Critères de prédiction de localisations sous forme de modes présentant des discontinuités du gradient des vitesses

6.1 Introduction

Au cours des deux précédents chapitres, les conditions d'apparition des phénomènes de striction diffuse, de striction localisée et de certains modes de localisation continus ont été précisées, la striction localisée étant principalement observée dans le cas de matériaux ductiles. Une autre limite de formabilité peut être donnée par la localisation des déformations (ou de l'endommagement) sous forme de bandes présentant des discontinuités du gradient des vitesses. Dans le cas de matériaux ne présentant pas un comportement ductile marqué, ce phénomène précurseur de la rupture est plus couramment observé que celui de striction localisée. L'objectif de ce chapitre est de préciser les conditions d'apparition de localisation des déformations sous forme de telles bandes.

Dans le cas de matériaux indépendants du temps physique, la prévision du changement de mode de déformation vers un mode présentant des discontinuités peut être menée par des méthodes basées sur l'analyse de bifurcations, ayant débouchées sur la formulation du Critère de perte d'Ellipticité (Rudnicki et Rice 1975; Rice 1976) et sur la condition plus conservative de Perte d'Ellipticité Forte (Bigoni et Hueckel 1991). La présentation de ces critères fera l'objet de la première partie de ce chapitre.

Une seconde catégorie de critères, développée pour des matériaux tant élasto-plastiques qu'élasto-viscoplastiques est constituée par la méthode multizones, basée sur la comparaison de l'évolution des propriétés mécaniques d'une zone saine avec celles d'une zone comportant un défaut initial. Le critère de Marciniak – Kuczynski est sans conteste le plus populaire de ces critères (Marciniak et Kuczyński 1967). Sa formulation classique repose sur l'existence dans une tôle d'une bande plane présentant initialement un défaut d'épaisseur ; elle sera détaillée dans ce chapitre. Une reformulation originale de ce critère dans le cadre de bandes de défaut tridimensionnelles sera ensuite proposée, en vue d'établir un lien théorique entre ce critère et le Critère de Perte d'Ellipticité (Altmeyer et al. 2009).

L'analyse linéaire de stabilité, applicable pour des classes de matériaux élasto-plastiques mais aussi élasto-viscoplastiques constitue une alternative à l'utilisation des méthodes d'analyse de bifurcation. Après une présentation des bases théoriques de la méthode, celle-ci sera appliquée dans le cas d'un comportement élasto-plastique. Un rapprochement entre cette méthode et celle basée sur l'analyse de bifurcation sera finalement souligné.

6.2 Méthode d'analyse de bifurcation

Lors de l'utilisation de critères de localisation sous forme de bandes basés sur l'analyse de bifurcation, la localisation dans un solide soumis à un trajet de chargement donné est vue comme une évolution brutale d'un état quasi-homogène du gradient des vitesses vers un état hétérogène présentant des plans de discontinuité. La déformation se concentre alors dans des bandes de localisation, définies par deux plans de discontinuités de normale unitaire $\mathbf{n}$ illustrés par la Figure 6.1.

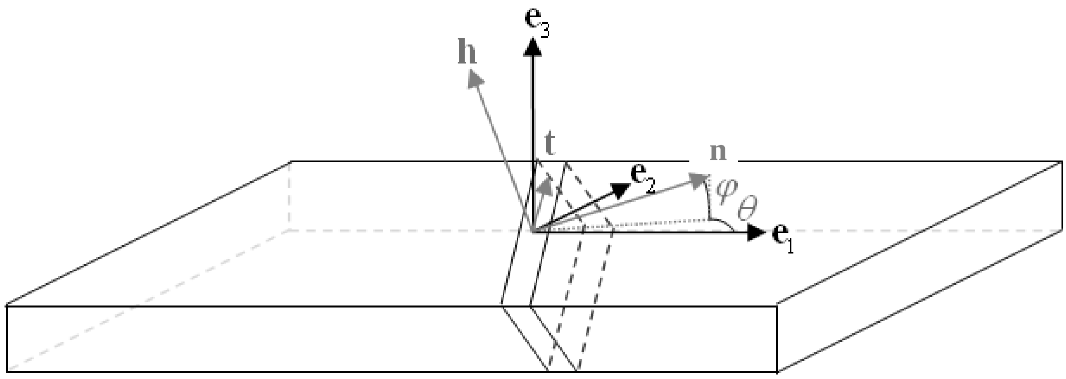


Figure 6.1 : Orientation tridimensionnelle d'une bande de localisation par rapport aux directions principales de chargement.

Les critères de Perte d'Ellipticité et de Perte d'Ellipticité Forte sont présentés dans les deux paragraphes qui suivent, avant qu'une classification en termes de caractère conservatif de prédiction ne soit précisée.

6.2.1 Critère de Perte d'Ellipticité

Le critère de Perte d'Ellipticité, donné aussi par l'analyse de bifurcation de Rice, est notamment basé sur la discontinuité du champ gradient des vitesses vérifiant les conditions de compatibilité cinématique et une condition d'équilibre.

En considérant les champs des gradients de vitesse à l'intérieur et à l'extérieur d'une possible bande de localisation, notés respectivement $\mathbf{G}^B$ et $\mathbf{G}$, la différence entre eux peut être exprimée à l'aide de l'opérateur $[\cdot]$ représentant leur saut par :

$$[\mathbf{G}] = \mathbf{G}^B - \mathbf{G} \tag{6.1}$$

Le champ des vitesses devant rester continu à travers la surface de localisation, la discontinuité de son gradient doit avoir une forme particulière qui vérifie la condition cinématique de compatibilité de Hadamard (Hadamard 1903). Il doit donc exister un vecteur non nul $\dot{\mathbf{c}}$ représentant les vitesses relatives de points situés de part et d'autre des plans de discontinuité du gradient des vitesses de sorte que :

$$\mathbf{G}^B = \mathbf{G} + \dot{\mathbf{c}} \otimes \mathbf{n} \tag{6.2}$$

La discontinuité du gradient des vitesses pour des champs vérifiant la condition cinématique peut donc s'écrire :

$$[\mathbf{G}] = \dot{\mathbf{c}} \otimes \mathbf{n} \tag{6.3}$$

ou encore :

$$[\mathbf{G}]\cdot\mathbf{n}=\dot{\mathbf{c}} \tag{6.4}$$

La signification physique de la position relative des vecteurs $\dot{\mathbf{c}}$ et $\mathbf{n}$ est illustrée en Figure 6.2 :

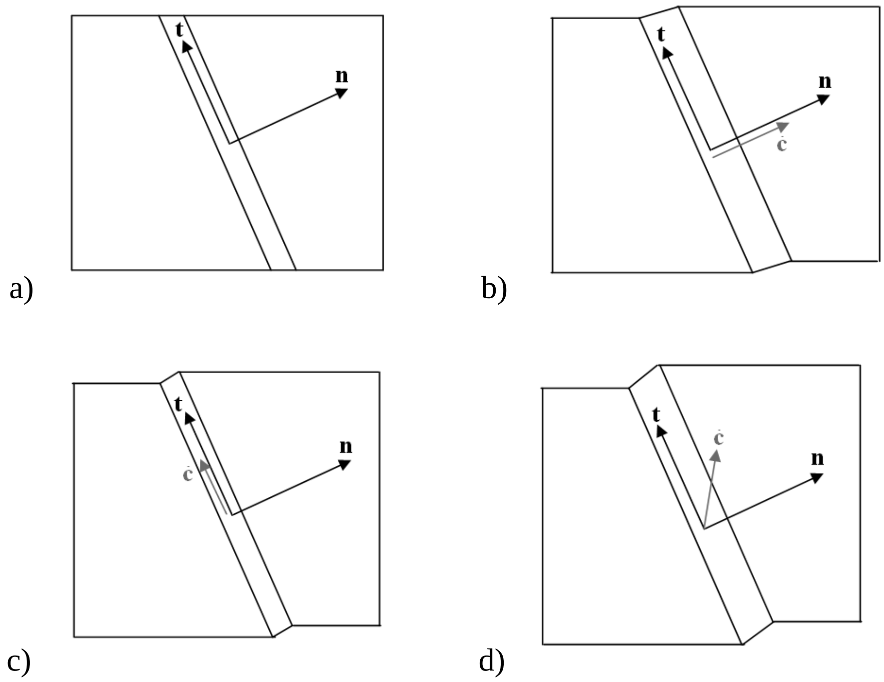


Figure 6.2 : a) Orientation de la bande de localisation à l'initiation de la localisation. Cinématiques de la bande de localisation b) pour un mode d'ouverture, c) pour un mode de cisaillement et d) pour un mode quelconque.

Les vecteurs $\dot{\mathbf{c}}$ et $\mathbf{n}$ sont notamment colinéaires pour des modes d'ouverture, orthogonaux dans le cas de modes de cisaillement et une infinité de modes intermédiaires existent dans les autres cas.

La seconde condition concernant la continuité de l'effort à travers les plans définissant la bande de localisation doit être vérifiée. Cette condition d'équilibre peut être écrite en vitesse dans la configuration courante à partir du tenseur du taux des contraintes nominales :

$$\mathbf{n}\cdot[\dot{\mathbf{N}}]=\mathbf{0} \tag{6.5}$$

En introduisant la relation de comportement reliant le taux des contraintes nominales et le gradient des vitesses, la relation précédente devient :

$$\mathbf{n}\cdot[\boldsymbol{L}:\mathbf{G}]=\mathbf{0} \tag{6.6}$$

Jusqu'à l'initiation de la localisation sous forme de bandes, le module tangent est continu dans le solide. En le supposant continu à la traversée de la bande de localisation au moment de l'initiation de la bande d'instabilité plastique, il est possible d'écrire :

$$[\boldsymbol{L}] = \boldsymbol{L}^B - \boldsymbol{L} = \mathbf{0} \tag{6.7}$$

La condition d'équilibre (6.5) devient alors :

$$\mathbf{n} \cdot \left(\boldsymbol{L} : [\mathbf{G}]\right) = \mathbf{0} \tag{6.8}$$

En tenant compte de l'écriture (6.3) sur la forme du saut du gradient des vitesses vérifiant la condition cinématique, il est possible d'écrire :

$$\mathbf{n} \cdot \left(\boldsymbol{L} : \left(\dot{\mathbf{c}} \otimes \mathbf{n}\right)\right) = \mathbf{0} \tag{6.9}$$

La condition d'instabilité plastique sous forme de bandes peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\left(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{L} \cdot \mathbf{n}\right) \cdot \dot{\mathbf{c}} = \mathbf{0} \tag{6.10}$$

En excluant la solution triviale $\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{0}$ correspondant à une absence de discontinuité du gradient des vitesses, la condition nécessaire d'apparition d'une bande de localisation est donnée par l'annulation du déterminant du tenseur acoustique $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{L} \cdot \mathbf{n}$:

$$\det\left(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{L} \cdot \mathbf{n}\right) = 0 \tag{6.11}$$

Il est à noter qu'une formulation équivalente du critère de Perte d'Ellipticité peut être obtenue dans la configuration de référence (Abed-Meraim 2009). Le saut du gradient de la vitesse vérifiant les conditions de Maxwell peut alors s'écrire sous la forme :

$$\left[\dot{\mathbf{F}}\right] = \dot{\mathbf{F}}^B - \dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{c}}_0 \otimes \mathbf{n}_0 \tag{6.12}$$

avec $\dot{\mathbf{F}}^B$ et $\dot{\mathbf{F}}$ les gradients lagrangiens de la vitesse à l'intérieur et à l'extérieur de la bande de localisation. $\dot{\mathbf{c}}_0$ représente la vitesse relative de points situés de part et d'autre des plans de localisation de normale $\mathbf{n}_0$, repérés dans la configuration de référence. La condition d'équilibre écrite en vitesses peut alors être exprimée à partir du premier tenseur de contraintes de Piola – Kirchhoff :

$$\left[\dot{\mathbf{\Pi}}\right] \cdot \mathbf{n}_0 = \mathbf{0} \tag{6.13}$$

En appliquant aux conditions (6.12) et (6.13) la même démarche que celle précédemment utilisée dans la configuration courante et en introduisant la relation de comportement $\dot{\mathbf{\Pi}} = \boldsymbol{\mathcal{L}} : \dot{\mathbf{F}}$ ou plus particulièrement de sa transposée $\dot{\mathbf{\Pi}}^T = \boldsymbol{\mathcal{L}}^T : \dot{\mathbf{F}}$, il est possible de montrer que la condition nécessaire d'apparition d'une bande de localisation exprimée dans la configuration de référence lagrangienne est obtenue par l'annulation du déterminant du tenseur acoustique $\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\mathcal{L}}^T \cdot \mathbf{n}_0$:

$$\det\left(\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\mathcal{L}}^T \cdot \mathbf{n}_0\right) = 0 \tag{6.14}$$

avec $\mathcal{L}^T_{jikl} = \mathcal{L}_{ijkl}$. Le choix entre les formulations équivalentes (6.11) et (6.14) peut dépendre de la simplicité de mise en œuvre numérique.

Différentes méthodes permettent la recherche de l'existence d'une normale $\mathbf{n}$ ou $\mathbf{n}_0$ permettant de vérifier la condition (6.11) ou (6.14) respectivement. Une première méthode repose sur la minimisation d'une fonctionnelle reliée au déterminant du tenseur acoustique en fonction des angles définissant l'orientation de la normale au plan de localisation. La minimisation peut être effectuée par des méthodes itératives de type gradient conjugué, mais la convergence n'est assurée que pour des fonctionnelles suffisamment régulières (Keryvin 1999). Dans le cas d'une bande dont la normale reste dans le plan de la tôle, le problème est bidimensionnel et l'orientation de la bande est définie à partir d'une seule variable, contrairement au cas tridimensionnel pour lequel deux variables sont nécessaires, ce qui complique alors la mise en œuvre de cette méthode de résolution numérique. Certaines précautions sont d'autre part nécessaires pour s'assurer de prédire l'ensemble des directions critiques et donc l'ensemble des orientations possibles des bandes de localisation, plusieurs minima locaux pouvant apparaitre simultanément en fonction du modèle de comportement choisi.

Le minimum global de cette fonctionnelle peut être obtenu en explorant numériquement l'ensemble des directions possibles, en adoptant une discrétisation fine des espaces de variation des angles θ et φ définissant l'orientation de la normale au plan de localisation (Haddag 2007). A chaque pas de chargement, le calcul du déterminant (6.11) est effectué pour les différentes valeurs de θ et φ issues de la discrétisation. La déformation et les directions critiques à localisation sont obtenues pour la première annulation du déterminant du tenseur acoustique. La précision de l'orientation des bandes prédites dépend toutefois de la discrétisation de l'espace. Des discrétisations encore plus fines peuvent être adoptées dans un voisinage de la solution trouvée, pour affiner la solution jusqu'à atteindre le niveau de précision souhaité.

6.2.2 Critère de Perte d'Ellipticité Forte

Un second indicateur de localisation sous forme de bandes de cisaillement est basé sur le critère de Bifurcation Générale (Drucker 1950) avec des conditions additionnelles d'admissibilité cinématique des modes de déformation. En adoptant les mêmes démarches que celles utilisées au Chapitre 4 pour l'obtention des conditions de perte d'unicité de la solution du principe des travaux virtuels avec un mode cinématiquement admissible, il est possible d'obtenir la condition de perte de positivité du travail de second ordre suivante dans la configuration de référence :

$$\left[\dot{\mathbf{\Pi}}\right]:\left[\dot{\mathbf{F}}\right] = 0 \tag{6.15}$$

soit dans la configuration courante en remplaçant le premier tenseur de Piola – Kirchhoff par le transposé du tenseur des contraintes nominales :

$$\left[\dot{\mathbf{N}}^{T}\right]:\left[\mathbf{G}\right]=0 \tag{6.16}$$

En introduisant un gradient des vitesses satisfaisant les conditions de compatibilité de Hadamard, une condition suffisante d'exclusion de localisation sous forme de bandes de cisaillement peut être donnée par la condition d'ellipticité forte des équations différentielles gouvernant le problème incrémental d'équilibre local :

$$\dot{\mathbf{c}}\cdot\left(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{L}\cdot\mathbf{n}\right)\cdot\dot{\mathbf{c}}>0 \qquad \forall\mathbf{n}\neq\mathbf{0},\forall\dot{\mathbf{c}}\neq\mathbf{0} \tag{6.17}$$

Cette condition d'ellipticité forte implique la vérification de la définie positivité de la forme quadratique $\dot{\mathbf{c}}\cdot\left(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{L}\cdot\mathbf{n}\right)\cdot\dot{\mathbf{c}}$ et donc la vérification de la positivité de chaque valeur propre de la partie symétrique du tenseur acoustique, définie par $\left(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{L}\cdot\mathbf{n}\right)^{S}$ (Neilsen et Schreyer 1993). Dans (Bigoni et Hueckel 1991), la condition suffisante d'exclusion de localisation est développée dans le cas des matériaux élasto-plastiques et est reliée à des modules d'écrouissage positifs dans le cas de plasticité associée.

6.2.3 Relation théorique entre les critères de Perte d'Ellipticité et de Perte d'Ellipticité Forte

Pour établir l'ordre de prédiction de la localisation obtenue avec les deux critères présentés ci-dessus, une propriété d'algèbre va être utilisée. Soit $\mathcal{M}$ une matrice carrée de dimension p et $\mathcal{M}^{S}$ sa matrice symétrique, définie par $\mathcal{M}^{S}=\frac{1}{2}\left(\mathcal{M}+\mathcal{M}^{T}\right)$, avec $\mathcal{M}^{T}$ la transposée de $\mathcal{M}$. Soient $\lambda_{i}^{\mathcal{M}}$ et $\lambda_{i}^{\mathcal{M}^{S}}$ les valeurs propres respectivement associées à $\mathcal{M}$ et à $\mathcal{M}^{S}$, alors (Abed-Meraim 1999b) :

$$\min_{Sp\left(\mathcal{M}^{S}\right)}\left(\lambda_{i}^{\mathcal{M}^{S}}\right)\leq\operatorname*{Re}_{Sp(\mathcal{M})}\left(\lambda_{i}^{\mathcal{M}}\right)\leq\max_{Sp\left(\mathcal{M}^{S}\right)}\left(\lambda_{i}^{\mathcal{M}^{S}}\right) \tag{6.18}$$

La condition d'ellipticité forte est donc plus conservative que la condition d'ellipticité.

Dans le cas de petites déformations et de l'utilisation d'un modèle de plasticité associée, le module tangent possède les symétries majeures et mineures. Les critères d'Ellipticité Forte et d'Ellipticité deviennent alors équivalents.

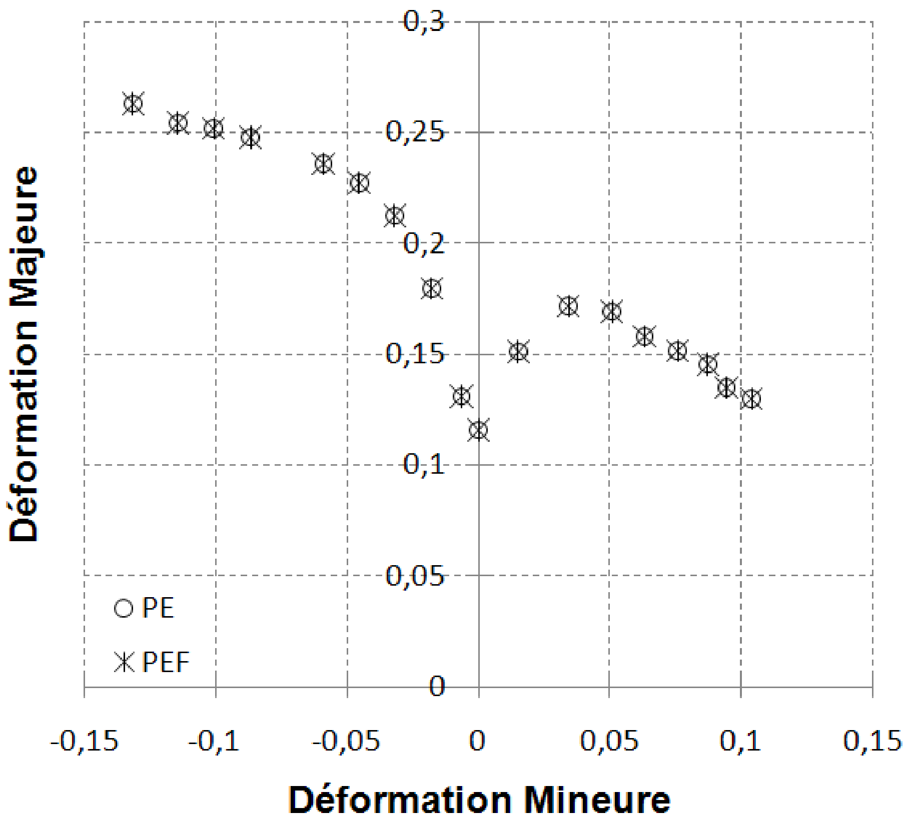


Figure 6.3 : CLF obtenues à partir des critères de Perte d'Ellipticité et de Perte d'Ellipticité Forte pour un acier Dual Phase DP600 modélisé avec une loi d'écrouissage isotrope saturante ($C_R = 10$, $R_{sat} = 550MPa$ et $Y_0 = 350MPa$) et couplé à l'endommagement ($\beta_{end} = 12$, $S_{end} = 20$ et $s_{end} = 0,5$) d'après (Altmeyer et al. 2010).

Pour un comportement élasto-plastique avec plasticité associée et surface de charge sans points de vertex, et en l'absence d'adoucissement, la condition de perte d'ellipticité ne peut être atteinte et la localisation ne peut être prédite à l'aide de ces critères.

Une alternative aux critères basés sur l'analyse de bifurcation est constituée par le critère de Marciniak – Kuczynski, issu des méthodes multizones et ne nécessitant pas d'adoucissement dans sa formulation classique, pour la prédiction de localisation sous forme de bande dans le cas de matériaux élasto-plastiques.

6.3 Méthode Multizone – Critère de Marciniak – Kuczynski

Une autre catégorie de critères utilisée pour la prédiction de modes localisés est basée sur les méthodes multizones, présentant des tôles non homogènes. Les propriétés mécaniques ou l'évolution des champs dans ces différentes zones sont alors comparées lors du chargement de la tôle et la localisation est prédite lorsque la déformation plastique (ou une autre grandeur mécanique) se concentre dans l'une de ces zones. Parmi les critères issus de cette méthode on peut citer les travaux de Hart, introduisant un défaut de propriétés mécaniques dans une zone de l'éprouvette testée (Hart 1967), ou ceux de Ghosh, introduisant une imperfection géométrique (Ghosh 1974), mais le critère le plus populaire est le critère de Marciniak – Kuczynski (M – K) basé sur l'existence d'un défaut d'épaisseur initialement présent au sein de la tôle (Marciniak et Kuczyński 1967).

Après avoir présenté la formulation classique de ce critère et discuté certaines de ses limites, une reformulation plus générale avec une orientation tridimensionnelle de la bande défectueuse sera proposée en vue d'établir une relation entre la méthode d'introduction d'un défaut initial et la méthode d'analyse de bifurcation.

6.3.1 Formulation classique du modèle M – K avec une bande de défaut restreinte au plan

Le modèle M – K est basé sur l'hypothèse selon laquelle la localisation se développe à partir d'une hétérogénéité d'épaisseur initialement présente dans la tôle. Il est alors postulé que l'imperfection de type géométrique introduite dans ce modèle est constituée par une bande présentant un défaut initial d'épaisseur et dont la normale $\mathbf{n}$ est orientée suivant la direction principale majeure du chargement. Les directions principales d'anisotropie et de chargement seront par la suite considérées confondues. Pour des cas plus généraux ne faisant pas appel à cette hypothèse, le lecteur intéressé pourra se référer par exemple à (Habbad 1994). La striction localisée est détectée lorsque le rapport d'une grandeur mécanique (généralement liée aux déformations) entre les zones défectueuse et saine atteint une valeur critique.

La comparaison entre les CLF expérimentales et théoriques obtenues à l'aide du modèle M – K montre des résultats généralement qualifiés de satisfaisants dans le domaine de l'expansion (Mesrar et al. 1998). Cet accord entre résultats théoriques et expérimentaux n'étant plus vérifié dans le domaine du retreint, une adaptation du modèle a été proposée par Hutchinson et Neale pour qui l'orientation initiale de la normale à la bande permettant de minimiser la CLF n'est pas forcément celle de la direction principale majeure du chargement et doit être prise en compte dans le domaine du retreint (Hutchinson et Neale 1978). La normale au plan de localisation est alors définie dans le plan de la tôle et repérée d'un angle θ par rapport à la direction principale majeure de chargement, comme l'indique la Figure 6.4.

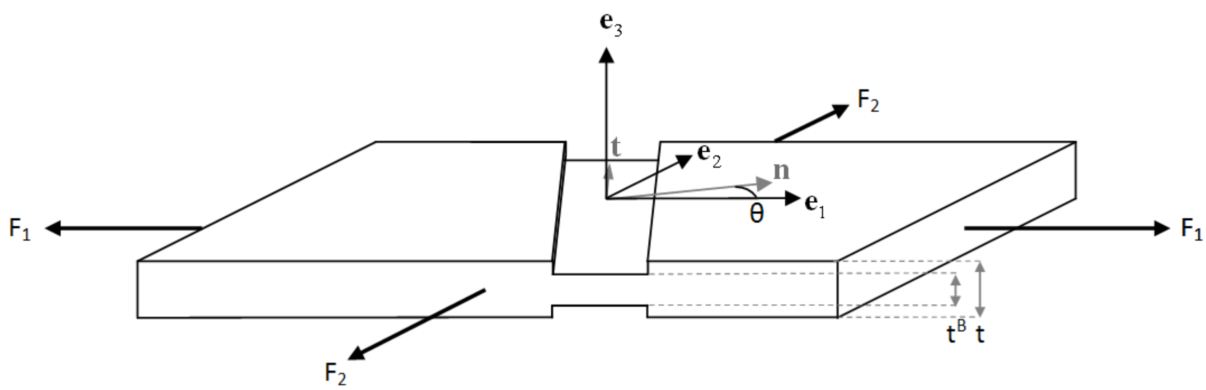


Figure 6.4 : Orientation de la bande de localisation suivant le critère de Marciniak – Kuczynski modifié par Hutchinson et Neale.

L'évolution de l'angle θ entre la direction principale majeure du chargement et la normale de la bande peut être calculée à partir de méthodes géométriques dépendant de la cinématique du problème dans la zone saine. Une première méthode permet de calculer la valeur de l'angle à partir de la connaissance de sa valeur à l'incrément de chargement précédent et de la valeur des incréments de déformation, et est par exemple utilisée par (Butuc et al. 2002), :

$$\tan(\theta + d\theta) = \frac{1 + d\varepsilon_1^A}{1 + d\varepsilon_2^A} \tan(\theta) \tag{6.19}$$

Une seconde méthode permet de relier la valeur de l'angle directement à la valeur initiale de celui-ci dans le cas de chargements linéaires en déformation (Hutchinson et Neale 1978; Cao et al. 2000) :

$$\tan(\theta) = \exp(\varepsilon_1^A - \varepsilon_2^A) \tan(\theta_0) \tag{6.20}$$

Dans le cas de tôles pour lesquelles les directions principales de chargement et d'anisotropie ne sont pas confondues, des analyses complémentaires sur l'analyse de l'orientation de la bande peuvent être consultées dans (Kuroda et Tvergaard 2000) ou dans (Hill 2001).

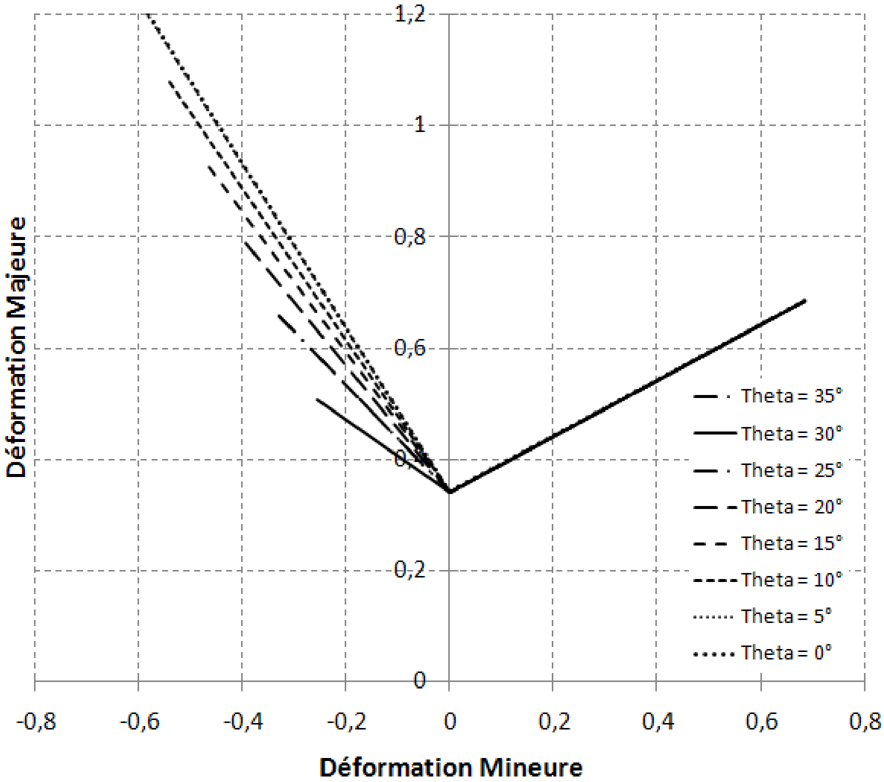


Figure 6.5 : Exemple d’influence de l’orientation initiale de la bande du défaut initial sur les déformations critiques à localisation pour des trajets de traction uniaxiale, de traction plane et de traction équibiaxiale.

D’après les simulations numériques effectuées, l’influence de l’orientation initiale de la bande défectueuse sur le niveau de déformation à localisation se manifeste dans le domaine du retreint et est particulièrement marquée pour des trajets de chargements proches de la traction uniaxiale.

Pour chaque trajet de chargement et pour chaque orientation initiale de la bande, les principales étapes nécessaires à la mise en œuvre du modèle M – K sont donc le chargement de la zone saine, la détermination des propriétés élasto-plastiques dans cette zone, le chargement de la zone défectueuse à partir des équations d’équilibre et de compatibilité, la détermination des propriétés élasto-plastiques dans cette zone puis l’application d’un critère d’arrêt reliant l’évolution des propriétés mécaniques dans les deux zones et permettant de détecter la localisation. Ces étapes sont synthétisées en Figure 6.6.

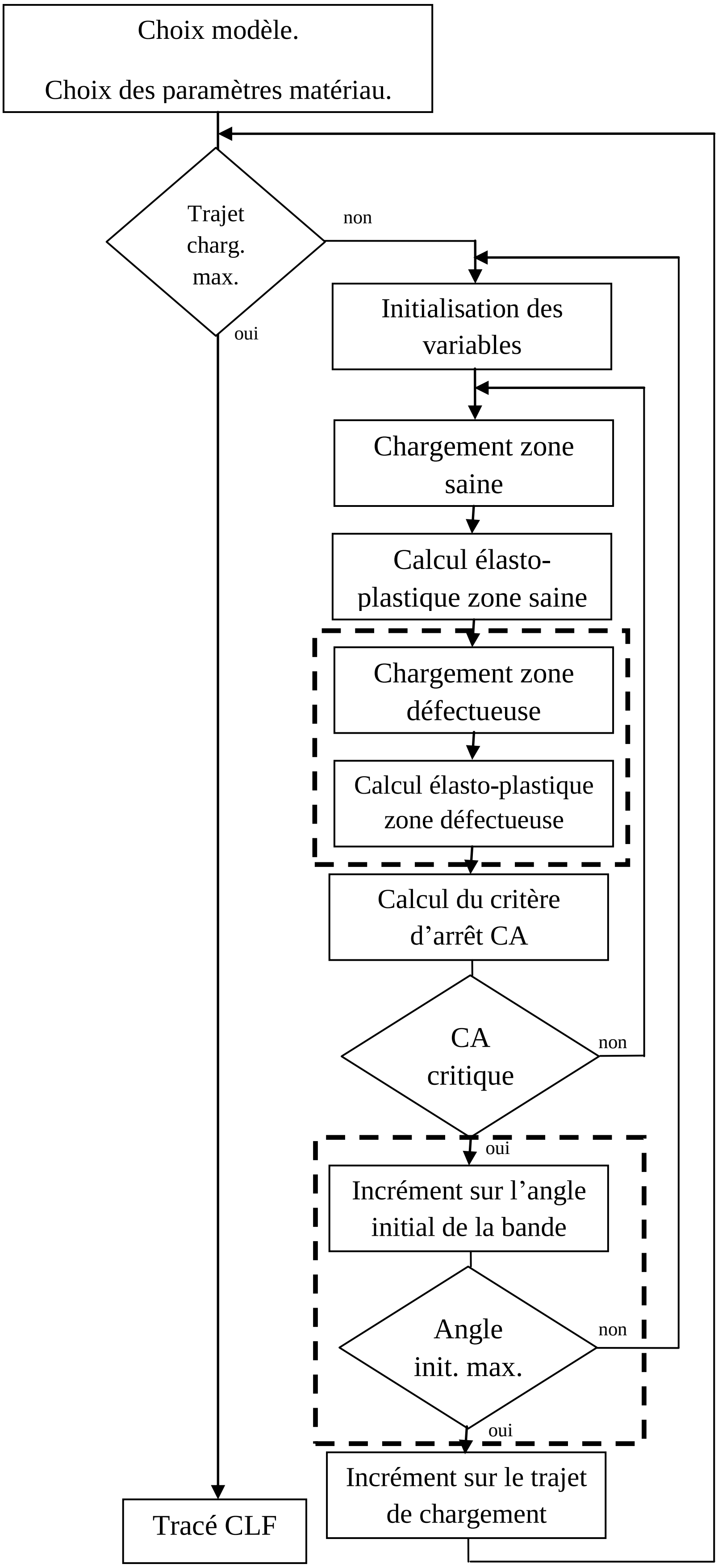


Figure 6.6 : Schéma d'intégration du modèle M – K.

Chargement et calcul élasto-plastique dans la zone saine :

Le chargement et le calcul des propriétés élasto-plastiques dans la zone saine sont identiques à ceux utilisés pour l'ensemble des critères de détection d'instabilité plastique et présentés au Chapitre 3. Il est intéressant de noter que différents trajets de chargements ont été utilisés pour le chargement de la zone saine. Un premier type de chargement, proportionnel en taux de déformation ou proportionnel en gradient des vitesses, offre un cadre particulièrement adapté pour certaines études théoriques (Hutchinson et Neale 1978; Habbad 1994; Aretz 2007; Eyckens et al. 2009). Un chargement mixte en taux de contraintes et en taux de déformations permet quant à lui de vérifier l'état de contraintes planes souvent observé lors du chargement plan de tôles (Knockaert 2001). Il est enfin aussi possible de charger cette zone avec des chargements radiaux en contraintes (Butuc 2004). Quel que soit le type de chargement choisi, il est alors possible de connaitre les états de contrainte et de déformation ainsi que le module tangent dans la zone saine à chaque pas de chargement.

Chargement et calcul élasto-plastique dans la bande défectueuse :

Une fois l'état de déformation connu dans la zone saine, l'orientation de la bande peut être actualisée à partir des formules (6.19) ou (6.20). L'état mécanique à l'intérieur de la zone géométriquement affectée est ensuite déterminé à partir des conditions d'équilibre et de compatibilité des déformations au niveau de la bande.

La condition de compatibilité des déformations impose qu'au passage dans la bande :

$$D_{tt}^{B} = D_{tt} \tag{6.21}$$

Dans le cas de bandes dont l'orientation est restreinte au plan de chargement, les trois conditions suivantes peuvent être formulées à partir de la continuité des efforts à travers la bande dans le repère de chargement :

$$\begin{aligned}
\left(n_1\sigma_{11}^{B} + n_2\sigma_{21}^{B}\right)e^{B} &= \left(n_1\sigma_{11} + n_2\sigma_{21}\right)e \\
\left(n_1\sigma_{12}^{B} + n_2\sigma_{22}^{B}\right)e^{B} &= \left(n_1\sigma_{12} + n_2\sigma_{22}\right)e \\
\left(n_1\sigma_{13}^{B} + n_2\sigma_{23}^{B}\right)e^{B} &= \left(n_1\sigma_{13} + n_2\sigma_{23}\right)e
\end{aligned} \tag{6.22}$$

ou dans le repère associé à la bande :

$$\begin{aligned}
\sigma_{nn}^{B}e^{B} &= \sigma_{nn}e \\
\sigma_{nt}^{B}e^{B} &= \sigma_{nt}e \\
\sigma_{n3}^{B}e^{B} &= \sigma_{n3}e
\end{aligned} \tag{6.23}$$

où l'exposant $\square^{B}$ réfère à une grandeur à l'intérieur de la bande du défaut alors que l'absence d'indice indique une grandeur de la zone saine. n_i représente la $i^{ème}$ composante de la normale $\mathbf{n}$ prise dans le repère du chargement et e l'épaisseur de la tôle, à partir de laquelle est définie le rapport d'épaisseur f^{MK} (parfois appelé taille du défaut) à chaque instant :

$$f^{MK} = \frac{e^B}{e} = f_0^{MK} \exp\left(\varepsilon_{33}^B - \varepsilon_{33}\right) \tag{6.24}$$

où le rapport initial f_0^{MK} des épaisseurs introduit par l'utilisateur est défini par :

$$f_0^{MK} = \frac{e_0^B}{e_0} \tag{6.25}$$

Ce paramètre joue un rôle primordial dans la prévision de formabilité avec le modèle M – K ; l'étude de son influence fera l'objet d'une partie du prochain paragraphe. En plus des équations de compatibilité des déformations et des conditions d'équilibre, des hypothèses complémentaires de chargement plan identiques à celles imposées dans la zone saine permettent de déterminer complètement le chargement de la zone d'imperfection géométrique. La pleine connaissance du chargement dans la bande permet alors la détermination de l'état mécanique et l'actualisation des états de contraintes, de déformation et du module tangent.

Application du critère d'arrêt :

Dans le modèle M – K, les états de contrainte et de déformation évoluent de manière différente dans la zone saine et dans une bande présentant un défaut d'épaisseur. Expérimentalement, il est observé que la localisation des déformations se produit dans une zone affaiblie d'une éprouvette. Numériquement, il est constaté une accélération de la déformation dans cette zone, conduisant à l'instabilité plastique. Au cours du chargement, la prédiction de la localisation peut alors être effectuée à partir de la comparaison de certaines grandeurs mécaniques pertinentes au cours du chargement.

Le critère d'arrêt du modèle M – K permettant de comparer le rapport des valeurs d'une grandeur mécanique $\square$ dans chaque zone à une valeur critique prend alors la forme suivante :

$$\frac{\square^B}{\square} \geq S^{MK} \tag{6.26}$$

avec S^{MK} le seuil du modèle. Les grandeurs remplacées par $\square$ peuvent être des composantes du tenseur de déformations dans une direction privilégiée, des déformations équivalentes ou leur taux. La localisation est prédite dès que la valeur seuil est atteinte.

Pour chaque orientation initiale de la bande, les valeurs critiques de déformations (ou de contraintes) sont déterminées et la valeur minimale est retenue comme valeur critique. La Courbe Limite de Formage peut ensuite être tracée à partir des points critiques calculés pour chaque trajet de chargement.

Après la taille initiale du défaut, deux autres paramètres doivent être arbitrairement introduits par l'utilisateur : le choix de la valeur du seuil à localisation et le choix des grandeurs mécaniques à comparer. De nombreuses propositions sont disponibles dans la littérature, leur pertinence et leur influence sur le niveau de localisation prédit seront ensuite discutées.

6.3.2 Influence des paramètres utilisateur

Contrairement au critère de Perte d'Ellipticité, trois paramètres doivent être introduits arbitrairement par l'utilisateur lors de l'utilisation du modèle M – K. L'objectif des prochains paragraphes est de présenter les différents choix possibles pour ces paramètres et de mettre en évidence leur influence sur le niveau de formabilité prédit.

Choix de la taille initiale du défaut :

Le premier paramètre utilisateur introduit est la taille du défaut initial. Physiquement, ce paramètre représente la taille d'un défaut d'épaisseur, donc un affaiblissement structurel, dans une zone de l'éprouvette où la localisation puis la rupture ont une plus forte probabilité de se produire. Ce faible défaut d'épaisseur peut être comparé à un défaut réel présent dans la structure ou à la rugosité de la structure ; aucune étude expérimentale visant à introduire un défaut dans la structure ou à mesurer la rugosité d'une éprouvette n'a toutefois semblé permettre d'établir un lien entre la taille du défaut initialement introduit et les propriétés géométriques réelles d'une éprouvette (Hiroi et Nishimura 1997). Ce défaut peut alors être vu comme un défaut géométrique équivalent aux imperfections présentes dans la pièce et ayant différentes origines physiques comme par exemple une épaisseur variable, une hétérogénéité de l'écrouissage ou encore la présence de microcavités.

Face à l'impossibilité de relier ce paramètre à des grandeurs physiques mesurables, des choix arbitraires sont proposés, par exemple $f_0^{MK} = 0,998$ dans (Banabic et al. 2006), sans autre justification que l'expérience de l'utilisateur. Généralement, les valeurs choisies sont telles que :

$$0,98 \leq f_0^{MK} \leq 0,999 \tag{6.27}$$

Numériquement, l'influence de la valeur de l'imperfection sur le niveau de formabilité prédite est mise en évidence en Figure 6.7, présentant le tracé d'une CLF pour différentes valeurs de f_0^{MK} :

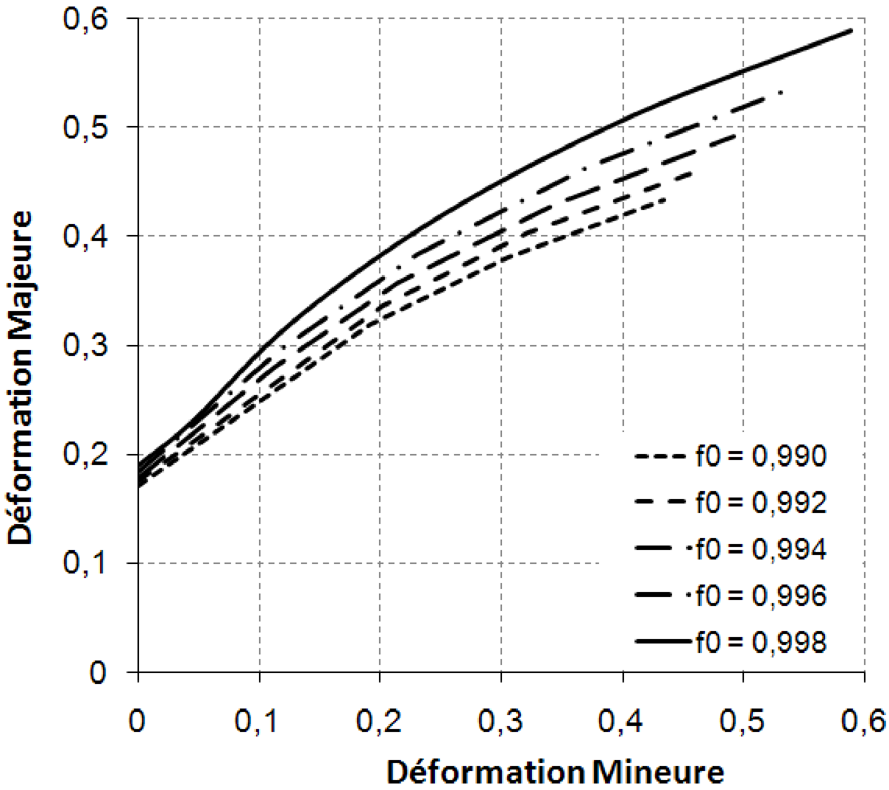


Figure 6.7 : Influence de la valeur du défaut initial sur le tracé de CLF. Application à un matériau fictif à écrouissage isotrope ($n = 0,2$ et $k = 580\text{MPa}$).

La formabilité prédite augmente avec l'augmentation de f_0^{MK}, en particulier dans les domaines proches de la traction uniaxiale et de l'expansion équibiaxiale. Lorsque le rapport f_0^{MK} tend vers 1, la déformation critique est toutefois rejetée à l'infini (en l'absence d'endommagement), ce qui est en désaccord avec les observations expérimentales.

Le choix du défaut initial a une forte influence sur les niveaux des déformations critiques prédits à partir du modèle M – K. L'impossibilité de relier et d'identifier ce paramètre à des grandeurs physiques ainsi que les résultats irréalistes de formabilité obtenus pour des valeurs de ce paramètre proches de 1 dans le cas de matériaux élasto-plastiques sans endommagement constituent une limite majeure de ce critère. Un complément à cette discussion sur l'interprétation du rôle de ce paramètre sera apporté dans le cas de matériaux élasto-plastiques endommageables dans le paragraphe 6.3.4 concernant le rapprochement entre le modèle M – K et le critère de Perte d'Ellipticité.

Choix des grandeurs du rapport du critère d'arrêt :

Dans les nombreux travaux relatifs à l'utilisation du modèle M – K, différentes grandeurs mécaniques à comparer dans le critère d'arrêt (6.26) ont été utilisées. Les principales méthodes, répertoriées dans (Lejeune 2002), relient l'état de déformation ou son taux dans la zone d'imperfection à celui dans la partie saine de la tôle. Lorsque les déformations principales majeures dans ces zones sont considérées, le critère est défini par :

$$\frac{\varepsilon_1^B}{\varepsilon_1} \geq S^{MK} \tag{6.28}$$

Il peut être constaté numériquement que leur rapport ne croit que lentement (Figure 6.8). Ce choix ne semble donc pas le plus pertinent pour mettre en évidence la brusque accélération de la déformation associée à la localisation dans la bande. Une formulation basée sur les taux de déformations semble dès lors plus adaptée. D'autres auteurs proposent d'utiliser des composantes du tenseur taux de déformations choisies dans certaines directions privilégiées, comme par exemple la direction principale majeure de chargement ou les directions normales et tangentielles à la bande (Cao et al. 2000). La détection de modes localisés dans ces directions est alors privilégiée et la formabilité peut être surestimée si le mode critique n'est pas orienté suivant cette direction. Ce problème peut toutefois être facilement surmonté par l'utilisation d'une grandeur scalaire pertinente, comme par exemple le taux de déformation plastique équivalente (Dudzinski et Molinari 1991; Boudeau et al. 1998) :

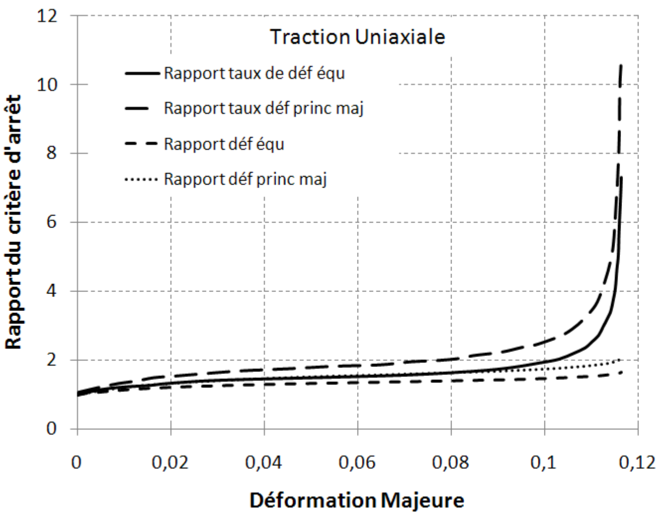
$$\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^B}{\dot{\bar{\varepsilon}}} \geq S^{MK} \tag{6.29}$$

Ce choix a été privilégié pour l'implantation du modèle M – K et utilisé lors des simulations numériques.

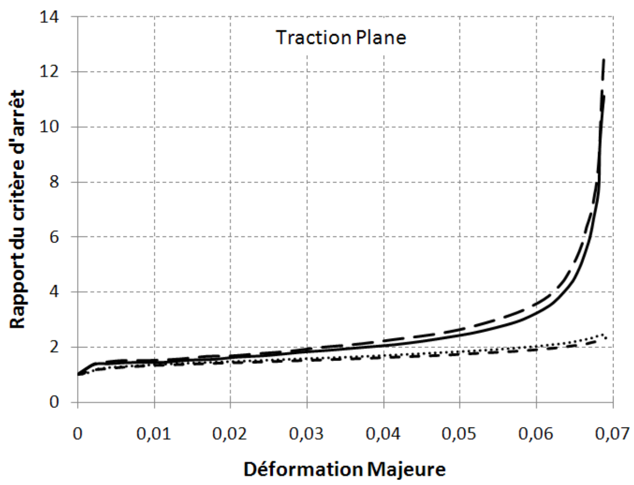
Choix du seuil du critère d'arrêt :

Un dernier paramètre arbitrairement introduit par l'utilisateur est la valeur critique du seuil d'arrêt S^{MK}. Dans le cas où le rapport (6.28) est choisi, l'évolution est assez progressive jusqu'à la localisation et le choix de la valeur du seuil peut s'avérer délicat et avoir un impact sur les CLF. Si au contraire le choix plus pertinent du rapport (6.29) est effectué, la localisation est accompagnée par une augmentation brutale de ce rapport et le choix d'une valeur du seuil supérieure à 10 n'a qu'une influence marginale sur les CLF, soit finalement :

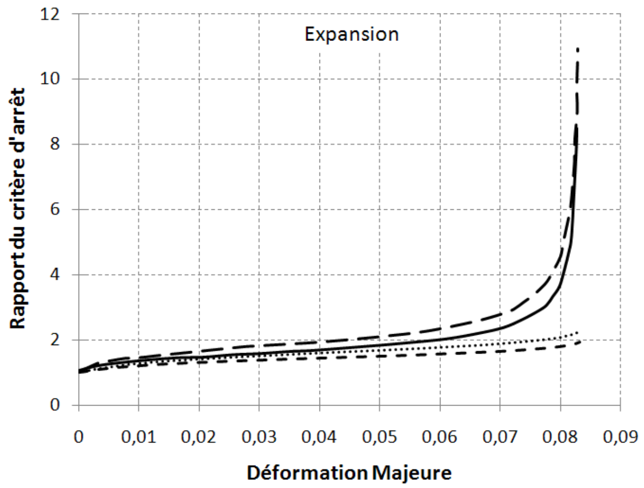
$$S^{MK} \geq 10 \tag{6.30}$$



a)



b)



c)

Figure 6.8 : Exemple d'évolution des rapports des déformations équivalentes, des déformations principales majeures ou de leurs taux dans les zones défectueuses et saines a) en traction uniaxiale, b) en traction plane et c) en expansion.

L'exemple présenté en Figure 6.8 met en évidence une forte et rapide évolution des rapports des taux de déformation principale majeure et des taux de déformation équivalente précédant la localisation, contrairement à l'évolution des rapports de déformations équivalentes et principales majeures. Le choix de rapports formulés à partir des taux d'une fonction des déformations peut donc sembler pertinent. D'autre part, l'augmentation de ces rapports étant brusque et rapide à l'approche de la localisation, le choix du seuil S^{MK} n'a qu'une influence limitée à partir d'une certaine valeur, supérieure à sept dans cet exemple.

6.3.3 Reformulation tridimensionnelle du critère de Marciniak – Kuczynski

Une écriture alternative du critère M – K a été proposée dans le cas de comportements bidimensionnels par (Kuroda et Tvergaard 2000). Un formalisme différent et proche de celui utilisé au cours du paragraphe 6.2.1 lors du développement du critère de Rice est réutilisé pour relier les champs mécaniques des deux zones hétérogènes du modèle. Après quelques éléments sur la cinématique du problème, une extension de cette écriture du modèle M – K aux comportements tridimensionnels est proposée dans ce paragraphe.

Soit Ω un domaine d'une tôle mince soumise à un chargement linéaire et radial en gradient des vitesses tel que :

$$\mathbf{G} = D_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -1-\beta \end{pmatrix} \tag{6.31}$$

La définition du tenseur gradient de la transformation $\left(\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{F}\right)$ permet de déduire à partir de cette expression que :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \exp(\varepsilon_{11}) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(\beta\varepsilon_{11}) & 0 \\ 0 & 0 & \exp\left(-(1+\beta)\varepsilon_{11}\right) \end{pmatrix} \tag{6.32}$$

où ε_{11} est l'intégrale de D_{11}. La relation entre la normale à la bande dans la configuration actuelle $\mathbf{n}$ et celle prise dans la configuration initiale $\mathbf{n}_0$ est exprimée à l'aide de relations de mécanique des milieux continus :

$$\mathbf{n} = J\mathbf{F}^{-T} \frac{dS_0}{dS} \cdot \mathbf{n}_0 \tag{6.33}$$

où dS et dS_0 sont les éléments de surface de normales $\mathbf{n}$ et $\mathbf{n}_0$ respectivement, J le jacobien de la transformation et $\mathbf{F}^{-T}$ est l'inverse de la transposée du tenseur $\mathbf{F}$. En utilisant les notations introduites en Figure 6.2, les normales peuvent être définies dans le repère de chargement par :

$$\mathbf{n}_0 = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 \cos\varphi_0 \\ \sin\theta_0 \cos\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \tag{6.34}$$

A partir de l'Equation (6.33), des relations peuvent être établies entre les angles définissant l'orientation 3D de la normale au plan de la bande exprimés dans les configurations actuelle et de référence :

$$\begin{gathered} \tan\theta = \exp\left(\left(1-\beta\right)\varepsilon_{11}\right)\tan\theta_0 \\ \tan\varphi = \frac{\sin\theta}{\sin\theta_0}\exp\left(\left(1+2\beta\right)\varepsilon_{11}\right)\tan\varphi_0 \end{gathered} \tag{6.35}$$

D'autre part, la relation (6.24) entre le rapport actuel des épaisseurs et le rapport initial est toujours valable avec cette formulation. Le modèle M – K tel qu'il a été présenté précédemment est basé sur les équations d'équilibre et de compatibilité des déformations entre les zones saine et défectueuse. Dans une configuration lagrangienne actualisée, les équations d'équilibre au niveau de la bande conduisent à :

$$e^B \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{N}}^B = e \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{N}} \tag{6.36}$$

avec e l'épaisseur de la tôle, soit en utilisant la définition (6.25) de la taille du défaut initial :

$$f^{MK} \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{N}}^B = \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{N}} \tag{6.37}$$

avec $\mathbf{n}$ la normale au plan de la bande, définie dans un espace tridimensionnel. $\dot{\mathbf{N}}$ est le tenseur taux de contrainte nominale, relié au gradient des vitesses $\mathbf{G}$ par le module $\boldsymbol{L}$ à l'intérieur et à l'extérieur de la bande :

$$\begin{gathered} \dot{\mathbf{N}}^B = \boldsymbol{L}^B : \mathbf{G}^B \\ \dot{\mathbf{N}} = \boldsymbol{L} : \mathbf{G} \end{gathered} \tag{6.38}$$

Le saut du gradient des vitesses au passage dans la bande devant vérifier la condition de compatibilité de Hadamard (Hadamard 1903), il peut être exprimé par :

$$\left[\mathbf{G}\right] = \mathbf{G}^B - \mathbf{G} = \dot{\mathbf{c}} \otimes \mathbf{n} \tag{6.39}$$

avec $\dot{\mathbf{c}}$ le vecteur de vitesse relative entre les deux parties de la tôle. L'introduction de la condition de compatibilité et de la relation de comportement dans l'équation d'équilibre conduit à :

$$f^{MK} \mathbf{n} \cdot \left(\boldsymbol{L}^B : \left(\mathbf{G} + \dot{\mathbf{c}} \otimes \mathbf{n}\right)\right) = \mathbf{n} \cdot \left(\boldsymbol{L} : \mathbf{G}\right) \tag{6.40}$$

Le vecteur de vitesse relative peut alors être déterminé :

$$\dot{\mathbf{c}} = \left(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{L}^B \cdot \mathbf{n}\right)^{-1} \cdot \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{L}}{f^{MK}} - \boldsymbol{L}^B \right) : \mathbf{G} \tag{6.41}$$

L'expression de $\dot{\mathbf{c}}$ permet de connaitre entièrement le chargement à appliquer à la bande. Les taux de déformations étant déterminés dans les deux zones, il est possible d'appliquer l'ensemble de la démarche du modèle M – K synthétisée en Figure 6.6 et présentée précédemment. Cette écriture utilise un formalisme proche de celui utilisé lors du développement du critère de Perte d'Ellipticité et permettra donc de faciliter la comparaison théorique de ces deux critères dans le prochain paragraphe.

6.3.4 Relation théorique entre le critère de Marciniak – Kuczynski et le critère de Perte d'Ellipticité

Les critères de Perte d'Ellipticité et de Marciniak – Kuczynski sont basés sur des théories différentes, toutefois certaines équations communes sont utilisées lors de leur formulation, notamment les équations d'équilibre et de compatibilité au niveau des plans délimitant la bande de localisation. En utilisant ces similitudes et un formalisme commun, des relations entre ces deux critères vont maintenant être recherchées.

Une écriture tridimensionnelle équivalente du modèle M – K peut être obtenue dans la configuration initiale. Les équations d'équilibre entre la bande et la partie saine conduisent alors à :

$$e_0^B \dot{\mathbf{\Pi}}^B \cdot \mathbf{n}_0 = e_0 \dot{\mathbf{\Pi}} \cdot \mathbf{n}_0 \tag{6.42}$$

ou encore en utilisant la définition (6.25) de la taille du défaut initial :

$$f_0^{MK} \dot{\mathbf{\Pi}}^B \cdot \mathbf{n}_0 = \dot{\mathbf{\Pi}} \cdot \mathbf{n}_0 \tag{6.43}$$

avec $\mathbf{n}_0$ la normale au plan de la bande, définie dans un espace tridimensionnel. $\mathbf{\Pi}$ est le premier tenseur de contrainte de Piola – Kirchhoff, dont le taux est relié au tenseur gradient $\dot{\mathbf{F}}$ par le module $\mathcal{L}$ à l'intérieur et à l'extérieur de la bande du défaut respectivement par :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{\Pi}}^B &= \mathcal{L}^B : \dot{\mathbf{F}}^B \\ \dot{\mathbf{\Pi}} &= \mathcal{L} : \dot{\mathbf{F}} \end{aligned} \tag{6.44}$$

Le saut de $\dot{\mathbf{F}}$ au passage de la bande doit vérifier la condition de compatibilité, soit :

$$\left[\dot{\mathbf{F}}\right] = \dot{\mathbf{F}}^B - \dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{c}}_0 \otimes \mathbf{n}_0 \tag{6.45}$$

avec $\dot{\mathbf{c}}_0$ le vecteur de vitesse relative entre les deux parties de la tôle. L'introduction de la condition de compatibilité (6.45) et de la relation de comportement (6.44) dans l'équation d'équilibre (6.43) conduit à :

$$f_0^{MK}\left(\mathcal{L}^B:\left(\dot{\mathbf{F}}+\dot{\mathbf{c}}_0\otimes\mathbf{n}_0\right)\right)\cdot\mathbf{n}_0=\left(\mathcal{L}:\dot{\mathbf{F}}\right)\cdot\mathbf{n}_0 \tag{6.46}$$

Le vecteur de vitesse relative peut alors être déterminé :

$$\dot{\mathbf{c}}_0=\left(\mathbf{n}_0\cdot\mathcal{L}^{BT}\cdot\mathbf{n}_0\right)^{-1}\cdot\left(\left(\frac{\mathcal{L}}{f_0^{MK}}-\mathcal{L}^B\right):\dot{\mathbf{F}}\right)\cdot\mathbf{n}_0 \tag{6.47}$$

où la transposée $\mathcal{L}^{BT}$ du tenseur $\mathcal{L}^B$ est définie par $\mathcal{L}^{BT}_{ijkl}=\mathcal{L}^B_{jikl}$. Lorsque le rapport d'épaisseur initialement introduit tend vers 1 (absence de défaut d'épaisseur), il est possible de vérifier que le comportement à l'intérieur de la bande tend vers celui de la zone saine, ce qui implique en particulier :

$$\lim_{f_0^{MK}\to 1}\mathcal{L}^B=\mathcal{L} \tag{6.48}$$

d'où l'on déduit :

$$\lim_{f_0^{MK}\to 1}\frac{\mathcal{L}}{f_0^{MK}}-\mathcal{L}^B=\mathbf{0} \tag{6.49}$$

d'après la relation (6.47), on a nécessairement :

$$\lim_{f_0^{MK}\to 1}\left(\mathbf{n}_0\cdot\mathcal{L}^T\cdot\mathbf{n}_0\right)\cdot\dot{\mathbf{c}}_0=\mathbf{0} \tag{6.50}$$

Ce qui redonne le critère de Rice, à savoir :

$$\det\left(\mathbf{n}_0\cdot\mathcal{L}^T\cdot\mathbf{n}_0\right)=\mathbf{0} \tag{6.51}$$

Cette relation théorique peut être illustrée et vérifiée en traçant sur un même graphe les CLF obtenues avec le critère de Rice et de M – K pour différentes valeurs du défaut initial dans le cas d'un acier Dual Phase modélisé avec un comportement élasto-plastique couplé à l'endommagement.

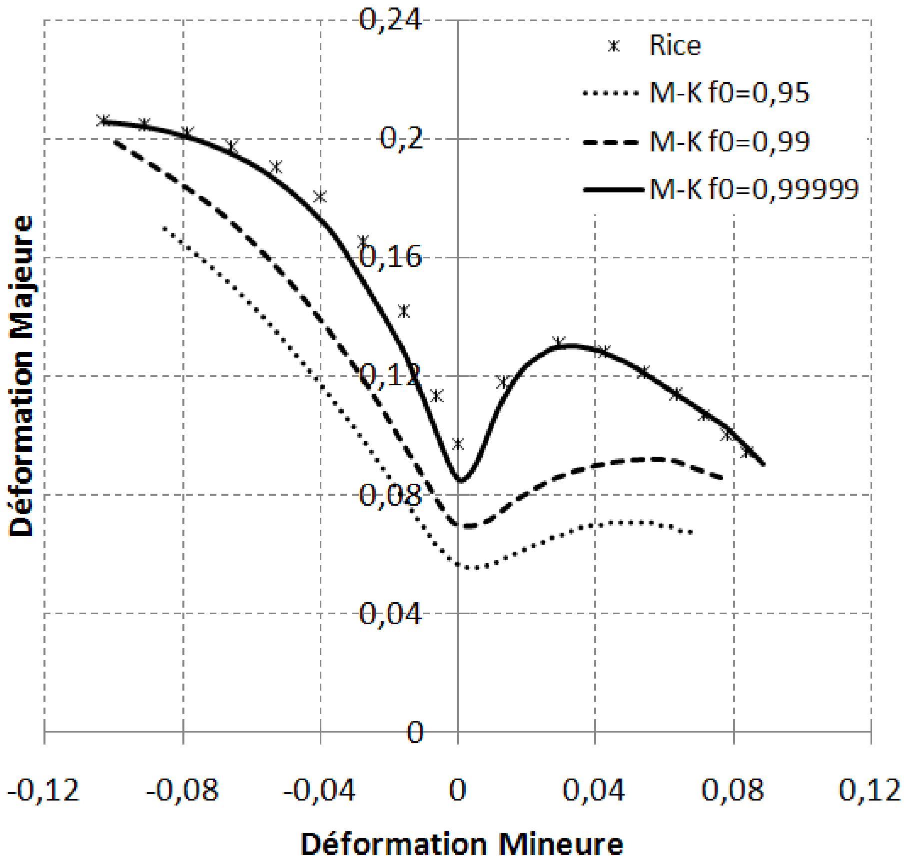


Figure 6.9 : CLF obtenues avec les critères de Rice et de M – K pour différentes valeurs de la taille du défaut initial pour un acier Dual Phase modélisé à l'aide d'une loi d'écrouissage de Voce ($C_R = 9{,}3$, $R_{sat} = 551{,}4MPa$ et $Y_0 = 356MPa$) et une loi d'endommagement isotrope de type Lemaitre ($\beta_{end} = 5$, $S_{end} = 20$ et $s_{end} = 0{,}01$) identifiée dans (Haddag 2007).

6.4 Analyse Linéaire de stabilité

Nous avons vu que les méthodes précédentes basées sur l'analyse de bifurcations ne sont pas adaptées à l'étude des problèmes de localisation dans des matériaux dont le comportement dépend du temps physique, excluant donc les matériaux à comportement visqueux. Pour la résolution de tels problèmes, il est possible d'utiliser des méthodes générales basées sur l'analyse de stabilité d'un système mécanique, comme la méthode directe de Lyapunov (Lyapunov 1907) ou l'analyse de stabilité par perturbation linéarisée (Benallal 2000). Ces méthodes permettent l'étude de stabilité tant pour des matériaux élasto-viscoplastiques que pour des matériaux élasto-plastiques, toutefois l'existence de résultats théoriques optimaux dépend de la nature du problème à traiter. Il peut donc être utile de rappeler certains résultats avant l'étude de stabilité matérielle. Seule la méthode d'analyse de stabilité par méthode de perturbation linéarisée sera considérée par la suite.

6.4.1 Notion de stabilité

Au cours d'une expérience, de nombreuses imperfections géométriques ou matérielles peuvent perturber les propriétés mécaniques d'un système ou ses conditions aux limites. La simple connaissance des positions d'équilibre d'un système n'a donc qu'un intérêt limité et il devient important pour l'expérimentateur de connaitre les conditions sous lesquelles des perturbations des conditions initiales du système différentiel n'entraineront que de faibles variations de sa réponse globale. Les bases théoriques de la réponse à cette question reposent sur le théorème de stabilité de Lyapunov dans le cas de systèmes différentiels autonomes. Le lecteur pourra se référer à (Abed-Meraim 1999b) pour une présentation plus détaillée, seules les principales définitions et les conclusions sur les critères concernant la stabilité étant reprises ici.

Cas des systèmes autonomes :

Soit un système différentiel décrit par l'équation différentielle :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) \tag{6.52}$$

et dont une position d'équilibre $\mathbf{x}_e$ vérifie les propriétés suivantes :

$$\mathbf{x}_e(t) = \mathbf{x}_e \qquad \forall t \geq 0 \tag{6.53}$$

Si le système reste proche de sa position d'équilibre lorsqu'il en est écarté par l'application d'une perturbation en position ou en vitesse suffisamment faible, cet équilibre est dit stable ; ce qui se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ /\ \forall x_p(0) \in \mathbb{R},\ \left|\mathbf{x}_p(0) - \mathbf{x}_e\right| < \eta\ \Rightarrow\ \forall t \in \mathbb{R}^+,\ \left|\mathbf{x}_p(t) - \mathbf{x}_e\right| < \varepsilon \tag{6.54}$$

avec $\mathbf{x}_p(t)$ une solution perturbée. De plus, si pour tout mouvement perturbé :

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbf{x}_p(t) - \mathbf{x}_e = \mathbf{0} \tag{6.55}$$

l'équilibre est dit asymptotiquement stable.

Face aux difficultés soulevées par une résolution directe de l'étude de stabilité du système, une méthode de linéarisation peut être utilisée. Cette méthode repose sur l'introduction d'une petite perturbation $\delta\mathbf{x}$ autour de la position d'équilibre, telle que :

$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{x}_e + \delta\mathbf{x}(t) \tag{6.56}$$

où $\delta\mathbf{x}$ est une fonction continue sur son intervalle de définition. Le développement limité au premier ordre du système différentiel ordinaire perturbé autour d'une position d'équilibre s'écrit :

$$\delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e} \cdot \delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{h}\big(\delta\mathbf{x}(t)\big) \tag{6.57}$$

avec $\mathbf{h}\big(\delta\mathbf{x}(t)\big) = o\big(\delta\mathbf{x}(t)\big)$ (i.e. $\mathbf{h}\big(\delta\mathbf{x}(t)\big) \to \mathbf{0}$ lorsque $\delta\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ et où la matrice jacobienne $\mathbf{B} = \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e}$ est indépendante du temps. La linéarisation du système (6.57) conduit au système à opérateur linéaire autonome suivant :

$$\delta\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{x}(t) \tag{6.58}$$

dont les solutions sont de la forme :

$$\delta\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{B}} \cdot \delta\mathbf{x}(0) \tag{6.59}$$

ou encore :

$$\delta\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{q} b_{ik} t^{k-1} \right) \mathbf{b}_i e^{t\lambda_i} \tag{6.60}$$

avec dans cette formule p et λ_i respectivement le nombre de valeurs propres distinctes et la $i^{ème}$ valeur propre de multiplicité q, les vecteurs $\mathbf{b}_i$ étant des vecteurs associés constituant une base propre de la matrice jacobienne $\mathbf{B}$. Les constantes b_{ik} sont déterminées en fonction des conditions initiales. Une condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique du système linéarisé est la stricte négativité des parties réelles des valeurs propres de la matrice jacobienne. Une condition nécessaire et suffisante de stabilité est assurée par la négativité de la partie réelle de ses valeurs propres si la multiplicité des valeurs propres à partie réelle nulle est un au plus (ce qui permet d'assurer pour ces valeurs propres que $t^{k-1} = 1$). Dans les autres situations où les valeurs propres sont à partie réelle négative et en comportent au moins une à partie réelle nulle, la stabilité dépend du terme non linéaire $\mathbf{h}(\delta\mathbf{x})$ de l'Equation (6.57) et il n'est donc pas possible de conclure sans l'étude de l'évolution de ce terme.

Cas des systèmes non autonomes :

Contrairement au cas autonome, la négativité des valeurs propres de $\mathbf{B}$ n'est plus une condition suffisante de stabilité (Abed-Meraim 1999b). Une condition suffisante de stabilité, plus restrictive, est dans ce cas la définie négativité de la partie symétrique de $\mathbf{B}$.

Le cadre théorique sur lequel est basée l'analyse de stabilité par méthode de perturbation linéarisée étant rappelé, il est maintenant possible d'appliquer cette méthode pour la prédiction de la localisation puis de comparer les résultats à ceux obtenus avec les critères basés sur des méthodes d'analyse de bifurcation précédemment présentés.

6.4.2 Présentation générale de l'Analyse Linéaire de Stabilité

Afin de pouvoir appliquer les résultats de stabilité, il convient de réécrire les équations régissant le comportement du matériau ou du système mécanique sous la forme (6.52). Une méthode générale peut ensuite être appliquée à l'analyse de stabilité d'une structure (Abed-Meraim 1999a) ou d'un matériau évoluant lentement auquel une perturbation est appliquée. Cette méthode a par exemple été appliquée à différentes classes de matériaux incluant des modèles viscoélastiques endommageables (Keryvin 1999), élasto-plastiques et élasto-viscoplastiques (Cano 1996; Barbier et al. 1998; Benallal 2000; Benallal et Comi 2002), dans le cas de matériaux élasto-plastiques montrant un vieillissement dynamique (Mazière 2007) et dans le cas de géomatériaux en élasto-plasticité non-associée (Diouta et Shahrour 2006).

En notant $\mathbf{Z}$ l'ensemble des variables observables et des variables internes régissant l'état mécanique d'un point matériel, il est supposé que les équations de comportement du modèle élasto-viscoplastique considéré peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathcal{F}\left(\mathbf{Z}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\right) \tag{6.61}$$

avec $\mathcal{F}$ un opérateur générique construit à partir des équations d'équilibre, des lois d'état, des lois complémentaires et des conditions initiales. Pour la classe de matériaux élasto-viscoplastiques présentée au Chapitre 3, on vérifiera ensuite que les lois de comportement peuvent s'écrire sous la forme (6.61). Soit $\delta\mathbf{u}$ une perturbation infinitésimale en déplacement de la forme :

$$\delta\mathbf{u}\left(t\right) = \delta\mathbf{u}_0 \exp\left(\eta t + i\xi \mathbf{x}\cdot\mathbf{n}\right) \tag{6.62}$$

avec $\delta\mathbf{u}_0$ l'amplitude initiale de cette perturbation et ξ le nombre d'onde. Son application conduit au système différentiel perturbé suivant après une éventuelle linéarisation :

$$\delta\dot{\mathbf{Z}} = \frac{\partial\mathcal{F}\left(\mathbf{Z},\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)}{\partial\mathbf{Z}}\cdot\delta\mathbf{Z} + \frac{\partial\mathcal{F}\left(\mathbf{Z},\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)}{\partial\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}\cdot\delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{6.63}$$

Dans le cas d'un système autonome, les solutions d'un système différentiel de premier ordre sont supposées être des exponentielles de même forme que la perturbation appliquée (Cano 1996), le système précédent devient (Barbier et al. 1998) :

$$\delta\mathbf{Z} = \left(\mathbf{1} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial\mathcal{F}\left(\mathbf{Z},\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)}{\partial\mathbf{Z}}\right)^{-1}\cdot\frac{\partial\mathcal{F}\left(\mathbf{Z},\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)}{\partial\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}\cdot\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{G}\cdot\delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{6.64}$$

avec $\mathbf{1}$ un tenseur unité dont l'ordre dépend du modèle de comportement choisi. Après prise en compte des équations d'équilibre et de la relation entre déplacement et déformation, l'étude de stabilité du système est un problème aux valeurs propres, dont la résolution conduit alors à la recherche des conditions d'annulation du taux de croissance de la perturbation en fonction de l'orientation du plan de localisation.

6.4.3 Application aux matériaux élasto-plastiques

L'écriture du critère de stabilité est basée sur la formulation en vitesse du problème d'équilibre, dont seules les principales étapes sont évoquées ici. Les équations du problème en vitesse s'écrivent :

$$\begin{gathered}\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \left(\mathbf{D} - \mathbf{D}^p\right) \\ \mathbf{D}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \dot{R} = H_R \dot{\lambda} \\ \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{H}_{\mathbf{X}} \dot{\lambda} \\ \dot{f}\left(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R\right) = 0\end{gathered} \tag{6.65}$$

La perturbation et la linéarisation de ce système conduit au système perturbé linéaire suivant :

$$\begin{gathered}\delta\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \left(\delta\mathbf{D} - \delta\mathbf{D}^p\right) \\ \delta\mathbf{D}^p = \delta\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \dot{\lambda}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} : \delta\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \mathbf{X}} : \delta\mathbf{X} + \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial R} \delta R\right) \\ \delta\dot{R} = H_R \delta\dot{\lambda} + \dot{\lambda} \frac{\partial H_R}{\partial R} \delta R \\ \delta\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{H}_{\mathbf{X}} \delta\dot{\lambda} + \dot{\lambda}\left(\frac{\partial \mathbf{H}_{\mathbf{X}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \delta\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial \mathbf{H}_{\mathbf{X}}}{\partial \mathbf{X}} : \delta\mathbf{X}\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} : \left(\delta\boldsymbol{\sigma} - \delta\mathbf{X}\right) : \left(\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\mathbf{X}}\right) + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \left(\delta\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \delta\dot{\mathbf{X}}\right) + \frac{\partial f}{\partial R} \delta\dot{R} = 0\end{gathered} \tag{6.66}$$

Le système ci-dessus pouvant s'écrire sous la forme différentielle (6.61), la relation suivante peut être obtenue, en se basant par exemple sur la démarche proposée dans (Diouta et Shahrour 2006) :

$$\delta\boldsymbol{\sigma} = \left(\mathbf{C} - \frac{\left(\mathbf{C} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right) \otimes \left(\eta \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} + \mathbf{B}_{pert}\right)}{\eta\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : H_{\mathbf{X}} + H_Y\right) + F_{pert}}\right) : \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}_p\left(\eta\right) : \delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{6.67}$$

avec $\boldsymbol{\varepsilon}$ la déformation totale. Les termes $\mathbf{B}_{pert}$ et F_{pert} sont définis par :

$$\mathbf{B}_{pert} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} : \left(\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\mathbf{X}}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial Y} \dot{Y}\right) : \mathbf{C} - \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \left(\left(\mathbf{C} : \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} : \mathbf{C}\right) + \dot{\lambda} \frac{\partial \mathbf{H}_{\mathbf{X}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}\right)$$

$$F_{pert} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \left(\mathbf{C} : \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} : \mathbf{C} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{C} : \frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} : \mathbf{H}_{\mathbf{X}} - \frac{\partial \mathbf{H}_{\mathbf{X}}}{\partial \mathbf{X}} : \mathbf{H}_{\mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{H}_{\mathbf{X}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \ldots$$

$$\ldots - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} : \left(\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\mathbf{X}} \right) \right) : \left(\mathbf{C} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{H}_{\mathbf{X}} \right) - \frac{\partial H_R}{\partial R} \dot{\lambda} H_R$$

Le cas des matériaux élasto-plastiques couplés à l'endommagement peut être traité en utilisant la même démarche. Les équations d'équilibre du système en l'absence de forces d'inertie et de forces intérieures peuvent s'écrire sous la forme :

$$div(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0} \tag{6.68}$$

La perturbation du système conduit à :

$$div(\delta\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0} \tag{6.69}$$

Soit en utilisant (6.67) :

$$div\left(\mathbf{L}_p(\eta) : \delta\boldsymbol{\varepsilon}\right) = \mathbf{0} \tag{6.70}$$

puis en exprimant $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ en fonction de la perturbation en déplacement imposée :

$$div\left(\mathbf{L}_p(\eta) : i\xi\left(\mathbf{n} \otimes \delta\mathbf{u}\right)\right) = \mathbf{0} \tag{6.71}$$

Ce qui est équivalent à :

$$(i\xi)^2 \left(\mathbf{n} \cdot \mathbf{L}_p(\eta) \cdot \mathbf{n}\right) \cdot \delta\mathbf{u}_0 \exp\left(\eta t + i\xi \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}\right) = \mathbf{0} \tag{6.72}$$

Les solutions non triviales de (6.72) sont ensuite calculées en fonction de l'orientation de la bande et du taux de croissance de la perturbation par :

$$\det\left(\mathbf{n} \cdot \mathbf{L}_p(\eta) \cdot \mathbf{n}\right) = 0 \tag{6.73}$$

La perte de stabilité est prédite lorsqu'une des racines du problème aux valeurs propres précédent est supérieure à une vitesse caractéristique η_0.

A partir de (3.31) et (6.67), la relation entre le module perturbé $\mathbf{L}_p$ et le module tangent analytique élasto-plastique $\mathbf{L}^{ep}$ est donnée par :

$$\lim_{\eta \to +\infty} \mathbf{L}_p(\eta) = \mathbf{L}^{ep} \tag{6.74}$$

Il a pu être montré à partir de cette relation que l'analyse de bifurcation proposée par Rice (Rice 1976) est un cas limite d'analyse linéaire de stabilité, les deux méthodes étant équivalentes lorsque le taux de croissance tend vers l'infini (Barbier et al. 1998).

6.5 Synthèse

Au cours des deux précédents chapitres, des critères permettant la prédiction d'instabilités plastiques en modes diffus, constituant une borne basse d'instabilité, ou en modes intermédiaires ont été présentés. Ceux-ci ont été complétés dans cette partie par des critères pour lesquels la localisation se produit sous forme de bandes présentant des discontinuités du gradient de la vitesse et dans lesquelles se concentrent la déformation ou l'endommagement à l'instabilité. Trois approches théoriques différentes ont été utilisées ou développées au cours de l'étude : l'analyse de bifurcation, la méthode multizones et l'analyse de stabilité linéarisée.

Les critères de Perte d'Ellipticité (Rice 1976) et de Perte d'Ellipticité Forte (Bigoni et Hueckel 1991) bénéficient de fondements théoriques justifiés et constituent une borne haute pour la prédiction d'instabilités plastiques. Dans le cas de comportements élasto-plastiques modélisés par des lois phénoménologiques en plasticité associée et avec des surfaces de charges ne présentant pas de points de vertex, ils ne peuvent prévoir un état critique que pour des matériaux adoucissants. Cet effet a été introduit par le couplage du modèle avec un modèle d'endommagement isotrope de type Lemaitre.

L'approche multizone constitue une approche alternative au critère de Perte d'Ellipticité. Le très populaire modèle M – K est basé sur l'existence d'une bande affaiblie au sein de la tôle dans laquelle les déformations vont se concentrer au cours du chargement, ce qui conduit à la localisation. Bien que populaire, ce critère nécessite une mise en œuvre numérique plus délicate que le critère de Rice et l'introduction de paramètres arbitrairement définis par l'utilisateur. L'un de ces paramètres, la taille du défaut initial, a une importance cruciale sur le niveau de localisation prédit. Une réécriture totalement tridimensionnelle du modèle dans un formalisme proche de celui utilisé pour l'écriture du critère de Perte d'Ellipticité a permis d'établir un rapprochement théorique original entre ces deux critères. Il est alors montré que les CLF obtenues avec le modèle de Marciniak – Kuczynski tendent vers les prédictions du second lorsque le rapport initial des épaisseurs tend vers 1 (absence de défaut). L'utilisation de ce critère pour des matériaux non adoucissants ne semble dès lors pas pertinente, la prédiction de localisation étant dans ce cas pilotée par un paramètre numérique arbitraire et n'ayant aucune justification physique.

L'analyse de stabilité linéarisée (ALS) présente alors une alternative aux critères basés sur l'analyse de bifurcation pour les matériaux élasto-plastiques et peut être utilisée dans le cas élasto-viscoplastique. Il a été montré que l'analyse de bifurcation est un cas limite de l'analyse linéaire de stabilité et que les résultats de ces deux méthodes sont liés lorsque le taux de croissance tend vers l'infini (Barbier et al. 1998).

Après s'être intéressé à l'étude des bases théoriques des critères d'instabilité plastique et après avoir proposé des rapprochements théoriques entre certains d'entre eux au cours des Chapitres 4 à 6, des applications numériques de ces critères vont être proposées dans le prochain chapitre afin de fournir des compléments de comparaison de ces critères et d'illustrer l'influence de certains paramètres liés au chargement ou à la modélisation du matériau sur les CLF.