

Critères de prédiction de striction localisée et de modes instables intermédiaires

- 5.1 Introduction 66**
- 5.2 Prédiction de striction localisée 66**
 - 5.2.1 Extension du principe de Force Maximum à la striction localisée en retreint 66
 - 5.2.2 Prédiction de la striction localisée par le modèle de C – L et relation avec le critère de Hill 72
- 5.3 Prédiction de modes intermédiaires 74**
 - 5.3.1 Extension du principe de Force Maximum à la prédiction de modes localisés en retreint et en expansion..... 74
 - 5.3.2 Critère de Force Maximum Modifié 76
 - 5.3.3 Développements et limites du Critère de Force Maximum Modifié 80
 - 5.3.4 Critère de Force Maximum Etendu 83
 - 5.3.5 Analyse Linéaire de Stabilité pour les modes intermédiaires..... 84
- 5.4 Synthèse 90**

5.1 Introduction

La striction diffuse se caractérise par la première apparition d'une perte d'unicité ou d'une instabilité de la solution du problème d'équilibre. Ce phénomène de première instabilité plastique n'est généralement pas critique lors de la mise en forme de tôles métalliques minces, contrairement aux phénomènes de striction localisée et plus généralement de localisation des déformations sous différents modes. Ceux-ci constituent des phénomènes d'instabilités qui peuvent se produire après l'apparition de striction diffuse.

La striction localisée est caractérisée par une diminution locale de l'épaisseur d'une tôle au cours du chargement, généralement observée sous la forme d'une bande de largeur réduite et du même ordre de grandeur que l'épaisseur. La striction localisée est particulièrement visible pour les matériaux ductiles tels les aciers doux et les aciers HSLA. Les conditions de son apparition, associée à une instabilité de l'écoulement dans une direction privilégiée, ont été étudiées à partir du milieu du 20^{ème} siècle (Hill 1952) et seront précisées dans la première partie de ce chapitre. Basé sur des principes énergétiques, le critère de striction localisée de Cordebois – Ladevèze (Cordebois 1983; Cordebois et Ladevèze 1986) sera ensuite étudié en vue d'un rapprochement avec le premier critère.

D'autres critères d'instabilité plastique, plus difficilement classables jouent un rôle important en pratique dans la prédiction de limites de formabilité des tôles. Parmi ceux-ci figurent les critères de Force Maximum Modifié (Hora et al. 1996) ou encore de Force Maximum Etendu (Extended Maximum Force Criterion) (Mattiasson et al. 2006) dont les bases théoriques sont, comme leurs noms l'indiquent, issues de modifications du principe de Force Maximum de Considère pour le premier et du critère de Force Maximum de Swift pour le second. La seconde partie de ce chapitre leur sera consacrée.

Dans la dernière partie de ce chapitre, une méthode basée sur l'analyse de stabilité par perturbation linéarisée proposera une alternative pour la prédiction de modes localisés dans le cas de matériaux élasto-plastiques aussi bien que dans le cas de comportements viscoplastiques (Molinari 1988; Boudeau et Gelin 1994).

5.2 Prédiction de striction localisée

Cette partie est consacrée à la définition des conditions d'apparition de strictions localisées en suivant l'approche de Hill (Hill 1952). Un rapprochement avec l'approche de Cordebois – Ladevèze est ensuite précisé (Cordebois 1983).

5.2.1 Extension du principe de Force Maximum à la striction localisée en retreint

Le critère de striction localisée de Hill est basé sur le principe de Force Maximum de Considère et spécifiquement modifié pour pouvoir prévoir l'apparition de modes de striction localisée (Hill 1952; 2001). Ce type de striction est caractérisé par l'apparition d'une zone de faible largeur (généralement observée de l'ordre de l'épaisseur de la tôle) dans laquelle une forte déformation se produit dans la direction de l'épaisseur de la tôle.

La direction critique dans laquelle peut se produire une localisation est associée à un état de déformation plane dans un plan contenant la direction de l'épaisseur de la tôle. La localisation ne peut alors être prédite que s'il existe une direction dans le plan de la tôle pour laquelle la déformation est instantanément stationnaire. Cette condition se traduit par l'existence d'une direction orientée d'un angle θ par rapport à la direction principale majeure de chargement e_1 telle que (voir Figure 5.1) :

$$D_{tt} = 0 \quad (5.1)$$

avec D_{tt} le taux de déformation dans cette direction.

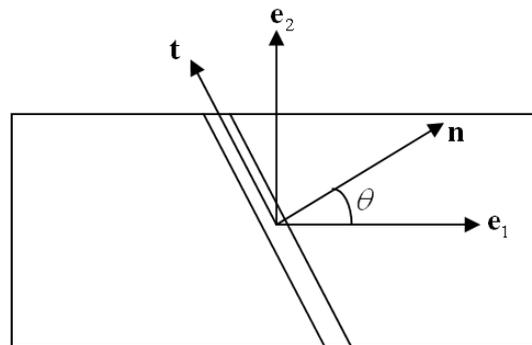


Figure 5.1 : Orientation de la bande de striction localisée par rapport aux directions principales de chargement.

Soit un chargement tel que dans le repère principal de chargement :

$$D_2 = \beta D_1 \quad (5.2)$$

Par rotation dans le repère où une bande de déformation stationnaire est susceptible d'exister, la vitesse de déformation dans cette direction peut être exprimée à partir des vitesses de déformations D_1 et D_2 :

$$D_{tt} = D_1 \sin^2(\theta) + D_2 \cos^2(\theta) \quad (5.3)$$

La condition d'existence de cette direction en fonction du rapport de chargement β est alors obtenue en combinant les équations précédentes :

$$\theta = \text{Arctan}(\sqrt{-\beta}) \quad (5.4)$$

La condition d'existence d'une déformation stationnaire ne peut donc être satisfaite que pour des rapports de chargements β négatifs. Le critère de Hill ne permet la prédiction de striction localisée que dans le domaine du retreint, celle-ci se produit alors sous forme de bande orientée d'un angle θ par rapport à la direction majeure de chargement. Dans le cas de

cisaillement pur, cet angle prend une valeur de 45° ($\beta = -1$), de $35,26^\circ$ dans le cas de traction uniaxiale ($\beta = -1/2$) et de 0° en traction plane ($\beta = 0$).

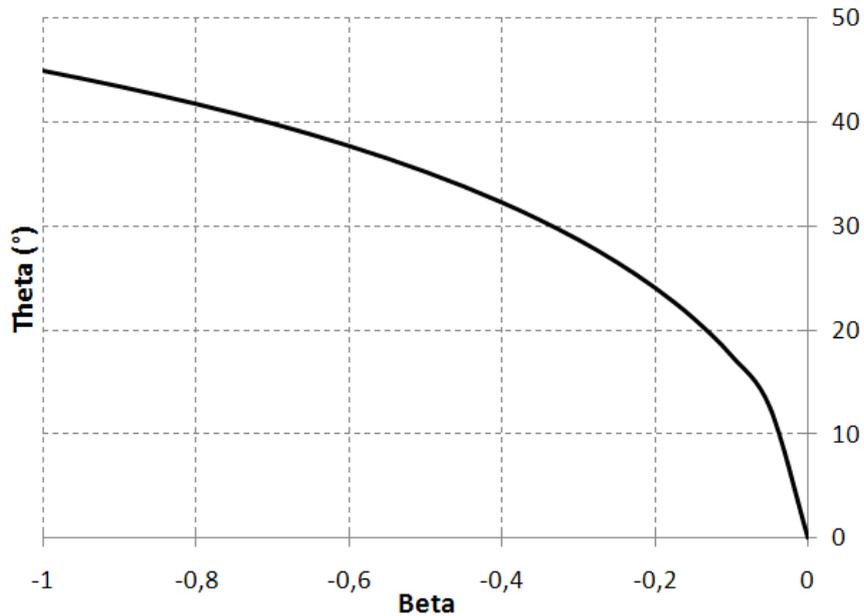


Figure 5.2 : Orientation de la bande de striction localisée en fonction du rapport de chargement β .

La seconde condition de localisation de ce critère est le passage de l'effort dans la direction normale à la bande de striction par un maximum :

$$\dot{F}_n = 0 \quad (5.5)$$

ce qui conduit, en utilisant la condition (5.1), à l'expression suivante :

$$\frac{\dot{F}_n}{F_n} = \frac{\dot{\sigma}_{nn}}{\sigma_{nn}} + D_3 = 0 \quad (5.6)$$

ou encore en utilisant la condition (5.1) et l'incompressibilité :

$$\frac{\dot{\sigma}_{nn}}{\sigma_{nn} D_{nn}} = 1 \quad (5.7)$$

Cette forme est similaire à celle du critère de Considère, mais exprimée dans une direction particulière. Une autre forme de ce critère peut être obtenue en utilisant l'incompressibilité plastique et en négligeant la contribution des déformations élastiques, $D_3 = -D_1 - D_2$, qui conduit pour des trajets proportionnels à :

$$\frac{\dot{\sigma}_1}{\sigma_1 D_1} = 1 + \beta \quad (5.8)$$

Enfin, une dernière forme peut être obtenue en observant la relation entre la contrainte σ_{nm} et la contrainte équivalente dans le cas de chargements vérifiant un état plan de contraintes :

$$\frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}} = \frac{\dot{\sigma}_{nm}}{\sigma_{nm}} \quad (5.9)$$

L'introduction de cette relation dans (5.6) en tenant compte des hypothèses citées et de la règle d'écoulement plastique permet d'écrire :

$$\frac{1}{Y} \frac{\dot{Y}}{\dot{\bar{\varepsilon}}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} = \frac{1}{Z_H} \quad (5.10)$$

avec Z_H la tangente associée au critère de Hill. Des expressions analytiques simples du critère de Hill'52 peuvent être obtenues dans le cas de matériaux obéissant à un comportement simplifié. Ce développement fera l'objet de le prochain paragraphe, la section suivante étant consacrée à l'écriture du critère dans le cas du modèle de comportement rigide plastique à écrouissage cinématique et couplé à l'endommagement isotrope de Lemaitre.

Cas du comportement rigide plastique simplifié :

Ce développement reprend la démarche utilisée pour l'écriture du critère de Swift dans le cas du comportement rigide plastique simplifié. Dans le cas d'un chargement conduisant à un état de contraintes planes, la contrainte équivalente du critère de plasticité de von Mises s'écrit de la manière suivante :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}'} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \quad (5.11)$$

Pour un chargement linéaire direct et proportionnel en contrainte de Cauchy, le rapport α des contraintes principales est constant et tel que :

$$\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\dot{\sigma}_2}{\dot{\sigma}_1} \quad (5.12)$$

L'introduction des dérivées partielles dans l'expression du critère de striction localisée de Hill permet d'obtenir :

$$\frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma} \dot{\bar{\varepsilon}}} = \frac{1}{2} (1 + \alpha) (1 - \alpha + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (5.13)$$

Lorsque la loi d'écrouissage isotrope de Hollomon est utilisée, la relation entre la contrainte équivalente de von Mises, la déformation équivalente et la variable d'écrouissage isotrope peut être obtenue durant le chargement plastique :

$$\frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}} = \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{n}{\bar{\varepsilon}} \quad (5.14)$$

A l'initiation de la striction localisée, la relation entre la déformation équivalente critique $\bar{\varepsilon}_c$ et le trajet de chargement α devient :

$$\bar{\varepsilon}_c = \frac{2n\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}}{1+\alpha} \quad (5.15)$$

Les déformations critiques principales à l'initiation de la striction localisée s'en déduisent à l'aide de la loi d'écoulement :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1c} &= \frac{n(2-\alpha)}{1+\alpha} \\ \varepsilon_{2c} &= \frac{n(2\alpha-1)}{1+\alpha} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Ce résultat n'est autre que l'expression paramétrique d'une fonction affine. La courbe limite de formage est donc une droite d'équation :

$$\varepsilon_{1c}(\alpha) = \varepsilon_{1c}(\frac{1}{2}) - \varepsilon_{2c}(\alpha) \quad (5.17)$$

En traction uniaxiale ($\alpha=0$ et $\beta=-\frac{1}{2}$), la déformation principale majeure critique prend comme valeur remarquable deux fois la valeur du coefficient d'écrouissage n . Celle-ci est égale à n dans le cas de traction plane ($\alpha=\frac{1}{2}$ et $\beta=0$) et est rejetée à l'infini en cas de cisaillement pur. Il peut être noté que la relation entre α et β est donnée dans le cas de trajets proportionnels par :

$$\alpha = \frac{1+2\beta}{2+\beta} \quad (5.18)$$

ou encore :

$$\beta = \frac{2\alpha-1}{2-\alpha} \quad (5.19)$$

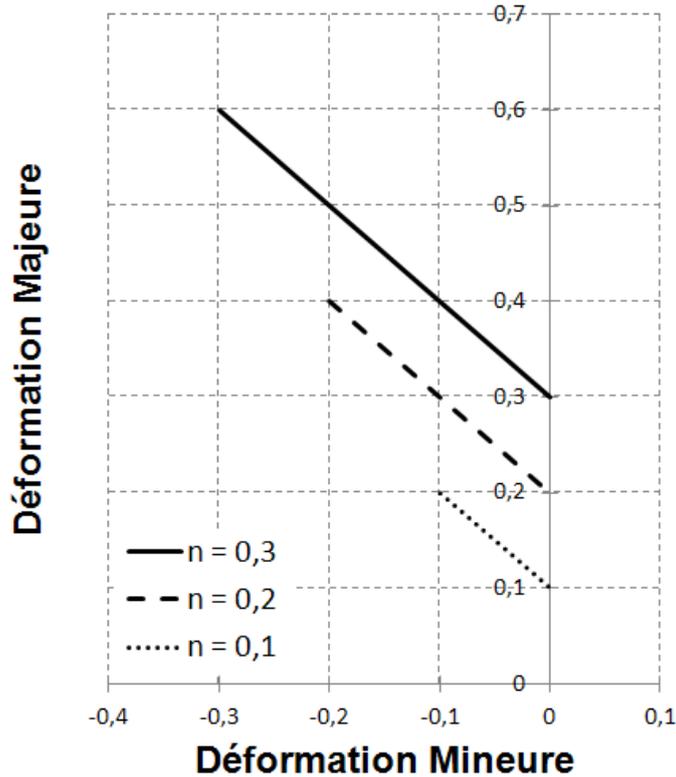


Figure 5.3 : Courbes limites de formage à striction localisée selon le critère de Hill'52 pour différentes valeurs du coefficient d'écroutissage isotrope n .

Cas du comportement rigide plastique couplé à l'endommagement :

Le modèle simplifié est insuffisant pour reproduire fidèlement le comportement réel du matériau. Une amélioration peut être apportée à la prédiction de striction localisée avec le critère de Hill'52 par l'utilisation d'un modèle de comportement plus avancé, prenant en compte les effets de l'anisotropie initiale, de l'écroutissage isotrope, de l'écroutissage cinématique ou encore de l'endommagement. L'objectif de ce paragraphe est d'obtenir une formulation du critère de Hill'52 pour un tel comportement. La démarche et les hypothèses utilisées sont similaires à celles développées et utilisées dans le cas du critère de striction diffuse de Swift et seules les principales étapes seront donc écrites dans le cas du critère de striction localisée.

En adoptant la démarche développée dans les deux parties précédentes, la condition d'instabilité matérielle s'écrit d'après l'équation (5.8) :

$$\frac{\dot{\sigma}_i}{\sigma_i} = (1 + \beta) D_i \quad i=1,2 \quad (5.20)$$

Le taux de la contrainte équivalente peut s'écrire :

$$\dot{\bar{\sigma}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1^{eff}} \dot{\sigma}_1^{eff} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2^{eff}} \dot{\sigma}_2^{eff} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathbf{X}} : \dot{\mathbf{X}} \quad (5.21)$$

La relation entre contraintes et contraintes effectives est telle que :

$$\dot{\sigma}_i^{eff} = \frac{\dot{\sigma}_i}{1-d} + \frac{\dot{d}}{1-d} \sigma_i^{eff} \quad (5.22)$$

En tenant compte de la loi d'écoulement plastique et de la condition d'instabilité, il est possible d'obtenir :

$$\dot{\sigma}_i^{eff} = \sigma_i^{eff} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} + \frac{H_d}{1-d} \right) \dot{\lambda} \quad (5.23)$$

Une condition d'instabilité peut alors être obtenue combinant ces dernières équations :

$$\dot{\bar{\sigma}} = \left(\left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1^{eff}} \sigma_1^{eff} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2^{eff}} \sigma_2^{eff} \right) \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} + \frac{H_d}{1-d} \right) + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathbf{X}} : \mathbf{H}_x \right) \dot{\lambda} \quad (5.24)$$

La définition du travail plastique équivalent permet d'autre part d'obtenir en tenant compte de la condition d'instabilité :

$$\bar{\sigma} \dot{\bar{\varepsilon}} = \sum_{i=1}^3 (\sigma_i^{eff} - X_i) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_i} \dot{\lambda} \quad (5.25)$$

Le rapport des expressions (5.24) et (5.25) permet d'obtenir une formulation du critère de Force Maximum dans le cas rigide plastique couplé avec l'endommagement :

$$\frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma} \dot{\bar{\varepsilon}}} = \frac{1}{Z_H} = \frac{\left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1^{eff}} \sigma_1^{eff} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2^{eff}} \sigma_2^{eff} \right) \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} + \frac{H_d}{1-d} \right) + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathbf{X}} : \mathbf{H}_x}{\sum_{i=1}^3 (\sigma_i^{eff} - X_i) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_i}} \quad (5.26)$$

En l'absence d'érouissage cinématique et d'endommagement, cette expression est équivalente à l'expression (5.10).

5.2.2 Prédiction de la striction localisée par le modèle de C - L et relation avec le critère de Hill'52

Dans le cas de la détermination de limites de formabilité en striction diffuse, le modèle de Cordebois – Ladevèze repose sur la minimisation d'une fonctionnelle sans conditions de blocage sur la frontière (paragraphe 4.2). Dans le cas localisé, les conditions de blocage imposées correspondent notamment à des états de contraintes planes nécessitant l'écriture de la forme duale du problème en vitesse. Après réécriture du problème avec les conditions de blocage dans sa forme en vitesse, l'étude d'apparition de modes de striction localisée revient à la minimisation d'une fonctionnelle pouvant être écrite sous la forme :

$$\mathcal{B}(\mathbf{V}, \mathbf{V}^* | \underline{\boldsymbol{\tau}}) = 0 \quad (5.27)$$

avec \mathcal{B} une fonction strictement convexe et positive s'annulant pour la solution triviale \mathbf{V} nulle. La minimisation d'une fonction approchée de \mathcal{B} conduit à une condition d'instabilité plastique pouvant s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{D}(\underline{\boldsymbol{\tau}}) + \mathcal{K}_E(\underline{\boldsymbol{\tau}}) = 0 \quad (5.28)$$

où \mathcal{K}_E est la contribution des blocages nouvellement introduits par rapport au mode de striction diffuse. Les formes de \mathcal{D} et de \mathcal{K}_E sont explicitées pour différents modèles de comportement phénoménologiques en (Cordebois et Ladevèze 1986; Pierre 1990; Mouric 2002). Comme la recherche de minima s'effectue dans un sous-espace de celui utilisé pour la recherche de modes de striction diffuse, ce critère est moins conservatif que le critère de striction diffuse. La CLF en striction localisée obtenue sera donc plus haute que celle obtenue lors de la recherche d'un mode diffus.

Dans le cas de tôles suivant un comportement rigide plastique simplifié et soumises à des chargements linéaires, la forme développée du critère peut être écrite en fonction des paramètres d'écrouissage et de chargement (Cordebois 1983) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1c} &= \frac{n}{1 + \beta} \\ \varepsilon_{2c} &= \beta \varepsilon_{1c} \end{aligned} \quad (5.29)$$

avec ici ε_{1c} et ε_{2c} les déformations critiques principales à l'initiation de la striction localisée, n le coefficient d'écrouissage de la loi de Hollomon et β le rapport de chargement en déformations, constant et négatif. En utilisant la relation entre les rapports de chargement en contrainte et ceux en déformation dans le cas d'un chargement proportionnel et de l'utilisation d'une surface de charge de von Mises, le rapport de chargement β s'exprime :

$$\beta = \frac{\alpha - 1/2}{1 - \alpha/2} \quad (5.30)$$

La relation (5.29) devient alors :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1c} &= \frac{n(2 - \alpha)}{1 + \alpha} \\ \varepsilon_{2c} &= \frac{n(2\alpha - 1)}{1 + \alpha} \end{aligned} \quad (5.31)$$

Il est intéressant de constater, dans le cas du modèle de comportement simplifié, que la formulation en striction localisée du critère de Cordebois – Ladevèze est équivalente à celle proposée par Hill (Equation (5.16)). Des études complémentaires restent toutefois nécessaires pour établir cette relation théorique dans un cas de comportement plus général.

5.3 Prédiction de modes intermédiaires

Cette partie est dédiée à des critères présentant différents modes intermédiaires d'instabilité plastique, souvent qualifiés de localisés. Ces critères sont fréquemment construits à partir d'extensions des critères de striction diffuse pour la prédiction de modes localisés. Ces modes localisés ne correspondent toutefois pas aux prédictions de striction localisée obtenues à partir du modèle de Hill (paragraphe 5.2.1) mais leurs prédictions se situent avant les modes de localisation sous forme de bandes obtenues avec les critères présentés dans le Chapitre 6. Comme les prédictions obtenues avec ces critères se situent entre une borne basse d'instabilité obtenue avec les critères de striction diffuse et une borne haute constituée par les critères de localisation détaillés au prochain chapitre, les modes d'instabilité prédits par ces critères sont ici qualifiés d'intermédiaires.

Bien qu'il n'existe pas nécessairement de liens théoriques d'équivalence avec les critères précédents, l'importance de l'utilisation pratique de certains critères, comme le Critère de Force Maximum Modifié (CFMM ou MMFC) (Hora et al. 1994) et l'Analyse Linéaire de Stabilité (Molinari 1985; Boudeau 1995), conduit à les présenter. La formulation du récent Critère de Force Maximum Etendu (CFMe ou eMFC) (Mattiasson et al. 2006) sera aussi évoquée.

5.3.1 Extension du principe de Force Maximum à la prédiction de modes localisés en retreint et en expansion

Différentes extensions du critère de Considère pour la prédiction d'instabilité plastique par modes localisés ont été proposées. L'une des plus marquante est le Critère de Force Maximum Modifié (CFMM), qui joue un rôle important dans la prédiction de CLF tant par une bonne corrélation entre ses prédictions de formabilité et les résultats expérimentaux que par sa facilité de mise en œuvre. Contrairement à ce que peut laisser penser le nom du critère, celui-ci n'est pas basé sur le Critère de Force Maximum, mais plutôt sur une extension aux modes localisés du critère de l'effort principal maximum (Habbad 1994), présenté dans le prochain paragraphe, et constituant une extension aux chargements bidimensionnels du principe de Force Maximum de Considère (Considère 1885). Après avoir brièvement présenté les bases du CFMM à travers la présentation du critère de l'effort principal maximum, la formulation du CFMM sera détaillée dans un cadre général puis des formules analytiques explicites seront obtenus pour le modèle de comportement simplifié.

Critères de l'effort principal maximum et bases du Critère de Force Maximum Modifié :

Deux conditions d'instabilité matérielle et une condition de chargement linéaire sont classiquement utilisées pour la formulation du critère de Force Maximum et doivent être réalisées simultanément pour prédire la striction diffuse :

$$\begin{aligned} \frac{dF_1}{F_1} &= 0 \\ \frac{dF_2}{F_2} &= 0 \\ \frac{\sigma_2}{\sigma_1} &= \text{constante} \end{aligned} \quad (5.32)$$

Expérimentalement, ces relations ne sont toutefois que rarement obtenues simultanément et constituent donc une limite à l'interprétation classique de ce critère. Afin de surmonter cette contradiction apparente, les critères de l'effort principal maximal ont été proposés. Ils combinent la première ou la seconde hypothèse (5.32) avec la troisième. Dans le cas du comportement rigide plastique simplifié, les déformations critiques calculées avec ces deux critères sont respectivement pour tout trajet de chargement :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1cF_1} &= n \\ \varepsilon_{2cF_2} &= n \end{aligned} \quad (5.33)$$

avec ε_{1cF_1} et ε_{2cF_2} les déformations critiques calculées avec les critères du maximum de l'effort principal maximal majeur et mineur respectivement, comme l'illustre la Figure 5.4.

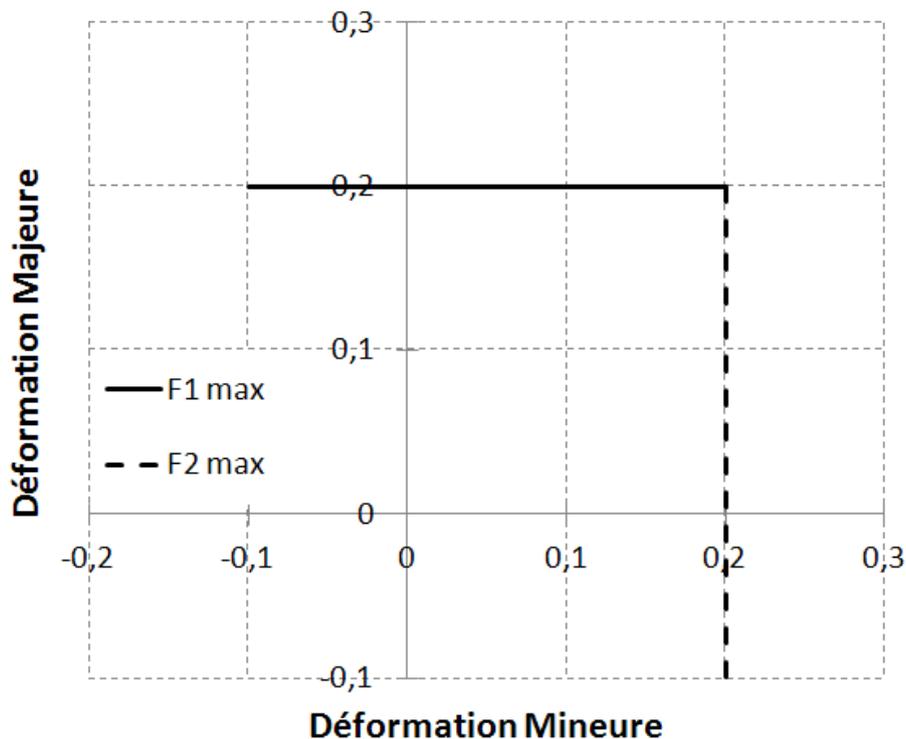


Figure 5.4 : Courbes limites de formage à striction diffuse selon les critères de l'effort principal majeur maximum et de l'effort principal mineur maximum pour une tôle métallique modélisée avec le modèle rigide plastique simplifié et un coefficient d'écrouissage $n = 0,2$.

On peut noter que le critère de l'effort principal majeur est en accord avec les prédictions du critère de Swift dans le cas de chargements de traction uniaxiale, de traction plane et de tension équi-biaxiale. Les deux critères de l'effort principal maximum n'ont pas d'application directe pour la prédiction d'instabilité en mise en forme, mais le critère de l'effort principal majeur maximum constitue la base de l'écriture du critère de Force Maximum Modifié, largement utilisé pour la prédiction de striction localisée et présenté en détail dans le prochain paragraphe.

5.3.2 Critère de Force Maximum Modifié

Face aux insuffisances du critère de Considère pour la prédiction d'instabilités plastiques de tôles soumises à des chargements bi-axiaux et à celles des critères des efforts principaux maximaux pour prédire des modes localisés, Hora propose de modifier ceux-ci par la prise en compte du caractère bi-axial de l'état de déformation (Considère 1885; Hora et al. 1994; Hora et al. 1996). Les contraintes principales majeure et mineure sont alors considérées comme ne plus dépendre uniquement de fonctions des déformations principales majeure et mineure respectivement, mais aussi du trajet de chargement β , ce qui peut se traduire par :

$$\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon_1, \beta) \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \sigma_2(\varepsilon_2, \beta) \quad (5.34)$$

et le respect de l'une des deux premières conditions d'instabilité de l'Equation (5.32), soit :

$$dF_1 = 0 \quad \text{ou} \quad dF_2 = 0 \quad (5.35)$$

Deux conditions doivent donc être étudiées et l'instabilité plastique est prédite par le CFMM lorsque l'une des deux est atteinte. Dans la pratique, la condition sur la composante majeure de l'effort F_1 est généralement la première à être atteinte. La forme développée de ce critère est alors généralement écrite uniquement sur cette composante. Dans certains cas particuliers, comme par exemple pour des matériaux fortement anisotropes ou pour certains chargements non linéaires ou linéaires par morceaux, la condition d'instabilité sur l'effort mineur F_2 peut être la première atteinte. Afin de ne pas surestimer la formabilité d'une tôle dans un cas général, il convient donc de suivre les deux conditions de l'Equation (5.35). En utilisant la méthode présentée au paragraphe 4.3.1 sur le Principe de Force Maximum, il est possible d'obtenir en utilisant l'hypothèse d'incompressibilité :

$$\begin{aligned} \frac{dF_1}{F_1} &= \frac{d\sigma_1}{\sigma_1} - d\varepsilon_1 = 0 \\ \frac{dF_2}{F_2} &= \frac{d\sigma_2}{\sigma_2} - d\varepsilon_2 = 0 \end{aligned} \quad (5.36)$$

Afin d'alléger les développements du CFMM et conformément à ce qui est le plus couramment présenté dans la littérature, seule l'écriture de la condition sur l'effort majeur F_1 est détaillée par la suite, une démarche similaire permettant l'obtention de la condition sur F_2

. Ceci se justifie par le fait qu'en pratique, avec les hypothèses précédemment formulées pour cette étude (chargements linéaires directs notamment dans la plupart des cas), la condition privilégiée d'instabilité concernera l'effort majeur F_1 .

A partir de l'Equation (5.34), la différentielle de la contrainte peut s'exprimer comme :

$$d\sigma_1 = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_1} d\varepsilon_1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \beta} d\beta \quad (5.37)$$

La condition d'instabilité sur l'effort principal majeur devient donc :

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \varepsilon_1} - \sigma_1 = 0 \quad (5.38)$$

Le premier terme de la différentielle peut être développé en utilisant les relations entre les termes de contraintes et déformations principales majeures et les contraintes et déformations équivalentes :

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \varepsilon_1} - \sigma_1 = 0 \quad (5.39)$$

Sous les hypothèses de chargement bi-axial engendrant un état de contraintes planes et de chargement proportionnel linéaire dans le cas d'un matériau rigide plastique à écrouissage isotrope, il est possible d'écrire :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= f_H(\alpha) \bar{\sigma} \\ d\bar{\varepsilon} &= g_H(\beta) d\varepsilon_1 \\ \beta &= \beta(\alpha) \end{aligned} \quad (5.40)$$

avec f_H et g_H deux fonctions reliant σ_1 et ε_1 aux contraintes et déformations équivalentes respectivement dans le cas de trajets linéaires. Les expressions exactes de (5.40) dépendent du choix de la surface de plasticité et seront explicitées dans le prochain paragraphe dans le cas des surfaces isotropes de von Mises. La fonction g_H peut être exprimée à partir de l'expression du travail de premier ordre :

$$g_H(\beta) = (1 + \alpha\beta) f_H(\alpha) \quad (5.41)$$

Les différentielles du premier terme de l'Equation (5.39) peuvent alors être exprimées par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \bar{\sigma}} &= f_H \\ \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_1} &= g_H \end{aligned} \quad (5.42)$$

Celle du second terme se déduit par :

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \beta} = \frac{\partial f_H}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \bar{\sigma} \quad (5.43)$$

En utilisant l'identité entre $\bar{\sigma}$ et Y au moment de la charge plastique, il est possible de réécrire (5.39) en tenant compte de (5.40)-(5.43) sous la forme suivante :

$$\frac{1}{Y} \frac{dY}{d\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{f_H g_H} \left(f_H - \frac{\frac{\partial f_H}{\partial \alpha} \frac{\partial \beta}{\partial \varepsilon_1}}{\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}} \right) \quad (5.44)$$

Le rapport de chargement β est défini par :

$$\beta = \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1} \quad (5.45)$$

Dans le cas de chargements proportionnels constants en déformations, il est possible d'écrire que :

$$\beta = \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad (5.46)$$

La dérivée partielle de β en fonction de ε_1 devient dans ce cas :

$$\frac{\partial \beta}{\partial \varepsilon_1} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1^2} = -\frac{\beta}{\varepsilon_1} \quad (5.47)$$

La condition de localisation du Critère de Force Maximum Modifié s'exprime alors sous la forme :

$$\frac{1}{Y} \frac{dY}{d\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{g_H} + \frac{\beta}{\bar{\varepsilon} f_H} \frac{df_H}{d\alpha} \left(\frac{d\beta}{d\alpha} \right)^{-1} \quad (5.48)$$

Un intéressant développement permettant d'obtenir une forme équivalente du critère peut être consulté dans (Aretz 2004; 2007). Cette formulation classique du CFMM a été obtenue grâce à une hypothèse de chargement proportionnel et constant en déformation. Ce n'est donc rigoureusement que dans le cadre de cette hypothèse que le critère devrait être utilisé ; ce n'est toutefois pas toujours le cas. Pour d'autres trajets de chargements, la relation (5.47) est admise par linéarisation locale (Brunet et Morestin 2001). D'autre part, l'utilisation de ce critère n'entraîne qu'une faible consommation CPU, ce qui en fait un modèle adapté aux problèmes d'optimisation en emboutissage (Ben Ayed et al. 2005).

Cas du comportement rigide plastique simplifié :

En adoptant la démarche déjà utilisée avec les critères de Considère (paragraphe 4.4.1), de Swift'52 (paragraphe 4.4.3) et de Hill'52 (paragraphe 5.2.1), il est possible d'obtenir des résultats remarquables en écrivant le CFMM dans le cadre d'un matériau dont le comportement rigide plastique est modélisé par le modèle simplifié.

Lorsque la surface de plasticité de von Mises est utilisée, il a été vu précédemment que

$\beta = \frac{\alpha - 1/2}{1 - \alpha/2}$. L'expression de la dérivée de β par rapport à α peut alors être exprimée par :

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{3}{(2-\alpha)^2} \quad (5.49)$$

La relation entre la contrainte principale majeure et la contrainte équivalente est donnée par :

$$\sigma_1 = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}} \quad (5.50)$$

d'où il est possible de déduire l'expression de la fonction f_H à partir de (5.40) :

$$f_H(\alpha) = (1-\alpha+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (5.51)$$

La fonction g_H devient alors :

$$g_H(\alpha) = \frac{\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}}{1-\alpha/2} \quad (5.52)$$

Lors de l'utilisation d'une loi d'érouissage isotrope de Hollomon, l'introduction des relations (5.49)-(5.52) dans l'expression du CFMM (5.48) permet d'établir une relation entre la déformation équivalente critique $\bar{\varepsilon}_c$ et le coefficient d'érouissage n pour le trajet de chargement linéaire direct α :

$$\bar{\varepsilon}_c = \frac{n\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}}{1-\alpha/2} + \frac{4}{3} \frac{(1/2-\alpha)^2}{\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}} \quad (5.53)$$

Les déformations principales majeure et mineure peuvent alors être déterminées en utilisant la loi d'écoulement plastique :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1c} &= n + \frac{4}{3} \frac{(1/2-\alpha)^2 (1-\alpha/2)}{1-\alpha+\alpha^2} \\ \varepsilon_{2c} &= \frac{\alpha-1/2}{1-\alpha/2} n + \frac{4}{3} \frac{(\alpha-1/2)^3}{1-\alpha+\alpha^2} \end{aligned} \quad (5.54)$$

comme l'illustre la Figure 5.5 :

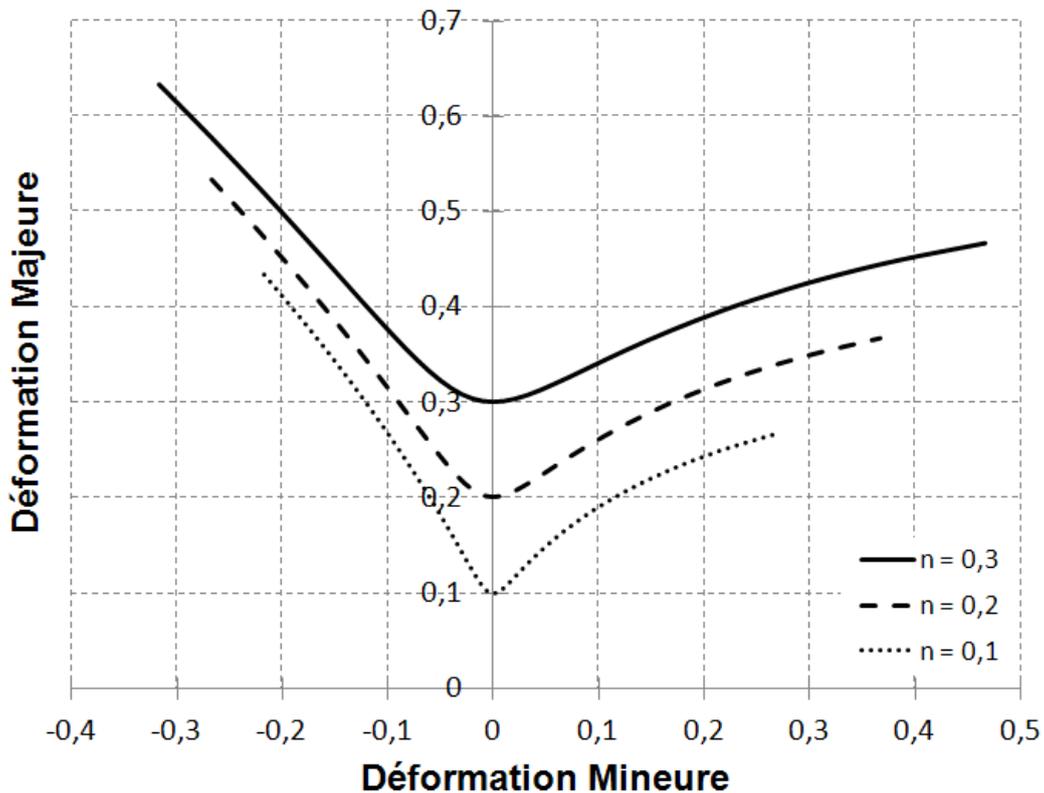


Figure 5.5 : Courbes limites de formage selon le Critère de Force Maximum Modifié pour une tôle métallique modélisée avec le modèle rigide plastique simplifié.

Au cours d'un chargement de traction plane ($\alpha = 1/2$), la déformation principale majeure critique est de nouveau égale au coefficient d'écroutissage n . D'autres valeurs particulières peuvent être obtenues pour des chargements de cisaillement simple ($\alpha = -1$), de traction uniaxiale ($\alpha = 0$) et de traction équibiaxiale ($\alpha = 1$), pour lesquelles les déformations majeures critiques sont égales à $n + 3/2$, $n + 1/3$ et $n + 1/6$ respectivement.

5.3.3 Développements et limites du Critère de Force Maximum Modifié

Le CFMM ayant rapidement montré un bon potentiel pour l'estimation de la formabilité de tôles métalliques et pour la reproduction de résultats expérimentaux, de nombreuses études ont été menées afin d'affiner les prédictions en prenant en compte davantage de phénomènes et variables physiques susceptibles d'influencer les CLF. L'objectif de ce paragraphe n'est pas de faire un inventaire exhaustif de ces études, mais simplement de préciser certains développements et couplages marquants effectués, parmi lesquels il est possible de citer la prise en compte de la sensibilité à la vitesse de déformation, de la température, de l'endommagement, de l'épaisseur des tôles ou encore de la triaxialité des contraintes.

Influence de la vitesse de déformation :

Afin de réduire les écarts observés entre les CLF obtenues expérimentalement et celles obtenues à partir du CFMM, il a été proposé de prendre en compte l'influence de la vitesse de déformation (Knockaert 2001). Cette influence peut être introduite par la dépendance de la contrainte principale à la vitesse de déformation, soit :

$$\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon_1, \beta, \dot{\varepsilon}) \quad (5.55)$$

Le critère d'instabilité s'écrit alors :

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \dot{\varepsilon}} \frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_1} - \sigma_1 = 0 \quad (5.56)$$

Le premier terme correspond à la prévision de la striction diffuse, le second à la prise en compte de l'influence du trajet de chargement (Hora et al. 1996; Tong et al. 2002) et le troisième à la sensibilité à la vitesse de déformation. Ce dernier terme peut d'ailleurs être développé sous la forme (Ben Tahar 2005) :

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \dot{\varepsilon}} \frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_1} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \dot{\varepsilon}} \frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial \bar{\varepsilon}} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_1} \quad (5.57)$$

Ce qui conduit à l'expression du CFMM avec prise en compte de la sensibilité à la vitesse de déformation :

$$\frac{1}{Y} \left(\frac{\partial Y}{\partial \bar{\varepsilon}} + \frac{\ddot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}} \frac{\partial Y}{\partial \dot{\varepsilon}} \right) = \frac{1}{g_H} + \frac{\beta}{\bar{\varepsilon} f_H} \frac{df_H}{d\alpha} \left(\frac{d\beta}{d\alpha} \right)^{-1} \quad (5.58)$$

Dans le cas de matériaux suivant une loi d'érouissage de Hollomon avec une sensibilité à la vitesse de déformation de type puissance ($Y = k \bar{\varepsilon}^n \dot{\varepsilon}^m$), cette expression se réduit à :

$$\frac{n}{\bar{\varepsilon}} + m \frac{\ddot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}^2} = \frac{1}{g_H} + \frac{\beta}{\bar{\varepsilon} f_H} \frac{df_H}{d\alpha} \left(\frac{d\beta}{d\alpha} \right)^{-1} \quad (5.59)$$

Lors d'opérations d'emboutissage à froid ou de tests de détermination des CLF, la vitesse de déformation est considérée faible avant l'apparition d'un mode localisé. A partir de ce moment, toute la déformation se concentre dans une petite zone du solide, avec une vitesse de déformation élevée. L'influence de la vitesse de déformation peut alors jouer un rôle important sur le niveau de localisation. Pour les matériaux ayant une forte sensibilité à la vitesse de déformation, cela se traduit par une augmentation de la formabilité des tôles.

Influence de la température :

Dans les procédés de mise en forme à chaud, la température de la pièce a une influence sur l'apparition de la striction puis sur son évolution vers des modes localisés. Cet effet peut être

introduit dans le CFMM par une fonction d'adoucissement thermique agissant sur l'érouissage isotrope. La contrainte principale majeure dépend alors de la déformation principale majeure ε_1 (ou de la déformation plastique équivalente), du trajet de chargement et de la température, soit $\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon_1, \beta, T)$. L'écriture du CFMM devient avec la prise en compte des effets de la température (Hora et al. 1994) :

$$\frac{\partial \sigma_1(\varepsilon_1, \beta, T)}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \sigma_1(\varepsilon_1, \beta, T)}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \varepsilon_1} + \frac{\partial \sigma_1(\varepsilon_1, \beta, T)}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \varepsilon_1} - \sigma_1(\varepsilon_1, \beta, T) = 0 \quad (5.60)$$

L'influence de la température peut être introduite par couplage avec la fonction d'érouissage isotrope. Celui-ci peut alors s'écrire sous la forme : $R = R_T(\bar{\varepsilon}, T)$ avec R_T une loi d'érouissage dépendant de la température T qu'il est parfois possible d'écrire sous la forme : $R_T(\bar{\varepsilon}, T) = \Theta(T)R(\bar{\varepsilon})$.

Influence de l'endommagement :

La ruine de certains métaux peut être précédée et influencée par l'apparition, la croissance et la coalescence de microcavités à l'intérieur du volume. A partir d'un certain niveau de déformation, souvent considéré comme le point de striction diffuse bien que l'expérience puisse remettre en cause cette considération, ces phénomènes d'endommagement semblent donc devoir être pris en compte pour améliorer la fiabilité des prédictions de CLF. En se basant sur des travaux concernant l'utilisation du modèle d'endommagement de Gurson-Tvergaard modifié lors de la prévision de CLF (Needleman et Tvergaard 1977), Brunet et ses coauteurs proposent une extension du CFMM permettant de prendre en compte l'influence de l'endommagement dans la prédiction des CLF, pour des chemins de chargement linéaires ou non (Brunet et al. 1998; Brunet et Morestin 2001). Testé sur des alliages d'aluminium, d'acier ou de titane, ce couplage du CFMM avec l'endommagement donne des prédictions de formabilité plus conservatives qu'en son absence, le phénomène étant particulièrement marqué sur l'alliage de titane considéré dans l'article cité.

Influence de l'épaisseur de la tôle :

Des expériences ont d'autre part permis de montrer une augmentation de l'écart entre les CLF théoriques et expérimentales avec l'accroissement de l'épaisseur de la tôle. Pour des tôles devenant épaisses, il semble donc nécessaire de prendre en compte l'influence de l'épaisseur des tôles. L'introduction d'un facteur de correction géométrique conduit à l'expression suivante du CFMM, parfois appelée enhanced Modified Maximum Force Criterion (eMMFC, Critère de Force Maximum Modifié amélioré ou CFMMa) (Hora et Tong 2006a; b) :

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon_1} f_{cor}(e, r_t) + \frac{\partial \sigma_1}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \varepsilon_1} - \sigma_1 = 0 \quad (5.61)$$

avec f_{cor} une fonction de correction géométrique dépendant de l'épaisseur e et du rayon de courbure r_t de la tôle. L'expression de cette fonction peut être approximée

expérimentalement ou numériquement, les auteurs proposent ainsi une correction de la forme :

$$f_{cor}(e, r_t) = 1 + \frac{e}{2r_t} + \varepsilon_{0cor} \left(\frac{e}{e_{0cor}} \right)^{p_{cor}} \quad (5.62)$$

avec ε_{0cor} , e_{0cor} et p_{cor} trois constantes dépendant du matériau déterminées à partir de données expérimentales. Appliqué à différents aciers et aluminiums, l'eMMFC semble généralement conduire à des CLF moins conservatives que celles obtenues avec le CFMM.

Influence de la triaxialité des contraintes :

Une démarche proche de celle présentée ci-dessus mais moins empirique consiste à prendre en compte la triaxialité des contraintes à l'intérieur de la tôle (Brunet et Morestin 2001), en introduisant un facteur correctif sur la contrainte majeure basé sur les travaux expérimentaux de Bridgman (Bridgman 1952). La fonction de correction peut alors être exprimée comme :

$$f_{cor}(e, r_t, z) = 1 + \log \left(1 + \frac{e}{4r_t} \left(1 - \frac{4z^2}{e^2} \right) \right) \quad (5.63)$$

avec r_t le rayon de courbure au niveau de la zone de striction et z la distance d'un point par rapport au plan moyen de la tôle.

Influence de la surface de charge :

De nombreuses études ont permis de mettre en évidence l'influence du choix de la surface de plasticité sur la prédiction de CLF théoriques, par exemple (Berg et al. 1998). Une limitation a été mise en évidence par Aretz lors de l'utilisation de surfaces de charges montrant des facettes planes. Dans ce cas, une singularité apparaît dans (5.48) lorsque la dérivée $d\beta/d\alpha$ devient nulle pour certains trajets de chargements et la prédiction de CLF ne devient plus réaliste (Aretz 2004). Le CFMM reste toutefois applicable pour les surfaces de charges quadratiques présentées au Chapitre 3.

5.3.4 Critère de Force Maximum Etendu

Une modélisation originale basée sur le Critère de Force Maximum (Swift 1952) et sur la condition de Considère a été proposée par Mattiasson et ses coauteurs pour prendre en compte l'évolution du trajet de chargement après l'apparition de la striction diffuse, celui-ci variant du rapport β imposé vers un état de déformation plane (Mattiasson et al. 2006).

Jusqu'à l'apparition de la striction diffuse prédite par le CFM, un trajet de chargement initial constant β_0 est imposé. La variation du rapport de déformation dans la zone de striction est

ensuite autorisée et β devient variable au cours du chargement. Celui-ci est calculé à partir de l'hypothèse selon laquelle la condition de Considère doit être vérifiée à chaque instant à l'intérieur de la zone de striction. Le trajet varie alors progressivement vers un chargement de déformation plane, considéré comme critique, et la localisation est alors prédite lorsque celui-ci s'en approche. Le critère d'arrêt proposé à localisation est :

$$\frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_1} < \frac{\beta_0}{10} \quad (5.64)$$

Ce critère est désigné sous de nom de Critère de Force Maximum Etendu (CFME, Extended Maximum Force Criterion ou EMFC). L'utilisation d'une base $(\varepsilon_2, \varepsilon_2/\beta_0)$ permet selon les auteurs le tracé des points de la CLF le long du trajet de chargement linéaire initial, donc dans une base comparable à celle utilisée avec les autres critères.

Les prédictions de formabilité du CFME sont moins conservatives que celles issues du CFM sur lequel il est basé, sauf dans le cas de la traction plane pour laquelle les conditions de Swift et de Mattiasson sont vérifiées simultanément.

5.3.5 Analyse Linéaire de Stabilité pour les modes intermédiaires

La localisation des déformations est parfois interprétée comme une instabilité de l'écoulement de la matière, instabilité pouvant être prédite grâce à une analyse de stabilité par méthode de perturbation linéarisée dans le cas de matériaux dépendant ou non du temps. Cette méthode est parfois nommée Analyse Linéaire de Stabilité (ALS).

Basée sur des travaux pour la prédiction d'instabilités plastiques en cisaillement simple, l'approche présentée dans cette section repose sur l'étude de stabilité d'une tôle mince dont le matériau peut être modélisé par un comportement rigide plastique ou rigide viscoplastique et pour laquelle l'hypothèse de contraintes planes est faite (Molinari et Clifton 1983; Molinari 1985). Les comportements considérés dans cette section sont à base phénoménologique (Lejeune 2002; Lejeune et al. 2003), bien que cette méthode puisse être utilisée avec d'autres modèles de comportements, notamment micromécaniques (Toth et al. 1996; Boudeau et al. 1998). L'hypothèse de l'utilisation de comportements rigides plastiques ou rigides viscoplastiques peut être justifiée par le fait que les déformations élastiques restent faibles comparées aux déformations plastiques en mise en forme.

Dans un cas tridimensionnel, l'écriture des différentes équations du comportement, de l'équilibre et des compatibilité des déformations conduit à un problème de dimension 14 dont les inconnues peuvent s'écrire sous la forme vectorielle suivante : $\mathbf{U}^T = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \bar{\sigma}, D_{11}, D_{22}, D_{33}, D_{12}, D_{13}, D_{23}, \dot{\varepsilon})$. Dans le cas bidimensionnel, faisant appel à l'hypothèse d'un état plan de contraintes, le problème n'est que de dimension 9 avec comme inconnues : $\mathbf{U}^T = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \bar{\sigma}, D_{11}, D_{22}, D_{33}, D_{12}, \dot{\varepsilon})$

L'approche développée dans (Lejeune 2002) sous l'hypothèse des contraintes planes est présentée ci-dessous. Une démarche similaire peut être utilisée pour traiter le cas 3D. Le choix de matériaux rigides plastiques ou rigide viscoplastique conduit à utiliser une relation entre les contraintes et le taux de déformation et non plus comme précédemment une relation incrémentale entre les taux de déformation et de contrainte. Les équations d'équilibre à travers le plan de localisation de largeur h peuvent s'écrire :

$$\operatorname{div}(h\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0} \quad (5.65)$$

La compatibilité des déformations conduit aux relations suivantes :

$$\frac{\partial^2 D_{11}}{\partial^2 x_2} + \frac{\partial^2 D_{22}}{\partial^2 x_1} - 2 \frac{\partial^2 D_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad (5.66)$$

L'incompressibilité s'exprime par :

$$D_{11} + D_{22} + D_{33} = 0 \quad (5.67)$$

où les taux de déformation sont définis à partir du taux de déformation plastique cumulée et de la règle d'écoulement :

$$\mathbf{D} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (5.68)$$

En plasticité associée, la fonction f peut être définie à partir du critère de charge plastique, soit lors de la charge plastique :

$$f(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \bar{\sigma} - Y(\bar{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = 0 \quad (5.69)$$

où $\bar{\sigma}$ est la contrainte équivalente. Dans le cas de l'utilisation d'une surface de charge quadratique anisotrope de Hill'48, cette contrainte peut être exprimée par :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}' : \mathbf{M} : \boldsymbol{\sigma}'} \quad (5.70)$$

avec \mathbf{M} le tenseur d'ordre 4 de Hill caractérisant l'anisotropie initiale. La taille Y de la surface de charge, liée à l'érouissage isotrope et sensible à la vitesse de déformation, peut par exemple être quant à elle définie par :

$$Y = k(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon})^n \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^m \quad \text{ou} \quad Y = Y_0 + R \left(\frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0} \right)^m \quad (5.71)$$

Le problème d'équilibre et d'évolution du solide est donc constitué d'un système de neuf équations non linéaires à neuf inconnues $\mathbf{U}^T = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \bar{\sigma}, D_{11}, D_{22}, D_{33}, D_{12}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$.

Soit $\delta \mathbf{U}$ une perturbation appliquée à la solution \mathbf{U}_0 du problème d'équilibre, telle que :

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}_0(t) + \delta\mathbf{U}(t) \quad (5.72)$$

et définie dans le cas d'un solide semi-infini par (Cano 1996) :

$$\delta\mathbf{U}(t) = \delta\mathbf{U}_0 e^{\eta t} e^{i\xi \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}} \quad (5.73)$$

avec $\delta\mathbf{U}_0$ l'amplitude initiale de la perturbation, η son taux de croissance et trois composantes spatiales ξ , \mathbf{x} et \mathbf{n} représentant un nombre d'onde, le vecteur position du point matériel et la normale au plan de localisation. Dans un espace tridimensionnel, la définition de cette normale est précisée sur la Figure 5.6.

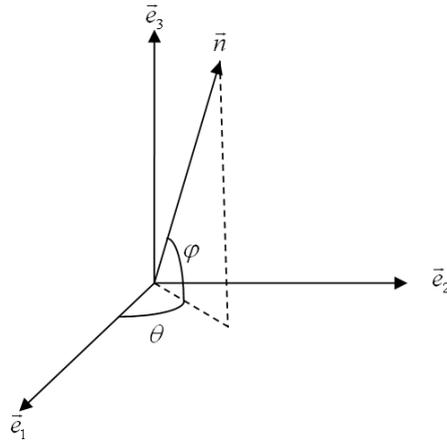


Figure 5.6 : Orientation de la normale au plan de localisation selon le critère d'ALS par rapport aux directions principales de chargement \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 et à la normale au plan de la tôle \mathbf{e}_3 .

La perturbation des équations précédentes conduit à l'écriture d'un système non linéaire qu'il est possible d'écrire sous la forme condensée suivante :

$$\mathbf{a}(\mathbf{U}_0 + \delta\mathbf{U}) = \mathbf{0} \quad (5.74)$$

Après linéarisation, le problème peut être écrit :

$$\mathbf{a}(\mathbf{U}_0) + \mathcal{B} \cdot \delta\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (5.75)$$

Or \mathbf{U}_0 vérifie les équations d'équilibre du système, l'Equation (5.75) entraîne donc pour une perturbation non nulle :

$$\det(\mathcal{B}(\eta)) = 0 \quad (5.76)$$

En un point matériel donné, la résolution de ce système d'équations conduit donc à rechercher les racines d'un polynôme de variable η et qui dépend de l'orientation de la normale \mathbf{n} . Les solutions associées aux valeurs propres dont les parties réelles sont négatives correspondent à des perturbations dont l'amplitude est décroissante et sont considérées stables. Les valeurs

propres comportant au moins une composante dont la partie réelle est positive sont associées à des perturbations d'amplitude croissante, donc à des solutions considérées instables.

Les simulations numériques effectuées avec ce critère montrent toutefois que des modes instables dont le taux de croissance est faible peuvent se produire à de faibles niveaux de chargement situés bien avant les prédictions usuelles de striction localisée. Ces modes, bien qu'instables, ne sont pas critiques et ne constituent pas une limite de formabilité. Une condition supplémentaire sur le taux de croissance des perturbations semble donc nécessaire pour la prédiction des courbes limites de formage.

Différentes solutions ont été proposées dans la littérature pour définir cette condition supplémentaire, parmi lesquelles il est possible de distinguer celles basées sur la prédiction d'instabilités absolues de celles basées sur la prédiction d'instabilités relatives. Les premières et les plus simples consistent à définir un seuil de croissance positif fixe. L'instabilité est alors prédite si le taux de croissance de la perturbation est supérieur à ce seuil η_c ; soit jusqu'à l'instabilité (Dudzinski et Molinari 1991) :

$$\text{Re}(\eta) < \eta_c \quad (5.77)$$

Le choix d'un seuil nul conduit à l'étude classique de stabilité, considérée trop conservative. Une valeur parfois rencontrée pour le choix de ce seuil est $\eta_c = 2$ (Knockaert 2001), mais le choix d'une valeur fixe de ce seuil ne semble pas forcément adapté à tous les trajets de chargements. L'influence de la valeur du seuil sur la CLF a été discutée dans (Boudeau 1995). Le choix arbitraire de la valeur du seuil peut avoir une forte influence sur le niveau de localisation prédit et constitue donc une limite de cette méthode.

Une seconde méthode consiste à comparer le taux de croissance de la perturbation à une grandeur physique du problème, généralement le taux de déformation plastique équivalente. L'instabilité plastique est alors prédite lorsque le taux de croissance relatif de la perturbation excède un seuil défini comme le rapport du taux de croissance et du taux de déformation plastique équivalente. Le système est alors considéré stable tant que (Toth et al. 1996) :

$$\text{Re}\left(\frac{\eta}{\dot{\varepsilon}}\right) < \eta'_c \quad (5.78)$$

avec η'_c une constante positive. En fixant la valeur du seuil égale à un, l'utilisation de cette méthode dans un code à vocation industrielle ne nécessite plus l'entrée d'un paramètre défini par l'utilisateur.

Un exemple permet de mieux mettre en évidence l'influence de ces choix de critères d'arrêt. L'évolution du maximum de la partie réelle du taux de croissance est tracée en Figure 5.7 pour différents trajets linéaires lors du chargement d'une tôle constituée d'un matériau fictif, dont l'érouissage est modélisé par une loi non saturante avec $n = 0,17$, $k = 500$ MPa et $\varepsilon_0 = 0,012$.

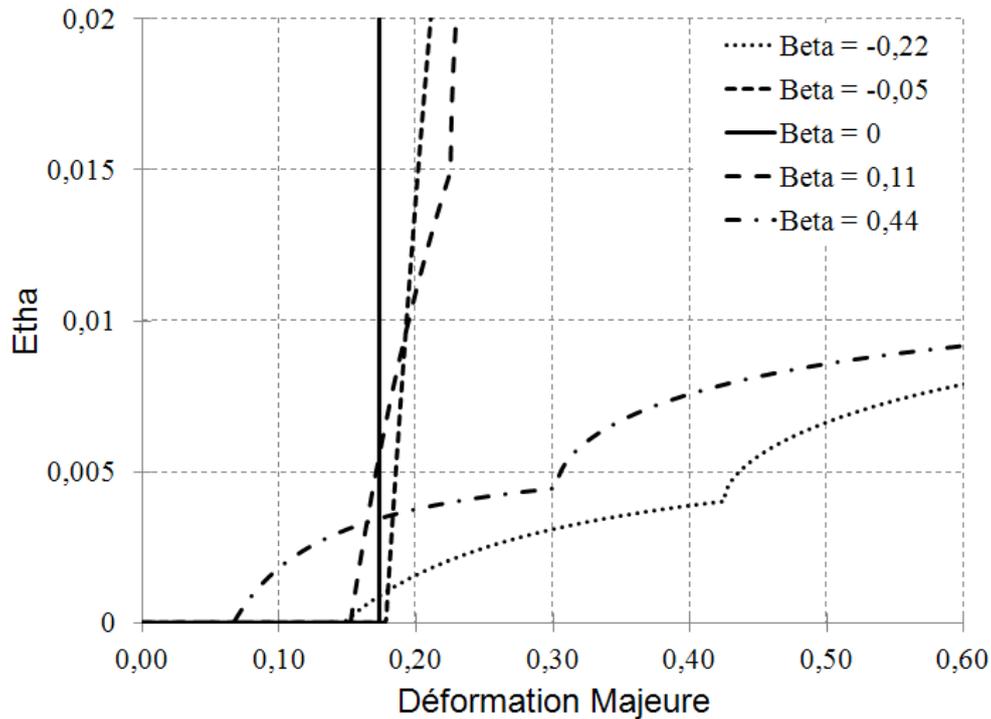


Figure 5.7 : Evolution du maximum de la partie réelle du taux de croissance pour différents trajets de chargements.

L'évolution du maximum de la partie réelle du taux de croissance est marquée par trois phases pour les différents trajets de chargements. La première phase est marquée par un maximum du taux de croissance nul, lié au fait que le polynôme caractéristique donné par l'Equation (5.76) puisse s'écrire sous la forme $\eta^2(a\eta^2 + b\eta + c) = 0$ avec a , b et c trois fonctions des grandeurs du problème (Lejeune 2002). La condition d'instabilité $\text{Re}(\eta) = 0$ est donc trop restrictive puisqu'elle conduit à une prédiction de localisation dès le début du chargement.

Une seconde phase est marquée par un taux de croissance positif (Figure 5.7) avec une première discontinuité de la partie réelle de la vitesse de η , indiquée en Figure 5.8. Un mode instable avec faible taux de croissance apparaît donc en premier. Ce mode semble plus conservatif que les prédictions effectuées avec les critères de prédiction de striction diffuse développés dans le Chapitre 4.

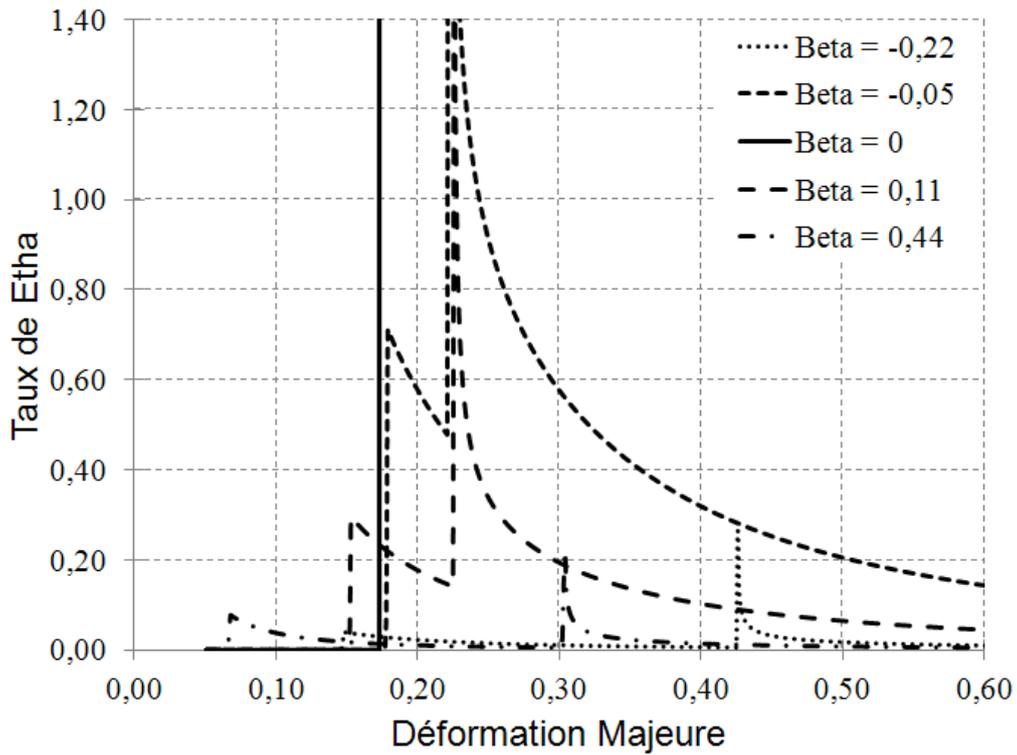


Figure 5.8 : Evolution du maximum de la partie réelle du taux de η pour différents trajets de chargements.

Le passage à une troisième phase est atteint lorsqu'une seconde discontinuité du taux de croissance de la perturbation apparaît. L'apparition de ce mode de déformation instable avec un fort taux de croissance de la perturbation peut être détecté lorsque $\dot{\eta}$ dépasse un seuil (par un critère similaire à (5.77) ou (5.78)) et elle peut être considérée comme l'instant critique de localisation. En traction plane, ces deux modes instables sont confondus.

Un exemple de CLF, obtenue pour un alliage de laiton dont le comportement est identifié dans (Lejeune et al. 2003) est donné en Figure 5.9.

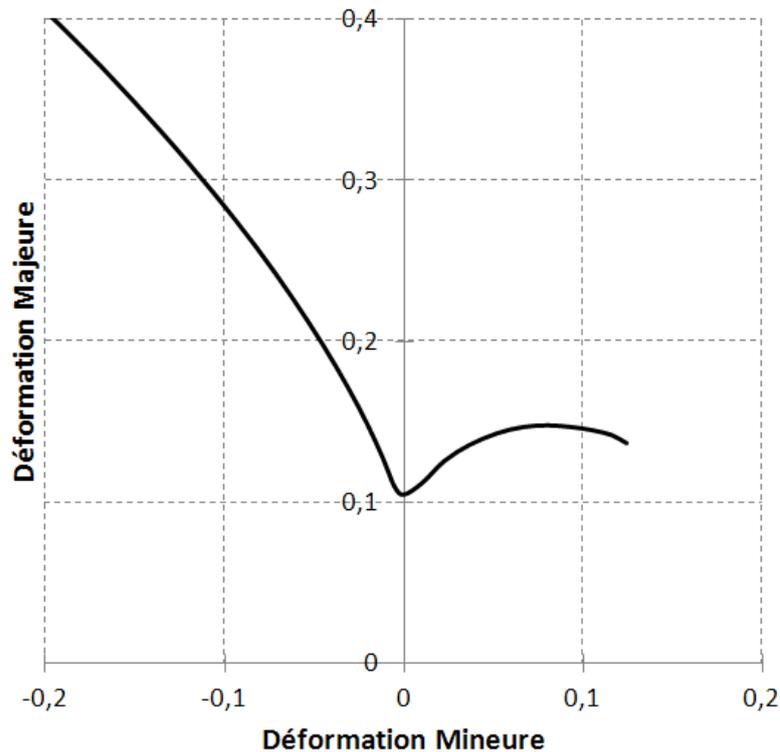


Figure 5.9 : Exemple de CLF obtenue avec le critère d'ALS pour une tôle en laiton identifiée dans (Lejeune et al. 2003) avec $k = 618\text{MPa}$, $n = 0,118$ et $\varepsilon_0 = 0,014$.

5.4 Synthèse

Après la striction diffuse, différents modes instables peuvent apparaître suivant les matériaux considérés et conduire à des phénomènes de localisation de la déformation. Les modèles présentés dans ce chapitre permettent de prédire des modes localisés apparaissant après la striction diffuse étudiée au cours du Chapitre 4.

Pour les matériaux ductiles, la déformation peut se concentrer au cours du chargement dans une bande de faible épaisseur et dont la normale aux plans délimitant la zone localisée est comprise dans le plan de la tôle. Cette localisation étant alors accompagnée d'une importante réduction de l'épaisseur de la tôle, le mode d'instabilité correspondant est un mode de striction localisée. Hill a été le premier à proposer un modèle basé sur une extension du principe de Force Maximum de Considère pour la prédiction de ce mode de striction localisée (Hill 1952). Ses travaux reposent sur l'étude des conditions d'existence d'une bande dont la direction d'extension est nulle dans le plan de la tôle et sur la recherche de la stationnarité de l'effort normal à cette bande. La prédiction de ce critère est limitée au domaine du retreint, mais donne alors une prédiction de localisation souvent jugée satisfaisante pour les matériaux ductiles. Une écriture générale de ce critère permettant de prendre en compte les effets de l'anisotropie initiale, de l'écrouissage isotrope, de l'écrouissage cinématique et de l'endommagement a été proposée. Un rapprochement avec les critères de bifurcation basés sur des approches énergétiques et notamment avec le critère de striction localisée de Cordebois –

Ladevèze a été souligné. L'équivalence de ces deux critères a été établie dans le cadre de matériaux rigides plastiques qui suivent un comportement simplifié (Cordebois 1983).

Afin de pouvoir prédire la formabilité de tôles métalliques dans les domaines du retreint et de l'expansion, d'autres extensions du principe de Force Maximum de Considère ont été proposées plus récemment. De par sa simplicité de mise en œuvre, son faible coût CPU et ses prédictions de CLF généralement en bon accord avec les résultats expérimentaux, le Critère de Force Maximum Modifié occupe une place privilégiée chez les industriels et dans la communauté de la mise en forme (Hora et al. 1994). Les fondements théoriques et les limitations de ce critère prenant en compte les effets du trajet de chargement sur la contrainte principale majeure ont été soulignés, avant que son écriture ne soit détaillée pour des matériaux dont le comportement peut être modélisé avec une loi d'écroutissage isotrope. Certains développements de ce critère ont été présentés, ils permettent selon leurs auteurs d'améliorer les prédictions de formabilité par la prise en compte des effets de la sensibilité à la vitesse de déformation, de la température, de la triaxialité des contraintes ou encore de l'endommagement.

Un second modèle original basé sur le principe de Force Maximum a été développé plus récemment. L'Extended Maximum Force Criterion proposé par Mattiasson et ses co-auteurs repose sur l'idée selon laquelle le trajet de chargement peut évoluer librement dans la zone de striction après l'apparition de la striction diffuse (Mattiasson et al. 2006). La localisation est alors prédite lorsque l'état de déformation à l'intérieur de la zone de striction tend vers un état de déformation plane.

Dans le cas de matériaux rigides plastiques ou viscoplastiques, une approche basée sur l'Analyse Linéaire de Stabilité a été proposée par (Molinari 1985). Elle repose sur l'étude de l'évolution d'une perturbation appliquée au problème d'équilibre pour un solide rigide plastique. Le choix de ce modèle de comportement semble avoir une forte influence sur la prédiction de modes d'instabilités, de même que le choix d'un seuil critique pour le taux de croissance de perturbation.

Selon les matériaux considérés, différents modes d'instabilité plastique apparaissant après la striction diffuse peuvent conduire à la ruine, constituant donc une limite de formabilité. Différentes approches théoriques ont alors été développées pour tracer des CLF en privilégiant l'un de ces modes d'instabilité. Les critères présentés dans ce chapitre ayant chacun été formulé pour des modes localisés pouvant être différents, le choix de leur utilisation semble dépendre du mode d'instabilité réellement observé expérimentalement pour le matériau considéré. Ces critères n'ayant pas toujours été développés pour la prédiction du même mode d'instabilité, il n'existe pas nécessairement de liens théoriques entre eux.

