pour obtenir $\ell_1(t)$. Ainsi

$$G_1(t, y) = \int_0^1 \left[h_0 \left(\frac{3}{2} p_1 + y p_1' \right) + h_1 \left(\frac{3}{2} p_0 + y p_0' \right) \right] dy = -\frac{9v^2 \ell_1}{2\ell_0^5} - \frac{3v}{4\ell_0} J,$$

et finalement la solution des équations (2.49) - (2.54) est :

— Si $v \leq v_c$:

$$\ell_1(t) = 0 \quad (2.61)$$

$$p_1(t, y) = I(t) - 3J(t) - \int_0^y \frac{1}{(1-s^2)^{n+1}} \left| \alpha \frac{(2+s)(1-s)}{(1+s)} + \beta s \right|^n ds \quad (2.62)$$

$$h_1(t, y) = \ell_0^2 (I(t) - 3J(t)) \frac{(1-y^2)}{2} - \ell_0^2 R(t, y) \quad (2.63)$$

— Si $v > v_c$:

$$\ell_1(t) = -\frac{\ell_0^4}{6v} J(t) \quad (2.64)$$

$$p_1(t, y) = I(t) - 3J(t) - \frac{9V\ell_1}{2\ell_0^4} - \int_0^y \frac{1}{(1-s^2)^{n+1}} \left| \alpha \frac{(2+s)(1-s)}{(1+s)} + \beta s \right|^n ds \quad (2.65)$$

$$h_1(t, y) = \left(\ell_0^2 I(t) - 3\ell_0^2 J(t) - \frac{3V\ell_1}{2\ell_0^2} \right) \frac{(1-y^2)}{2} - \ell_0^2 R(t, y) \quad (2.66)$$

Ces termes de correction complètent la solution à l'ordre dominant et doivent fournir une meilleure description de l'évolution du système. Alors que la solution à l'ordre dominant dépend uniquement du volume $v(t)$ et du paramètre matériel \mathcal{G} , les termes correctifs au premier ordre, exprimés ci-dessus, dépendent explicitement d'autres paramètres comme le débit d'injection de fluide $q(t)$, l'indice de comportement du fluide n et la vitesse de propagation de la fissure $\dot{\ell}_0(t)$. On peut alors construire la solution corrigée du problème au premier ordre, définie par (2.33), et l'analyser pour observer l'influence de ces paramètres.

2.4 Résultats

2.4.1 Injection de fluide à débit constant

On propose d'abord un chargement constant soit $q(t) = q_0$. L'évolution de la longueur de fissure est présentée en fonction du temps pour différentes valeurs de l'indice de comportement du fluide n sur la figure [2.3](#).

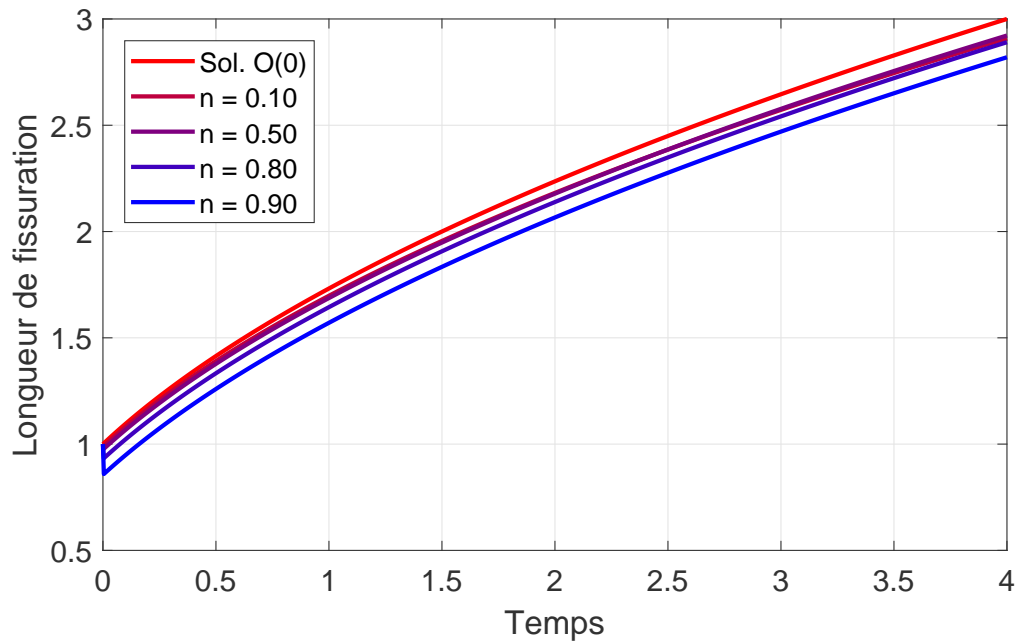


FIGURE 2.3 – Évolution de la longueur de fissure ($\ell = \ell_0 + \varepsilon \ell_1$) pour plusieurs valeurs du paramètre n en considérant $q_0 = 2$, $\varepsilon = 0.1$ et $\mathcal{G} = 1.125$.

On remarque que la solution corrigée pour les différentes valeurs de n est toujours plus lente que la solution à l'ordre dominant (en rouge). On attribue ce ralentissement à l'effet de la viscosité car on observe qu'il est directement lié à l'indice de comportement n .

2.4.2 Injection de fluide à débit linéaire

On propose maintenant un chargement de type linéaire par morceaux défini par

$$q(t) = \begin{cases} t, & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ 2 - t, & \text{si } 2 \leq t < 4 \\ 0, & \text{si } t \geq 4 \end{cases} \quad (2.67)$$

qui représente le processus d'injection d'un volume fixe $v_i = 2$ et est schématisé sur la figure [2.4](#).

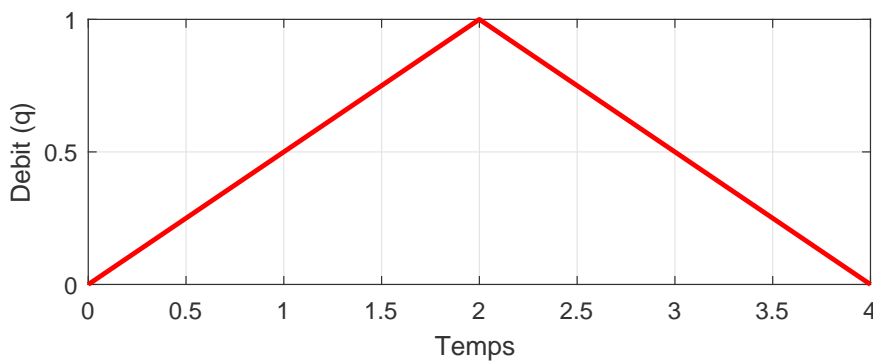


FIGURE 2.4 – Débit de fluide injecté selon l'équation [\(2.67\)](#).

L'évolution de la longueur de fissure est présentée en fonction du temps pour différentes valeurs de l'indice de comportement du fluide n sur la figure [2.5](#), pour $\varepsilon = 0.1$ et $\mathcal{G} = 1.125$. On observe que lorsque l'indice de comportement devient nul ($n \rightarrow 0$) la solution corrigée tend vers la solution à l'ordre dominant, alors que les solutions diffèrent lorsque $n \rightarrow 1$.

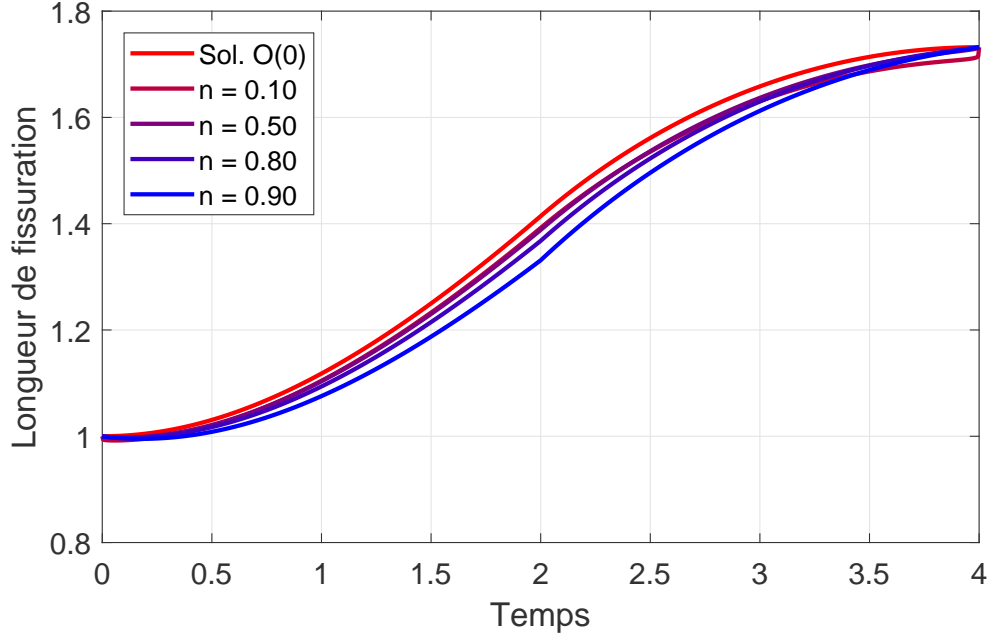


FIGURE 2.5 – Évolution de la longueur de fissure ($\ell = \ell_0 + \varepsilon\ell_1$) pour plusieurs valeurs du paramètre n en considérant $\varepsilon = 0.1$ et $\mathcal{G} = 1.125$.

2.4.3 Injection de fluide à volume fixé

Un autre exemple analysé est le cas de l'injection d'un volume fixé v_i , en considérant différentes vitesses d'injection. Les différents débits d'injection du fluide sont caractérisés par leurs amplitudes q_0 , et sont définies par

$$q(t) = \begin{cases} \frac{q_0}{t_c} t, & \text{si } 0 \leq t < t_c \\ \frac{q_0}{t_c} (2t_c - t), & \text{si } t_c \leq t < 2t_c \\ 0, & \text{si } t \geq 2t_c \end{cases} \quad (2.68)$$

avec $t_c = v_i/q_0$ et $2t_c$ le temps nécessaire pour injecter un volume v_i à débit q_0 .

Sur la figure [2.7](#) et [2.8](#) est représenté l'influence de l'amplitude du débit d'injection q_0 sur la longueur de propagation de la fissure est étudiée en considérant les mêmes paramètres matériels que dans l'exemple précédent et en fixant $n = 0.9$.

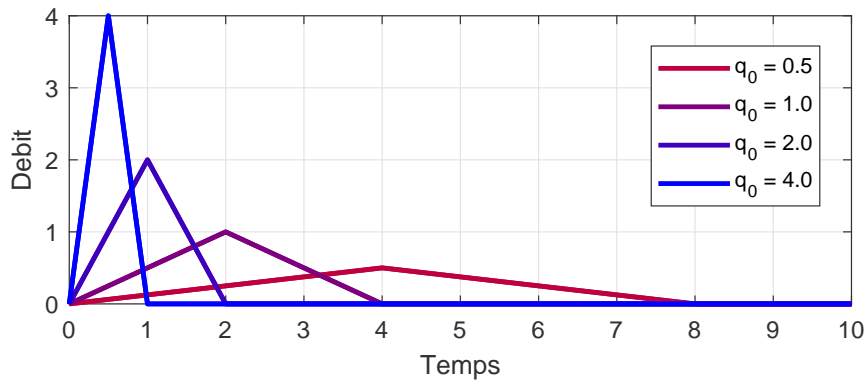


FIGURE 2.6 – Débit d'injection de fluide selon l'équation (2.67) pour un volume injecté $v_i = 2$.

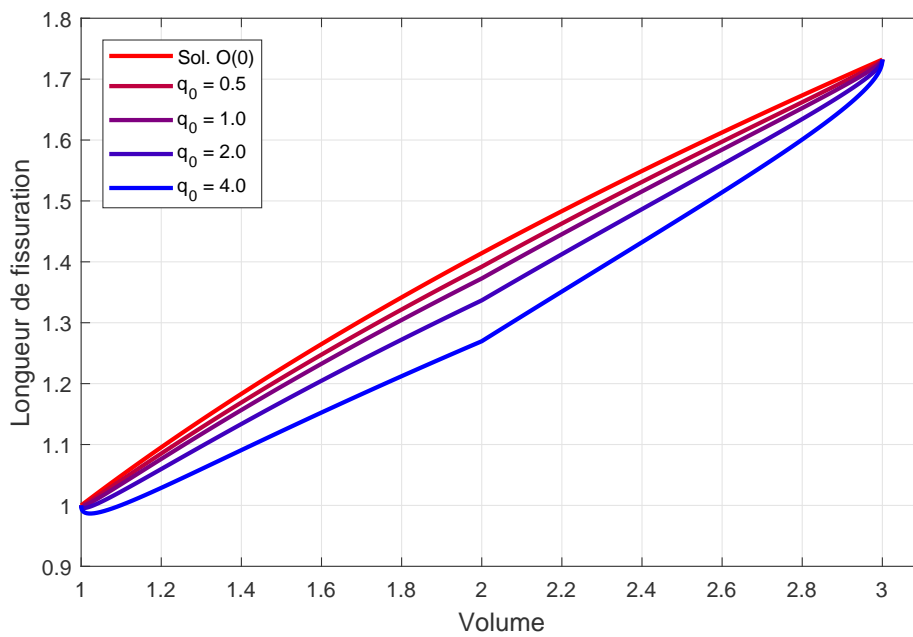


FIGURE 2.7 – Évolution de la longueur de fissure ($\ell = \ell_0 + \varepsilon\ell_1$) en fonction du volume (V_t) pour plusieurs valeurs du débit q_0 en considérant $\mathcal{G} = 1.125$ et $n = 0.9$ pour un volume injecté $v_i = 2$.

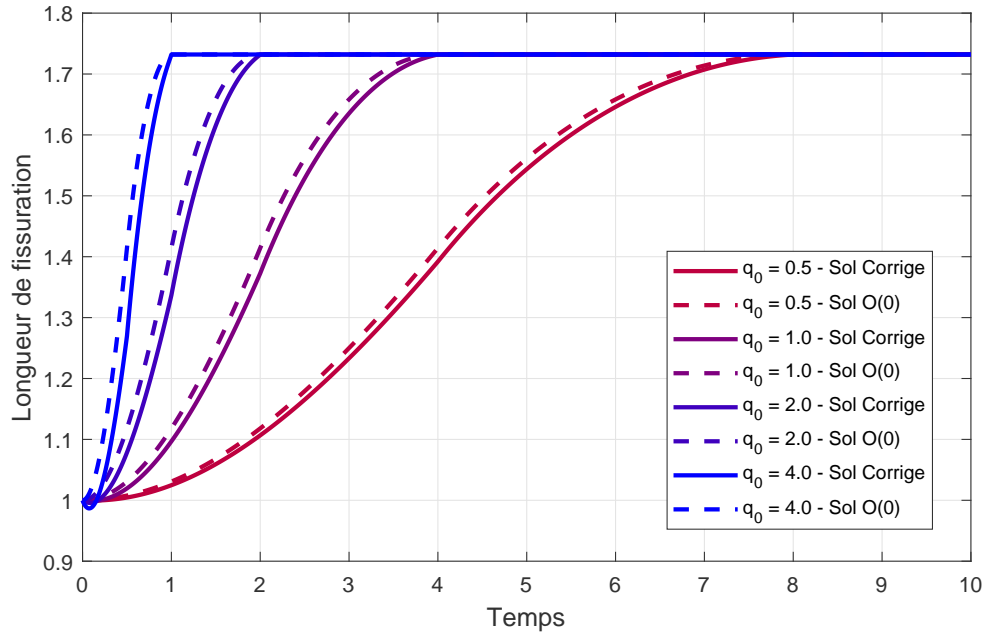


FIGURE 2.8 – Évolution de la longueur de fissure ($\ell = \ell_0 + \epsilon \ell_1$) en fonction du temps (t) pour plusieurs valeurs du débit q_0 en considérant $\mathcal{G} = 1.125$ et $n = 0.9$ pour un volume injecté $v_i = 2$.

Sur la figure [2.9](#) est représenté l'influence de l'amplitude du débit d'injection q_0 sur la hauteur maximale de la fissure est étudiée en considérant les mêmes paramètres matériels que dans l'exemple précédent et en fixant $n = 0.9$.

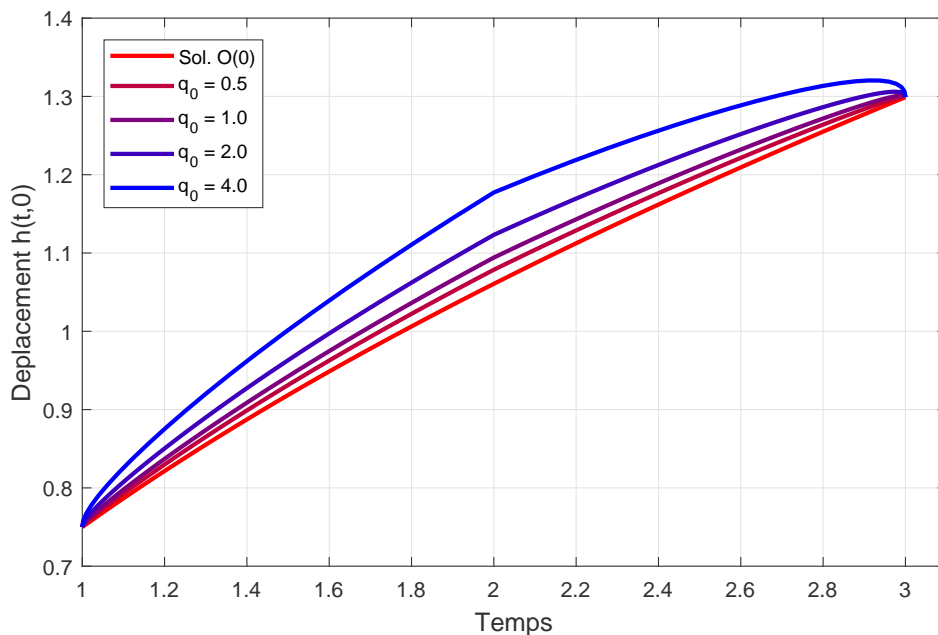


FIGURE 2.9 – Déplacement maximale ($h = h_0 + \epsilon h_1$) en fonction du volume (V_t) pour plusieurs valeurs du débit q_0 en considérant $\mathcal{G} = 1.125$ et $n = 0.9$ pour un volume injecté $v_i = 2$.

On remarque que l'écart entre la solution corrigée et la solution à l'ordre dominant croît avec l'amplitude du débit d'injection de fluide q_0 . On observe que plus la vitesse d'injection est grande, plus le ralentissement de la longueur de propagation est important. De façon similaire on observe que la hauteur de fissure est aussi fortement influencée par l'amplitude de la vitesse d'injection du fluide.

Étant donné la nature ralentissant du terme correctif dans la longueur de fissuration, on observe que l'influence de l'injection de fluide sur le système montre une préférence pour la déformation plutôt que la fissuration, car pour un volume donné, un incrément dans la vitesse d'injection du fluide ralentit la propagation de la fissure mais augmente le déplacement près du point d'injection du fluide. Cette différence sur le déplacement est une conséquence de l'effet local de la source ponctuelle de fluide et on peut le voir sur la figure [2.10](#). On observe que le déplacement obtenu avec la solution modifiée est plus grand que celui

obtenu par la solution à l'ordre dominant, sur la région $[0, 0.6]$ et plus petite à l'extérieur de cette région.

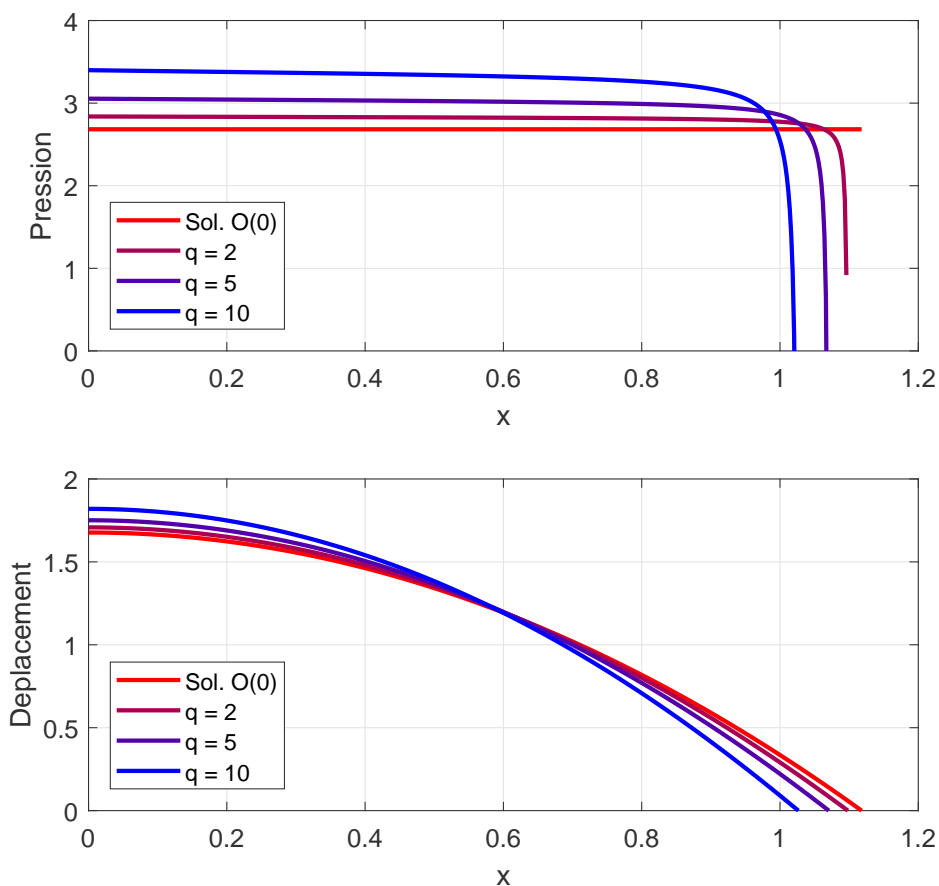


FIGURE 2.10 – Pression et déplacement pour un volume $v(t) = 2.5$ et $q = \{2, 5, 10\}$ en considérant $\mathcal{G} = 1.125$ et $n = 0.9$.

Une autre remarque importante est liée au comportement de la pression près du point de fissuration. On observe sur la figure 2.10 que lorsque $n \neq 0$, la pression $p(t, y)$ diverge comme $O(\log(1-y))$ lorsque $y \rightarrow 1$. Ce type de singularité en pointe de fissure a déjà été remarquée par A. Savitski et E. Detournay [40] dans le cas d'une fissure hydraulique circulaire chargée par un fluide newtonien ou dans le cas d'une fissure infinie. Cette singularité est un des points clés

qu'on abordera dans la suite, car il montre que le modèle est incapable de bien modéliser le comportement de la pression près du point de fissuration.

D'autre part on doit remarquer que la continuité du comportement de la fissuration est directement liée à la définition des fonctions $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ (2.55), en raison de la relation directe entre $\beta(t)$ et $\dot{\ell}(t)$. De plus, d'après (2.64) on peut remarquer que $\ell_1(t)$ est toujours négatif, donc à un instant $t_c^+ > t_c$ postérieur à l'instant t_c où l'on atteint le volume critique v_c , la longueur totale $\ell(t_c^+) = \ell_0(t_c^+) + \varepsilon\ell_1(t_c^+)$ satisfera toujours $\ell(t_c^+) < \ell(0)$ (voir figure 2.11). Ce qui est en contradiction avec la condition d'irréversibilité (2.31) de la théorie de Griffith. On considère que ce résultat est lié au modèle à grande ténacité utilisé pour obtenir des solutions explicites car ce modèle néglige la présence du retard.

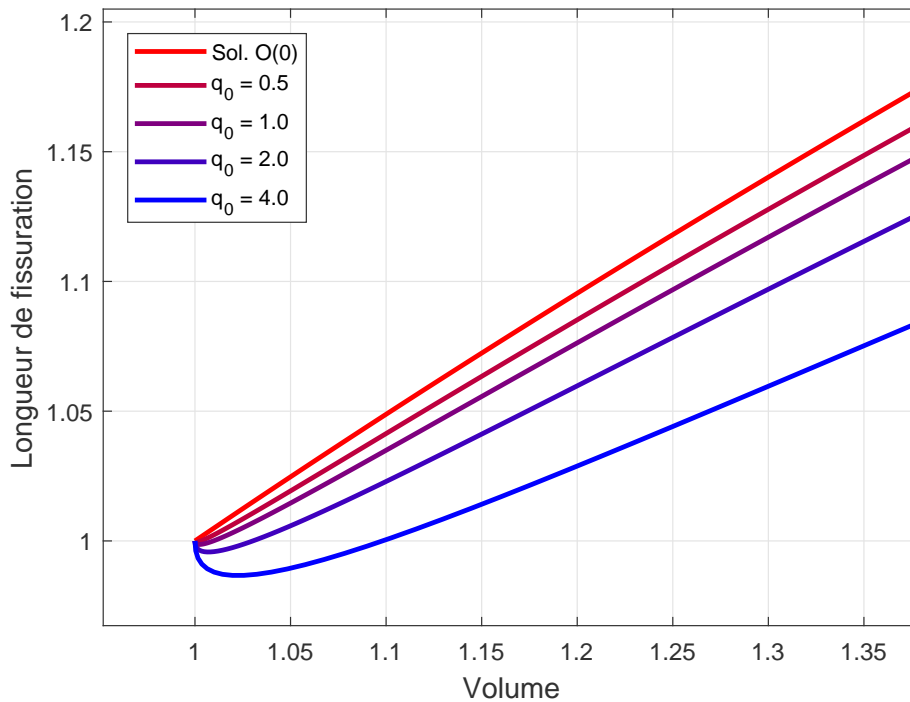


FIGURE 2.11 – Déplacement maximale ($h = h_0 + \varepsilon h_1$) en fonction du volume $v(t)$ pour plusieurs valeurs du débit q_0 en considérant $\mathcal{G} = 1.125$ et $n = 0.9$.

Enfin, une dernière remarque vient de l'analyse du cas fluide newtonien ($n = 1$) pour lequel l'ensemble des équations proposées comme solution du modèle

n'a pas de solution explicite puisque le taux de restitution de l'énergie potentielle G (qui dépend de ℓ_1) diverge. On considère que ce problème n'appartient qu'au cas unidimensionnel, car d'après la littérature, notamment les travaux menés par E. Detournay par exemple, dans le cas bidimensionnel ou tridimensionnel le terme convectif induit par le processus de mis à l'échelle, présente une puissance différente, de sorte que la convergence des expressions intégrales est garantie.