

Critères de prédiction de striction diffuse

- 4.1 Introduction 42**
- 4.2 Méthode d'analyse de bifurcation 42**
 - 4.2.1 Critère de Bifurcation Générale..... 43
 - 4.2.2 Critère de Bifurcation par Point Limite 45
 - 4.2.3 Relation théorique entre les critères de Bifurcation Générale et de Bifurcation par Point Limite 45
- 4.3 Critère de striction diffuse issu du modèle de Cordebois – Ladevèze 46**
 - 4.3.1 Formulation du critère..... 46
 - 4.3.2 Relation entre le critère de striction diffuse de Cordebois – Ladevèze et le critère de Bifurcation Générale 48
- 4.4 Principe de Force Maximum 49**
 - 4.4.1 Striction en traction uniaxiale..... 50
 - 4.4.2 Extensions aux chargements bi-axiaux..... 52
 - 4.4.3 Critère de Force Maximum..... 53
 - 4.4.4 Extension du critère de Force Maximum au cas 3D 57
 - 4.4.5 Relation entre le critère de Bifurcation Générale et le Critère de Force Maximum 59
 - 4.4.6 Relation théorique entre le critère de Point Limite et le Critère de Force Maximum..... 60
- 4.5 Conclusion 62**

4.1 Introduction

Nous avons vu dans le Chapitre 2 que la striction diffuse se caractérise expérimentalement par l'apparition d'un amincissement marqué dans une zone relativement large, d'environ 15 à 30 mm pour une éprouvette de traction normalisée, particulièrement visible sur celles constituées de matériaux ductiles comme par exemple les aciers doux. En pratique, l'apparition de striction diffuse peut constituer une source de défauts suffisante pour conduire au rebut des pièces d'aspect mises en forme par emboutissage, comme les carrosseries de voiture par exemple.

La striction diffuse peut être interprétée comme une évolution progressive d'un état de déformation homogène vers un état de déformation quasi-homogène ou hétérogène. Un des problèmes engendrés par cette perte d'homogénéité est par exemple l'impossibilité d'identifier les propriétés d'un matériau avec des essais classiques au-delà du point de striction diffuse. C'est aussi un phénomène avant-coureur de la striction localisée, plus néfaste. La capacité à prévoir ce phénomène n'est donc pas dénuée d'intérêt, comme peut en témoigner le nombre de critères qui y sont consacrés.

Parmi les critères développés afin de prévoir l'apparition de striction diffuse, les critères de Bifurcation Générale et de Bifurcation par Point Limite, auxquels on pourrait rajouter le critère de Cordebois – Ladevèze, vont être présentés dans les premiers paragraphes. L'approche semi-empirique basée sur le principe de Force Maximum sera développée dans le cas de matériaux rigides plastiques, élasto-plastiques puis élasto-plastiques endommageables.

Une attention particulière sera accordée à l'établissement de liens entre ces différents critères.

4.2 Méthode d'analyse de bifurcation

Le changement de mode de déformation d'un état homogène vers un état hétérogène peut être vu comme un problème de bifurcation de la solution du problème aux limites en vitesse. La recherche des conditions permettant l'apparition de striction diffuse est alors associée à l'étude de la perte d'unicité des solutions de ce problème.

Soit Ω un domaine soumis à des efforts volumiques \mathbf{f}_v , à des efforts surfaciques \mathbf{f}_s imposés sur une partie $\partial\Omega_1$ de sa frontière ayant une normale \mathbf{n}_0 dans la configuration de référence et à des déplacements \mathbf{U}_s imposés sur la partie complémentaire de sa frontière $\partial\Omega_2$. Les équations d'équilibre quasi-statiques et les conditions aux limites peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \operatorname{div}\mathbf{\Pi} + \rho_0\mathbf{f}_v = \mathbf{0} & \text{sur } \Omega \\ \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n}_0 = \mathbf{f}_s & \text{sur } \partial\Omega_1 \\ \mathbf{U} = \mathbf{U}_s & \text{sur } \partial\Omega_2 \end{cases} \quad (4.1)$$

où $\mathbf{\Pi}$ est le premier tenseur de Piola – Kirchhoff et ρ_0 la masse volumique du matériau. Les parties de frontières $\partial\Omega_1$ et $\partial\Omega_2$ vérifient :

$$\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 = \partial\Omega \quad \text{et} \quad \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \emptyset \quad (4.2)$$

où $\partial\Omega$ représente l'ensemble de la frontière. La dérivée temporelle du principe des puissances virtuelles conduit alors à :

$$\int_{\Omega} \dot{\mathbf{\Pi}} : \frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial \mathbf{X}} dV_0 = \int_{\Omega} \rho_0 \dot{\mathbf{f}}_v \cdot \mathbf{V}^* dV_0 + \int_{\partial\Omega_1} (\dot{\mathbf{\Pi}} \cdot \mathbf{n}_0) \cdot \mathbf{V}^* dS_0 \quad (4.3)$$

pour tout champ de vitesse virtuel cinématiquement admissible \mathbf{V}^* . Les critères de Bifurcation Générale et de Bifurcation par Point Limite, basés sur l'étude des conditions d'unicité de la solution du problème aux limites, sont présentés dans les deux paragraphes suivants.

4.2.1 Critère de Bifurcation Générale

Le critère de Bifurcation Générale a été introduit par (Drucker 1950; Drucker 1956) puis (Hill 1958; Hill 1962; Hill 2001) comme une condition suffisante d'unicité de la solution du problème (4.3) pour des matériaux indépendants du temps physique.

Soient $\dot{\mathbf{\Pi}}^A$ et $\dot{\mathbf{\Pi}}^B$ deux champs de taux de contraintes et \mathbf{V}^A et \mathbf{V}^B les champs de vitesses cinématiquement admissibles qui leur sont respectivement associés. Le principe des puissances virtuelles peut être appliqué à ces deux champs, soit :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \dot{\mathbf{\Pi}}^A : \frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial \mathbf{X}} dV_0 = \int_{\Omega} \rho_0 \dot{\mathbf{f}}_v \cdot \mathbf{V}^* dV_0 + \int_{\partial\Omega_1} \dot{\mathbf{f}}_s \cdot \mathbf{V}^* dS_0 \\ \int_{\Omega} \dot{\mathbf{\Pi}}^B : \frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial \mathbf{X}} dV_0 = \int_{\Omega} \rho_0 \dot{\mathbf{f}}_v \cdot \mathbf{V}^* dV_0 + \int_{\partial\Omega_1} \dot{\mathbf{f}}_s \cdot \mathbf{V}^* dS_0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Cette équation est en particulier vérifiée pour le champ virtuel $\mathbf{V}^* = \mathbf{V}^A - \mathbf{V}^B = [\mathbf{V}]$. En écrivant la différence des Equations (4.4) dans le cas de ce champ virtuel, la condition de perte d'unicité des solutions devient :

$$\int_{\Omega} [\dot{\mathbf{\Pi}}] : \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{X}} \right] dV_0 = 0 \quad (4.5)$$

pour $(\dot{\mathbf{\Pi}}^A, \mathbf{V}^A) \neq (\dot{\mathbf{\Pi}}^B, \mathbf{V}^B)$, avec $[\dot{\mathbf{\Pi}}] = \dot{\mathbf{\Pi}}^A - \dot{\mathbf{\Pi}}^B$, soit en utilisant les relations de comportement :

$$\int_{\Omega} \left(\mathcal{L}^A : \frac{\partial \mathbf{V}^A}{\partial \mathbf{X}} - \mathcal{L}^B : \frac{\partial \mathbf{V}^B}{\partial \mathbf{X}} \right) : \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{X}} \right] dV_0 = 0 \quad (4.6)$$

avec \mathcal{L} le module reliant pour le champ considéré le taux de contraintes de Piola – Kirchhoff au gradient des vitesses : $\dot{\mathbf{\Pi}} = \mathcal{L} : \dot{\mathbf{F}}$. Pour la classe de matériaux considérée, la forme \mathcal{L} est

initialement définie positive. On voit ainsi de ce qui précède que l'unicité de la solution est conservée tant que :

$$\mathcal{J}(\mathbf{V}^A, \mathbf{V}^B) = \int_{\Omega} \left(\mathcal{L}^A : \frac{\partial \mathbf{V}^A}{\partial \mathbf{X}} - \mathcal{L}^B : \frac{\partial \mathbf{V}^B}{\partial \mathbf{X}} \right) : \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{X}} \right] dV_0 > 0 \quad (4.7)$$

Hill a montré dans le cas de matériaux rigides plastiques puis dans le cas de matériaux élasto-plastiques que la fonctionnelle \mathcal{J} est minorée par \mathcal{H} , lorsque le taux d'érouissage est positif (Hill 1957; Hill 1958) :

$$\mathcal{J}(\mathbf{V}^A, \mathbf{V}^B) \geq \mathcal{H}(\mathbf{V}^A, \mathbf{V}^B) \quad (4.8)$$

où la fonctionnelle \mathcal{H} est définie par :

$$\mathcal{H}(\mathbf{V}^A, \mathbf{V}^B) = \int_{\Omega} \left(\mathcal{L} : \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{X}} \right] \right) : \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{X}} \right] dV_0 = \int_{\Omega} \nabla \Delta \mathbf{V} : \mathcal{L} : \nabla \Delta \mathbf{V} dV_0 \quad (4.9)$$

La condition suffisante d'unicité (4.9) exige la définie positivité de la fonctionnelle \mathcal{H} pour tout champ de vitesse $\Delta \mathbf{V}$ cinématiquement admissible (i.e., $\Delta \mathbf{V} = \mathbf{0}$ sur $\partial \Omega_2$). Une condition plus restrictive revient à élargir cet espace où la définie positivité de \mathcal{L} est exigée en écrivant :

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{V} : \mathcal{L} : \nabla \mathbf{V} dV_0 > 0 \quad (4.10)$$

pour tout champ de vitesse, sans imposer qu'il doit être nul sur la frontière $\partial \Omega_2$. Cette dernière condition est évidemment suffisante pour exclure toute bifurcation pour le problème considéré, quelles que soient les conditions aux limites qui lui sont imposées (de type force ou déplacement). Il peut être noté que les conditions écrites ci-dessus sont seulement suffisantes pour garantir l'unicité ; pour montrer qu'elles sont nécessaires il faut exhiber un champ de vitesse compatible avec les conditions aux limites imposées et violant la condition (4.9) comme cela est traditionnellement fait en flambage plastique.

Ces critères sont en toute rigueur des critères d'exclusion d'instabilités géométriques (structurelles), car ils dépendent de la géométrie de la structure et des conditions aux limites. Pour les appliquer en mise en forme dans l'esprit des CLF à striction diffuse, la condition (4.10) est appliquée localement :

$$\dot{\mathbf{F}} : \mathcal{L} : \dot{\mathbf{F}} = \nabla \mathbf{V} : \mathcal{L} : \nabla \mathbf{V} > 0 \quad \forall \mathbf{V} \text{ non uniforme} \quad (4.11)$$

Cette dernière condition est clairement plus forte que les conditions précédentes (4.9) et (4.10), mais il est possible de montrer qu'elle est équivalente à (4.10) dans le cas où l'état de pré-bifurcation est homogène. L'écriture locale (4.11) justifie la terminologie « instabilité matérielle » alors que cette condition est issue d'un critère d'instabilité structurelle (striction diffuse). Une condition suffisante d'unicité de la solution du problème aux limites (4.1) est

donc la définie positivité de la forme quadratique \mathcal{H} . En adoptant une approche lagrangienne actualisée, le module \mathcal{L} peut être exprimé par :

$$\mathcal{L}_{ijkl} = L_{ijkl} + \sigma_{ji} \delta_{kl} - \frac{1}{2} (\sigma_{li} \delta_{jk} + \sigma_{kl} \delta_{jl}) - \frac{1}{2} (\sigma_{jk} \delta_{il} - \sigma_{jl} \delta_{ik}) \quad (4.12)$$

où les composantes de L_{ijkl} sont les composantes du module tangent élasto-plastique couplé ou non à l'endommagement, défini respectivement par les équations (3.48) ou (3.31).

Une condition nécessaire de perte d'unicité de la solution du problème aux limites correspond à la perte de positivité du travail de second ordre, ce qui peut aussi se traduire par la singularité de la partie symétrique du module tangent \mathcal{L} . Une condition suffisante d'unicité est donc donnée par la vérification de la positivité du travail de second ordre donné en (4.11) ou en pratique à la vérification de la positivité de toutes les valeurs propres de la partie symétrique de \mathcal{L} . Le critère de Bifurcation Générale peut être vu comme une borne inférieure d'exclusion de la striction diffuse.

4.2.2 Critère de Bifurcation par Point Limite

Dans un cas particulier de Bifurcation Générale, la striction est associée à un état de contrainte nominale stationnaire, conduisant à la condition suivante (Valanis 1989; Neilsen et Schreyer 1993) :

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{0} \quad (4.13)$$

En combinant cette condition aux équations de comportement détaillées dans le chapitre précédent, il est possible d'obtenir :

$$\mathcal{L} : \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \quad (4.14)$$

Ce critère est associé à la singularité du module tangent \mathcal{L} et le point limite est atteint lors de la première annulation d'une de ses valeurs propres. Il prédit la perte d'unicité des solutions du problème d'équilibre associé à un état de contrainte nominale stationnaire.

4.2.3 Relation théorique entre les critères de Bifurcation Générale et de Bifurcation par Point Limite

Pour établir l'ordre de prédiction de la striction obtenue avec les deux critères présentés ci-dessus, une propriété d'algèbre va être utilisée. Soit \mathcal{M} une matrice carrée de dimension p et \mathcal{M}^S sa matrice symétrique, définie par $\mathcal{M}^S = \frac{1}{2} (\mathcal{M} + \mathcal{M}^T)$, avec \mathcal{M}^T la transposée de \mathcal{M} . Soient $\lambda_i^{\mathcal{M}}$ et $\lambda_i^{\mathcal{M}^S}$ les valeurs propres respectivement associées à \mathcal{M} et à \mathcal{M}^S , alors (Abed-Meraim 1999b) :

$$\min_{Sp(\mathcal{M}^S)} \left(\lambda_i^{\mathcal{M}^S} \right) \leq \operatorname{Re} \left(\lambda_i^{\mathcal{M}} \right) \leq \max_{Sp(\mathcal{M}^S)} \left(\lambda_i^{\mathcal{M}^S} \right) \quad (4.15)$$

Les valeurs propres de \mathcal{L}^S étant initialement positives, la perte de positivité de la partie réelle d'une valeur propre du module \mathcal{L} est donc atteinte après la perte de positivité d'une valeur propre de \mathcal{L}^S . En d'autres termes, la singularité du tenseur \mathcal{L} est obtenue après la singularité de sa partie symétrique \mathcal{L}^S . Le critère de Bifurcation par Point Limite est donc moins conservatif que le critère de Bifurcation Générale.

Dans le cas de petites déformations et de l'utilisation d'un modèle de plasticité associée, le module tangent est symétrique. Les critères de Bifurcation Générale et de Bifurcation par Point Limite prédisent alors l'occurrence de striction diffuse pour le même état mécanique.

4.3 Critère de striction diffuse issu du modèle de Cordebois – Ladevèze

De nombreuses observations expérimentales permettent de mettre en évidence l'influence des conditions aux limites sur les états de déformation et de contrainte lors de l'initiation de la striction diffuse et de la localisation. Les critères usuels de striction et de localisation sont généralement écrits dans des cas particuliers de conditions aux limites, notamment l'absence de blocage pour le cas de la striction diffuse. Cordebois et Ladevèze proposent la formulation d'un critère ou plus précisément d'une famille de critères, bornée par un critère de striction diffuse (borne inférieure), dont la formulation s'effectue sans blocage additionnel et par un critère de striction localisée (borne supérieure) associé à un maximum de blocages (Cordebois 1983; Cordebois et Ladevèze 1984; 1986). L'objet de ce paragraphe est de présenter le critère de striction diffuse puis de montrer les liens existant entre ce critère et les critères précédents basés sur une analyse de bifurcation.

4.3.1 Formulation du critère

L'initiation de la striction diffuse est associée à un niveau d'effort à partir duquel le milieu devient instable et, plus précisément, « le comportement instable se caractérise par le fait que, lorsque l'on maintient le chargement extérieur constant, le champ des vitesses de la zone instable n'est pas nécessairement nul » (Cordebois 1983). Dans le cas de comportement stable, le champ des vitesses dans le domaine considéré doit au contraire s'annuler (à un mouvement de corps rigide près) lorsque le chargement est maintenu constant. Cette remarque permet de préciser que ce critère ne s'applique qu'aux matériaux indépendants du temps physique (excluant les comportements visqueux), le calcul se rapportant dans le cas contraire à un calcul de fluage (Mouric 2002). L'initiation de la striction diffuse est alors définie comme l'instant à partir duquel la solution du problème variationnel en vitesses admet une solution non nulle lorsque la dérivée par rapport au temps des efforts extérieurs est nulle (Cordebois 1983). Pour tout champ de vitesse virtuel cinématiquement admissible \mathbf{V}^* , le principe des puissances virtuelles s'écrit :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(\mathbf{V}^*) + \mathcal{P}_{\text{ext}}(\mathbf{V}^*) = 0 \quad (4.16)$$

avec \mathcal{P}_{int} et \mathcal{P}_{ext} les puissances virtuelles des efforts intérieurs et extérieurs respectivement, définies en l'absence d'efforts de volume par :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{int}}(\mathbf{V}^*) &= -\int_{\Omega} \text{Tr}(\underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{V}^*)) \frac{dV}{J} \\ \mathcal{P}_{\text{ext}}(\mathbf{V}^*) &= \int_{\partial\Omega_1} \mathbf{f}_s \cdot \mathbf{V}^* dS \end{aligned} \quad (4.17)$$

où $\boldsymbol{\tau}$ est le tenseur de contraintes de Kirchhoff, utilisé pour aboutir à une formulation variationnelle symétrique, simplifiant le calcul de minimisation à la base de l'expression du critère de striction. Le soulignement est utilisée par les auteurs pour indiquer une grandeur transportée dans le référentiel corotationnel $\underline{\mathcal{R}}$ au référentiel eulérien \mathcal{R} . Le calcul de la dérivée temporelle du principe des puissances virtuelles exprimées dans un tel référentiel conduit à (Pierre 1990) :

$$\dot{\mathcal{P}}_{\text{int}}(\mathbf{V}^*) = -\int_{\Omega} \left(\text{Tr}(\dot{\underline{\boldsymbol{\tau}}} \cdot \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{V}^*)) - \text{Tr}(\underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot (2\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{V}) \cdot \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{V}^*) - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{G}^T(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{V}^*) \cdot \mathbf{Q}^T)) \right) \frac{dV}{J} = 0 \quad (4.18)$$

avec \mathbf{Q} l'opérateur de rotation locale, \mathbf{D} le taux de déformation et \mathbf{G} le gradient des vitesses. Les efforts extérieurs étant maintenus constants, la dérivée temporelle de la puissance des efforts extérieurs est nulle. Ce problème peut être réécrit sous la forme condensée suivante pour tout champ de vitesse \mathbf{V}^* cinématiquement admissible :

$$\mathcal{A}(\mathbf{V}, \mathbf{V}^* | \underline{\boldsymbol{\tau}}) = 0 \quad (4.19)$$

avec \mathcal{A} une fonction strictement convexe et positive s'annulant pour la solution triviale \mathbf{V} nulle. La minimisation d'une fonction approchée de \mathcal{A} permet d'obtenir une condition sur le champ de contraintes, ou plus précisément sur un scalaire représentant l'intensité des contraintes, permettant l'existence d'un champ de vitesse vérifiant l'approximation de (4.19) et différent de la solution triviale. Il est montré que cette condition correspond à la perte de convexité de \mathcal{A} et qu'elle peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{D}(\underline{\boldsymbol{\tau}}) = 0 \quad (4.20)$$

Cette condition d'instabilité en striction diffuse dépend du modèle de comportement choisi, aucune condition de blocage n'étant ajoutée dans ce cas. La forme de \mathcal{D} est explicitée pour différents modèles de comportement phénoménologiques, par exemple dans le cadre élasto-plastique avec écrouissage isotrope, dans le cadre rigide-plastique (Cordebois 1983) et dans le cadre élasto-plastique à écrouissage mixte utilisant le modèle de Boucher – Cordebois (Mouric 2002).

Dans le cas simplifié de tôles soumises à des chargements linéaires en contraintes planes et suivant un comportement rigide plastique à écrouissage isotrope modélisé par une loi non

saturante de type Hollomon et une surface de charge de von Mises, la forme développée du critère peut être écrite en fonction des paramètres d'écroutissage et de chargement (Cordebois 1983) :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1c} &= \frac{4n(1-\alpha/2)(1-\alpha+\alpha^2)}{4-3\alpha-3\alpha^2+4\alpha^3} \\ \varepsilon_{2c} &= \frac{4n(\alpha-1/2)(1-\alpha+\alpha^2)}{4-3\alpha-3\alpha^2+4\alpha^3}\end{aligned}\tag{4.21}$$

avec ε_{1c} et ε_{2c} les déformations critiques principales majeure et mineure à l'initiation de la striction diffuse, n le coefficient d'écroutissage de la loi de Hollomon et α le rapport des composantes principales du tenseur de contraintes de Cauchy, constant au cours du chargement.

4.3.2 Relation entre le critère de striction diffuse de Cordebois – Ladevèze et le critère de Bifurcation Générale

Les critères de striction diffuse de Cordebois – Ladevèze (4.16)-(4.20) et de Bifurcation Générale (4.9) sont tous les deux basés sur les conditions d'annulation de la dérivée du principe des puissances virtuelles mais utilisent des méthodes de résolution et des configurations différentes, respectivement eulérienne et lagrangienne. Cependant, le problème physique initialement traité par ces deux méthodes est le même. Si une comparaison directe de l'expression (4.9) et des formes développées de (4.20) n'est pas aisée, il n'est toutefois pas surprenant d'observer en Figure 4.1 des résultats numériques identiques pour ces deux critères.

Une autre relation entre ce critère de striction de Cordebois – Ladevèze et le critère de striction localisée de Rice est parfois énoncée dans la littérature. Le modèle de Rice est alors vu comme un cas particulier du critère de striction de C – L, appliqué à un sous ensemble de l'espace des champs de déformation cinématiquement admissibles (Habbad 1994).

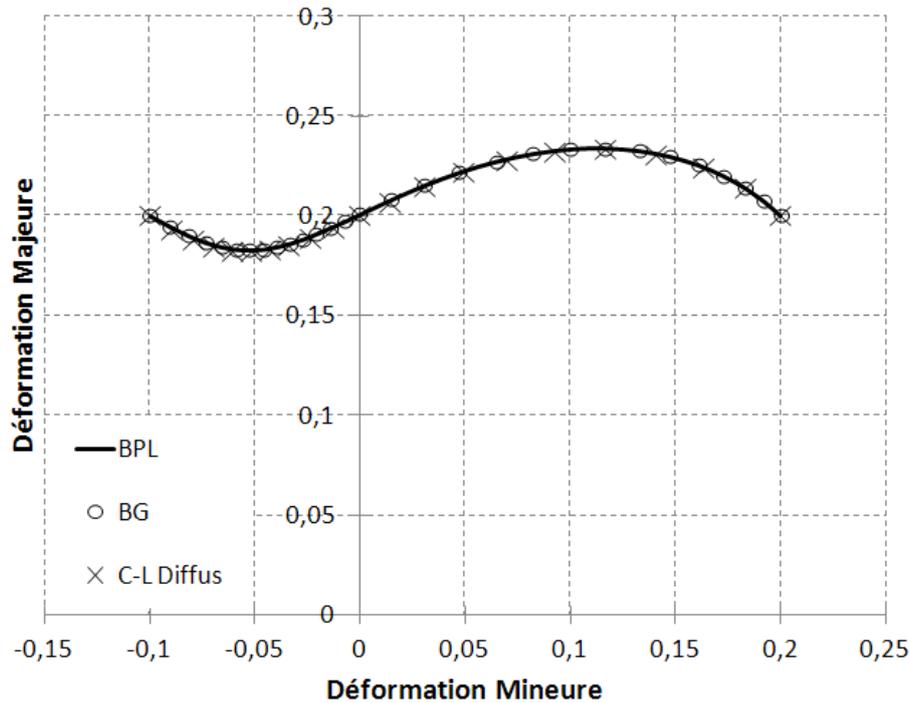


Figure 4.1 : Courbes Limites de Formage en striction diffuse obtenues avec les critères de Bifurcation par Point Limite (BPL), de Bifurcation Générale (BG) et la borne basse du modèle de Cordebois – Ladevèze (C – L diffus) pour un matériau isotrope à écrouissage modélisé par la loi de Hollomon avec $k = 580MPa$ et $n = 0,2$.

4.4 Principe de Force Maximum

Les critères de striction diffuse issus du principe de force maximum sont basés sur des observations expérimentales selon lesquelles l'instabilité plastique se produit lorsque l'effort principal atteint son maximum au cours d'un chargement (Considère 1885). Initialement développé pour la prédiction de la striction diffuse dans le cas d'un chargement uni-axial, ce principe a ensuite été étendu au cas de chargements bi-axiaux pour la prédiction de la striction diffuse ou de la localisation de la déformation dans des tôles soumises à des opérations d'emboutissage.

Il a été montré que l'élasticité joue un rôle négligeable sur le niveau d'instabilité prédit (Habbad 1994). Sauf indication contraire, le principe de force maximum de Considère est écrit dans les paragraphes suivants pour un chargement uni-axial et pour une classe de matériaux rigides plastiques, avant d'être appliqué dans le cas particulier d'un modèle de comportement simplifié permettant d'obtenir une formule analytique explicite du critère. Le choix de comportements rigides plastiques n'est pas nécessaire à la formulation de ces critères, mais il permet d'en simplifier les écritures.

L'attention sera ensuite portée sur le critère de Force Maximum, proposé par (Swift 1952) pour des chargements bidimensionnels. Ce critère est dans un premier temps formulé pour différents types de comportements incluant des comportements rigide plastique simplifié et

rigide plastique couplé à l'endommagement. Une formulation 3D du critère est ensuite proposée, permettant l'établissement de relations théoriques entre ce critère et les critères de Bifurcation Générale et de Bifurcation par Point Limite. D'autres extensions du principe de Force Maximum, appliquées à la prédiction de la striction diffuse ou localisée seront présentées au Chapitre 5.

4.4.1 Striction en traction uniaxiale

Dès 1885, Considère propose un premier critère pour la prédiction de l'apparition de la striction diffuse (Considère 1885). Ce critère repose sur des observations expérimentales réalisées sur des éprouvettes cylindriques d'acier soumises à un chargement direct de traction uniaxiale. Suivant celles-ci, la striction diffuse commence lorsque l'effort exercé sur la barre atteint un maximum.

Dans le cas d'un essai de traction uniaxiale en chargement monotone sur une barre, la condition d'effort maximum se traduit par :

$$\dot{F}_1 = 0 \quad (4.22)$$

où F_1 est l'effort appliqué sur la barre, l'indice 1 indiquant la direction du chargement principal. Ce qui, en introduisant les contraintes de Cauchy, conduit à :

$$\frac{\dot{F}_1}{F_1} = \frac{\dot{\sigma}_1}{\sigma_1} + \frac{\dot{S}}{S} = 0 \quad (4.23)$$

avec S la section de la barre et σ_1 la composante principale majeure du tenseur des contraintes de Cauchy, vérifiant la relation $F_1 = \sigma_1 S$. En introduisant les déformations logarithmiques et en utilisant la propriété d'incompressibilité plastique, la relation (4.23) devient :

$$\frac{\dot{\sigma}_1}{\sigma_1} - \dot{\varepsilon}_1 = 0 \quad (4.24)$$

où ε_1 est la composante principale majeure du tenseur des déformations logarithmiques. Cette expression constitue une forme du critère de striction diffuse de Considère, équivalente à la forme courante :

$$\frac{\dot{\sigma}_1}{\sigma_1 \dot{\varepsilon}_1} = \frac{1}{Z_c} = 1 \quad (4.25)$$

où Z_c est la sous-tangente critique du critère de Considère, illustrée en Figure 4.2 :

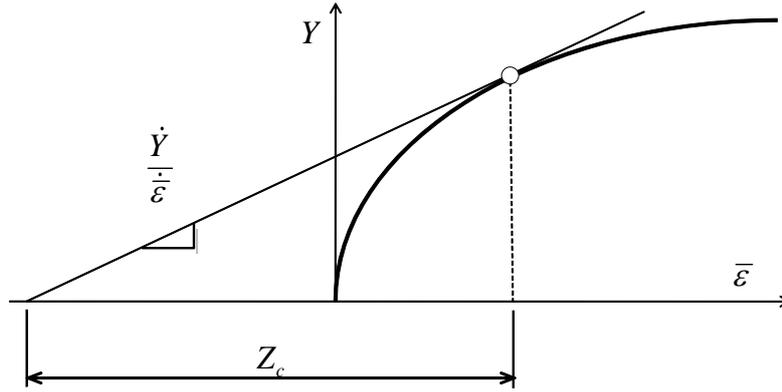


Figure 4.2 : Définition de la sous-tangente Z_c sur le graphe de la contrainte d'écoulement Y en fonction de la déformation plastique équivalente $\bar{\varepsilon}$.

Communément calculée pour les critères issus du principe de force maximum, cette tangente permet d'écrire ces critères sous une forme unifiée, ce qui simplifie leur comparaison théorique. Dans le cas d'une tôle métallique homogène et isotrope soumise à un chargement plan et proportionnel en force, des résultats particuliers peuvent être obtenus. Le comportement simplifié de la tôle est modélisé avec le critère de plasticité de von Mises et un écrouissage isotrope de type Hollomon dépendant uniquement de la déformation plastique équivalente $\bar{\varepsilon}$. Sous ces hypothèses, la relation entre la contrainte équivalente de von Mises et la contrainte de Cauchy devient :

$$\bar{\sigma} = \sigma_1 \quad (4.26)$$

D'autre part, en appliquant les relations de Levy – Mises, on peut obtenir :

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} \dot{\lambda} \quad (4.27)$$

Dans le cas d'un solide rigide plastique et dont l'écrouissage isotrope est modélisé par une loi de type Hollomon, l'évolution de la variable d'écrouissage s'écrit :

$$\frac{\dot{Y}}{\bar{\varepsilon}} = nk\bar{\varepsilon}^{n-1} = \frac{nY}{\bar{\varepsilon}} \quad (4.28)$$

avec Y la taille de la surface de charge. Dans le cas de la traction uniaxiale et en l'absence d'écrouissage cinématique, cette variable est égale à la contrainte de traction. L'expression particulière du critère de Considère s'obtient en combinant les équations (4.24)-(4.28) et en tenant compte de la condition de charge plastique ($\bar{\sigma} = Y$) et de la relation $\dot{\lambda} = \dot{\bar{\varepsilon}}$:

$$\frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}} = \frac{n}{\bar{\varepsilon}_c} = 1 \quad (4.29)$$

où $\bar{\varepsilon}_c$ est la déformation critique à l'instabilité plastique. Dans le cas d'une tôle soumise à un chargement de traction uniaxiale et dont le comportement simplifié est modélisé à l'aide d'une loi de Hollomon, la déformation critique à striction est égale au coefficient d'écroutissage n et est atteinte lorsque l'effort passe par son maximum comme l'illustre la Figure 4.3, obtenue pour un alliage fictif.

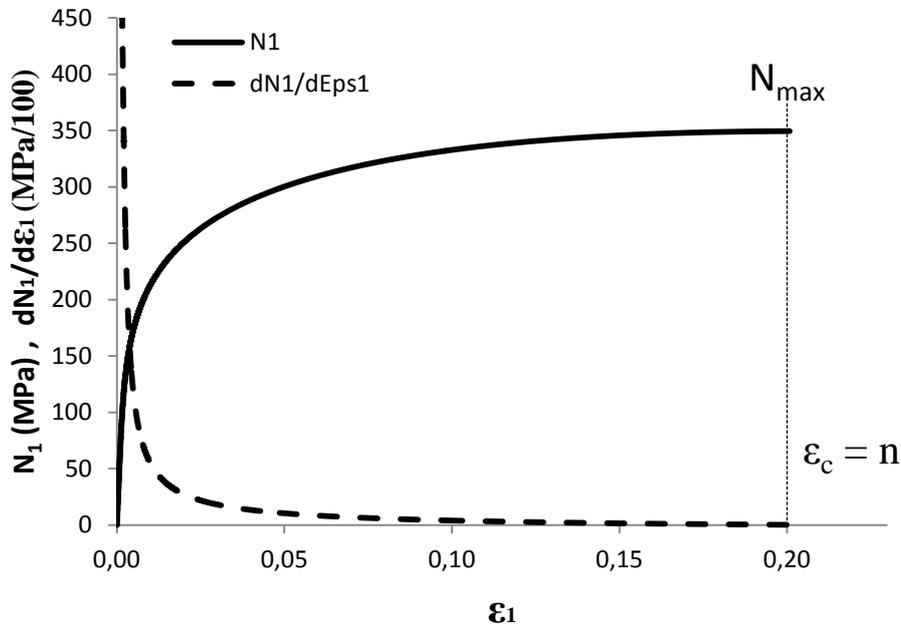


Figure 4.3 : Evolution de la contrainte nominale jusqu'à la détection de la striction diffuse, correspondant au maximum de l'effort au cours du chargement de traction uniaxiale pour une barre en utilisant le critère de plasticité de von Mises et la loi d'écroutissage d'Hollomon avec les constantes $k = 580MPa$ et $n = 0,2$.

4.4.2 Extensions aux chargements bi-axiaux

L'approche développée par Considère est toutefois restreinte à la prévision de la striction diffuse pour des barres soumises à des chargements de traction uniaxiale. Des extensions de ce critère sont donc nécessaires pour prévoir les instabilités plastiques se produisant lors de la mise en forme de tôles métalliques soumises à des trajets de chargements plus complexes, comme par exemple en emboutissage. Différentes extensions ont été proposées afin d'étendre l'application de ce critère à la prévision de la striction diffuse et à la prévision de la localisation des déformations dans le cas de chargements plans.

Des hypothèses et notations communes sont utilisées pour la formulation des critères courants basés sur les extensions du principe de force maximum. Les directions 1, 2 et 3 désignent les directions principales de la contrainte et du taux de déformation. Ces directions sont confondues avec les directions de chargement et avec les directions principales d'anisotropie. La direction 1 est la direction de la contrainte principale majeure tandis que la direction 3 désigne la direction de l'épaisseur ; un état de contraintes planes est supposé dans toute cette

partie ($\sigma_{33} = 0$, $\sigma_{13} = 0$ et $\sigma_{23} = 0$). Les trajets de chargement étant considérés directs et linéaires, les rapports des composantes dans le plan des contraintes de Cauchy et de vitesse de déformation sont considérés constants, sauf indication contraire.

4.4.3 Critère de Force Maximum

A partir des équations du modèle de Considère, différentes extensions ont été proposées pour prévoir la striction diffuse au cours de chargements bi-axiaux de tôles métalliques. Dans cette partie, seule la formulation du critère de Force Maximum (Swift 1952) sera détaillée, du fait de l'importance de la place qu'il occupe dans la littérature, pour des matériaux élasto-plastiques dont le comportement est couplé ou pas à l'endommagement. Parmi les autres extensions existantes, on peut citer les formulations liées au maximum de l'effort principal majeur ou mineur, mais celles-ci ne seront brièvement présentées qu'au cours du Chapitre 5, en même temps que le critère de Force Maximum Modifié dont elles constituent le point de départ.

Le critère de Force Maximum est basé sur l'hypothèse selon laquelle la striction diffuse se produit dans une tôle mince métallique soumise à un chargement bi-axial lorsque l'effort atteint un état stationnaire. La simultanéité de la stationnarité des composantes de l'effort se traduit par :

$$\dot{F}_1 = 0 \quad \text{et} \quad \dot{F}_2 = 0 \quad (4.30)$$

La composante de l'effort dans la direction 3 de l'épaisseur étant toujours nulle sous les hypothèses de chargement plan. En utilisant la même démarche que celle utilisée pour le critère de Considère, présentée par exemple dans (Habbad 1994) et reprise dans (Ben Tahar 2005), la condition précédente peut être exprimée en fonction des contraintes de Cauchy, soit :

$$\frac{\dot{\sigma}_1}{\sigma_1} - \dot{\epsilon}_1 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\dot{\sigma}_2}{\sigma_2} - \dot{\epsilon}_2 = 0 \quad (4.31)$$

La dérivation de la contrainte équivalente conduit à :

$$\dot{\bar{\sigma}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} \dot{\sigma}_1 + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} \dot{\sigma}_2 \quad (4.32)$$

En tenant compte des relations (4.31), il est possible d'écrire à l'instabilité :

$$\dot{\bar{\sigma}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} \sigma_1 \dot{\epsilon}_1 + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} \sigma_2 \dot{\epsilon}_2 \quad (4.33)$$

En exprimant $\dot{\epsilon}_1$ et $\dot{\epsilon}_2$ à partir de la loi d'écoulement plastique, la relation précédente devient :

$$\dot{\bar{\sigma}} = \left(\left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} \right)^2 \sigma_1 + \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} \right)^2 \sigma_2 \right) \dot{\bar{\varepsilon}} \quad (4.34)$$

D'autre part, le travail plastique est défini par :

$$\bar{\sigma} \dot{\bar{\varepsilon}} = \sigma_1 \dot{\varepsilon}_1 + \sigma_2 \dot{\varepsilon}_2 \quad (4.35)$$

La combinaison des relations (4.34) et (4.35) en tenant compte de la loi d'écoulement plastique permet d'écrire le critère de Force Maximum sous une forme comparable à celle du critère de Considère :

$$\frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma} \dot{\bar{\varepsilon}}} = \frac{1}{Z_s} = \frac{\sigma_1 \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} \right)^2 + \sigma_2 \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} \right)^2}{\sigma_1 \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} + \sigma_2 \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2}} \quad (4.36)$$

où Z_s est la tangente du critère de Swift.

Cas du comportement rigide plastique simplifié :

Des expressions analytiques simples du critère de Force Maximum peuvent être obtenues dans le cas de matériaux obéissant au comportement simplifié présenté au paragraphe 4.4.1 et basé sur un comportement rigide plastique, une loi d'écrouissage isotrope de type Hollomon ne dépendant que de la déformation équivalente $\bar{\varepsilon}$ et le critère de plasticité isotrope de von Mises, dont l'écriture est la suivante :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}'} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \quad (4.37)$$

Pour un chargement linéaire direct et proportionnel en contrainte de Cauchy, le rapport α des contraintes principales est constant et tel que :

$$\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{d\sigma_2}{d\sigma_1} \quad (4.38)$$

Les dérivées partielles de la contrainte équivalente peuvent donc être exprimées en fonction de α :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} &= \frac{1 - \alpha/2}{\sqrt{1 - \alpha + \alpha^2}} \\ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} &= \frac{\alpha - 1/2}{\sqrt{1 - \alpha + \alpha^2}} \end{aligned} \quad (4.39)$$

L'introduction de ces relations dans l'expression du critère de Force Maximum (4.36), conduit à :

$$\frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma} \dot{\bar{\varepsilon}}} = \left(1 - \frac{3}{4}\alpha - \frac{3}{4}\alpha^2 + \alpha^3\right) (1 - \alpha + \alpha^2)^{-\frac{3}{2}} \quad (4.40)$$

Lorsque la loi d'écroutissement isotrope de Hollomon est utilisée, la relation entre la contrainte équivalente de von Mises, la déformation équivalente et la variable d'écroutissement isotrope peut être obtenue durant le chargement plastique :

$$\frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma} \dot{\bar{\varepsilon}}} = \frac{\dot{Y}}{Y \dot{\bar{\varepsilon}}} = \frac{n}{\bar{\varepsilon}} \quad (4.41)$$

A l'initiation de la striction diffuse selon les hypothèses de Swift, la relation entre la déformation équivalente critique $\bar{\varepsilon}_c$ et le trajet de chargement α devient :

$$\bar{\varepsilon}_c = \frac{4n(1 - \alpha + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{4 - 3\alpha - 3\alpha^2 + 4\alpha^3} \quad (4.42)$$

Les déformations critiques principales à l'initiation de la striction diffuse s'en déduisent à l'aide de la loi d'écoulement plastique :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1c} &= \frac{4n(1 - \alpha/2)(1 - \alpha + \alpha^2)}{4 - 3\alpha - 3\alpha^2 + 4\alpha^3} \\ \varepsilon_{2c} &= \frac{4n(\alpha - 1/2)(1 - \alpha + \alpha^2)}{4 - 3\alpha - 3\alpha^2 + 4\alpha^3} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Il est intéressant de comparer cette formulation analytique du critère de Swift à celle du critère de striction diffuse de Cordebois – Ladevèze (4.21) obtenue dans le même cadre simplifié et d'observer des similitudes entre ces deux critères (Cordebois 1983).

Les relations (4.43) permettent de tracer des courbes limites de formage à striction diffuse selon le critère de Force Maximum (Figure 4.4). Pour un matériau dont les caractéristiques sont données en Figure 4.3, différentes courbes sont obtenues pour plusieurs valeurs du coefficient d'écroutissement n . Dans le cas du chargement en traction plane ($\alpha = 1/2$ et $\beta = 0$, avec β le rapport des composantes principales mineure et majeure du taux de déformation), la déformation principale mineure est nulle et il peut être remarqué que la valeur de la déformation principale majeure critique est égale au coefficient d'écroutissement n ; des valeurs identiques de la déformation principale majeure critique sont obtenues pour des chargements de traction uniaxiale ($\alpha = 0$ ou $\beta = -1/2$) et de expansion équi-biaxiale ($\alpha = 1$ ou $\beta = 1$).

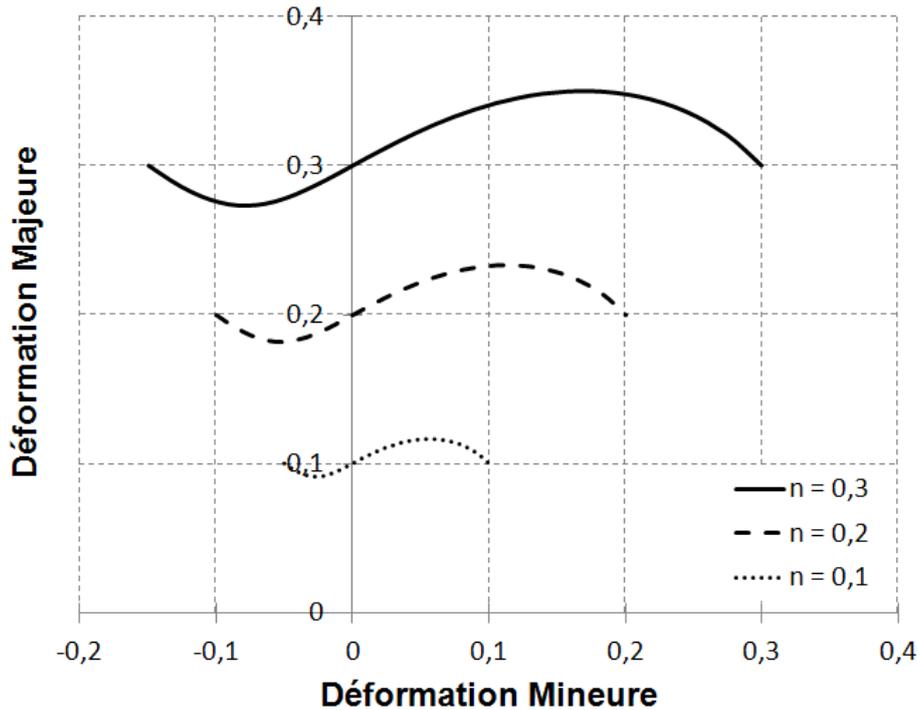


Figure 4.4 : Courbes limites de formage à striction diffuse selon le critère de Force Maximum de Swift pour un alliage d'aluminium pour différentes valeurs du coefficient d'écroutissage isotrope n .

Cas rigide plastique couplé à l'endommagement :

Après avoir formulé le CFM avec un modèle de comportement simplifié afin d'obtenir des résultats remarquables bien connus, notamment en traction uniaxiale, en traction plane et en expansion équibiaxiale, ce critère est maintenant réécrit avec un modèle de comportement rigide plastique comprenant un couplage à l'endommagement ductile. Les relations entre la contrainte et la contrainte effective, la définition de la contrainte équivalente et la loi d'écoulement, définies au Chapitre 3 dans le cas d'un comportement élasto-plastique couplé à l'endommagement, restent valables pour ce comportement rigide plastique avec couplage.

En adoptant la démarche développée dans les deux parties précédentes, la condition d'instabilité matérielle s'écrit en utilisant l'incompressibilité :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\sigma}_1}{\sigma_1} - \dot{\varepsilon}_1 &= 0 \\ \frac{\dot{\sigma}_2}{\sigma_2} - \dot{\varepsilon}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

où σ_i et $\dot{\varepsilon}_i$ sont respectivement des composantes du tenseur de contrainte de Cauchy et du tenseur taux de déformation. La différentielle de la contrainte équivalente peut s'écrire :

$$\dot{\bar{\sigma}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1^{eff}} \dot{\sigma}_1^{eff} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2^{eff}} \dot{\sigma}_2^{eff} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathbf{X}} : \dot{\mathbf{X}} \quad (4.45)$$

La relation entre contraintes et contraintes effectives est telle que :

$$\dot{\sigma}_i^{eff} = \frac{\dot{\sigma}_i}{1-d} + \frac{\dot{d}}{1-d} \sigma_i^{eff} \quad (4.46)$$

En tenant compte des relations de comportement et de la condition d'instabilité (4.44), il est possible d'obtenir :

$$\dot{\sigma}_i^{eff} = \sigma_i^{eff} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}^{eff}, \mathbf{X})}{\partial \sigma_i} + \frac{H_d}{1-d} \right) \dot{\lambda} \quad (4.47)$$

Une condition d'instabilité peut donc être obtenue combinant les équations (4.44)-(4.47) :

$$\dot{\bar{\sigma}} = \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1^{eff}} \sigma_1^{eff} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} + \frac{H_d}{1-d} \right) + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2^{eff}} \sigma_2^{eff} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} + \frac{H_d}{1-d} \right) + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathbf{X}} : \mathbf{H}_x \right) \dot{\lambda} \quad (4.48)$$

La définition du travail plastique équivalent permet d'autre part d'obtenir :

$$\bar{\sigma} \dot{\bar{\varepsilon}} = \sum_{i=1}^3 (\sigma_i^{eff} - X_i) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_i} \dot{\lambda} \quad (4.49)$$

Le rapport des expressions (4.45) et (4.49) permet d'obtenir une formulation du critère de Force Maximum dans le cas rigide plastique couplé avec l'endommagement :

$$\frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma} \dot{\bar{\varepsilon}}} = \frac{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} \sigma_1 \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} + \frac{H_d}{1-d} \right) + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} \sigma_2 \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} + \frac{H_d}{1-d} \right) - \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{H}_x}{\sum_{i=1}^3 (\sigma_i^{eff} - X_i) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_i}} \quad (4.50)$$

En l'absence d'écroutissage cinématique et d'endommagement, cette expression est équivalente à l'expression (4.36).

4.4.4 Extension du critère de Force Maximum au cas 3D

Le critère de Force Maximum classique et tel que présenté dans les parties ci-dessus est écrit avec un modèle de comportement 3D, mais appliqué pour un chargement plan adapté au cas de la mise en forme de tôles métalliques minces par emboutissage et conduisant à des états de contraintes planes. Afin de lever cette restriction, une généralisation du critère de Force Maximum au cas de chargements 3D généraux est proposée.

La condition de stationnarité des efforts du principe de Force Maximum est donnée par les équations (4.30) ou (4.61). Dans le cas d'un chargement 3D général, cette condition généralisée conduit à trois relations sur les vecteurs forces appliquées au solide telles que :

$$\dot{F}_i = 0 \quad (4.51)$$

avec i l'indice de la direction principale de chargement variant de 1 à 3. Dans le cas de chargements radiaux dans les axes d'anisotropie ou des matériaux isotropes pour lesquels les termes de cisaillement sont nuls, ces relations peuvent aussi être exprimées en fonction du tenseur des contraintes nominales \mathbf{N} , conduisant à neuf relations tant que l'état de déformation et de contrainte est uniforme :

$$\dot{N}_{ij} = 0 \quad (4.52)$$

avec i et j des entiers variant de 1 à 3. La relation entre les contraintes nominales et les contraintes de Cauchy peut être exprimée dans le cadre d'une configuration lagrangienne actualisée, par exemple (Sidoroff 1982) :

$$\dot{\mathbf{N}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} + tr(\mathbf{D})\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (4.53)$$

Dans le cas de matériaux rigides plastiques, la trace du tenseur des taux de déformations est nulle. D'autre part, dans le cas de tôles chargées dans les axes principaux de contraintes et de déformations, le taux de rotation \mathbf{W} est nul. En tenant compte de ces observations, les relations (4.52) et (4.53) permettent d'écrire :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (4.54)$$

En adoptant la démarche détaillée précédemment, le critère de Force Maximum généralisé au cas 3D peut être réécrit sous la forme :

$$\frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma} \dot{\bar{\varepsilon}}} = \frac{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{H}_X \right)}{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})} \quad (4.55)$$

En plus de la simultanéité de l'annulation des trois composantes du taux de l'effort, seule l'hypothèse de négliger l'élasticité, dont l'utilisation a été justifiée précédemment, a été utilisée lors de la formulation de ce critère applicable à une tôle homogène. Cette hypothèse n'est pas nécessaire, mais a simplement permis de simplifier les calculs et l'expression finale du critère de Force Maximum. Il est à noter que cette formulation fait appel à un chargement tridimensionnel non nécessairement proportionnel (contrairement à ce qui est généralement utilisé dans la littérature). La prédiction de la striction ne dépend donc que de l'état mécanique actuel du matériau.

L'expression du critère de Swift généralisée au cas tridimensionnel peut aussi être obtenue dans le cas de matériaux rigides plastiques endommageables. Dans ce cas la condition (4.52)

est toujours valable, de même que la relation entre contraintes nominales et contraintes de Cauchy (4.53). La trace de la déformation plastique et le taux de rotation étant nuls avec les hypothèses choisies, il est possible de négliger les deuxième et troisième termes à droite de l'égalité (4.53). La condition d'instabilité plastique (4.52) peut alors s'écrire sous la forme suivante dans le cas de matériaux rigides plastiques couplés à l'endommagement :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (4.56)$$

Le taux de contrainte équivalente peut être exprimé par :

$$\dot{\bar{\sigma}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{eff}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{eff} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathbf{X}} : \dot{\mathbf{X}} \quad (4.57)$$

Dans cette équation, le taux de contrainte effective peut être remplacé par son expression calculée au Chapitre 3 :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{eff} = \frac{1}{1-d} (\dot{\boldsymbol{\sigma}} + d \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{eff}) \quad (4.58)$$

D'autre part, le travail plastique se développe sous la forme :

$$\bar{\sigma} \dot{\bar{\varepsilon}} = (\boldsymbol{\sigma}_{eff} - \mathbf{X}) : \mathbf{D}^p \quad (4.59)$$

En combinant les relations (4.56)-(4.59) et en utilisant les relations de comportement, le critère de Force Maximum généralisé au cas tridimensionnel dans le cas de matériaux rigides plastiques endommageables s'écrit :

$$\frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma} \dot{\bar{\varepsilon}}} = \frac{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{eff}} : \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{eff} + \frac{H_d}{1-d} \boldsymbol{\sigma}_{eff} - \mathbf{H}_x \right)}{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : (\boldsymbol{\sigma}_{eff} - \mathbf{X})} \quad (4.60)$$

En l'absence d'endommagement, il est possible de vérifier que cette expression du critère de Force Maximum est identique à celle calculée en (4.55) dans le cas rigide plastique sans couplage à l'endommagement.

4.4.5 Relation entre le critère de Bifurcation Générale et le Critère de Force Maximum

Les premiers critères présentés dans ce chapitre consacré à la prédiction de la striction diffuse sont basés sur l'analyse de bifurcation, dont le principe peut sembler éloigné de l'observation expérimentale ayant conduit à la formulation du Critère de Force Maximum. Toutefois, conformément aux objectifs fixés, des relations entre les formulations théoriques de ces critères sont recherchées afin de classer les critères selon leur ordre de prédiction de striction ou d'établir l'équivalence de deux critères. Avec toutes les hypothèses exposées

précédemment, le critère de Force Maximum est basé sur la stationnarité des efforts principaux au moment de l'apparition de la striction diffuse, soit :

$$\begin{aligned}\dot{F}_1 &= 0 \\ \dot{F}_2 &= 0\end{aligned}\tag{4.61}$$

De plus, pour un chargement dans le plan, on a :

$$F_3 = 0 \quad \text{et} \quad \dot{F}_3 = 0\tag{4.62}$$

Ce qui se traduit en terme de contraintes nominales par :

$$\begin{aligned}\dot{N}_1 &= 0 \\ \dot{N}_2 &= 0 \\ \dot{N}_3 &= 0\end{aligned}\tag{4.63}$$

Considérons un solide homogène vérifiant ces conditions. Soient \mathbf{G}_A et \mathbf{G}_B deux champs gradients des vitesses cinématiquement admissibles. La différence du travail de second ordre produit par ces deux champs conduit à :

$$\dot{\mathbf{N}} : [\mathbf{G}] = 0\tag{4.64}$$

avec $[\mathbf{G}]$ la différence des champs \mathbf{G}_A et \mathbf{G}_B . Ainsi lorsque le critère de Force Maximum est vérifié, le critère de Bifurcation Générale est nécessairement atteint. Le critère de Force Maximum est une condition suffisante de Bifurcation Générale.

4.4.6 Relation théorique entre le critère de Point Limite et le Critère de Force Maximum

Une écriture du critère de Force Maximum généralisée aux chargements tridimensionnels a été présentée dans le paragraphe précédent. Ce développement va être utilisé pour établir la relation théorique entre les critères de Force Maximum et le critère de bifurcation par Point Limite. En reprenant l'équation (4.52), il a été vu auparavant que la condition d'instabilité de Swift pouvait s'écrire avec un chargement respectant les conditions de contraintes planes et appliqué dans les axes d'anisotropie :

$$\dot{\mathbf{N}} = \mathbf{0}\tag{4.65}$$

Soit encore en exprimant le taux de contrainte nominale en fonction du gradient des vitesses :

$$\mathbf{L} : \mathbf{G} = \mathbf{0}\tag{4.66}$$

Pour un chargement \mathbf{G} non nul, la condition d'instabilité de Swift est donc reliée à la recherche d'une singularité du module tangent \mathbf{L} . Il devient évident après la réécriture du critère de Force Maximum dans un cadre généralisé que cette condition d'instabilité est

équivalente au critère de Bifurcation par Point Limite, soit à la recherche de la première annulation d'une valeur propre du module \mathbf{L} . Cette dernière écriture est toutefois un peu plus générale que le critère obtenu à l'équation (4.60), dont l'utilisation devrait rigoureusement être limitée au cas de matériaux rigides plastiques dont le taux de rotation est négligeable.

Cette nouvelle formulation du critère de Force Maximum, équivalente au critère de Bifurcation par Point Limite (4.14), permet d'avoir un nouveau regard sur certaines hypothèses couramment utilisées lors de la formulation du critère de Swift et de son interprétation physique. En effet, il a été noté que la condition d'instabilité de Swift (4.30) est associée à la stationnarité simultanée des efforts principaux et à un effort nul dans l'épaisseur. Or les efforts principaux ne peuvent être stationnaires simultanément que dans des cas particuliers de chargements (Boumaiza 2005), ce qui limite le sens physique de ce critère. Afin de lever ce paradoxe, une autre interprétation du critère a été proposée, selon laquelle la striction se produit si pour un état mécanique donné il existe un chemin incrémental permettant de vérifier la condition de Swift (Habbad 1994). Le lien établi entre les critères de Force Maximum et de Bifurcation par Point Limite permet de donner une autre interprétation de ce critère. La striction est associée à la singularité du module tangent \mathbf{L} , soit à la perte d'unicité de la solution du problème d'équilibre (4.9). Aucune hypothèse concernant la linéarité des trajets de chargement appliqués dans les axes d'anisotropie n'a été utilisée lors de la formulation du CFM (voir par exemple les équations (4.51)-(4.55)) et n'est donc nécessaire. Toutefois, l'utilisation de trajets de chargements radiaux permet d'obtenir des formes simplifiées du critère dans des cas particuliers et de paramétrer le tracé des CLF.

Il est possible de vérifier que les prévisions de CLF réalisées avec la formulation classique du CFM sont en parfait accord avec les prévisions obtenues à l'aide du critère de BPL associé à des chargements plans, conformément aux observations théoriques, comme l'illustre la Figure 4.5.

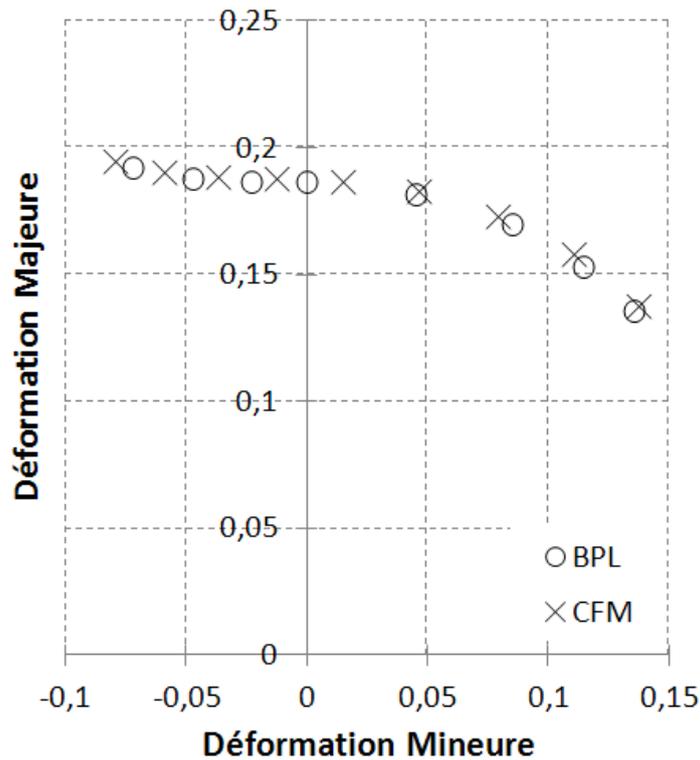


Figure 4.5 : Courbes limites de formage à striction diffuse selon les critères de Bifurcation par Point Limite et de Force Maximum (4.60) pour un acier DP600 modélisé d’après (Haddag 2007) à l’aide d’un écrouissage purement cinématique avec $X_{sat} = 551\text{MPa}$, $C_x = 9,3$ et $Y_0 = 356\text{MPa}$.

Les résultats numériques confirment les discussions théoriques précédentes, les très faibles écarts entre ces critères pouvant être imputés à des différences dans certains choix réalisés lors de leur implantation. Pour des modèles de comportement avancés, l’écriture du critère de Force Maximum peut devenir lourde voire nécessiter quelques simplifications contrairement à l’utilisation équivalente du critère de BPL. Pour une utilisation industrielle, le temps CPU lié au CFM semble par contre rester inférieur à celui nécessité par le critère de BPL. Dans le second cas, la recherche des valeurs propres du tenseur est en effet pénalisante en termes de temps de calcul.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, différentes méthodes ont été utilisées pour la prédiction des phénomènes de striction diffuse pour des classes de matériaux élasto-plastiques formulées dans le cadre des transformations finies.

Les méthodes d’analyse de bifurcation basées sur la perte d’unicité des solutions de la dérivée temporelle du principe des puissances virtuelles ont été utilisées, permettant l’écriture de deux critères de striction diffuse, une condition suffisante de stabilité énoncée à travers le critère de Bifurcation Générale (Drucker 1950) et le critère de Bifurcation par Point Limite (Valanis

1989) atteint en même temps ou après la Bifurcation Générale. Issu d'hypothèses de formulation très proches des critères précédents et basé sur une approche énergétique, le critère de striction diffuse de Cordebois – Ladevèze (Cordebois et Ladevèze 1984) donne des résultats identiques à ceux-ci dans le cas de modèles de comportement simplifié. Cette classe de comportements est la seule pour laquelle la comparaison a été facile à mener, mais ces résultats devraient pouvoir être étendus plus généralement aux matériaux élasto-plastiques.

La méthode de Force Maximum, basée sur l'observation expérimentale de Considère (Considère 1885) selon laquelle la striction diffuse intervient lorsque l'effort atteint son maximum au cours d'un essai de traction, a été étudiée. Le critère de Force Maximum (Swift 1952) constitue la principale extension de ce critère à la prédiction de striction diffuse dans le cas de chargements bidimensionnels. Une écriture de ce critère pour des matériaux élasto-plastiques endommageables a été proposée ainsi qu'une formulation tridimensionnelle du critère ayant ensuite permis d'établir un rapprochement théorique entre ce critère et le critère de Bifurcation par Point Limite.

Les résultats obtenus concernant la prédiction de striction diffuse dans le cas de matériaux élasto-plastiques se sont avérés très proches pour l'ensemble des critères étudiés. Le choix d'un critère peut donc être effectué sans véritable contrainte, mais plus par la simplicité et l'efficacité de sa mise en œuvre en fonction de l'application visée.

La striction diffuse constitue une borne basse d'instabilité plastique. Les critères prédisant ces modes restent trop conservatifs pour des applications telles que la prédiction de défauts d'emboutissage. L'écriture de critères de striction localisée, moins conservatifs, semble nécessaire pour traiter cette question. L'objectif du prochain chapitre est de présenter les critères de prédiction de modes instables localisés et d'établir des liens théoriques entre eux lorsque cela est possible.

