

# DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE POUR UN COIN ARRONDI DANS L' INTERVALLE CRITIQUE

---

Les résultats de ce chapitre feront probablement l'objet de la publication :

[51] L. CHESNEL, X. CLAEYS et S.A. NAZAROV : Asymptotics expansion for a non-smooth interface between a dielectric and a negative material. *En cours*, 2012.

---

## Sommaire

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>149</b>
<b>6.1 Description du problème</b> . . . . .	<b>151</b>
6.1.1 Géométrie . . . . .	151
6.1.2 Problème étudié . . . . .	152
<b>6.2 Géométries limites</b> . . . . .	<b>153</b>
6.2.1 Géométrie externe . . . . .	153
6.2.2 Géométrie interne . . . . .	155
<b>6.3 Résultat de stabilité</b> . . . . .	<b>156</b>
6.3.1 Développement en champ lointain . . . . .	156
6.3.2 Développement en champ proche . . . . .	158
6.3.3 Le principe de raccord . . . . .	159
6.3.4 Champ approché . . . . .	159
6.3.5 Estimation du reste . . . . .	160
6.3.6 Résultat de stabilité . . . . .	162
<b>6.4 Développement asymptotique au premier ordre</b> . . . . .	<b>163</b>
6.4.1 Construction du développement . . . . .	164
6.4.2 Champ approché et estimations d'erreur . . . . .	164
<b>6.5 Illustrations numériques</b> . . . . .	<b>166</b>

---

## Introduction

Le problème de transmission ( $\mathcal{P}$ ) « trouver  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que  $-\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f$  », où  $f$  désigne un terme source et  $\sigma$  un coefficient qui change de signe sur le domaine, peut ne pas être bien posé au sens de Fredholm, notamment lorsque l'interface entre le matériau positif et le matériau négatif présente un coin. Pour certaines valeurs du paramètre  $\sigma$ , il apparaît une singularité propagative au niveau du coin et il faut l'ajouter à l'espace pour retrouver un

problème bien posé au sens de Fredholm (cf. Chapitre 5).

Dans le Chapitre 4, nous avons observé que pour un milieu physique absorbant, ce qui revient à considérer un  $\sigma$  possédant une partie imaginaire positive sur tout le domaine, le problème  $(\mathcal{P})$  devient un problème coercif. Le passage à la limite sur la dissipation, permettant d'étudier le cas d'un milieu faiblement absorbant, dépend des propriétés de  $(\mathcal{P})$ . Lorsque ce problème est bien posé, la suite de solutions dissipatives converge vers la solution de  $(\mathcal{P})$  dans  $H_0^1(\Omega)$ . Lorsque l'interface présente un coin et qu'il existe une singularité propagative, la convergence de la suite de solutions dissipatives a également lieu mais dans le nouveau cadre fonctionnel. C'est le principe d'absorption limite que nous avons justifié dans le Chapitre 5. Ainsi, nous pouvons voir l'ajout d'un terme dissipatif dans  $(\mathcal{P})$  comme un procédé de régularisation.

Le deuxième procédé de régularisation que nous pouvons naturellement envisager consiste à arrondir le coin. C'est ce point que nous souhaitons étudier dans ce chapitre. La problématique peut se décrire ainsi. Plaçons-nous dans une configuration pour laquelle le problème  $(\mathcal{P})$  n'est pas bien posé au sens de Fredholm en raison de l'existence d'une singularité propagative. Arrondissons légèrement le coin. Dans ce cas, l'interface devient régulière et le problème  $(\mathcal{P})$  dans cette géométrie est bien posé au sens de Fredholm. Que se passe-t-il pour un arrondi très faible ? Autrement dit, quel est le comportement de la suite des solutions, lorsqu'elles sont définies, du problème avec un coin arrondi lorsque l'arrondi tend vers 0 ? Au-delà de l'aspect mathématique, cette question présente un intérêt important pour la physique. En effet, en pratique, il est impossible de réaliser des coins idéaux et ces derniers sont toujours arrondis. Par conséquent, la question à laquelle nous nous intéressons n'est autre que la question de l'existence physique du phénomène de trou noir.

Le problème d'asymptotique pour un coin arrondi et un opérateur elliptique a fait l'objet de nombreuses études (voir notamment [114, 73, 96] et les références utilisées). Présentons brièvement une motivation de ces travaux. Imaginons que l'on souhaite approcher par une méthode numérique la solution d'un problème elliptique dans une géométrie à coin légèrement arrondi. Dans ce cas, il se révèle très coûteux de mailler finement l'arrondi. L'idée du développement asymptotique consiste à déterminer une approximation de la solution dans la géométrie arrondie à partir de fonctions définies dans des géométries limites ne présentant pas de petit paramètre. Ainsi, on ne maille que ces géométries limites et les calculs restent raisonnables. Dans ces études, il est notamment montré que la solution dans la géométrie arrondie converge, lorsque l'arrondi tend vers 0, vers la solution dans la géométrie limite avec une vitesse qui dépend des exposants de singularité associés à la géométrie limite. Ces résultats resteront vrais pour le problème avec changement de signe que nous voulons considérer lorsque le contraste est situé en dehors de l'intervalle critique. Nous ne les démontrerons pas dans ce document mais les techniques que nous allons développer permettraient de les obtenir. Indiquons que ces résultats présentent un intérêt en soi. En effet, pour les technologies basées sur les ondes plasmoniques, l'on cherche à utiliser ces géométries singulières pour confiner de l'énergie au voisinage du coin ou de l'arête en 3D. L'influence de l'arrondi, observée notamment dans [74, 17, 149, 130], doit par conséquent être bien comprise pour effectuer des simulations numériques cruciales dans un domaine où les expérimentations sont coûteuses et longues à mettre en place.

L'étude que nous allons mener dans l'intervalle critique est plus délicate en raison de la nature exotique du problème limite qui est bien posé au sens de Fredholm dans un cadre relativement inhabituel. Il s'agit d'un travail en cours avec X. Claeys<sup>1</sup> et S.A. Nazarov<sup>2</sup>, ce dernier étant à l'origine de la méthode que nous allons présenter. Ce travail manque probablement encore de maturité mais nous avons néanmoins choisi de l'exposer pour deux raisons. D'une part, nous allons mettre

1. Université de Toulouse, ISAE, 10, avenue Edouard-Belin, 31055 Toulouse cedex 4, France.

2. Institute for Problems in Mechanical Engineering RAS, 61, Bolshoi pr. V.O., St. Pétersbourg 199178, Russie.

en évidence un phénomène de « valeur propre clignotante » plutôt surprenant. Vous ne pouviez pas manquer cela. D'autre part, la méthode proposée par S.A. Nazarov semble très puissante. Elle permet d'obtenir une estimation *a priori* de façon systématique, point souvent délicat dans le domaine du développement asymptotique.

Notre plan d'étude sera le suivant. Nous commencerons par présenter la géométrie du problème. Dans un second temps, dans la Section 6.1, nous rappellerons les résultats pour les géométries limites que nous avons prouvés dans le Chapitre 5. La section 6.3 sera consacrée à la démonstration d'une estimation *a priori* pour les solutions du problème avec un coin arrondi. Le point original tient dans le fait que cette estimation ne tient pas uniformément : elle est valable pour un paramètre d'arrondi qui n'appartient pas à un ensemble qui possède 0 comme point d'accumulation. Pour obtenir cette estimation, l'idée va consister à utiliser des espaces de Sobolev à poids bien adaptés. Dans la Section 6.4, nous nous servirons de cette estimation *a priori* pour prouver la convergence d'un développement asymptotique au premier ordre. Enfin, nous terminerons par des calculs explicites pour une géométrie simple et des illustrations numériques mettant en évidence ce curieux phénomène de « valeur propre clignotante ».

## 6.1 Description du problème

### 6.1.1 Géométrie

Considérons un ouvert borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  à frontière polygonale comme celui représenté sur la Figure 6.1 ci-dessous. Nous supposons  $\Omega$  partitionné en deux sous-domaines  $\Omega_1^\delta, \Omega_2^\delta$  avec  $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1^\delta \cup \bar{\Omega}_2^\delta$  et  $\Omega_1^\delta \cap \Omega_2^\delta = \emptyset$ . Donnons-nous un segment droit  $\Sigma^0$  qui intersecte  $\partial\Omega$  en seulement deux points  $O$  et  $O'$  qui ne coïncident pas avec les sommets de  $\partial\Omega$ . Nous faisons l'hypothèse qu'en  $O'$ ,  $\Sigma^0$  est perpendiculaire à  $\partial\Omega$  et que l'interface  $\Sigma^\delta := \partial\Omega_1^\delta \setminus \partial\Omega = \partial\Omega_2^\delta \setminus \partial\Omega$  coïncide avec  $\Sigma^0$  en dehors du disque  $B(O, \delta)$ .

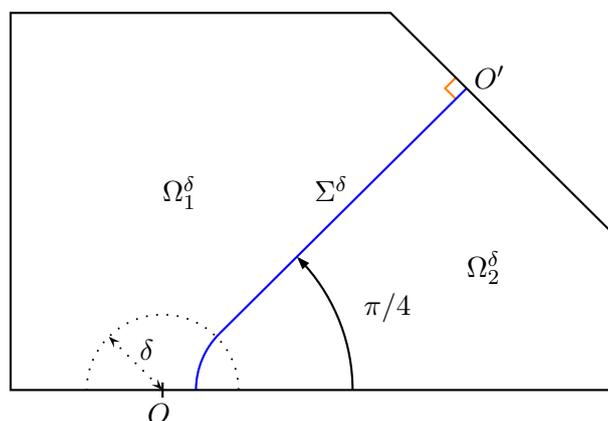


FIGURE 6.1 – Géométrie du problème.

Dans la suite, nous notons  $(r, \theta)$  les coordonnées polaires centrées en  $O$  telle que  $\theta = 0$  ou  $\pi$  sur la frontière dans un voisinage de  $O$ . Lorsque  $\delta \rightarrow 0$ , les sous-domaines  $\Omega_1^\delta, \Omega_2^\delta$  convergent vers  $\Omega_1^0, \Omega_2^0$  et nous supposons qu'il existe un disque  $B(O, r_0)$  centré en  $O$  tel que  $\Omega_2^0 \cap B(O, r_0) = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r < r_0, 0 < \theta < \pi/4\}$  et  $\Omega_1^0 \cap B(O, r_0) = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r < r_0, \pi/4 < \theta < \pi\}$ . Comme dans le Chapitre 5, nous considérons la valeur  $\pi/4$  pour l'ouverture du cône simplement car elle permet de mener tous les calculs explicitement (voir le §6.2.1). Il n'y a aucune difficulté à adapter l'analyse que nous allons présenter au cas d'un angle quelconque. Pour fixer les idées, sans perte de généralité, nous supposons que nous pouvons prendre  $r_0 = 2$ , *i.e.* que  $(B(O, 2) \cap \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*) \subset \Omega$ . Dans tout ce chapitre,  $\mathbb{R}_+^*$  désignera l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

### Géométrie du coin arrondi

Nous avons supposé l'interface dans  $\Omega^\delta$  égale à un segment droit en dehors de  $B(O, \delta)$ . Décrivons à présent l'ensemble  $\Sigma^\delta \cap B(O, \delta)$ . Notons  $\Xi := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$  le demi-plan supérieur et partitionnons-le en deux ensembles ouverts  $\Xi_1, \Xi_2$  avec  $\bar{\Xi} = \bar{\Xi}_1 \cup \bar{\Xi}_2$  et  $\Xi_1 \cap \Xi_2 = \emptyset$ . Nous supposons que  $\Gamma := \partial\Xi_1 \setminus \partial\Xi = \partial\Xi_2 \setminus \partial\Xi$  est une courbe  $\Gamma = \{\phi_\Gamma(t), t \in [0; +\infty[ \}$  où  $\phi_\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telle que  $\partial_t \phi_\Gamma(0)$  est orthogonal à l'axe  $(Ox)$  et  $\phi_\Gamma(t) = (t, t)$  pour  $t \geq 1$ , voir la (Figure 6.2) ci-dessous. Dans un voisinage du coin, nous faisons l'hypothèse que  $\Omega_1^\delta, \Omega_2^\delta$  peuvent être définis à partir de  $\Xi_1, \Xi_2$  par auto-similarité :

$$\begin{aligned}\Omega_1^\delta \cap B(O, \delta) &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x}/\delta \in \Xi_1 \cap B(O, 1) \}; \\ \Omega_2^\delta \cap B(O, \delta) &= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x}/\delta \in \Xi_2 \cap B(O, 1) \}.\end{aligned}$$

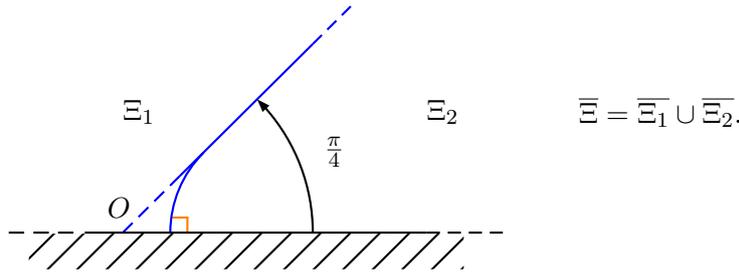


FIGURE 6.2 – Géométrie « gelée ».

#### 6.1.2 Problème étudié

Introduisons la fonction  $\sigma^\delta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\sigma^\delta = \sigma_1$  dans  $\Omega_1^\delta$ ,  $\sigma^\delta = \sigma_2$  dans  $\Omega_2^\delta$ , où  $\sigma_1 < 0$  et  $\sigma_2 > 0$  sont des constantes. Pour  $f \in H^{-1}(\Omega)$ , considérons alors le problème :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\delta \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\operatorname{div}(\sigma^\delta \nabla u^\delta) = f \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (6.1)$$

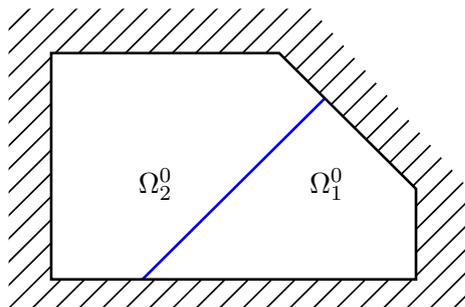
Avant d'entrer dans le vif du sujet, introduisons quelques notations. Pour un ouvert  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$  avec  $d = 1, 2$ , le produit de  $L^2(\mathcal{O})$  (respectivement  $L^2(\mathcal{O})^2$ ) est noté

$$(u, v)_\mathcal{O} = \int_{\mathcal{O}} uv \, d\mathbf{x}, \quad \forall u, v \in L^2(\mathcal{O}) \text{ (resp. } L^2(\mathcal{O})^2).$$

En conséquence, le produit scalaire standard de  $L^2(\mathcal{O})$  (resp.  $L^2(\mathcal{O})^2$ ) est  $(u, v) \mapsto (u, \bar{v})_\mathcal{O}$ . Nous définissons  $\|u\|_\mathcal{O} := (u, \bar{u})_\mathcal{O}^{1/2}$  et  $\|u\|_{H_0^1(\mathcal{O})} := \|\nabla u\|_\mathcal{O}$ . Nous notons  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mathcal{O}$  le crochet de dualité  $H^{-1}(\mathcal{O}) \times H_0^1(\mathcal{O})$  et nous définissons la norme

$$\|f\|_{H^{-1}(\mathcal{O})} := \sup_{v \in H_0^1(\mathcal{O}) \setminus \{0\}} \frac{|\langle f, v \rangle_\mathcal{O}|}{\|v\|_{H_0^1(\mathcal{O})}}, \quad \forall f \in H^{-1}(\mathcal{O}).$$

Ces notations permettent d'associer au problème (6.1) l'opérateur linéaire et continu  $\mathcal{A}^\delta : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  défini par  $\langle \mathcal{A}^\delta u, v \rangle_\Omega = (\sigma^\delta \nabla u, \nabla v)_\Omega$  pour tout  $u, v \in H_0^1(\Omega)$ . La fonction  $u^\delta$  vérifie le problème (6.1) si et seulement si elle satisfait  $\mathcal{A}^\delta u^\delta = f$ . Comme nous l'avons vu dans le Chapitre 1,  $\mathcal{A}^\delta$  constitue un opérateur Fredholm d'indice zéro dès lors que  $\kappa_\sigma := \sigma_2/\sigma_1 \neq -1$ . Ceci vient du fait que l'interface  $\Sigma^\delta$  est régulière et rencontre  $\partial\Omega$  orthogonalement. Dans le Chapitre 1, nous avons également prouvé que lorsque  $\Sigma^\delta$  présente une portion droite, dans le cas  $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 = -1$ , l'opérateur  $\mathcal{A}^\delta$  n'est pas de type Fredholm. De nouveau, la situation  $\kappa_\sigma = -1$  semble particulièrement

FIGURE 6.3 – Géométrie pour  $\delta = 0$ .

problématique et nous la mettons de côté.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au comportement, lorsque  $\delta \rightarrow 0$ , de la solution  $u^\delta$  du problème (6.1) lorsqu'elle est bien définie. Remarquons que pour  $\delta = 0$ , l'interface ne rencontre plus  $\partial\Omega$  perpendiculairement.

Pour la configuration choisie, nous savons en vertu des résultats du Chapitre 1 que l'opérateur  $\mathcal{A}^0$  est de type Fredholm si et seulement si  $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 \in \mathbb{R}_2^*$  vérifie  $\kappa_\sigma \notin [-1; -1/3]$ . Rappelons que la valeur 3 correspond au rapport des valeurs des ouvertures :  $3 = (\pi - \pi/4)/(\pi/4)$ .

Lorsque  $\mathcal{A}^0$  est de type Fredholm, il n'y a pas de différence qualitative entre le problème (6.1) pour  $\delta > 0$  et le problème (6.1) pour  $\delta = 0$ . Dans ce cas, en utilisant la technique nous développons dans ce chapitre, on peut montrer que, si  $\mathcal{A}^0$  est injectif, alors  $\mathcal{A}^\delta$  est injectif pour  $\delta$  suffisamment petit. De plus, en définissant  $u^\delta = (\mathcal{A}^\delta)^{-1}f$  et  $u = (\mathcal{A}^0)^{-1}f$ , on peut montrer que la suite  $(u^\delta)$  converge vers  $u$  dans la norme  $H^1$ . Puisque ces résultats peuvent être obtenus à partir de la méthode que nous allons utiliser, nous choisissons de ne pas les présenter.

Lorsque  $\mathcal{A}^0$  n'est pas de type Fredholm, il y a une différence qualitative entre le problème (6.1) pour  $\delta > 0$  et le problème (6.1) pour  $\delta = 0$ . L'objectif de ce chapitre est d'étudier une telle transition qualitative. Dans la suite, nous laissons de côté le cas  $\kappa_\sigma = -1/3$  car il présente des difficultés techniques qui risquent d'obscurcir la démarche. Nous supposons donc

$$\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 \in ]-1; -1/3[. \quad (6.2)$$

Classiquement en analyse asymptotique, pour étudier le problème (6.1) lorsque  $\delta \rightarrow 0$ , nous nous servons de résultats établis dans des géométries indépendantes de  $\delta$ . Nous présentons maintenant ces résultats.

## 6.2 Géométries limites

### 6.2.1 Géométrie externe

La première géométrie que nous considérons est obtenue à partir de la Figure 6.1 en prenant  $\delta = 0$  (cf. Figure 6.3 ci-dessus). Nous l'appelons *géométrie externe*. Dans cette géométrie, l'interface  $\Sigma^0 = \overline{\Omega}_2^0 \cap \overline{\Omega}_1^0$  ne rencontre pas  $\partial\Omega$  perpendiculairement et l'opérateur  $\mathcal{A}^0$  n'est pas de type Fredholm lorsque  $\kappa_\sigma \in ]-1; -1/3[$ . Pour pallier cette difficulté, dans le Chapitre 5, nous avons introduit un nouveau cadre fonctionnel. Rappelons-en la construction.

Pour un terme source donné  $g$ , nous souhaitons nous intéresser au problème

$$\text{Trouver } v \text{ tel que } -\operatorname{div}(\sigma^0 \nabla v) = g \quad \text{dans } \Omega, \quad v = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (6.3)$$

Ici,  $\sigma^0$  désigne la fonction telle que  $\sigma^0 = \sigma_1$  dans  $\Omega_1^0$  et  $\sigma^0 = \sigma_2$  dans  $\Omega_2^0$ . Nous ne précisons pas de cadre fonctionnel pour le moment. Nous aurons à introduire des espaces de Sobolev à poids

adaptés pour retrouver une structure d'opérateur Fredholm classique.

Rappelons quelques éléments concernant les exposants de singularité pour cette configuration. Dans le Chapitre 3, nous avons montré que le problème « trouver  $(\lambda, \varphi) \in \mathbb{C} \times \mathbf{H}_0^1(]0; \pi[) \setminus \{0\}$  tel que  $\operatorname{div}(\sigma^0 \nabla(r^\lambda \varphi(\theta))) = 0$  dans  $\Omega$  » possède une solution si et seulement si  $\lambda$  appartient à l'ensemble des exposants de singularité

$$\Lambda = \{2k, k \in \mathbb{Z}^*\} \cup \{i\eta + 4k, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-i\eta + 4k, k \in \mathbb{Z}\} \quad (6.4)$$

$$\text{avec } \eta = -\frac{2}{\pi} \ln \left[ \frac{1}{2} \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} + i \sqrt{1 - \left( \frac{1}{2} \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} \right)^2} \right].$$

Lorsque  $\sigma_2/\sigma_1 \in ]-1; -1/3[$ , on a  $\eta \in ]0; +\infty[$ , de sorte que l'ensemble  $\Lambda$  contient seulement deux éléments dans la bande  $|\Re \lambda| < 2 : \pm i\eta$ . Pour  $\lambda = \pm i\eta$ , l'espace des fonctions  $\varphi \in \mathbf{H}_0^1(]0; \pi[)$  telles que  $\operatorname{div}(\sigma^0 \nabla(r^{\pm i\eta} \varphi(\theta))) = 0$  est de dimension un et engendré par un certain  $\varphi(\theta)$  (le même pour  $\lambda = \pm i\eta$ ), avec

$$\varphi(\theta) = c_\varphi \frac{\sinh(\eta\theta)}{\sinh(\eta\pi/4)} \quad \text{sur } [0; \pi/4] \quad \text{et} \quad \varphi(\theta) = c_\varphi \frac{\sinh(\eta(\pi - \theta))}{\sinh(\eta 3\pi/4)} \quad \text{sur } [\pi/4; \pi].$$

Ci-dessus,  $c_\varphi \in \mathbb{R}^*$  désigne une constante. En vertu du Lemme 5.3.6 du Chapitre 4, nous savons que l'intégrale  $\int_0^\pi \sigma^0(\theta) \varphi(\theta)^2 d\theta$  est non nulle. Par conséquent, nous pouvons fixer  $c_\varphi$  pour normaliser  $\varphi$  et avoir  $\eta \int_0^\pi \sigma^0(\theta) \varphi(\theta)^2 d\theta = 1$ .

**Remarque 6.2.1** • Pour  $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 = -1/3$ , l'ensemble des exposants de singularité contient la valeur 0. Dans ce cas, la chaîne de Jordan associée à la valeur propre 0 est de longueur 2. Ceci conduit à des complications techniques et, comme annoncé précédemment, nous n'étudions pas cette configuration ici.

- Pour  $\kappa_\sigma \in ]-1; -1/3[$  tel que  $\kappa_\sigma \rightarrow -1^+$ , le nombre  $\eta$  tend vers  $+\infty$ .
- Enfin, pour  $\kappa_\sigma \in \mathbb{R}_-^*$  tel que  $\kappa_\sigma \notin [-1; -1/3]$ , on a  $\Lambda \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Re \lambda = 0\} = \emptyset$ . L'opérateur  $\mathcal{A}^0$  est alors de type Fredholm et d'indice nul.

Pour  $\beta \in \mathbb{R}$  et  $k \geq 0$ , définissons l'espace  $V_\beta^k(\Omega)$  comme la fermeture de  $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  pour la norme

$$\|v\|_{V_\beta^k(\Omega)} := \left( \sum_{\alpha+\gamma \leq k} \int_\Omega r^{2(\beta+\alpha+\gamma-k)} |\partial_x^\alpha \partial_y^\gamma v|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}.$$

Notons en particulier que pour tout  $\beta$ , les éléments de  $V_\beta^1(\Omega)$  s'annulent sur  $\partial\Omega$ . La norme sur l'espace dual de  $V_\beta^1(\Omega)$  est définie de façon usuelle, comme suit

$$\|g\|_{V_\beta^1(\Omega)^*} := \sup_{v \in V_\beta^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{|\langle g, v \rangle_\Omega|}{\|v\|_{V_\beta^1(\Omega)}}$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$  désigne le crochet de dualité  $V_\beta^1(\Omega)^* \times V_\beta^1(\Omega)$ . Bien que nous adoptions la même notation pour le crochet de dualité  $\mathbf{H}^{-1}(\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , il n'y aura pas de risque de confusion dans la suite. Pour  $0 < \beta < 2$ , définissons l'espace

$$V_\beta^{\text{out}}(\Omega) := \operatorname{vect}\{\psi(r)r^{i\eta}\varphi(\theta)\} \oplus V_{-\beta}^1(\Omega)$$

et munissons-le de la norme

$$\|v\|_{V_\beta^{\text{out}}(\Omega)} := |c| + \|\tilde{v}\|_{V_{-\beta}^1(\Omega)} \quad \text{pour } v(r, \theta) = c\psi(r)r^{i\eta}\varphi(\theta) + \tilde{v}(r, \theta).$$

Ici, la fonction de troncature  $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, [0; 1])$  est telle que  $\psi(r) = 1$  pour  $r \leq 1$  et  $\psi(r) = 0$  pour  $r \geq 2$ . Dans le Chapitre 5, nous avons introduit l'opérateur  $\mathcal{A}_\beta^{\text{out}} : V_\beta^{\text{out}}(\Omega) \rightarrow V_\beta^1(\Omega)^*$  tel que

$\langle \mathcal{A}_\beta^{\text{out}} u, v \rangle_\Omega = (\sigma^0 \nabla u, \nabla v)_\Omega$  pour tout  $u \in V_\beta^{\text{out}}(\Omega)$  et tout  $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ . Nous avons prouvé que  $\mathcal{A}_\beta^{\text{out}}$  constitue un opérateur Fredholm d'indice zéro.

Dans la suite, nous ferons l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 1** *Pour  $\beta \in ]0; 2[$ , l'opérateur  $\mathcal{A}_\beta^{\text{out}}$  est injectif.*

Par conséquent,  $\mathcal{A}_\beta^{\text{out}} : V_\beta^{\text{out}}(\Omega) \rightarrow V_\beta^1(\Omega)^*$  définit un isomorphisme et il existe une constante  $\mathfrak{K} > 0$  (qui dépend de  $\beta$ ) telle que

$$|c| + \|\tilde{v}\|_{V_{-\beta}^1(\Omega)} \leq \mathfrak{K} \|\mathcal{A}_\beta^{\text{out}} v\|_{V_\beta^1(\Omega)^*}, \quad \forall v = c\psi(r)r^{i\eta}\varphi(\theta) + \tilde{v} \in V_\beta^{\text{out}}(\Omega). \quad (6.5)$$

**Remarque 6.2.2** *D'après les résultats du Chapitre 5, nous savons que les éléments de  $\ker \mathcal{A}_\beta^{\text{out}}$  appartiennent à  $V_{-\beta}^1(\Omega)$ . Par conséquent, l'Hypothèse 1 équivaut à imposer que la seule fonction  $u \in V_{-\beta}^1(\Omega)$  vérifiant  $(\sigma^0 \nabla u, \nabla v)_\Omega = 0$  pour tout  $v \in V_{-\beta}^1(\Omega)$  est la fonction nulle.*

### 6.2.2 Géométrie interne

La seconde géométrie que nous considérons est obtenue en effectuant l'homothétie  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}/\delta$  de centre  $O$ . Par cette transformation,  $\Omega$  devient une nouvelle géométrie  $\Xi^\delta$  dans laquelle le coin arrondi est fixé. En passant formellement à la limite lorsque  $\delta \rightarrow 0$ , le domaine  $\Xi^\delta$  devient le domaine limite  $\Xi = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$  (voir la Figure 6.2). Les coordonnées polaires dans la *géométrie interne*  $\Xi$  sont notées  $(\rho, \theta)$ . Par ailleurs, nous notons  $\sigma^\infty$  la fonction telle que  $\sigma^\infty(\mathbf{x}) = \sigma_1$  pour  $\mathbf{x} \in \Xi_1$  et  $\sigma^\infty(\mathbf{x}) = \sigma_2$  pour  $\mathbf{x} \in \Xi_2$ .

Dans cette géométrie interne, nous aurons à considérer des problèmes similaires à (6.3). Par conséquent, pour  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $k \geq 0$ , nous introduisons l'espace  $W_\beta^k(\Xi)$  défini comme la fermeture de  $\mathcal{C}_0^\infty(\Xi)$  pour la norme

$$\|v\|_{W_\beta^k(\Xi)} := \left( \sum_{\alpha+\gamma \leq k} \int_\Xi (1+\rho)^{2(\beta+\alpha+\gamma-k)} |\partial_x^\alpha \partial_y^\gamma v|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}.$$

Pour ces espaces, le poids en  $(1+\rho)$  permet de mesurer le comportement des fonctions uniquement à l'infini et non en  $O$ . Remarquons que pour tout  $\beta$ , les éléments de  $W_\beta^1(\Xi)$  s'annulent sur  $\partial\Xi$ . La norme sur l'espace dual de  $W_\beta^1(\Xi)$  est définie de la façon suivante

$$\|g\|_{W_\beta^1(\Xi)^*} := \sup_{v \in W_\beta^1(\Xi) \setminus \{0\}} \frac{|\langle g, v \rangle_\Xi|}{\|v\|_{W_\beta^1(\Xi)}}$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Xi$  désigne le crochet de dualité  $W_\beta^1(\Xi)^* \times W_\beta^1(\Xi)$ . Introduisons un espace imposant un comportement propagatif bien particulier à l'infini. Pour  $0 < \beta < 2$ , définissons

$$W_{-\beta}^{\text{out}}(\Xi) := \text{vect}\{\chi(\rho)\rho^{-i\eta}\varphi(\theta)\} \oplus W_\beta^1(\Xi)$$

et munissons-le de la norme

$$\|v\|_{W_{-\beta}^{\text{out}}(\Xi)} := |c| + \|\tilde{v}\|_{W_\beta^1(\Xi)} \quad \text{pour } v(\rho, \theta) = c\chi(\rho)\rho^{-i\eta}\varphi(\theta) + \tilde{v}(\rho, \theta).$$

Ici, nous prenons  $\chi = 1 - \psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+, [0; 1])$ ,  $\psi$  étant la fonction de troncature définie dans le paragraphe précédent. En particulier, on a  $\chi(r) = 1$  pour  $r \geq 2$  et  $\chi(r) = 0$  pour  $r \leq 1$ . Dans cette seconde géométrie limite, définissons par densité l'opérateur  $\mathcal{A}_{-\beta}^{\text{out}} : W_{-\beta}^{\text{out}}(\Xi) \rightarrow W_{-\beta}^1(\Xi)^*$  tel que  $\langle \mathcal{A}_{-\beta}^{\text{out}} u, v \rangle_\Xi = (\sigma^\infty \nabla u, \nabla v)_\Xi$  pour tout  $u \in W_{-\beta}^{\text{out}}(\Xi)$  et tout  $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Xi)$ . Pour cet opérateur, on a un résultat similaire au Théorème 5.5.2 du Chapitre 5. Nous n'en donnons par la preuve car elle est très proche de celle du Théorème 5.5.2.

**Théorème 6.2.3** Pour  $\beta \in ]0; 2[$ , l'opérateur  $A_{-\beta}^{\text{out}} : W_{-\beta}^{\text{out}}(\Xi) \rightarrow W_{-\beta}^1(\Xi)^*$  est Fredholm d'indice zéro.

Imposons l'injectivité pour  $A_{-\beta}^{\text{out}}$ .

**Hypothèse 2** Pour  $\beta \in ]0; 2[$ , l'opérateur  $A_{-\beta}^{\text{out}}$  est injectif.

Ainsi, avec cette hypothèse,  $A_{-\beta}^{\text{out}}$  constitue un isomorphisme et il existe  $C > 0$  (qui dépend de  $\beta$ ) telle que

$$|c| + \|\tilde{v}\|_{W_{-\beta}^1(\Xi)} \leq C \|A_{-\beta}^{\text{out}} v\|_{W_{-\beta}^1(\Xi)^*}, \quad \forall v = c\chi(\rho)\rho^{-in}\varphi(\theta) + \tilde{v} \in W_{-\beta}^{\text{out}}(\Xi). \quad (6.6)$$

### 6.3 Résultat de stabilité

Dans cette section, nous appliquons la méthode du développement raccordé pour obtenir les premiers ordres dans le développement de  $u^\delta$ . Dans le problème qui nous intéresse, il apparaît une couche limite au voisinage du coin arrondi et nous avons besoin de calculer un développement en champ proche et un développement en champ lointain. Pour séparer les régions interne et externe, réintroduisons les fonctions de troncature régulières  $\chi$  et  $\psi$  telles que

$$\chi(r) + \psi(r) = 1, \quad \chi(r) = 1 \text{ pour } r \geq 2, \quad \text{et} \quad \chi(r) = 0 \text{ pour } r \leq 1.$$

Dans la suite, nous noterons  $\chi_t(r) = \chi(r/t)$  et  $\psi_t(r) = \psi(r/t)$  pour  $t > 0$ . Introduisons également la notation  $(\tau_t \cdot v)(r, \theta) := v(r/t, \theta)$  pour  $v \in L^2(\Omega)$ . Décomposons ensuite le terme source  $f \in H^{-1}(\Omega)$  en une contribution champ lointain indiquée par ext et une contribution champ proche indiquée par in :

$$f = f_{\text{ext}}^\delta + \tau_\delta \cdot F_{\text{in}}^\delta \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \langle f_{\text{ext}}^\delta, v \rangle_\Omega := \langle f, v\chi_{\sqrt{\delta}} \rangle_\Omega \\ \langle F_{\text{in}}^\delta, v \rangle_\Xi := \delta^{-2} \langle f, (\tau_\delta \cdot v)\psi_{\sqrt{\delta}} \rangle_\Omega \\ \langle \tau_\delta \cdot F_{\text{in}}^\delta, v \rangle_\Omega := \delta^2 \langle F_{\text{in}}^\delta, \tau_{1/\delta} \cdot v \rangle_\Xi \end{cases} \quad (6.7)$$

Dans le cas où  $f \in L^2(\Omega)$ , cette décomposition s'écrit simplement  $f(r, \theta) = f_{\text{ext}}^\delta(r, \theta) + F_{\text{in}}^\delta(r/\delta, \theta)$  avec  $f_{\text{ext}}^\delta(r, \theta) = f(r, \theta)\chi(r/\sqrt{\delta})$  et  $F_{\text{in}}^\delta(\rho, \theta) = f(\delta\rho, \theta)\psi(\rho\sqrt{\delta})$ . En particulier  $\text{supp}(f_{\text{ext}}^\delta)$  ne rencontre par l'origine et  $\text{supp}(F_{\text{in}}^\delta)$  est borné dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ . En conséquence, on a

$$f_{\text{ext}}^\delta \in V_\beta^1(\Omega)^* \quad \text{et} \quad F_{\text{in}}^\delta \in W_{-\beta}^1(\Xi)^*, \quad \forall \beta \in \mathbb{R}.$$

#### 6.3.1 Développement en champ lointain

Dans la région champ lointain, on cherche un développement de  $u^\delta(r, \theta)$  de la forme

$$u^\delta(r, \theta) = u_0^\delta(r, \theta) + a(\delta)\zeta(r, \theta) + \dots \quad (6.8)$$

Nous indiquons une dépendance par rapport à  $\delta$  pour le terme principal  $u_0^\delta$  car la donnée  $f_{\text{ext}}^\delta$  pour le développement en champ lointain présente cette dépendance. La fonction  $\zeta$ , elle, sera associée à une donnée nulle et c'est pourquoi nous ne mettons pas d'exposant  $\delta$ . Cependant, il est important de préciser que les fonctions  $u_0^\delta$  et  $\zeta$  sont définies dans la géométrie externe qui ne dépend pas de  $\delta$ . En injectant (6.8) dans l'équation (6.1), nous trouvons  $-\text{div}(\sigma^0 \nabla u_0^\delta) = f_{\text{ext}}^\delta$ . Pour obtenir une solution, nous travaillons dans  $V_\beta^{\text{out}}(\Omega)$  et considérons le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_0^\delta \in V_\beta^{\text{out}}(\Omega) \text{ tel que} \\ -\text{div}(\sigma^0 \nabla u_0^\delta) = f_{\text{ext}}^\delta \quad \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (6.9)$$

D'après l'Hypothèse 1, le terme  $u_0^\delta$  est donc défini de façon unique. De plus, par définition de  $V_\beta^{\text{out}}(\Omega)$ , on a

$$u_0^\delta(r, \theta) = c_0^\delta \psi(r)r^{in} \varphi(\theta) + \tilde{u}_0^\delta(r, \theta) \quad \text{où} \quad c_0^\delta \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \tilde{u}_0^\delta \in V_{-\beta}^1(\Omega). \quad (6.10)$$

Dans (6.8), pour le moment, nous ne savons pas quel est la forme adaptée pour la fonction de jauge  $a(\delta)$ . Nous déterminerons cela plus tard en appliquant le principe de développement raccordé. En injectant (6.8) dans (6.1), nous observons qu'on doit avoir les équations suivantes :

$$\operatorname{div}(\sigma^0 \nabla \zeta) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \zeta = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (6.11)$$

Nous devons chercher  $\zeta$  dans un espace plus grand que  $V_\beta^{\text{out}}(\Omega)$ , autrement nous serions obligés de conclure  $\zeta = 0$  ce qui est exclus. Pour  $\beta \in \mathbb{R}$ , considérons l'opérateur borné  $\mathcal{A}_\beta : V_\beta^1(\Omega) \rightarrow V_{-\beta}^1(\Omega)^*$  tel que  $\langle \mathcal{A}_\beta u, v \rangle_\Omega = (\sigma \nabla u, \nabla v)_\Omega$ , pour tout  $u \in V_\beta^1(\Omega)$  et tout  $v \in V_{-\beta}^1(\Omega)$ . Pour  $\beta = 0$ , puisque  $V_0^1(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ , on a  $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}^0$ , où  $\mathcal{A}^0$  a été défini dans le §6.1.2. L'équation (6.11) impose  $\zeta \in \ker \mathcal{A}_\beta$ . En choisissant  $\beta \in ]0; 2[$ , nous connaissons  $\zeta$  presque complètement, à une constante près  $c_\zeta \in \mathbb{C}$  en vertu de la proposition suivante.

**Proposition 6.3.1** *Pour  $\beta \in ]0; 2[$ , sous l'Hypothèse 1, on a  $\dim \ker \mathcal{A}_\beta = 1$ .*

**Preuve.** Notons  $w_1(r, \theta) = \psi(r)r^{-i\eta}\varphi(\theta)$ . D'après la construction de  $\varphi(\theta)$ , on a  $g = -\operatorname{div}(\sigma^0 \nabla w_1) \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ . Par conséquent, d'après le Théorème 5.5.2 du Chapitre 5 et l'Hypothèse 1, il existe un unique  $w_2 \in V_\beta^{\text{out}}(\Omega)$  tel que  $-\operatorname{div}(\sigma^0 \nabla w_2) = g$  dans  $\Omega$ . La fonction  $w := w_1 - w_2$  vérifie alors  $w \in \ker \mathcal{A}_\beta$ . Remarquons que  $w \neq 0$  puisque  $w - w_1 \in V_\beta^{\text{out}}(\Omega)$  et  $w_1 \notin V_\beta^{\text{out}}(\Omega)$ . Ainsi,  $\dim \ker \mathcal{A}_\beta \geq 1$ .

Supposons que  $v \in V_\beta^1(\Omega)$  soit un autre élément de  $\ker \mathcal{A}_\beta$ . Puisque  $\beta \in ]0; 2[$  et  $\Lambda \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Re \lambda \leq \beta\} = \{\pm i\eta\}$ , d'après le Théorème 5.6.6 du Chapitre 5, il existe  $c_2, c_1 \in \mathbb{C}$  tels que  $v(r, \theta) - (c_1 \psi(r)r^{i\eta} + c_2 \psi(r)r^{-i\eta})\varphi(\theta) \in V_{-\beta}^1(\Omega)$ . Par conséquent,  $v - c_2 w$  est un élément de  $V_\beta^{\text{out}}(\Omega)$  et  $v - c_2 w$  appartient à  $\ker \mathcal{A}_\beta^{\text{out}}$ . Ceci implique  $v - c_2 w = 0$  car  $\mathcal{A}_\beta^{\text{out}} : V_\beta^{\text{out}}(\Omega) \rightarrow V_\beta^1(\Omega)^*$  définit un isomorphisme. Ainsi,  $\dim \ker \mathcal{A}_\beta \leq 1$ . ■

D'après (6.11), nous devons avoir  $\zeta \in \ker \mathcal{A}_\beta$ . En ajustant la fonction de jauge  $a(\delta)$  si nécessaire, nous pouvons choisir  $\zeta$  comme l'unique élément de  $\ker \mathcal{A}_\beta$  admettant le développement suivant

$$\zeta(r, \theta) = \psi(r)r^{-i\eta}\varphi(\theta) + c_\zeta \psi(r)r^{i\eta}\varphi(\theta) + \tilde{\zeta}(r, \theta) \quad \text{avec } \tilde{\zeta} \in V_{-\beta}^1(\Omega) \text{ et } \beta \in ]0; 2[. \quad (6.12)$$

**Lemme 6.3.2** *La constante  $c_\zeta \in \mathbb{C}$  du développement (6.12) vérifie  $|c_\zeta| = 1$ .*

**Preuve.** De façon très classique, nous allons prouver ce résultat en effectuant un bilan énergétique. Puisque  $\zeta \in \ker \mathcal{A}_\beta$ , d'après la définition de  $\mathcal{A}_\beta$ , on a  $0 = \Im m \langle \mathcal{A}_\beta \zeta, \chi_\varepsilon \bar{\zeta} \rangle_\Omega = \Im m \int_\Omega \sigma^0 \nabla \zeta \cdot \nabla(\chi_\varepsilon \bar{\zeta}) d\mathbf{x} = \Im m \int_\Omega \sigma^0 \bar{\zeta} \partial_r \zeta \partial_r \chi_\varepsilon d\mathbf{x}$ . Regardons le comportement de cette expression lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . En utilisant (6.12), on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \Im m \int_\Omega \sigma^0 \bar{\zeta} \partial_r \zeta \partial_r \chi_\varepsilon d\mathbf{x} = \int_0^\pi \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \sigma^0(\theta) \Im m (\bar{\zeta} \partial_r \zeta \partial_r \chi_\varepsilon) r dr d\theta \\ &= \eta \int_0^\pi \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \sigma^0(\theta) |\varphi(\theta)|^2 (1 - |c_\zeta|^2) \partial_r \chi_\varepsilon dr d\theta + O(\varepsilon) \\ &= (1 - |c_\zeta|^2) \eta \int_0^\pi \sigma^0(\theta) |\varphi(\theta)|^2 d\theta \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \partial_r \chi_\varepsilon dr + O(\varepsilon) \\ &= (1 - |c_\zeta|^2) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Ceci implique  $1 - |c_\zeta|^2 = 0$  et conduit au résultat de ce lemme. ■

Pour résumer, d'un point de vue formel, à un reste près en  $\delta$ , on a le développement quand  $r \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} u^\delta(r, \theta) &= u_0^\delta(r, \theta) + a(\delta) \zeta(r, \theta) + \dots \\ &= (c_0^\delta + a(\delta)c_\zeta) r^{i\eta} \varphi(\theta) + a(\delta) r^{-i\eta} \varphi(\theta) + \dots \end{aligned} \quad (6.13)$$

### 6.3.2 Développement en champ proche

Dans la région interne, près de  $O$ , nous considérons le changement de variable  $r = \delta\rho$ , nous définissons  $U^\delta(\rho, \theta) = u^\delta(r, \theta)$  et nous cherchons un développement de  $U^\delta(\rho, \theta)$  de la forme

$$U^\delta(\rho, \theta) = A(\delta) Z(\rho, \theta) + \delta^2 U_1^\delta(\rho, \theta) + \dots \quad (6.14)$$

Comme pour le développement en champ lointain, nous ne savons pas pour le moment quelle est la forme de la fonction de jauge  $A(\delta)$ . Nous la déterminerons au cours de l'étape de raccordement des développements asymptotiques. Nous avons introduit le terme  $\delta^2 U_1^\delta(\rho, \theta)$  dans l'optique de compenser la contribution  $F_{\text{in}}^\delta$  venant du terme source. En utilisant la relation  $r = \delta\rho$  et en injectant (6.14) dans (6.1), nous sommes conduits à

$$\operatorname{div}(\sigma^\infty \nabla Z) = 0 \quad \text{dans } \Xi, \quad Z = 0 \quad \text{sur } \partial\Xi. \quad (6.15)$$

La fonction  $Z$  doit être cherchée dans un espace plus vaste que  $W_{-\beta}^{\text{out}}(\Xi)$  pour ne pas avoir  $Z = 0$ . Pour  $\beta \in \mathbb{R}$ , définissons l'opérateur continu  $A_{-\beta} : W_{-\beta}^1(\Xi) \rightarrow W_\beta^1(\Xi)^*$  tel que  $\langle A_{-\beta} u, v \rangle_\Xi = (\sigma^\infty \nabla u, \nabla v)_\Xi$  pour tout  $u \in W_{-\beta}^1(\Xi)$  et tout  $v \in W_\beta^1(\Xi)$ . L'équation (6.15) détermine  $Z \in W_{-\beta}^1(\Xi)$ , pour  $\beta \in ]0; 2[$ , à une constante multiplicative près d'après la

**Proposition 6.3.3** *Pour  $\beta \in ]0; 2[$ , sous l'Hypothèse 2, on a  $\dim \ker A_{-\beta} = 1$ .*

Cette proposition se montre de la même façon que la Proposition 6.3.1. En ajustant la fonction de jauge  $A(\delta)$  si nécessaire, nous pouvons choisir  $Z(\rho, \theta)$  comme l'unique élément de  $\ker A_{-\beta}$  qui admet le développement

$$Z(\rho, \theta) = \chi(\rho) \rho^{i\eta} \varphi(\theta) + c_z \chi(\rho) \rho^{-i\eta} \varphi(\theta) + \tilde{Z}(\rho, \theta) \quad \text{avec } \tilde{Z} \in W_\beta^1(\Xi) \text{ et } \beta \in ]0; 2[. \quad (6.16)$$

L'existence d'un tel développement pour  $Z(\rho, \theta)$  est une conséquence d'un calcul de résidu classique dans la théorie de la transformée de Mellin (cf. Chapitre 3). De nouveau, nous utilisons le fait que pour  $\beta \in ]0; 2[$ , on a  $\Lambda \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Re \lambda \leq \beta\} = \{\pm i\eta\}$ , où  $\Lambda$  désigne l'ensemble des exposants de singularité défini en (6.4). Concernant le coefficient  $c_z$ , on a un résultat similaire au Lemme 6.3.2.

**Lemme 6.3.4** *La constante  $c_z \in \mathbb{C}$  qui intervient dans le développement (6.16) vérifie  $|c_z| = 1$ .*

Maintenant, étudions le second terme dans l'asymptotique de  $U^\delta$ . En injectant le développement (6.14) dans (6.1) et en utilisant la définition de  $F_{\text{in}}^\delta(\rho, \theta)$ , nous obtenons formellement le problème suivant pour  $U_1^\delta$  :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } U_1^\delta \in W_{-\beta}^{\text{out}}(\Xi) \text{ tel que} \\ -\operatorname{div}(\sigma^\infty \nabla U_1^\delta) = F_{\text{in}}^\delta. \end{array} \right.$$

D'après le Théorème 6.2.3,  $U_1^\delta$  est déterminé de façon unique. Remarquons que par définition de  $W_{-\beta}^{\text{out}}(\Xi)$ , on a le développement suivant

$$U_1^\delta(\rho, \theta) = c_1^\delta \chi(\rho) \rho^{-i\eta} \varphi(\theta) + \tilde{U}_1^\delta(\rho, \theta) \quad \text{où } c_1^\delta \in \mathbb{C} \text{ et } \tilde{U}_1^\delta \in W_\beta^1(\Xi). \quad (6.17)$$

Pour récapituler, à un reste près en  $\delta$ , le champ proche admet le développement suivant lorsque  $\rho = r/\delta \rightarrow +\infty$ ,

$$\begin{aligned} U^\delta(\rho, \theta) &= A(\delta) Z(\rho, \theta) + \delta^2 U_1^\delta(\rho, \theta) + \dots \\ &= A(\delta) \rho^{i\eta} \varphi(\theta) + (A(\delta) c_z + \delta^2 c_1^\delta) \rho^{-i\eta} \varphi(\theta) + \dots, \\ \text{i.e., } u^\delta(r, \theta) &= A(\delta) \left(\frac{r}{\delta}\right)^{i\eta} \varphi(\theta) + (A(\delta) c_z + \delta^2 c_1^\delta) \left(\frac{r}{\delta}\right)^{-i\eta} \varphi(\theta) + \dots \quad (6.18) \end{aligned}$$

### 6.3.3 Le principe de raccord

Pour conclure la construction des premiers termes de l'asymptotique de  $u^\delta$ , il nous reste à déterminer les fonctions de jauge  $a(\delta)$  et  $A(\delta)$ . Pour ce faire, nous allons appliquer le principe de raccord qui consiste dans le cas présent, à égaliser les développements (6.13) et (6.18) lorsque  $r, \delta \rightarrow 0$ . Nous obtenons

$$(c_0^\delta + a(\delta)c_\zeta) r^{i\eta} \varphi(\theta) + a(\delta) r^{-i\eta} \varphi(\theta) = A(\delta) \left(\frac{r}{\delta}\right)^{i\eta} \varphi(\theta) + A(\delta) c_z \left(\frac{r}{\delta}\right)^{-i\eta} \varphi(\theta). \quad (6.19)$$

Pour le raccord, nous ne prenons pas en compte le terme dans (6.18) mettant en jeu  $c_1^\delta$  car il est d'un ordre inférieur, puisque multiplié par  $\delta^2$ . Comme  $r^{i\eta}$  et  $r^{-i\eta}$  sont indépendants, l'équation (6.19) conduit aux conditions de raccord suivantes

$$c_0^\delta + a(\delta)c_\zeta = A(\delta) \delta^{-i\eta} \quad \text{et} \quad a(\delta) = A(\delta) c_z \delta^{i\eta}. \quad (6.20)$$

Dans ces équations,  $c_0^\delta, c_\zeta, c_z$  sont des données connues. Le système (6.20) en  $a(\delta), A(\delta)$  possède une unique solution sous la condition suivante

$$\delta^{-2i\eta} \neq c_z c_\zeta. \quad (6.21)$$

Cette condition nécessite des commentaires. Tout d'abord, remarquons qu'il n'est pas commun que la définition des termes du développement asymptotique nécessite une condition sur  $\delta$ . Observons également que, puisque  $|c_z c_\zeta| = 1$  d'après les Lemmes 6.3.2 et 6.3.4, il existe  $\delta_\star \in ]0; +\infty[$  tel que  $c_z c_\zeta = \delta_\star^{-2i\eta}$ . Par conséquent, la condition (6.21) n'est pas satisfaite pour  $\delta$  appartenant à  $\{(e^{\pi/\eta})^k \delta_\star, k \in \mathbb{Z}\}$ . C'est une situation inconfortable car l'ensemble  $\{(e^{\pi/\eta})^k \delta_\star, k \in \mathbb{Z}\}$  admet 0 comme point d'accumulation, si bien que (6.21) ne peut être garantie en imposant une condition de la forme «  $\delta \in ]0; \delta_0[$  pour un certain  $\delta_0 > 0$  suffisamment petit ». Dans le cas où (6.21) est vraie, on a l'expression suivante pour les fonctions de jauge

$$a(\delta) = \frac{c_0^\delta c_z \delta^{2i\eta}}{1 - (\delta/\delta_\star)^{2i\eta}} \quad \text{et} \quad A(\delta) = \frac{c_0^\delta \delta^{i\eta}}{1 - (\delta/\delta_\star)^{2i\eta}}.$$

D'après ces relations, lorsque  $\delta \rightarrow 0$ , les deux fonctions de jauge sont *a priori* non bornées, ce qui brise tout espoir d'établir une estimation *a priori*. Pour cette raison, nous devons imposer une restriction sur l'ensemble des valeurs de  $\delta$ .

**Définition 6.3.5** Pour  $\alpha \in ]0; 1/2[$ , définissons  $I(\alpha) := \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} [\delta_\star e^{(k+\alpha)\frac{\pi}{\eta}}; \delta_\star e^{(k+1-\alpha)\frac{\pi}{\eta}}]$ .

Notons que  $I(\alpha)$  admet 0 comme point d'accumulation. Dans la suite de ce chapitre, la phrase «  $\delta \rightarrow 0$  » doit être comprise dans le sens  $\delta \rightarrow 0$  et  $\delta \in I(\alpha)$  pour un certain  $\alpha \in ]0; 1/2[$ . Pour  $\delta \in I(\alpha)$ , les fonctions de jauge restent bornées lorsque  $\delta \rightarrow 0$ , *i.e.* il existe  $C_\alpha > 0$  indépendante de  $\delta$  telle que

$$|a(\delta)| + |A(\delta)| \leq C_\alpha |c_0^\delta|, \quad \forall \delta \in I(\alpha). \quad (6.22)$$

### 6.3.4 Champ approché

Dans ce paragraphe, nous construisons une approximation  $\hat{u}^\delta$  de  $u^\delta$  au moyen des développements en champ proche et lointain. En accord avec la méthode des développements raccordés et en observant que  $\chi_\delta(r) + \psi(r) - \psi(r)\chi_\delta(r) = 1$ , définissons

$$\hat{u}^\delta(r, \theta) := u_{\text{ext}}^\delta(r, \theta)\chi_\delta(r) + U_{\text{in}}^\delta(r/\delta, \theta)\psi(r) - m^\delta(r, \theta)\chi_\delta(r)\psi(r)$$

avec

$$\begin{cases} u_{\text{ext}}^\delta(r, \theta) &= u_0^\delta(r, \theta) + a(\delta)\zeta(r, \theta) \\ U_{\text{in}}^\delta(\rho, \theta) &= A(\delta)Z(\rho, \theta) + \delta^2 U_1^\delta(\rho, \theta) \\ m^\delta(r, \theta) &= A(\delta)(r/\delta)^{i\eta}\varphi(\theta) + a(\delta)r^{-i\eta}\varphi(\theta) \end{cases}. \quad (6.23)$$

Rappelons que nous avons introduit l'application  $\tau_\delta$ , telle que, pour toute fonction  $v$ ,  $(\tau_\delta \cdot v)(r, \theta) := v(r/\delta, \theta)$ . Vérifions que  $\hat{u}^\delta$  satisfait l'équation (6.1) à un « petit » reste près. Tout d'abord, il est clair, d'après la définition de  $\zeta, Z, u_0^\delta, U_1^\delta$  et  $\varphi(\theta)$ , que  $\hat{u}^\delta = 0$  sur  $\partial\Omega$  pour  $\delta$  suffisamment petit. Ensuite, pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ , on trouve

$$\begin{aligned} (\sigma^\delta \nabla \hat{u}^\delta, \nabla v)_\Omega &= (\sigma^0 \nabla (\chi_\delta u_{\text{ext}}^\delta), \nabla v)_\Omega + (\sigma^\delta \nabla \tau_\delta \cdot (\psi_{1/\delta} U_{\text{in}}^\delta), \nabla v)_\Omega - (\sigma^\delta \nabla (\chi_\delta \psi m^\delta), \nabla v)_\Omega \\ &= \langle f_{\text{ext}}^\delta, \chi_\delta v \rangle_\Omega + (\sigma^0 \nabla \chi_\delta, u_{\text{ext}}^\delta \nabla v - v \nabla u_{\text{ext}}^\delta)_\Omega \\ &\quad + \langle \delta^2 F_{\text{in}}^\delta, \psi_{1/\delta} (\tau_{1/\delta} \cdot v) \rangle_\Xi + (\sigma^\infty \nabla \psi_{1/\delta}, U_{\text{in}}^\delta \nabla (\tau_{1/\delta} \cdot v) - (\tau_{1/\delta} \cdot v) \nabla U_{\text{in}}^\delta)_\Xi \\ &\quad - (\sigma^\delta \nabla (\chi_\delta \psi), m^\delta \nabla v - v \nabla m^\delta)_\Omega. \end{aligned}$$

Dans le calcul ci-dessus, nous avons utilisé le fait que  $\sigma^\delta = \sigma^0$  sur  $\text{supp}(\chi_\delta)$  et  $\sigma^\delta = \tau_\delta \cdot \sigma^\infty$  sur  $\text{supp}(\psi)$ . Nous avons également utilisé la l'égalité  $(\sigma^\delta \nabla m^\delta, \nabla v)_\Omega = 0$  pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$  tel que  $\text{supp}(v) \subset \text{supp}(\chi_\delta \psi)$  (ceci provient de la définition de  $\varphi(\theta)$ ). Maintenant, observons que  $f_{\text{ext}}^\delta \chi_\delta = f_{\text{ext}}^\delta$  et  $F_{\text{in}}^\delta \psi_{1/\delta} = F_{\text{in}}^\delta$  pour  $\delta$  assez petit. Rappelons que  $f = f_{\text{ext}}^\delta + \tau_\delta \cdot F_{\text{in}}^\delta$ , et  $-\chi_\delta \psi = 1 - \chi_\delta - \psi$ . Notons  $M^\delta := \tau_{1/\delta} \cdot m^\delta$ . Nous obtenons

$$\begin{aligned} (\sigma^\delta \nabla \hat{u}^\delta, \nabla v)_\Omega &= \langle f, v \rangle_\Omega \\ &\quad + (\sigma^0 \nabla \chi_\delta, (u_{\text{ext}}^\delta - m^\delta) \nabla v - v \nabla (u_{\text{ext}}^\delta - m^\delta))_\Omega \\ &\quad + (\sigma^\infty \nabla \psi_{1/\delta}, (U_{\text{in}}^\delta - M^\delta) \nabla (\tau_{1/\delta} \cdot v) - (\tau_{1/\delta} \cdot v) \nabla (U_{\text{in}}^\delta - M^\delta))_\Xi. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Ainsi  $\hat{u}^\delta$  vérifie bien la même équation que (6.1) à un reste près. Remarquons que  $u_0^\delta, U_1^\delta$  et  $a(\delta), A(\delta)$  dépendent linéairement de  $f$ . Par conséquent, nous pouvons introduire les opérateurs  $\hat{R}^\delta : H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$  et  $K^\delta : H^{-1}(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  définis respectivement par  $\hat{R}^\delta f = \hat{u}^\delta$  et

$$\begin{aligned} \langle K^\delta f, v \rangle_\Omega &= (\sigma^0 \nabla \chi_\delta, (u_{\text{ext}}^\delta - m^\delta) \nabla v - v \nabla (u_{\text{ext}}^\delta - m^\delta))_\Omega \\ &\quad + (\sigma^\infty \nabla \psi_{1/\delta}, (U_{\text{in}}^\delta - M^\delta) \nabla (\tau_{1/\delta} \cdot v) - (\tau_{1/\delta} \cdot v) \nabla (U_{\text{in}}^\delta - M^\delta))_\Xi \end{aligned} \quad (6.25)$$

pour tout  $f \in H^{-1}(\Omega)$  et  $v \in H_0^1(\Omega)$ . D'après (6.24), on l'identité suivante

$$\mathcal{A}^\delta \cdot \hat{R}^\delta = \text{Id} + K^\delta, \quad (6.26)$$

où nous rappelons que  $\mathcal{A}^\delta : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  désigne l'opérateur tel que  $\langle \mathcal{A}^\delta u, v \rangle_\Omega = (\sigma^\delta \nabla u, \nabla v)_\Omega$ , pour  $u, v$  dans  $H_0^1(\Omega)$ . Nous allons prouver que la norme de  $K^\delta$  est petite devant 1 de sorte que  $\hat{R}^\delta \cdot (\text{Id} + K^\delta)^{-1}$  constitue un inverse à droite de  $\mathcal{A}^\delta$ . Puisque  $\mathcal{A}^\delta$  est autoadjoint, cela prouvera que  $\hat{R}^\delta \cdot (\text{Id} + K^\delta)^{-1}$  est également un inverse à gauche pour  $\mathcal{A}^\delta$  et conduira au résultat de stabilité désiré. Nous avons besoin d'une estimation de  $K^\delta$  en norme d'opérateur lorsque  $\delta \rightarrow 0$ . Cette estimation sera formulée dans une norme plutôt inhabituelle dépendant de  $\delta$ . Définissons

$$\begin{aligned} \|v\|_{V_{\beta, \delta}^1(\Omega)} &:= \left( \int_\Omega (\delta + r)^{2\beta} |\nabla v|^2 r dr d\theta + \int_\Omega (\delta + r)^{2(\beta-1)} |v|^2 r dr d\theta \right)^{1/2} \\ \text{et } \|g\|_{V_{\beta, \delta}^1(\Omega)^*} &:= \sup_{v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{|\langle g, v \rangle|}{\|v\|_{V_{\beta, \delta}^1(\Omega)}}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Pour  $\delta > 0$  fixé, il y a une équivalence claire entre  $\|\cdot\|_{V_{\beta, \delta}^1(\Omega)}$  et la norme usuelle  $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ . Cependant, pour  $\delta$  tendant vers 0, ces deux normes adoptent des comportements différents. Les normes (6.27) sont bien adaptées à l'analyse asymptotique que nous souhaitons mener car elles partagent des similarités avec les normes à poids classiques.

### 6.3.5 Estimation du reste

Pour  $f \in H^{-1}(\Omega)$  fixé, nous bornons  $\|K^\delta f\|_{V_{\beta, \delta}^1(\Omega)^*}$  au moyen de  $\|f\|_{V_{\beta, \delta}^1(\Omega)^*}$ . Dans cette optique, observons que  $\sup_{\mathbb{R}} |r \partial_r \chi_\delta|$  et  $\sup_{\mathbb{R}} |\rho \partial_\rho \psi_{1/\delta}|$  restent uniformément bornées lorsque  $\delta \rightarrow 0$ . De plus,

$K^\delta f$  dépend uniquement des valeurs de  $u_{\text{ext}}^\delta - m^\delta$  et  $U_{\text{in}}^\delta - M^\delta$  dans les régions  $\mathbb{Q}^\delta$  et  $\mathbb{Q}^{1/\delta}$ , avec  $\mathbb{Q}^t := \{\mathbf{x}(r, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \mid t \leq r \leq 2t\}$  pour  $t > 0$ . Par conséquent, d'après (6.25), pour  $\beta, \varepsilon \in \mathbb{R}$  dont les valeurs seront précisées plus tard, on a<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} |\langle K^\delta f, v \rangle_\Omega| &\leq C \|u_{\text{ext}}^\delta - m^\delta\|_{V_{-\beta-\varepsilon}^1(\mathbb{Q}^\delta)} \|v\|_{V_{\beta+\varepsilon}^1(\mathbb{Q}^\delta)} \\ &+ C \|U_{\text{in}}^\delta - M^\delta\|_{W_{\beta-\varepsilon}^1(\mathbb{Q}^{1/\delta})} \|\tau_{1/\delta} \cdot v\|_{W_{-\beta+\varepsilon}^1(\mathbb{Q}^{1/\delta})}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Dans l'estimation ci-dessus, nous utilisons le fait que  $\text{supp}(\nabla \chi_\delta) \subset \mathbb{Q}^\delta$  et  $\text{supp}(\nabla \psi_{1/\delta}) \subset \mathbb{Q}^{1/\delta}$ . Bornons d'abord les termes mettant en jeu la fonction test  $v \in H_0^1(\Omega)$  :

$$\begin{aligned} \|v\|_{V_{\beta+\varepsilon}^1(\mathbb{Q}^\delta)} &\leq C \delta^\varepsilon \|v\|_{V_\beta^1(\mathbb{Q}^\delta)} \leq C \delta^\varepsilon \|v\|_{V_{\beta,\delta}^1(\mathbb{Q}^\delta)} \leq C \delta^\varepsilon \|v\|_{V_{\beta,\delta}^1(\Omega)} \\ \|\tau_{1/\delta} \cdot v\|_{W_{-\beta+\varepsilon}^1(\mathbb{Q}^{1/\delta})} &= \delta^{\beta-\varepsilon} \|v\|_{V_{-\beta+\varepsilon,\delta}^1(\mathbb{Q}^1)} \leq C \delta^{\beta-\varepsilon} \|v\|_{V_{\beta,\delta}^1(\mathbb{Q}^1)} \leq C \delta^{\beta-\varepsilon} \|v\|_{V_{\beta,\delta}^1(\Omega)}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

En injectant (6.29) dans (6.28), en divisant par  $\|v\|_{V_{\beta,\delta}^1(\Omega)}$  et en prenant le supremum sur tout les  $v \in H_0^1(\Omega)$ , nous obtenons

$$\|K^\delta f\|_{V_{\beta,\delta}^1(\Omega)^*} \leq C \delta^\varepsilon \|u_{\text{ext}}^\delta - m^\delta\|_{V_{-\beta-\varepsilon}^1(\mathbb{Q}^\delta)} + C \delta^{\beta-\varepsilon} \|U_{\text{in}}^\delta - M^\delta\|_{W_{\beta-\varepsilon}^1(\mathbb{Q}^{1/\delta})}. \quad (6.30)$$

Bornons les termes associés à  $u_{\text{ext}}^\delta - m^\delta = \tilde{u}_0^\delta + a(\delta)\tilde{\zeta} \in V_\gamma^1(\Omega)$  pour tout  $\gamma \in ]-2; 0[$ . Fixons  $\beta \in ]0; 2[$ . Choisissons  $\varepsilon > 0$  tel que  $\beta + \varepsilon < 2$ . D'après (6.5) et (6.9), nous avons

$$\begin{aligned} \|u_{\text{ext}}^\delta - m^\delta\|_{V_{-\beta-\varepsilon}^1(\mathbb{Q}^\delta)} &\leq |a(\delta)| \|\tilde{\zeta}\|_{V_{-\beta-\varepsilon}^1(\Omega)} + \|\tilde{u}_0^\delta\|_{V_{-\beta-\varepsilon}^1(\Omega)} \\ &\leq C |c_0^\delta| + \|\tilde{u}_0^\delta\|_{V_{-\beta-\varepsilon}^1(\Omega)} \leq C \|f_{\text{ext}}^\delta\|_{V_{\beta+\varepsilon}^1(\Omega)^*}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Maintenant, bornons le terme de (6.30) associé à  $U_{\text{in}}^\delta - M^\delta = A(\delta)\tilde{Z} + \delta^2 U_1^\delta$ . Imposons à  $\varepsilon$  de vérifier la relation  $0 < \beta - \varepsilon$ . D'après (6.22) et puisque  $\tilde{Z} \in W_\gamma^1(\Xi)$  pour tout  $\gamma \in ]0; 2[$ , nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \|U_{\text{in}}^\delta - M^\delta\|_{W_{\beta-\varepsilon}^1(\mathbb{Q}^{1/\delta})} &\leq |A(\delta)| \|\tilde{Z}\|_{W_{\beta-\varepsilon}^1(\Xi)} + \delta^2 \|U_1^\delta\|_{W_{\beta-\varepsilon}^1(\mathbb{Q}^{1/\delta})} \\ &\leq C |c_0^\delta| + C \delta^{2-\beta+\varepsilon} (|c_1^\delta| + \|\tilde{U}_1^\delta\|_{W_{\beta-\varepsilon}^1(\Xi)}) \\ &\leq C \|f_{\text{ext}}^\delta\|_{V_{\beta-\varepsilon}^1(\Omega)^*} + C \delta^{2-\beta+\varepsilon} \|F_{\text{in}}^\delta\|_{W_{-\beta+\varepsilon}^1(\Xi)^*}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

En injectant (6.31) et (6.32) dans (6.30), nous trouvons alors

$$\|K^\delta f\|_{V_{\beta,\delta}^1(\Omega)^*} \leq C \delta^\varepsilon \|f_{\text{ext}}^\delta\|_{V_{\beta+\varepsilon}^1(\Omega)^*} + C \delta^{\beta-\varepsilon} \|f_{\text{ext}}^\delta\|_{V_{\beta-\varepsilon}^1(\Omega)^*} + C \delta^2 \|F_{\text{in}}^\delta\|_{W_{-\beta+\varepsilon}^1(\Xi)^*}. \quad (6.33)$$

Pour conclure l'estimation, il ne reste plus qu'à examiner séparément chacun des termes qui apparaissent dans le membre de droite ci-dessus.

### Borne pour le membre de droite de (6.33)

Nous avons d'abord besoin d'une borne pour  $f_{\text{ext}}^\delta$ . Fixons  $\nu = \pm\varepsilon$ . Considérons  $v$  un élément de  $V_{\beta+\nu}^1(\Omega)$ . Notons que  $v\chi_{\sqrt{\delta}} \in H_0^1(\Omega)$ . Observons également que  $\|v\chi_{\sqrt{\delta}}\|_{V_{\beta,\delta}^1(\Omega)} \leq C \delta^{-\nu/2} \|v\|_{V_{\beta+\nu}^1(\Omega)}$ . D'après (6.7), nous avons

$$\begin{aligned} |\langle f_{\text{ext}}^\delta, v \rangle_\Omega| &= |\langle f, v\chi_{\sqrt{\delta}} \rangle_\Omega| \leq \|f\|_{V_{\beta,\delta}^1(\Omega)^*} \|v\chi_{\sqrt{\delta}}\|_{V_{\beta,\delta}^1(\Omega)} \\ &\leq C \delta^{-\nu/2} \|f\|_{V_{\beta,\delta}^1(\Omega)^*} \|v\|_{V_{\beta+\nu}^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

3. N.B. : dans ce paragraphe et le suivant,  $C > 0$  désigne une constante indépendante de  $\delta$  qui peut varier d'une ligne à l'autre.

Divisons par  $\|v\|_{V_{\beta+\nu}^1(\Omega)}$  et prenons le supremum sur tous les  $v$ . Dans les deux cas  $\nu = \pm\varepsilon$ , nous obtenons

$$\|f_{\text{ext}}^\delta\|_{V_{\beta+\varepsilon}^1(\Omega)^*} \leq C \delta^{-\varepsilon/2} \|f\|_{V_{\beta,\delta}^1(\Omega)^*} \quad \text{et} \quad \|f_{\text{ext}}^\delta\|_{V_{\beta-\varepsilon}^1(\Omega)^*} \leq C \delta^{\varepsilon/2} \|f\|_{V_{\beta,\delta}^1(\Omega)^*}. \quad (6.34)$$

Pour obtenir une borne pour  $F_{\text{in}}^\delta$ , considérons  $v \in W_{-\beta}^1(\Xi)$ . En utilisant la définition de  $F_{\text{in}}^\delta$  donnée en (6.7) et puisque  $\rho \leq 2/\sqrt{\delta}$  dans  $\text{supp}(\psi_{1/\sqrt{\delta}})$ , nous trouvons

$$\begin{aligned} |\langle F_{\text{in}}^\delta, v \rangle_\Xi| &\leq \delta^{-2} \|f\|_{V_{\beta,\delta}^1(\Omega)^*} \|(\tau_\delta v) \psi_{\sqrt{\delta}}\|_{V_{\beta,\delta}^1(\Omega)} \\ &\leq \delta^{\beta-2} \|f\|_{V_{\beta,\delta}^1(\Omega)^*} \|v \psi_{1/\sqrt{\delta}}\|_{W_{-\beta}^1(\Xi)} \leq C \delta^{-2+\varepsilon/2} \|f\|_{V_{\beta,\delta}^1(\Omega)^*} \|v\|_{W_{-\beta+\varepsilon}^1(\Xi)}. \end{aligned}$$

Divisant par  $\|v\|_{W_{-\beta+\varepsilon}^1(\Xi)}$  et prenant le supremum sur les  $v$ , nous pouvons écrire

$$\|F_{\text{in}}^\delta\|_{W_{-\beta+\varepsilon}^1(\Xi)^*} \leq C \delta^{-2+\varepsilon/2} \|f\|_{V_{\beta,\delta}^1(\Omega)^*}. \quad (6.35)$$

### Conclusion de l'estimation

Nous concluons le calcul en injectant (6.34) et (6.35) dans (6.33). Pour  $\varepsilon > 0$  tel que  $\beta + \varepsilon < 2$  et  $\beta - \varepsilon > 0$ , cela montre qu'il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $\delta$  telle que

$$\|K^\delta f\|_{V_{\beta,\delta}^1(\Omega)^*} \leq C (\delta^{\varepsilon/2} + \delta^{\beta-\varepsilon/2}) \|f\|_{V_{\beta,\delta}^1(\Omega)^*}, \quad \forall f \in H^{-1}(\Omega), \quad \forall \delta \in ]0; 1[ \cap I(\alpha). \quad (6.36)$$

Ce résultat signifie qu'au sens d'une norme bien choisie, l'opérateur  $K^\delta$  tend vers 0 lorsque  $\delta \rightarrow 0$ . Pour tout opérateur borné  $T : H^{-1}(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ , définissons la norme

$$\|T, V_{\beta,\delta}^1(\Omega)^* \rightarrow V_{\beta,\delta}^1(\Omega)^*\| := \sup_{g \in H^{-1}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|Tg\|_{V_{\beta,\delta}^1(\Omega)^*}}{\|g\|_{V_{\beta,\delta}^1(\Omega)^*}}.$$

Nous venons de montrer que  $\|K^\delta, V_{\beta,\delta}^1(\Omega)^* \rightarrow V_{\beta,\delta}^1(\Omega)^*\|$  tend vers 0 lorsque  $\delta \rightarrow 0$ . Par conséquent, l'opérateur  $\text{Id} + K^\delta$ , qui intervient dans le membre de droite de (6.24), est inversible pour  $\delta$  suffisamment petit. Ainsi  $\hat{R}^\delta \cdot (\text{Id} + K^\delta)^{-1}$  constitue la résolvante de l'opérateur  $\mathcal{A}^\delta$ .

C'est un résultat intéressant car il montre que, dès lors que les Hypothèses 1 et 2 sont vérifiées, le problème (6.1), posé dans  $H_0^1(\Omega)$  possède une unique solution pour  $\delta \in I(\alpha)$  suffisamment petit.

### 6.3.6 Résultat de stabilité

Nous utilisons ceci pour prouver une estimation de stabilité pour le problème (6.1). Pour l'obtenir, nous avons besoin de borner  $\hat{R}^\delta$  pour la norme dépendant de  $\delta$  suivante :

$$\|T, V_{\beta,\delta}^1(\Omega)^* \rightarrow H_0^1(\Omega)\| := \sup_{g \in H^{-1}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|Tg\|_{H_0^1(\Omega)}}{\|g\|_{V_{\beta,\delta}^1(\Omega)^*}}.$$

Pour  $f \in H^{-1}(\Omega)$  fixé, revenons à l'expression de  $\hat{R}^\delta f = \hat{u}^\delta$  fournie par (6.23). Notons  $\mathbb{T}^\delta := \{\mathbf{x}(r, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \mid r \geq \delta\}$ . Il est facile de vérifier que  $\|\chi_\delta v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|v\|_{V_0^1(\mathbb{T}^\delta)}$  pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$  et tout  $\delta \in ]0; 1[$ . Par conséquent, on a

$$\|\hat{u}^\delta\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|u_{\text{ext}}^\delta\|_{V_0^1(\mathbb{T}^\delta)} + C \|m^\delta\|_{V_0^1(\mathbb{T}^\delta)} + \|\tau_\delta \cdot (\psi_{1/\delta} U_{\text{in}}^\delta)\|_{H_0^1(\Omega)}. \quad (6.37)$$

Par un calcul direct, en prenant en compte (6.22), en appliquant (6.5) à  $c_0^\delta$  et en utilisant (6.34) avec  $\varepsilon = 0$ , on obtient

$$\|m^\delta\|_{V_0^1(\mathbb{T}^\delta)} \leq C |\ln \delta| |c_0^\delta| \leq C' |\ln \delta| \|f_{\text{ext}}^\delta\|_{V_{\beta,\delta}^1(\Omega)^*} \leq C'' |\ln \delta| \|f\|_{V_{\beta,\delta}^1(\Omega)^*}. \quad (6.38)$$

Puisque  $\Omega$  est borné, l'espace  $V_{-\beta}^1(\Omega)$  s'injecte de façon continue dans  $V_0^1(\Omega)$ . Autrement dit, on a  $\|v\|_{V_0^1(\mathbb{T}^\delta)} \leq C \|v\|_{V_{-\beta}^1(\Omega)}$  pour tout  $v \in V_{-\beta}^1(\Omega)$ . De plus,  $\|\zeta\|_{V_0^1(\mathbb{T}^\delta)} = O(|\ln \delta|)$ . Par conséquent, en prenant en compte (6.22), et (6.5) appliqué à  $c_0^\delta$ , on trouve

$$\begin{aligned} \|u_{\text{ext}}^\delta\|_{V_0^1(\mathbb{T}^\delta)} &\leq \|u_0^\delta\|_{V_0^1(\mathbb{T}^\delta)} + |a(\delta)| \|\zeta\|_{V_0^1(\mathbb{T}^\delta)} \\ &\leq C |\ln \delta| (|c_0^\delta| + \|\tilde{u}_0^\delta\|_{V_{-\beta}^1(\Omega)}) \\ &\leq C |\ln \delta| \|f_{\text{ext}}^\delta\|_{V_{\beta,\delta}^1(\Omega)^*} \leq C |\ln \delta| \|f\|_{V_{\beta,\delta}^1(\Omega)^*}. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Travaillons enfin sur le troisième terme dans le second membre de (6.37). Remarquons que  $\Xi \cap \text{supp}(\psi_{1/\delta}) = \Xi \setminus \mathbb{T}_{2/\delta}$ . Nous supposons que  $\delta$  est suffisamment petit, *i.e.*  $\delta \leq 2$ , de sorte que  $\delta \leq 2/(1+\rho)$  dans  $\Xi \setminus \mathbb{T}_{2/\delta}$ . Alors, on a

$$\begin{aligned} \|\tau_\delta \cdot (\psi_{1/\delta} U_{\text{in}}^\delta)\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq C \|U_{\text{in}}^\delta\|_{W_0^1(\Xi \setminus \mathbb{T}_{2/\delta})} \\ &\leq C |A(\delta)| \|Z(\delta)\|_{W_0^1(\Xi \setminus \mathbb{T}_{2/\delta})} + C \delta^2 \|U_1^\delta\|_{W_0^1(\Xi \setminus \mathbb{T}_{2/\delta})} \\ &\leq C |\ln \delta| |c_0^\delta| + C |\ln \delta| \delta^2 (|c_1^\delta| + \|\tilde{U}_1^\delta\|_{W_\beta^1(\Xi)}). \end{aligned}$$

Dans le calcul ci-dessus, nous avons utilisé  $\|Z(\delta)\|_{W_0^1(\Xi \setminus \mathbb{T}_{2/\delta})} = O(|\ln \delta|)$  et la décomposition (6.17). Maintenant, il reste à utiliser (6.5) appliqué à  $c_0^\delta$ , (6.6) appliqué à  $c_1^\delta$ , ainsi que (6.34) et (6.35) avec  $\varepsilon = 0$ . Ceci conduit à

$$\|\tau_\delta \cdot (\psi_{1/\delta} U_{\text{in}}^\delta)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C |\ln \delta| \|f\|_{V_{\beta,\delta}^1(\Omega)^*}. \quad (6.40)$$

Pour conclure, injectons (6.38), (6.39) et (6.40) dans (6.37). Puisque  $\hat{u}^\delta = \hat{R}^\delta f$ , pour  $\delta$  suffisamment petit appartenant à  $]0; 1[\cap I(\alpha)$ , nous obtenons l'estimation

$$\|\hat{R}^\delta, V_{\beta,\delta}^1(\Omega)^* \rightarrow H_0^1(\Omega)\| \leq C |\ln \delta|. \quad (6.41)$$

Cette estimation constitue la dernière pierre pour établir le résultat de stabilité pour le problème (6.1). Nous l'énonçons et le prouvons maintenant.

**Théorème 6.3.6** *Soit  $\beta \in ]0; 2[$ . Sous les Hypothèses 1 et 2, il existe  $\delta_0$  tel que le problème (6.1) possède une unique solution pour tout  $\delta \in ]0; \delta_0[\cap I(\alpha)$ , avec  $\alpha \in ]0; 1/2[$ . De plus, il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $\delta$  telle que*

$$\|u^\delta\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C |\ln \delta| \|\text{div}(\sigma^\delta \nabla u^\delta)\|_{V_{\beta,\delta}^1(\Omega)^*}, \quad \forall u^\delta \in H_0^1(\Omega), \quad \forall \delta \in ]0; \delta_0[\cap I(\alpha).$$

**Preuve.** Le résultat d'inversibilité a déjà été établi à la fin du §6.3.5. À présent, nous devons établir une borne supérieure pour  $\|(\mathcal{A}^\delta)^{-1}, V_{\beta,\delta}^1(\Omega)^* \rightarrow H_0^1(\Omega)\|$  où  $\mathcal{A}^\delta$  a été défini en (6.25). D'après (6.26), (6.36) et (6.41), on a

$$\begin{aligned} &\|(\mathcal{A}^\delta)^{-1}, V_{\beta,\delta}^1(\Omega)^* \rightarrow H_0^1(\Omega)\| \\ &\leq \|\hat{R}^\delta, V_{\beta,\delta}^1(\Omega)^* \rightarrow H_0^1(\Omega)\| \cdot \|(\text{Id} + K^\delta)^{-1}, V_{\beta,\delta}^1(\Omega)^* \rightarrow V_{\beta,\delta}^1(\Omega)^*\| \leq \frac{C |\ln \delta|}{1 - (\delta^{\varepsilon/2} + \delta^{\beta-\varepsilon/2})}. \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve car  $\delta \mapsto (1 - (\delta^{\varepsilon/2} + \delta^{\beta-\varepsilon/2}))^{-1}$  reste bornée pour  $\delta$  dans  $]0; \delta_0[\cap I(\alpha)$ . ■

## 6.4 Développement asymptotique au premier ordre

Nous savons maintenant que pour tout  $f \in H^{-1}(\Omega)$ , le problème (6.1) possède une unique solution pour  $\delta \in I(\alpha)$  suffisamment petit. Pour obtenir le résultat de stabilité du Théorème 6.3.6, nous avons utilisé un développement asymptotique bien choisi au premier ordre et des espaces à poids bien adaptés. Dans cette section, nous construisons un développement asymptotique de  $u^\delta$  plus standard, avec des termes qui ne dépendent pas de  $\delta$  (mis à part, bien sûr, les fonctions de jauge), au premier ordre. Nous supposons que le terme source  $f$  dans (6.1) appartient à  $V_\beta^1(\Omega)^*$  avec  $\beta \in ]0; 2[$ . Puisque  $H_0^1(\Omega) \subset V_\beta^1(\Omega)$ , on a  $V_\beta^1(\Omega)^* \subset H^{-1}(\Omega)$ .

### 6.4.1 Construction du développement

Commençons par construire le développement. De nouveau, nous allons définir un champ proche et un champ lointain.

#### Développement en champ lointain

Dans la région externe, nous cherchons un développement de  $u^\delta(r, \theta)$  de la forme

$$u^\delta(r, \theta) = u^0(r, \theta) + a(\delta) \zeta(r, \theta) + \dots$$

avec  $\left\{ \begin{array}{l} u^0 := (\mathcal{A}_\beta^{\text{out}})^{-1} f \in V_\beta^{\text{out}}(\Omega), \text{ l'opérateur } \mathcal{A}_\beta^{\text{out}} \text{ étant défini dans le §6.2.1;} \\ \zeta \text{ définie en (6.12).} \end{array} \right.$

Par définition de  $V_\beta^{\text{out}}(\Omega)$ , on a  $u^0(r, \theta) = c^0 \psi(r) r^{i\eta} \varphi(\theta) + \tilde{u}^0(r, \theta)$ , avec  $c^0 \in \mathbb{C}$  et  $\tilde{u}^0 \in V_{-\beta}^1(\Omega)$  qui vérifient, d'après (6.5),  $|c^0| + \|\tilde{u}^0\|_{V_{-\beta}^1(\Omega)} \leq \mathfrak{K} \|f\|_{V_\beta^1(\Omega)^*}$ . Puisque  $\zeta$  admet le développement (6.12), à un reste près en  $\delta$ , on a le développement suivant pour le champ lointain lorsque  $r \rightarrow 0$  :

$$u^\delta(r, \theta) = (c^0 + a(\delta)c_\zeta) r^{i\eta} \varphi(\theta) + a(\delta) r^{-i\eta} \varphi(\theta) + \dots$$

#### Développement en champ proche

Dans la région interne, près de  $O$ , nous introduisons de nouveau  $r = \delta\rho$  et nous cherchons un développement de  $u^\delta(r, \theta)$  de la forme

$$u^\delta(r, \theta) = A(\delta) Z(\rho, \theta) + \dots$$

avec  $Z$  définie dans (6.16). À un reste près en  $\delta$ , on a le développement suivant pour le champ proche quand  $\rho = r/\delta \rightarrow +\infty$  :

$$U^\delta(r, \theta) = A(\delta) \rho^{i\eta} \varphi(\theta) + A(\delta) c_z \rho^{-i\eta} \varphi(\theta) + \dots,$$

$$i.e., \quad u^\delta(r, \theta) = A(\delta) \left(\frac{r}{\delta}\right)^{i\eta} \varphi(\theta) + A(\delta) c_z + \left(\frac{r}{\delta}\right)^{-i\eta} \varphi(\theta) + \dots$$

#### Principe du raccord

Comme dans le paragraphe 6.3.3, le principe du raccord permet de déterminer les fonctions de jauge  $a(\delta)$  et  $A(\delta)$ . Nous obtenons, en redéfinissant  $a(\delta)$  et  $A(\delta)$ ,

$$a(\delta) = \frac{c^0 c_z \delta^{2i\eta}}{1 - (\delta/\delta_\star)^{2i\eta}} \quad \text{et} \quad A(\delta) = \frac{c^0 \delta^{i\eta}}{1 - (\delta/\delta_\star)^{2i\eta}}.$$

### 6.4.2 Champ approché et estimations d'erreur

Définissons le champ

$$\check{u}^\delta(r, \theta) := u_{\text{ext}}(r, \theta) \chi_\delta(r) + U_{\text{in}}(r/\delta, \theta) \psi(r) - m(r, \theta) \chi_\delta(r) \psi(r)$$

$$\text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{\text{ext}}(r, \theta) = u^0(r, \theta) + a(\delta) \zeta(r, \theta) \\ U_{\text{in}}(\rho, \theta) = A(\delta) Z(\rho, \theta) \\ m(r, \theta) = A(\delta) (r/\delta)^{i\eta} \varphi(\theta) + a(\delta) r^{-i\eta} \varphi(\theta) \end{array} \right. \quad (6.42)$$

Nous allons prouver que cette fonction constitue une bonne approximation de  $u^\delta$ . De nouveau, soulignons que  $\check{u}^\delta$  diffère de  $\hat{u}^\delta$  introduite en (6.23) car elle est construite à partir de termes qui ne dépendent pas de  $\delta$ .

En injectant l'expression de  $u^\delta - \check{u}^\delta$  dans l'estimation de stabilité du Théorème 6.3.6, nous obtenons, pour  $\varepsilon \in ]0; \beta[$  et  $\delta_0$  suffisamment petit,

$$\|u^\delta - \check{u}^\delta\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \leq C |\ln \delta| \|\operatorname{div}(\sigma^\delta \nabla(u^\delta - \check{u}^\delta))\|_{\mathbf{V}_{\varepsilon, \delta}^1(\Omega)^*}, \quad \forall \delta \in ]0; \delta_0[ \cap \mathbf{I}(\alpha). \quad (6.43)$$

Estimons le terme de droite de l'équation précédente. Pour tout  $v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , en procédant comme dans le §6.3.4, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} (\sigma^\delta \nabla \check{u}^\delta, \nabla v)_\Omega &= (\sigma^0 \nabla(\chi_\delta u_{\text{ext}}), \nabla v)_\Omega + (\sigma^\delta \nabla \tau_\delta \cdot (\psi_{1/\delta} U_{\text{in}}), \nabla v)_\Omega - (\sigma^\delta \nabla(\chi_\delta \psi m), \nabla v)_\Omega \\ &= \langle f, \chi_\delta v \rangle_\Omega + (\sigma^0 \nabla \chi_\delta, u_{\text{ext}} \nabla v - v \nabla u_{\text{ext}})_\Omega \\ &\quad + (\sigma^\infty \nabla \psi_{1/\delta}, U_{\text{in}} \nabla(\tau_{1/\delta} \cdot v) - (\tau_{1/\delta} \cdot v) \nabla U_{\text{in}})_\Xi \\ &\quad - (\sigma^\delta \nabla(\chi_\delta \psi), m \nabla v - v \nabla m)_\Omega. \end{aligned}$$

Puisque  $-\chi_\delta \psi = 1 - \chi_\delta - \psi$ , en notant,  $M := \tau_{1/\delta} \cdot m$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} (\sigma^\delta \nabla(u^\delta - \check{u}^\delta), \nabla v)_\Omega &= \langle f, \psi_\delta v \rangle_\Omega \\ &\quad + (\sigma^0 \nabla \chi_\delta, (u_{\text{ext}} - m) \nabla v - v \nabla(u_{\text{ext}} - m))_\Omega \\ &\quad + (\sigma^\infty \nabla \psi_{1/\delta}, (U_{\text{in}} - M) \nabla(\tau_{1/\delta} \cdot v) - (\tau_{1/\delta} \cdot v) \nabla(U_{\text{in}} - M))_\Xi. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Étudions chacun des trois termes du membre de droite de (6.44). Pour le premier, on a,

$$\begin{aligned} |\langle f, \psi_\delta v \rangle_\Omega| &\leq C \|f\|_{\mathbf{V}_\beta^1(\Omega)^*} \|\psi_\delta v\|_{\mathbf{V}_\beta^1(\Omega)} \leq C \delta^{\beta-\varepsilon} \|f\|_{\mathbf{V}_\beta^1(\Omega)^*} \|\psi_\delta v\|_{\mathbf{V}_\varepsilon^1(\Omega)} \\ &\leq C \delta^{\beta-\varepsilon} \|f\|_{\mathbf{V}_\beta^1(\Omega)^*} \|v\|_{\mathbf{V}_{\varepsilon, \delta}^1(\Omega)}. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Pour le second et le troisième terme de (6.44), en utilisant (6.28), (6.29), (6.31) et (6.32), on trouve successivement

$$\begin{aligned} &|(\sigma^0 \nabla \chi_\delta, (u_{\text{ext}} - m) \nabla v - v \nabla(u_{\text{ext}} - m))_\Omega| \\ &\leq C \|u_{\text{ext}} - m\|_{\mathbf{V}_{-\beta}^1(\mathbb{Q}^\delta)} \|v\|_{\mathbf{V}_\beta^1(\mathbb{Q}^\delta)} \\ &\leq C \delta^{\beta-\varepsilon} \|u_{\text{ext}} - m\|_{\mathbf{V}_{-\beta}^1(\mathbb{Q}^\delta)} \|v\|_{\mathbf{V}_{\varepsilon, \delta}^1(\Omega)} \\ &\leq C \delta^{\beta-\varepsilon} (|c^0| + \|\check{u}^0\|_{\mathbf{V}_{-\beta}^1(\Omega)}) \|v\|_{\mathbf{V}_{\varepsilon, \delta}^1(\Omega)} \leq C \delta^{\beta-\varepsilon} \|f\|_{\mathbf{V}_\beta^1(\Omega)^*} \|v\|_{\mathbf{V}_{\varepsilon, \delta}^1(\Omega)} \end{aligned} \quad (6.46)$$

et

$$\begin{aligned} &|(\sigma^\infty \nabla \psi_{1/\delta}, (U_{\text{in}} - M) \nabla(\tau_{1/\delta} \cdot v) - (\tau_{1/\delta} \cdot v) \nabla(U_{\text{in}} - M))_\Xi| \\ &\leq C \|U_{\text{in}} - M\|_{\mathbf{W}_\beta^1(\mathbb{Q}^{1/\delta})} \|\tau_{1/\delta} \cdot v\|_{\mathbf{W}_{-\beta}^1(\mathbb{Q}^{1/\delta})} \\ &\leq C \delta^\beta \|U_{\text{in}} - M\|_{\mathbf{W}_\beta^1(\mathbb{Q}^{1/\delta})} \|v\|_{\mathbf{V}_{\varepsilon, \delta}^1(\Omega)} \\ &\leq C \delta^\beta |c^0| \|v\|_{\mathbf{V}_{\varepsilon, \delta}^1(\Omega)} \leq C \delta^\beta \|f\|_{\mathbf{V}_\beta^1(\Omega)^*} \|v\|_{\mathbf{V}_{\varepsilon, \delta}^1(\Omega)}. \end{aligned} \quad (6.47)$$

En injectant (6.45), (6.46) et (6.47) dans (6.44), en divisant par  $\|v\|_{\mathbf{V}_{\varepsilon, \delta}^1(\Omega)}$  et en prenant le supremum sur tous les  $v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ , nous obtenons

$$\|\operatorname{div}(\sigma^\delta \nabla(u^\delta - \check{u}^\delta))\|_{\mathbf{V}_{\varepsilon, \delta}^1(\Omega)^*} \leq C \delta^{\beta-\varepsilon} \|f\|_{\mathbf{V}_\beta^1(\Omega)^*}.$$

Revenant à (6.43), nous pouvons énoncer le résultat principal de ce chapitre

**Théorème 6.4.1** *Soient  $\beta \in ]0; 2[$  et  $f \in \mathbf{V}_\beta^1(\Omega)^*$ . Sous les Hypothèses 1 et 2, il existe  $\delta_0$  tel que le problème (6.1) possède une unique solution pour tout  $\delta \in ]0; \delta_0[ \cap \mathbf{I}(\alpha)$ , avec  $\alpha \in ]0; 1/2[$ . De plus, la fonction  $\check{u}^\delta \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  définie en (6.42) vérifie, pour tout  $\varepsilon$  dans  $]0; \beta[$ ,*

$$\|u^\delta - \check{u}^\delta\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \leq C |\ln \delta| \delta^{\beta-\varepsilon} \|f\|_{\mathbf{V}_\beta^1(\Omega)^*}, \quad \forall \delta \in ]0; \delta_0[ \cap \mathbf{I}(\alpha),$$

où  $C > 0$  est une constante indépendante de  $\delta$  et  $f$ .

**Remarque 6.4.2** *Sous les Hypothèses 1 et 2, nous avons montré qu'il existe  $\delta_0$  tel que le problème (6.1) possède une unique solution dans  $H_0^1(\Omega)$  pour  $\delta < \delta_0$  tel que  $\delta \notin \{(e^{\pi/\eta})^k \delta_*, k \in \mathbb{Z}\}$  où  $\delta_*$  est défini à partir de (6.21). L'étape suivante, qui n'entre pas dans le cadre de ce document, va consister à prouver que pour  $\delta \in \{(e^{\pi/\eta})^k \delta_*, k \in \mathbb{Z}\}$  l'opérateur  $\mathcal{A}^\delta$  n'est effectivement pas un isomorphisme. Puisque pour  $\delta > 0$ ,  $\mathcal{A}^\delta$  est Fredholm et autoadjoint, cela revient à montrer que pour tout  $\delta \in \{(e^{\pi/\eta})^k \delta_*, k \in \mathbb{Z}\}$  l'opérateur  $\mathcal{A}^\delta$  possède un noyau de dimension finie non réduit à zéro. En d'autres termes, nous souhaitons prouver que 0 est « valeur propre clignotante » au sens où il existe une suite de valeurs du paramètre  $\delta$  s'accumulant en 0 telle que 0 est valeur propre de l'opérateur  $\mathcal{A}^\delta$ .*

## 6.5 Illustrations numériques

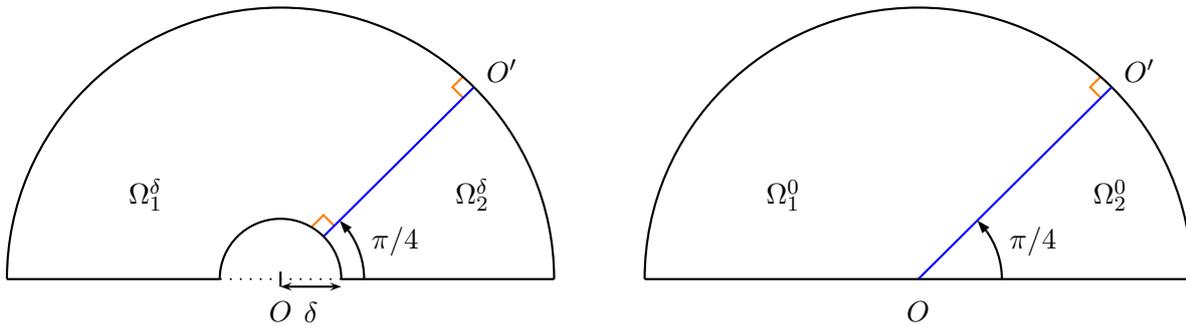


FIGURE 6.4 – Domaines  $\Omega^\delta$  et  $\Omega^0$ .

Pour illustrer les résultats que nous avons obtenus dans ce chapitre, étudions sur une géométrie canonique la question de la stabilité du problème (6.1) par rapport au paramètre  $\delta$ . La géométrie est choisie de sorte que l'on puisse séparer les variables et ainsi, procéder à des calculs explicites. De nouveau, nous mettons en évidence le résultat suivant. Si le problème limite, c'est-à-dire le problème (6.1) avec  $\delta = 0$ , est bien posé dans  $H_0^1(\Omega^0)$ , ce qui revient à dire, pour la configurations choisie, que  $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1/3; 0[$ , alors la solution  $u^\delta$  est bien définie pour  $\delta$  suffisamment petit et converge vers  $u^0$  pour la norme  $H^1$ . Par contre, si le problème limite est mal posé dans  $H_0^1(\Omega^0)$  (si l'opérateur associé n'est pas de type Fredholm), alors il existe une suite  $(\delta^n)$  de valeurs de  $\delta$  qui tend vers 0 pour lesquelles le problème (6.1) n'est pas bien posé (non injectif) dans  $H_0^1(\Omega^0)$ . Le cadre de travail (voir la Figure 6.4) sera un peu différent de celui introduit dans le §6.1 car  $\overline{\Omega_1^\delta} \cup \overline{\Omega_2^\delta}$  ne sera pas un domaine fixe. Néanmoins, l'analyse que nous avons développée au cours de ce chapitre s'étend sans difficulté à la géométrie de ce paragraphe et nous permet d'obtenir des résultats analogues.

Nous présenterons des simulations numériques, obtenues avec une approximation de type éléments finis classique, pour illustrer la différence dans le comportement de la suite  $(u^\delta)$ , selon que le contraste appartienne ou non à l'intervalle critique  $] - 1; -1/3[$ .

Commençons par décrire la géométrie. Considérons  $\delta \in ]0; 1[$  et définissons (voir la Figure 6.4)

$$\begin{aligned} \Omega_1^\delta &:= \{ (r \cos \theta, r \sin \theta) \mid \delta < r < 1, \pi/4 < \theta < \pi \}; \\ \Omega_2^\delta &:= \{ (r \cos \theta, r \sin \theta) \mid \delta < r < 1, 0 < \theta < \pi/4 \}; \\ \Omega^\delta &:= \{ (r \cos \theta, r \sin \theta) \mid \delta < r < 1, 0 < \theta < \pi \}. \end{aligned} \quad (6.48)$$

De nouveau, définissons la fonction  $\sigma^\delta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\sigma^\delta = \sigma_1$  dans  $\Omega_1^\delta$  et  $\sigma^\delta = \sigma_2$  dans  $\Omega_2^\delta$ , où  $\sigma_1 > 0$  et  $\sigma_2 < 0$  sont des constantes. Introduisons l'opérateur linéaire et continu  $\mathcal{A}^\delta : H_0^1(\Omega^\delta) \rightarrow H^{-1}(\Omega^\delta)$  tel que

$$\langle \mathcal{A}^\delta u, v \rangle_{\Omega^\delta} = (\sigma^\delta \nabla u, \nabla v)_{\Omega^\delta}, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega^\delta).$$

Puisque l'interface  $\Sigma^\delta := \partial\Omega_1^\delta \setminus \partial\Omega = \partial\Omega_2^\delta \setminus \partial\Omega$  est régulière et rencontre  $\partial\Omega^\delta$  perpendiculairement, grâce à la technique de la T-coercivité, nous savons que pour  $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{-1\}$ , pour tout  $\delta \in ]0; 1[$ ,  $\mathcal{A}^\delta$  est un opérateur Fredholm d'indice zéro. Étudions la question de l'injectivité de  $\mathcal{A}^\delta$ .

### Approche T-coercivité

Dans la suite, si  $v$  est une fonction définie sur  $\Omega^\delta$ , nous notons  $v_1 := v|_{\Omega_1^\delta}$  et  $v_2 := v|_{\Omega_2^\delta}$ . Introduisons les opérateurs  $R_1, R_2, T_1$  et  $T_2$  tels que, pour tout  $u \in H_0^1(\Omega^\delta)$ ,

$$(R_1 u_1)(r, \theta) = u_1(r, \pi - 3\theta) \quad ; \quad (R_2 u_2)(r, \theta) = \begin{cases} u_2(r, \pi/2 - \theta) & \text{si } \theta \leq \pi/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ;$$

$$T_1 u = \begin{cases} u_1 & \text{sur } \Omega_1^\delta \\ -u_2 + 2R_1 u_1 & \text{sur } \Omega_2^\delta \end{cases} \quad ; \quad T_2 u = \begin{cases} u_1 - 2R_2 u_2 & \text{sur } \Omega_1^\delta \\ -u_2 & \text{sur } \Omega_2^\delta \end{cases} .$$

On a  $u_1 = -u_2 + 2R_1 u_1$  sur  $\Sigma^\delta$ , donc  $T_1$  est à valeurs dans  $H_0^1(\Omega^\delta)$ . En remarquant que  $T_1 \circ T_1 = \text{Id}$ , on déduit que  $T_1$  est un isomorphisme de  $H_0^1(\Omega^\delta)$ . Ce résultat vaut également pour  $T_2$ . Pour tout  $u \in H_0^1(\Omega^\delta)$ , à l'aide de l'inégalité de Young, nous pouvons écrire, pour tout  $\varsigma > 0$ ,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}^\delta u, T_1 u \rangle_{\Omega^\delta} &= (\sigma_1 \nabla u_1, \nabla u_1)_{\Omega_1^\delta} + (|\sigma_2| \nabla u_2, \nabla u_2)_{\Omega_2^\delta} - 2(|\sigma_2| \nabla u_2, \nabla (R_1 u_1))_{\Omega_2^\delta} \\ &\geq (\sigma_1 \nabla u_1, \nabla u_1)_{\Omega_1^\delta} + (|\sigma_2| \nabla u_2, \nabla u_2)_{\Omega_2^\delta} \\ &\quad - \varsigma (|\sigma_2| \nabla u_2, \nabla u_2)_{\Omega_2^\delta} - 1/\varsigma (|\sigma_2| \nabla (R_1 u_1), \nabla (R_1 u_1))_{\Omega_2^\delta} \\ &\geq ((\sigma_1 - \|\mathbf{R}_1\|^2 |\sigma_2|/\varsigma) \nabla u_1, \nabla u_1)_{\Omega_1^\delta} + (|\sigma_2| (1 - \varsigma) \nabla u_2, \nabla u_2)_{\Omega_2^\delta}. \end{aligned}$$

Par conséquent, si  $\sigma_1/|\sigma_2| > \|\mathbf{R}_1\|^2 = 3$  (ceci implique en particulier  $\kappa_\sigma \notin ]-1; -1/3[$ ), il existe  $C > 0$  indépendante de  $\delta$  tel que

$$C \|u\|_{H_0^1(\Omega^\delta)}^2 \leq \langle \mathcal{A}^\delta u, T_1 u \rangle_{\Omega^\delta}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega^\delta).$$

En procédant de la même façon avec  $T_2$  (remarquons que  $\|\mathbf{R}_2\|^2 = 1$ ), nous pouvons énoncer la

**Proposition 6.5.1** *Supposons  $\kappa_\sigma \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1/3; 0[$ . Alors, pour tout  $\delta \in ]0; 1[$ , l'opérateur  $\mathcal{A}^\delta$  est un isomorphisme. De plus, il existe  $C > 0$  indépendante de  $\delta$  telle que*

$$\|u^\delta\|_{H_0^1(\Omega^\delta)} \leq C \|\mathcal{A}^\delta u^\delta\|_{H^{-1}(\Omega^\delta)}, \quad \forall u^\delta \in H_0^1(\Omega^\delta).$$

Bien sûr, ce résultat de stabilité n'est plus vrai pour un contraste situé dans l'intervalle critique. Pour  $\kappa_\sigma \in ]-1; -1/3[$ , la méthode de la T-coercivité ne peut plus être utilisée.

### Approche directe

Calculons explicitement les éléments de  $\ker \mathcal{A}^\delta$ . Considérons  $u^\delta$  un élément de  $H_0^1(\Omega^\delta)$  tel que  $\mathcal{A}^\delta u^\delta = 0$ . Le couple  $(u_1^\delta, u_2^\delta)$  vérifie

$$\begin{cases} \Delta u_1^\delta & = 0 & \text{dans } \Omega_1^\delta \\ \Delta u_2^\delta & = 0 & \text{dans } \Omega_2^\delta \\ u_1^\delta - u_2^\delta & = 0 & \text{sur } \Sigma^\delta \\ \sigma_1 \partial_\theta u_1^\delta - \sigma_2 \partial_\theta u_2^\delta & = 0 & \text{sur } \Sigma^\delta. \end{cases} \quad (6.49)$$

En utilisant le changement de variable  $(t, \theta) := (\ln r, \theta)$ , le problème (6.49) devient un problème posé dans la demi-bande tronquée  $\mathcal{B}^\delta := ]\ln \delta; 0[ \times ]0; \pi[$ . Dans cette géométrie, la séparation de variables constitue une approche naturelle. En utilisant cette astuce, il est facile de prouver que la famille

$\{r \mapsto \sin(n\pi(\ln r - \ln \delta)/\ln \delta)\}_{n=1}^{\infty}$  définit une base de  $L^2(]0; 1[)$ . En décomposant  $u_1^\delta$ ,  $u_2^\delta$  et puisque  $\Delta u_1^\delta = \Delta u_2^\delta = 0$ , on trouve

$$\begin{aligned} u_1^\delta(r, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_{1,n}^\delta \sinh(n\pi(\theta - \pi)/\ln \delta) \sin(n\pi(\ln r - \ln \delta)/\ln \delta) \\ \text{et } u_2^\delta(r, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_{2,n}^\delta \sinh(n\pi\theta/\ln \delta) \sin(n\pi(\ln r - \ln \delta)/\ln \delta), \end{aligned}$$

où  $u_{1,n}^\delta$  et  $u_{2,n}^\delta$  sont des constantes. Les conditions de transmission conduisent aux relations supplémentaires, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{cases} -u_{1,n}^\delta \sinh(3n\pi^2/(4 \ln \delta)) &= u_{2,n}^\delta \sinh(n\pi^2/(4 \ln \delta)) \\ u_{1,n}^\delta \sigma_1 \cosh(3n\pi^2/(4 \ln \delta)) &= u_{2,n}^\delta \sigma_2 \cosh(n\pi^2/(4 \ln \delta)). \end{cases} \quad (6.50)$$

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , le système (6.50) par rapport à  $(u_{1,n}^\delta, u_{2,n}^\delta)$  possède une solution non triviale si et seulement si

$$\begin{aligned} &\sigma_2 \sinh(3n\pi^2/(4 \ln \delta)) \cosh(n\pi^2/(4 \ln \delta)) + \sigma_1 \sinh(n\pi^2/(4 \ln \delta)) \cosh(3n\pi^2/(4 \ln \delta)) = 0 \\ \Leftrightarrow &\sigma_2 (\sinh(4\nu_n^\delta) + \sinh(2\nu_n^\delta)) + \sigma_1 (\sinh(4\nu_n^\delta) - \sinh(2\nu_n^\delta)) = 0 \\ \Leftrightarrow &\cosh(2\nu_n^\delta) = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2(\sigma_1 + \sigma_2)} = \frac{1 - \kappa_\sigma}{2(1 + \kappa_\sigma)}, \end{aligned}$$

avec  $\nu_n^\delta = n\pi^2/(4 \ln \delta)$ .

- CONFIGURATION  $\kappa_\sigma \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1/3; 0[$ . Dans ce cas, on a  $(1 - \kappa_\sigma)/(2(1 + \kappa_\sigma)) < 1$ . Par conséquent, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la seule solution de (6.50) est la solution nulle et  $\mathcal{A}^\delta$  est injectif. Ce résultat est consistant avec la Proposition 6.5.1.

- CONFIGURATION  $\kappa_\sigma \in ]-1; -1/3[$ . Dans cette situation, on a  $(1 - \kappa_\sigma)/(2(1 + \kappa_\sigma)) > 1$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un unique  $\delta^n$  tel que (6.50) possède une solution non triviale :

$$\delta^n = \exp \left( - \frac{n\pi^2}{2 \operatorname{acosh} \left( \frac{1 - \kappa_\sigma}{2(1 + \kappa_\sigma)} \right)} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (6.51)$$

Par conséquent,  $\mathcal{A}^\delta$  constitue un isomorphisme de  $H_0^1(\Omega^\delta)$  dans  $H^{-1}(\Omega^\delta)$  si et seulement si  $\delta \in ]0; 1[ \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{\delta^n\}$ . Ainsi, pour cette géométrie particulière, nous obtenons par le calcul le résultat de la Proposition 6.3.6 (ici, nous pouvons prendre  $\delta_* = 1$ ) et nous montrons le phénomène de valeur propre clignotante mentionné dans la Remarque 6.4.2.

### Illustrations numériques

Confrontons ces calculs avec les résultats numériques. Considérons  $f \in L^2(\Omega)$  dont le support ne rencontre pas  $O$ . Considérons  $(\mathcal{T}_h^\delta)_h$  une famille de triangulations régulières de  $\overline{\Omega}^\delta$ . Supposons de plus que pour tout triangle  $\tau$ , on a  $\tau \subset \overline{\Omega}_1^\delta$  ou bien  $\tau \subset \overline{\Omega}_2^\delta$ . Définissons la famille d'espaces de dimension finie

$$V_h^\delta := \left\{ v \in H_0^1(\Omega^\delta) \text{ tel que } v|_\tau \in \mathbb{P}_1(\tau) \text{ pour tout } \tau \in \mathcal{T}_h^\delta \right\},$$

où  $\mathbb{P}_1(\tau)$  est l'espace des polynômes de degré au plus 1 sur le triangle  $\tau$ . Considérons le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h^\delta \in V_h^\delta \text{ tel que} \\ (\sigma^\delta \nabla u_h^\delta, \nabla v_h^\delta)_{\Omega^\delta} = (f, v_h^\delta)_{\Omega^\delta}, \quad \forall v_h^\delta \in V_h^\delta. \end{cases} \quad (6.52)$$

- EN DEHORS DE L'INTERVALLE CRITIQUE. La Figure 6.5 présente la variation de  $\|u_h^\delta\|_{H_0^1(\Omega^\delta)}$  par rapport à  $1 - \delta$  pour  $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 = -1 - 10^{-4}$ . En accord avec ce que nous attendions, le problème (6.52) semble stable par rapport à  $\delta$ .

- À L'INTÉRIEUR DE L'INTERVALLE CRITIQUE. Sur la Figure 6.6, nous affichons la variation de  $\|u_h^\delta\|_{H_0^1(\Omega^\delta)}$  par rapport à  $1 - \delta$  pour  $\kappa_\sigma = \sigma_2/\sigma_1 = -1 + 10^{-4}$ . Nous observons des pics qui correspondent aux valeurs de  $\delta = \delta^n$  pour lesquelles  $\mathcal{A}^\delta$  n'est pas injectif. L'idée importante est la suivante : lorsque le contraste est situé dans l'intervalle critique, la solution, lorsqu'elle est bien définie, dans la géométrie arrondie, dépend de façon critique du paramètre  $\delta$ . Pour de petites valeurs de  $\delta$ , il est très coûteux d'utiliser un maillage adapté à la géométrie. Par conséquent, le pas du maillage est choisi constant par rapport à  $\delta$ . Ceci explique pourquoi les pics n'apparaissent pas pour les petites valeurs de  $\delta$ . Ici, nous travaillons avec un contraste très proche de  $-1$ . Cela peut paraître surprenant de se placer si près de ce cas très mal posé (rappelons que pour  $\kappa_\sigma = -1$ , les opérateurs  $\mathcal{A}^\delta$  ne sont pas de type Fredholm en raison de la présence de singularité sur tout l'interface). Cependant, ceci permet d'obtenir plusieurs pics sans être obligés d'utiliser un maillage vraiment très raffiné. En effet, dans ce cas, dans (6.51), le coefficient  $\pi^2/(2 \operatorname{acosh}(\frac{1-\kappa_\sigma}{2(1+\kappa_\sigma)}))$  vaut environ  $-0.5$ . D'un point de vue numérique, il faut simplement faire attention à choisir un maillage localement symétrique par rapport à l'interface pour éviter les phénomènes d'instabilité.

### Analogie avec un problème de guide d'ondes

Comme nous l'avons vu dans le Chapitre 5, le problème (6.1) présente une forte analogie avec un problème de guide d'ondes classique. Pour simplifier, supposons que  $f$  s'annule dans un voisinage de  $O$ . Considérons le changement de variable  $(t, \theta) = (\ln r, \theta)$ . Notons  $\tilde{u}^\delta(t, \theta) = u^\delta(e^t, \theta)$ ,  $\tilde{\sigma}^\delta(t, \theta) = \sigma^\delta(e^t, \theta)$  et  $\tilde{f}(t, \theta) = e^{2t} f(e^t, \theta)$ . Le problème (6.1) pour la géométrie étudiée dans ce paragraphe devient un problème posé dans la demi-bande tronquée  $\mathcal{B}^\delta = ]\ln \delta; 0[ \times ]0; \pi[$  qui s'écrit

$$-(\tilde{\sigma}^\delta \partial_z^2 + \partial_\theta \tilde{\sigma}^\delta \partial_\theta) \tilde{u}^\delta = \tilde{f} \quad \text{dans } \mathcal{B}^\delta \quad \text{et} \quad \tilde{u} = 0 \quad \text{sur } \partial \mathcal{B}^\delta. \quad (6.53)$$

La domaine limite obtenu pour  $\delta = 0$  est alors la demi-bande infinie  $\mathcal{B}^0 = ]-\infty; 0[ \times ]0; \pi[$ . Ainsi, pour cette géométrie, « arrondir le coin » comme indiqué en (6.48) correspond à tronquer la demi-bande infinie et donc à borner le guide d'ondes. Dès lors, on va distinguer deux situations suivant qu'il existe ou non des modes propagatifs dans le guide infini.

En dehors de l'intervalle critique, *i.e.* pour  $\kappa_\sigma \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1/3; 0[$ , dans la demi-bande infinie  $\mathcal{B}^0$ , tous les modes associés au problème (6.53) sont exponentiellement croissants ou décroissants. En cherchant une solution  $\tilde{u}^0 \in H_0^1(\mathcal{B}^0)$ , on impose une décomposition uniquement sur les modes exponentiellement décroissants. Par conséquent, l'erreur qui consiste à approcher  $\tilde{u}^\delta \in H_0^1(\mathcal{B}^\delta)$  par  $\tilde{u}^0$  tend vers 0 lorsque  $\delta \rightarrow 0$ . Autrement dit, la solution dans la demi-bande tronquée est bien approchée par la solution dans la demi-bande infinie.

À l'intérieur de l'intervalle critique, *i.e.* pour  $\kappa_\sigma \in ]-1; -1/3[$ , dans la demi-bande infinie  $\mathcal{B}^0$ , il apparaît exactement deux modes propagatifs  $e^{\pm i\eta t} \varphi(\theta)$ , avec  $\eta$  défini en (6.4), se propageant en sens opposé. En cherchant une solution  $\tilde{u}^0$  qui se décompose sur les modes sortants, nous sommes amenés à considérer une solution qui se divise en un mode propagatif et une partie évanescence. Dans ce cas, nous savons qu'il n'est pas possible d'approcher la solution dans la demi-bande tronquée, lorsqu'elle est bien définie, par la solution dans la demi-bande infinie. En raison de la réflexion du mode propagatif,  $\tilde{u}^\delta \in H_0^1(\mathcal{B}^\delta)$  n'est pas stable par rapport à  $\delta$ . Le phénomène de « valeur propre clignotante » s'explique lui par la présence de modes résonnants dans la demi-bande tronquée.

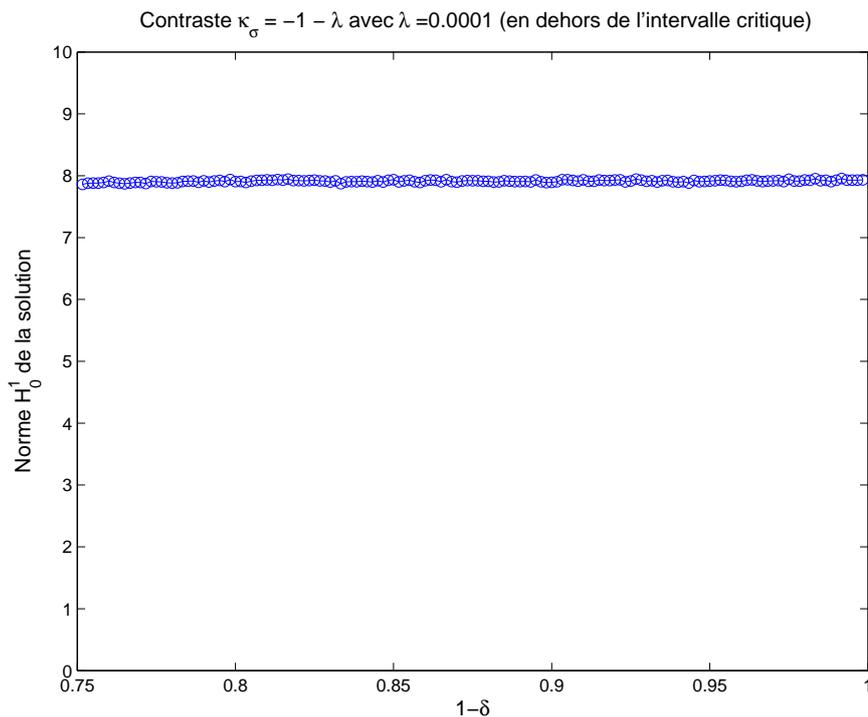


FIGURE 6.5 – Évolution de  $\|u_h^\delta\|_{H_0^1(\Omega^\delta)}$  par rapport à  $1 - \delta$ .

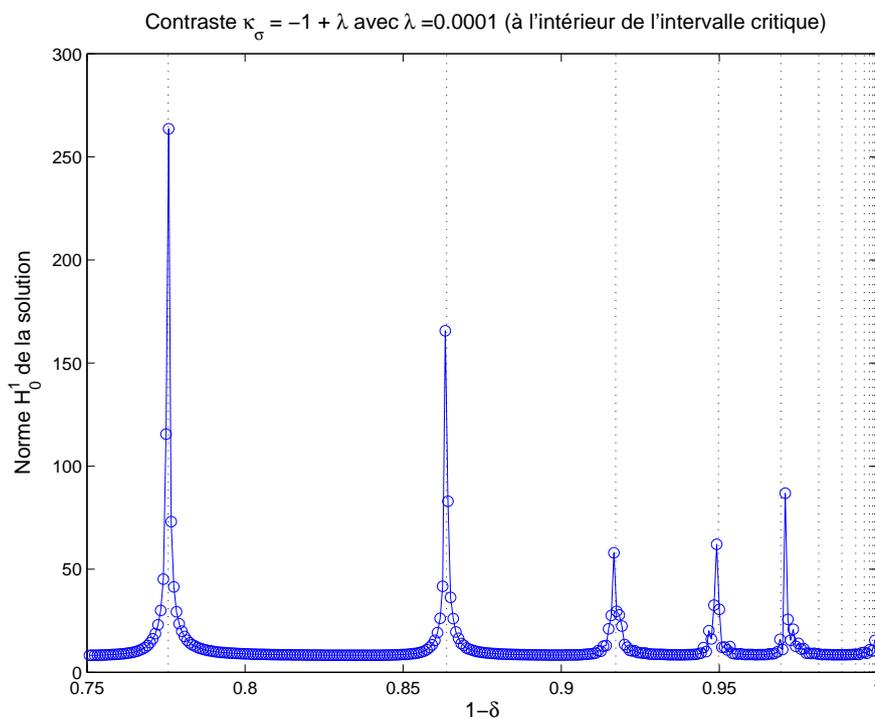


FIGURE 6.6 – Évolution de  $\|u_h^\delta\|_{H_0^1(\Omega^\delta)}$  par rapport à  $1 - \delta$ . Les pointillés correspondent aux valeurs attendues  $\delta = \delta^n$  pour lesquelles  $\mathcal{A}^\delta$  n'est pas injectif.