Convergence fini-dimensionnelle des sommes partielles

Soit X un champ linéaire fortement dépendant. L'objectif de ce chapitre est d'étudier le comportement asymptotique des lois fini-dimensionnelles de ses sommes partielles

$$S_n(t) = d_n^{-1} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \dots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1,\dots,k_d}, \tag{3.0.1}$$

pour $t \in [0,1]^d$ et où d_n est une suite normalisatrice qui sera précisée par la suite.

La convergence fonctionnelle de ces sommes nécessite l'étude de leur équitension dans l'espace de Skorohod $\mathcal{D}([0,1]^d)$ et fera l'objet du chapitre suivant.

Nous basons notre étude sur un théorème de convergence de mesures spectrales démontré dans le cas $d = 1$ par Van der Meer (1996) et Lang et Soulier (2000) et que nous généralisons au cadre des champs dans la section 3.1. Le théorème 6 permet l'étude de statistiques linéaires pouvant s'écrire sous forme d'une intégrale stochastique. C'est le cas des sommes partielles (3.0.1) lorsque le champ X s'écrit

$$X_{n_1,\dots,n_d} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_{k_1,\dots,k_d} \xi_{n_1-k_1,\dots,n_d-k_d},$$

où ξ est un bruit dont nous préciserons les propriétés plus tard et où les a_k peuvent être vus comme les coefficients de Fourier d'un filtre $a \in L^2([-\pi,\pi]^d)$. Ce filtre détermine la structure de dépendance de X puisqu'il est très lié à sa densité spectrale : cette dernière est proportionnelle à $|a|^2$ lorsque ξ est un bruit blanc.

Dans la section 3.2, on applique le Théorème 6 pour les dimensions $d = 1$ et $d = 2$. Des conditions de dépendance sur le champ X, précisées via le filtre a dans le Théorème 7, nous permettent d'obtenir la limite de S_n. Les résultats se déclinent selon que le filtre est continu en 0 ou non. Dans la première situation, S_n admet un comportement de type centrale limite. Dans la seconde, nous supposons le filtre équivalent en l'origine à une fonction homogène de degré négatif, un cadre typique amenant de la forte dépendance, et nous obtenons un théorème limite non-central dans le sens où la normalisation n'est plus standard.

La section 3.3 généralise l'étude précédente à $d \geq 3$. Notre approche, basée sur le Théorème 6, ne permet pas d'obtenir la convergence de S_n sans renforcer les hypothèses faites sur a dans la section précédente. Néanmoins, nous retrouvons la distinction principale selon que le filtre est continu en 0 ou non, impliquant un théorème limite de type central ou non-central respectivement.

Dans un cas particulier, nous obtenons comme limite de S_n le drap Brownien fractionnaire en dimension d (voir remarque 19).

La section 3.4 contient la démonstration du Théorème 6 et la partie 3.5 résume quelques propriétés sur les approximations de l'unité que nous utilisons dans les preuves.

3.1 Approche spectrale

3.1.1 Théorème de convergence de mesures spectrales

Nous énonçons le résultat principal qui nous permettra d'étudier la convergence des sommes partielles d'un champ linéaire. Il établit la convergence de mesures spectrales construites à partir d'un champ aléatoire vérifiant un théorème de type Donsker.

Soit $(\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire réel. On adopte l'hypothèse suivante :

H 1. *Le champ aléatoire stationnaire $(\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ est centré et admet une densité spectrale f_ξ bornée par un réel positif $M > 0$. De plus la suite S_n^ξ définie sur $]0, \infty[^d$ par :*

$$S_n^\xi(t_1, \dots, t_d) = n^{-d/2} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \dots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} \xi_{k_1,\dots,k_d}$$

converge au sens des lois fini-dimensionnelles vers un processus B.

Dans le cas où ξ est un bruit blanc fort $B(t_1, \dots, t_d)$ est le drap brownien de fonction de covariance $\sigma(s,t) = (s_1 \wedge t_1) \dots (s_d \wedge t_d)$ (cf Wichura (1969)).

La variable aléatoire ξ_k admet la représentation spectrale suivante :

$$\xi_k = \int_{[-\pi,\ \pi]^d} e^{i<k,x>} dW(x), \tag{3.1.1}$$

où la mesure de contrôle de W a pour densité f_ξ.

Pour $n \geq 1$, on considère la mesure aléatoire W_n à accroissements orthogonaux sur $[-n\pi;\ n\pi]^d$ définie par

$$W_n(A) = n^{d/2} W(n^{-1}A).$$

Le théorème suivant étend au cas $d > 1$ un résultat obtenu par Lang et Soulier (2000) en dimension $d = 1$.

Théorème 6. *Sous* **H 1**, *il existe une application linéaire I de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

(i) Si Φ_n est une suite de fonctions qui converge dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ vers Φ, alors $\int \Phi_n(x) dW_n(x)$ converge en loi vers $I(\Phi)$.

(ii) $\forall \Phi \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad E\left(I\left(\Phi\right)\right)^2 \leq (2\pi)^d M||\Phi||_2^2$

(iii) $I\left(x \mapsto \prod_{j=1}^d \frac{e^{it_jx_j}-1}{ix_j}\right) = B(t_1, \ldots, t_d)$

(iv) Si ξ *est un bruit blanc fort, quelque soit* Φ *dans* $L^2(\mathbb{R}^d)$*,* $I(\Phi) = \int \Phi dW_0$*, où* W_0 *est la mesure spectrale associée au bruit blanc gaussien.*

La preuve de ce théorème est donnée dans la section 3.4.

Remarque 14. Le (ii) du théorème montre que l'application I n'est pas nécessairement une isométrie et qu'elle ne peut pas toujours être vue comme une intégrale stochastique. Cette interprétation devient possible lorsque ξ est un bruit blanc fort comme spécifié dans le (iv). Dans ce cas, B est le drap brownien et la propriété (iii) correspond à sa représentation harmonisable :

$$B(t_1, \ldots, t_d) = \int \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{it_jx_j} - 1}{ix_j} dW_0(x_1, \ldots, x_d).$$

3.1.2 Application à la convergence de S_n

Le Théorème 6 nous permet, en particulier, d'étudier le comportement asymptotique de toute statistique linéaire de la forme $\sum_{k \in \mathcal{D}_n} c_k \xi_k$ où $\mathcal{D}_n$ est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^d$, où les c_k sont des constantes complexes, pourvu qu'elle puisse se réécrire sous forme d'une intégrale stochastique. Nous détaillons la démarche dans le cas particulier des sommes partielles d'un champ linéaire X, notre centre d'intéret.

Soit

$$X_{n_1,\ldots,n_d} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_{k_1,\ldots,k_d} \xi_{n_1-k_1,\ldots,n_d-k_d}, \tag{3.1.2}$$

où $a_{k_1,\ldots,k_d}$ sont les coefficients de Fourier (à $(2\pi)^{d/2}$ près) d'un filtre $a \in L^2([-\pi,\pi]^d)$ et vérifient

$$a(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_{k_1,\ldots,k_d} e^{-i<k,x>}.$$

Dans les résultats de convergence présentés par la suite, nous spécifierons la structure de dépendance du champ X à partir du filtre a. Ce dernier est lié à la densité spectrale f_X de X par la relation :

$$f_X(x) = f_\xi(x)|a(x)|^2,$$

où $x = (x_1, \ldots, x_d) \in [-\pi, \pi]^d$. En particulier, si ξ est un bruit blanc de variance σ^2, $f_X(x) = \frac{\sigma^2}{(2\pi)^d}|a(x)|^2$.

Les sommes partielles de X (ici classiquement normalisées par $n^{-d/2}$) sont définies, pour tout $t = (t_1, \ldots, t_d)$ dans $[0,1]^d$, par

$$S_n(t) = n^{-d/2} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \ldots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1,\ldots,k_d}. \tag{3.1.3}$$

En utilisant la représentation spectrale (3.1.1) de ξ et la définition de W_n, on a

$$S_n(t) = \int_{[-n\pi, n\pi]^d} a\left(\frac{x}{n}\right) \prod_{j=1}^{d} D_n(x_j, t_j) dW_n(x). \tag{3.1.4}$$

où $x = (x_1, \ldots, x_d)$ et où

$$D_n(x_j, t_j) = \frac{e^{ix_j([t_j n]+1)/n} - 1}{n(e^{ix_j/n} - 1)} \mathbf{I}_{[-n\pi,\ n\pi]}(x_j). \tag{3.1.5}$$

Cette écriture nous permet d'utiliser le théorème 6. A t fixé et à une renormalisation près, les sommes partielles de X convergent en loi dès que $a(x/n) \prod_{j=1}^{d} D_n(x_j, t_j)$ converge dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

3.2 Sommes partielles en dimension $d \leq 2$

Le théorème suivant donne le comportement asymptotique des sommes partielles d'un champ linéaire en dimension 2, construit soit à partir d'un filtre continu à l'origine, soit à partir d'un filtre équivalent en 0 à une fonction homogène.

Théorème 7. *Soit $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ un champ stationnaire vérifiant* **H1**. *Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire défini par (3.1.2), construit en filtrant ξ à travers un filtre a.*

(i) Si $a \in L^2([-\pi, \pi]^d)$ est continu en l'origine avec $a(0) \neq 0$, alors, pour $d \leq 2$,

$$\frac{1}{n^{d/2}} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1,\ldots,k_d} \xrightarrow[n\to\infty]{fidi} a(0)B(t), \tag{3.2.1}$$

où B est la limite des sommes partielles de ξ introduit dans **H 1**.

(ii) Si a est équivalent en 0 à une fonction homogène $\tilde{a}$ de degré $\alpha \in]-1; 0[$ assurant $a \in L^2([-\pi, \pi]^d)$, i.e. $\forall \lambda\ \tilde{a}(\lambda x) = |\lambda|^{\alpha}\, \tilde{a}(x)$, alors, pour $d \leq 2$,

$$\frac{1}{n^{d/2-\alpha}} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1,\ldots,k_d} \xrightarrow[n\to\infty]{fidi} I\left(\tilde{a}(x) \prod_{i=1}^{d} D(x_i, t_i)\right), \tag{3.2.2}$$

où I est l'application linéaire définie dans le Théorème 6.

Remarque 15. Lorsque $d = 1$, nous retrouvons les résultats montrés dans Lang et Soulier (2000) ; cependant nous en allégeons un peu les hypothèses, car là où ces auteurs supposent le filtre continu à l'origine et borné sur $[-\pi, \pi]$, nous ne supposons que la continuité en 0. De même, dans (ii), le filtre n'a pas besoin d'être homogène sur tout $[-\pi, \pi]$ mais seulement en l'origine.

Remarque 16. Le filtrage du bruit ξ par une fonction vérifiant les hypothèses du (i) peut produire un champ faiblement dépendant ; c'est le cas lorsque par exemple a est continu sur $[-\pi, \pi]^d$. Mais il peut aussi amener de la forte dépendance lorsque a est singulière en des points de fréquence non nulle. Dans ce contexte, la dépendance est forte car la fonction de covariance est non sommable mais, comme attendu lorsque les singularités spectrales ne se situent pas à l'origine, le comportement asymptotique des sommes partielles n'est pas modifié par rapport à un cadre de faible dépendance. En dimension $d = 1$, ce cadre de forte dépendance faisant intervenir des singularités spectrales hors de l'origine est connu sous le nom de longue mémoire saisionnière, voir à ce sujet Ould Haye (2001).

Remarque 17. Lorsque le filtre vérifie les hypothèses du (ii) du Théorème 7, le champ résultant est à longue mémoire. Il est à longue mémoire isotrope lorsque le filtre est de la forme $a(x, y) = |(x, y)|^\alpha$. Nous obtenons de la longue mémoire non-isotrope en considérant par exemple le filtre discuté dans l'exemple 1, de la forme $a(x, y) = |x+\theta y|^\alpha$, avec $-1/2 < \alpha < 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Remarque 18. Dans (3.2.2), le processus limite n'admet pas une forme explicite dans le cas général. Mais dans le cas particulier où ξ est un bruit blanc fort, il peut s'écrire comme une intégrale stochastique par rapport à la mesure spectrale associée au bruit blanc gaussien (cf la remarque 14).

Preuve du Théorème 7. Nous commençons pas montrer (i).

Pour montrer la convergence en loi de $S_n(t)$ à t fixé, nous employons la démarche expliquée dans la section 3.1.2 en vue d'appliquer le Théorème 6 et nous devons montrer :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \left| a\left(\frac{x}{n}\right) \prod_{j=1}^d D_n(x_j, t_j) - a(0) \prod_{j=1}^d D(x_j, t_j) \right|^2 dx = 0. \tag{3.2.3}$$

Par cette méthode, la convergence des lois fini-dimensionnelles, ramenée ici à une convergence dans L^2, se déduit aisément de la convergence en loi de $S_n(t)$ à t fixé.

Séparons l'intégrale (3.2.3) de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \left| a\left(\frac{x}{n}\right) \prod_{j=1}^d D_n(x_j, t_j) - a(0) \prod_{j=1}^d D(x_j, t_j) \right|^2 dx \\
&\qquad = \int_{[-n\pi, n\pi]^d} \left| a\left(\frac{x}{n}\right) \prod_{j=1}^d D_n(x_j, t_j) - a(0) \prod_{j=1}^d D(x_j, t_j) \right|^2 dx \\
&\qquad\quad + \int_{\cup_{j=1}^d \{|x_j| > n\pi\}} \left| a(0) \prod_{j=1}^d D(x_j, t_j) \right|^2 dx.
\end{aligned}$$

La dernière intégrale converge vers 0 à t fixé, car $x_j \mapsto D(x_j, t_j)$ est continu sur $\mathbb{R}$ et vérifie $|D(x_j,t_j)|^2 < 2x_j^{-2}$, donc est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour la première intégrale,

$$\begin{aligned}\int_{[-n\pi,n\pi]^d} &\left| a\left(\frac{x}{n}\right)\prod_{j=1}^d D_n(x_j,t_j) - a(0)\prod_{j=1}^d D(x_j,t_j)\right|^2 dx\\ &\leq 2\int_{[-n\pi,n\pi]^d}\left|a\left(\frac{x}{n}\right)-a(0)\right|^2\prod_{j=1}^d |D_n(x_j,t_j)|^2\,dx\\ &+2\int_{[-n\pi,n\pi]^d} a^2(0)\left|\prod_{j=1}^d D_n(x_j,t_j)-\prod_{j=1}^d D(x_j,t_j)\right|^2 dx.\end{aligned}$$

D'après le Lemme 12 de la section 3.4, la dernière intégrale tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Il nous reste à traiter la première intégrale du terme à droite de l'inégalité. Le changement de variable $x/n \to x$ nous donne :

$$\int_{[-n\pi,n\pi]^d}\left|a\left(\frac{x}{n}\right)-a(0)\right|^2\prod_{j=1}^d |D_n(x_j,t_j)|^2\,dx = \int_{[-\pi,\pi]^d}|a(x)-a(0)|^2\prod_{j=1}^d \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j)dx, \tag{3.2.4}$$

avec

$$\tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j) = 2\pi\frac{[nt_j]+1}{n}F_{[nt_j]+1}(x_j), \tag{3.2.5}$$

où F_n est le noyau de Fejer :

$$F_n(x) = \begin{cases}\frac{1}{2\pi n}\frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2))} & \text{si } x\neq 0\\ \frac{n}{2\pi} & \text{si } x = 0.\end{cases} \tag{3.2.6}$$

Si $d=1$, $\tilde{F}_{[nt_1]}(x_1)$ est, à une constante près, une approximation forte de l'unité ; comme $|a(x)-a(0)|^2$ est continu en $x=0$, le Théorème 13 donné dans la partie annexe 3.5 s'applique et (3.2.3) est montré. Le même argument ne peut pas être appliqué lorsque $d\geq 2$ car le produit tensoriel $\prod_{j=1}^d \tilde{F}_{[nt_j]}(x_j)$ n'est plus qu'une approximation de l'unité au sens faible (voir la Proposition 5 en annexe). Cependant, lorsque $d=2$, le résultat reste vrai comme nous le prouvons ci-dessous.

Nous séparons le domaine d'intégration du membre de droite dans (3.2.4) de la façon suivante :

$$\begin{aligned}&\int_{[-\pi,\pi]^2}|a(x)-a(0)|^2\prod_{j=1}^2\tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j)dx\\ &=\int_{||x||\leq\delta_n}|a(x)-a(0)|^2\prod_{j=1}^2\tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j)dx+\int_{||x||>\delta_n}|a(x)-a(0)|^2\prod_{j=1}^2\tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j)dx,\end{aligned}$$

où la suite $(\delta_n)_{n>0}$ devra être convenablement choisie par la suite et où la norme considérée est $||(x_1,x_2)|| = \max(|x_1|,|x_2|)$. D'après la continuité de $a(x)$ en $x=0$, le premier terme tend vers 0 dès que $\delta_n \to 0$. Maintenant,

$$\int_{||x||>\delta_n} |a(x)-a(0)|^2 \prod_{j=1}^{2} \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j)dx \leq \tag{3.2.7}$$

$$\int_{|x_1|>\delta_n} \int_{-\pi}^{\pi} |a(x)-a(0)|^2 \prod_{j=1}^{2} \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j)dx + \int_{|x_2|>\delta_n} \int_{-\pi}^{\pi} |a(x)-a(0)|^2 \prod_{j=1}^{2} \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j)dx.$$

Les deux termes du membre de droite ci-dessus sont traités de la même manière. Considérons par exemple le premier :

$$\int_{|x_1|>\delta_n} \int_{-\pi}^{\pi} |a(x)-a(0)|^2 \prod_{j=1}^{2} \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j)dx$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}_{[nt_2]+1}(x_2) \left(\int_{|x_1|>\delta_n} |a(x)-a(0)|^2 \tilde{F}_{[nt_1]+1}(x_1)dx_1 \right) dx_2.$$

La Proposition 6 de l'Annexe 3.5 implique, $\tilde{F}$ étant défini dans (3.2.5),

$$\sup_{|x_1|>\delta_n} \tilde{F}_{[nt_1]+1}(x_1) \leq \frac{\pi^2}{n\delta_n^2}.$$

Donc

$$\int_{|x_1|>\delta_n} \int_{-\pi}^{\pi} |a(x)-a(0)|^2 \prod_{j=1}^{2} \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j)dx \leq \frac{\pi^2}{\delta_n^2} \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}_{[nt_2]+1}(x_2) b(x_2) dx_2,$$

où $b(x_2) = \int_{[-\pi,\pi]} |a(x)-a(0)|^2 dx_1$ est intégrable sur $[-\pi,\pi]$.

Toujours d'après la Proposition 6,

$$v_{2,n} = \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}_{[nt_2]+1}(x_2) b(x_2) dx_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Posons de façon analogue

$$v_{1,n} = \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}_{[nt_1]+1}(x_1) b(x_1) dx_1$$

où $b(x_1) = \int_{[-\pi,\pi]} |a(x)-a(0)|^2 dx_2$.

Il suffit pour conclure de choisir $\delta_n^2 = (v_{1,n} \vee v_{2,n})^{1/2}$. Ce choix garantit $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ et implique la convergence vers 0 de chaque terme de (3.2.7).

Nous montrons à présent le (ii) du théorème 7 en nous restreignant encore à la convergence en loi à t fixé. Nous utilisons le Théorème 6 et devons montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \left| n^\alpha a\left(\frac{x}{n}\right) \prod_{i=1}^{d} D_n(x_i,t_i) - \tilde{a}(x) \prod_{i=1}^{d} D(x_i,t_i) \right|^2 dx = 0. \tag{3.2.8}$$

Nous donnons d'abord quelques propriétés du filtre $\tilde{a}$.

Lemme 8. *Si $d \leq 2$,*

$$(i) \int_{[-\pi,\pi]^d} |\tilde{a}|^2(x)dx < \infty, \qquad (ii) \int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{a}|^2(x) \prod_{i=1}^{d} (x_i^{-2} \wedge 1)dx < \infty.$$

Preuve du Lemme 8. Nous supposons que $d = 2$ car la preuve lorsque $d = 1$ ne présente aucune difficulté. Comme $a(x)$ est équivalent à $\tilde{a}(x)$ en $x = 0$, il existe $0 < \eta < \pi$ tel que $|x| < \eta$ implique $|\tilde{a}^2(x)/a^2(x)| < 2$. Ainsi,

$$\int_{|x|<\eta} |\tilde{a}|^2(x)dx = \int_{|x|<\eta} |a|^2(x)\frac{|\tilde{a}|^2(x)}{|a|^2(x)}dx \leq 2\int_{[-\pi,\pi]^d} |a|^2(x)dx < \infty.$$

Par ailleurs, en passant aux coordonnées polaires et par homogénéité de $\tilde{a}$,

$$\int_{|x|<\eta} |\tilde{a}|^2(x)dx = \int_0^\eta r^{2\alpha+1}dr \int_0^{2\pi} |\tilde{a}|^2(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = \frac{\eta^{2\alpha+2}}{2\alpha+2}\int_0^{2\pi} |\tilde{a}|^2(\cos\theta,\sin\theta)d\theta.$$

La dernière intégrale est donc nécessairement finie et

$$\int_{[-\pi,\pi]^d} |\tilde{a}|^2(x)dx = \frac{\pi^{2\alpha+2}}{2\alpha+2}\int_0^{2\pi} |\tilde{a}|^2(\cos\theta,\sin\theta)d\theta < \infty,$$

ce qui montre le (i) du Lemme 8.

Pour le (ii) :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{a}|^2(x) \prod_{i=1}^{d}(x_i^{-2} \wedge 1)dx \\
&\quad = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r^{2\alpha+1}|\tilde{a}|^2(\cos\theta,\sin\theta)\left((r^{-2}\cos^{-2}\theta)\wedge 1\right)\left((r^{-2}\sin^{-2}\theta)\wedge 1\right)d\theta dr \\
&\quad \leq \int_0^1 r^{2\alpha+1}dr \int_0^{2\pi} |\tilde{a}|^2(\cos\theta,\sin\theta)d\theta \\
&\qquad + \int_1^\infty \int_0^{2\pi} r^{2\alpha+1}|\tilde{a}|^2(\cos\theta,\sin\theta)\left((r^{-2}\cos^{-2}\theta)\wedge 1\right)\left((r^{-2}\sin^{-2}\theta)\wedge 1\right)d\theta dr
\end{aligned}$$

L'intégrale sur le domaine $r \leq 1$ est finie ; pour la dernière intégrale sur $r > 1$, on peut ramener le domaine d'intégration selon θ sur $[0, \pi]$ et il convient de scinder ce dernier selon que $|\theta - \pi/2| < \pi/4$ ou non. Sur $\{|\theta - \pi/2| < \pi/4\}$, $\sin^{-2}\theta < 2$ et sur $\{|\theta - \pi/2| > \pi/4\}$, $\cos^{-2}\theta < 2$ de telle sorte que

$$\begin{aligned}
&\int_1^\infty \int_0^{2\pi} r^{2\alpha+1}|\tilde{a}|^2(\cos\theta,\sin\theta)\left((r^{-2}\cos^{-2}\theta)\wedge 1\right)\left((r^{-2}\sin^{-2}\theta)\wedge 1\right)d\theta \\
&\qquad\qquad \leq c\int_1^\infty r^{2\alpha-1}dr \int_0^{2\pi} |\tilde{a}|^2(\cos\theta,\sin\theta)d\theta < \infty
\end{aligned}$$

ce qui montre le (ii) du lemme 8. $\square$

Nous revenons à la preuve de (3.2.8).

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \left| n^\alpha a\left(\frac{x}{n}\right) \prod_{i=1}^d D_n(x_i,t_i) - \tilde{a}(x) \prod_{i=1}^d D(x_i,t_i) \right|^2 dx \\ \le 2 \int_{[-n\pi,n\pi]^d} \left| n^\alpha a\left(\frac{x}{n}\right) - \tilde{a}(x) \right|^2 \prod_{i=1}^d |D_n(x_i,t_i)|^2 dx \\ + 2\int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{a}|^2(x) \left| \prod_{i=1}^d D_n(x_i,t_i) - \prod_{i=1}^d D(x_i,t_i) \right|^2 dx.\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Le lemme suivant traite de la convergence de la première intégrale dans (3.2.9).

Lemme 9.

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[-n\pi,n\pi]^d} \left| n^\alpha a\left(\frac{x}{n}\right) - \tilde{a}(x) \right|^2 \prod_{i=1}^d |D_n(x_i,t_i)|^2 dx = 0$$

Preuve du Lemme 9. Après un changement de variables et grâce à l'homogénéité de $\tilde{a}$,

$$\begin{aligned}\int_{[-n\pi,n\pi]^d} \left| n^\alpha a\left(\frac{x}{n}\right) - \tilde{a}(x) \right|^2 \prod_{i=1}^d |D_n(x_i,t_i)|^2 dx \\ = n^{2\alpha} \int_{[-\pi,\pi]^d} |a(x) - \tilde{a}(x)|^2 \prod_{j=1}^d \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j) dx,\end{aligned}$$

où $\tilde{F}_{[nt_j]+1}$ est défini en (3.2.5). Soit $\alpha < \beta < 0$, nous coupons le domaine d'intégration de la dernière intégrale de la manière suivante :

$$\begin{aligned} n^{2\alpha} \int_{[-\pi,\pi]^d} |a(x) - \tilde{a}(x)|^2 \prod_{j=1}^d \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j) dx = \\ n^{2\alpha} \int_{|x|\le n^\beta} |a(x) - \tilde{a}(x)|^2 \prod_{j=1}^d \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j) dx + n^{2\alpha} \int_{|x|> n^\beta} |a(x) - \tilde{a}(x)|^2 \prod_{j=1}^d \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j) dx.\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Comme $\beta > \alpha$ et d'après le Lemme 8, la convergence vers 0 de la dernière intégrale se montre exactement comme celle de (3.2.7). Quant à la première intégrale dans le membre de droite de 3.2.10, on utilise le fait que $a(x) \sim \tilde{a}(x)$ lorsque x tend vers 0. Fixons $\varepsilon > 0$, il existe alors n_0 tel que pour tout $n > n_0$, $|x| \le n^\beta$ implique

$$|a(x) - \tilde{a}(x)| \le \varepsilon |\tilde{a}(x)|.$$

Ainsi, pour tout $n > n_0$,

$$\begin{aligned}
n^{2\alpha}\int_{|x|\le n^\beta} |a(x)-\tilde a(x)|^2\prod_{j=1}^d \tilde F_{[nt_j]+1}(x_j)dx \\
&\le \varepsilon n^{2\alpha}\int_{|x|\le n^\beta}|\tilde a|^2(x)\prod_{j=1}^d \tilde F_{[nt_j]+1}(x_j)dx \\
&\le c\varepsilon\int_{|x|\le n^{\beta+1}}|\tilde a|^2(x)\prod_{j=1}^d \frac{\sin^2\left(\frac{[nt_j]+1}{n}\frac{x_j}{2}\right)}{x_j^2}\frac{(\frac{x_j}{2n})^2}{\sin^2(\frac{x_j}{2n})}dx \\
&\le c\varepsilon\int_{\mathbb{R}^d}|\tilde a|^2(x)\prod_{j=1}^d\frac{(1\wedge(t_j+1)^2x_j^2)}{x_j^2}dx.
\end{aligned}$$

La dernière intégrale est finie d'après le Lemme 8 d'où la convergence vers 0 de (3.2.10).

□

Revenons à la preuve du (ii) du Théorème 7. D'après (3.2.9) et le Lemme 9, il reste à prouver que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}|\tilde a^2|(x)\left|\prod_{i=1}^d D_n(x_i,t_i)-\prod_{i=1}^d D(x_i,t_i)\right|^2 dx = 0.$$

Nous séparons le domaine d'intégration de cette intégrale :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d}|\tilde a|^2(x)\left|\prod_{i=1}^d D_n(x_i,t_i)-\prod_{i=1}^d D(x_i,t_i)\right|^2 dx \\
&= \int_{[-n\pi,n\pi]^d}|\tilde a|^2(x)\left|\prod_{i=1}^d D_n(x_i,t_i)-\prod_{i=1}^d D(x_i,t_i)\right|^2 dx + \int_{\cup_i\{|x_i|>n\pi\}}|\tilde a|^2(x)\prod_{i=1}^d |D(x_j,t_j)|^2dx.
\end{aligned}$$

Le dernier terme tend vers 0 par intégrabilité sur $\mathbb{R}^d$ de la fonction sous l'intégrale. Pour la première intégrale, le changement de variables $x/n \to x$ conduit à :

$$\begin{aligned}
\int_{[-n\pi,n\pi]^d}|\tilde a|^2(x)\left|\prod_{i=1}^d D_n(x_i,t_i)-\prod_{i=1}^d D(x_i,t_i)\right|^2 dx \\
&= n^{2\alpha+d}\int_{[-\pi,\pi]^d}|\tilde a|^2(x)\left|\prod_{i=1}^d D_n(nx_i,t_i)-\prod_{i=1}^d D(nx_i,t_i)\right|^2 dx.
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 12 de la section 3.4, nous avons

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]^d}\left|\prod_{i=1}^d D_n(nx_i,t_i)-\prod_{i=1}^d D(nx_i,t_i)\right|^2 = O(n^{-2}). \tag{3.2.11}$$

Comme $\int_{[-\pi,\pi]^d} |\tilde{a}|^2(x)dx < \infty$, nous obtenons finalement

$$\int_{[-n\pi,n\pi]^d} |\tilde{a}|^2(x) \left| \prod_{i=1}^d D_n(x_i,t_i) - \prod_{i=1}^d D(x_i,t_i) \right|^2 dx = O(n^{2\alpha+d-2})$$

qui converge vers 0 puisque $d \leq 2$ et $\alpha < 0$.

□

3.3 Sommes partielles en dimension d quelconque

La méthode adoptée pour montrer la convergence des sommes partielles se base sur la convergence dans L^2 de $a(x/n)\prod_{j=1}^d D_n(x_j,t_j)$. D'après le Théorème 7, cette convergence se décline assez bien en dimension $d=2$ selon que le filtre a est continu en l'origine ou non. Ce n'est plus le cas en dimension $d \geq 3$: le lemme suivant montre que l'on ne peut pas généraliser les résultats obtenus en dimension 2 sans hypothèse supplémentaire sur a. Le filtre présenté vérifie en effet les hypothèses du (i) du Théorème 7 mais la convergence souhaitée dans L^2 n'a pas lieu.

Lemme 10. *Soit le filtre a sur $[-\pi,\pi]^3$ défini par :*

$$a(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} 1 & si\ |x_1| \leq c\ ou\ si\ x_2x_3 = 0 \\ |x_2|^{\alpha/2}|x_3|^{\alpha/2}+1 & sinon, \end{cases}$$

où $-1 < \alpha < -1/2$ et $0 < c < \pi$.

Ce filtre appartient à $L^2([-\pi,\pi]^3)$, il est continu en 0 avec $a(0) \neq 0$ et la fonction $a(x/n)\prod_{j=1}^3 D_n(x_j,t_j)$ ne converge pas dans $L^2([-\pi,\pi]^3)$.

Démonstration du lemme 10. Le candidat pour la limite dans L^2 de $a(x/n)\prod_{j=1}^3 D_n(x_j,t_j)$ est $\prod_{j=1}^3 D(x_j,t_j)$, sa limite presque sûre. Or

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left| a\left(\frac{x}{n}\right) \prod_{j=1}^3 D_n(x_j,t_j) - \prod_{j=1}^3 D(x_j,t_j) \right|^2 dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^3} \left| \left(a\left(\frac{x}{n}\right) - 1\right) \prod_{j=1}^3 D_n(x_j,t_j) + \prod_{j=1}^3 D_n(x_j,t_j) - \prod_{j=1}^3 D(x_j,t_j) \right|^2 dx.$$

En utilisant la minoration $|x+y| \geq \big||x|-|y|\big|$, on a :

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} \left| \left(a\left(\frac{x}{n}\right) - 1\right) \prod_{j=1}^3 D_n(x_j,t_j) + \prod_{j=1}^3 D_n(x_j,t_j) - \prod_{j=1}^3 D(x_j,t_j) \right|^2 dx \right)^{1/2} \geq$$
$$\left| \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left| a\left(\frac{x}{n}\right) - 1\right|^2 \prod_{j=1}^3 |D_n(x_j,t_j)|^2 dx \right)^{1/2} - \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left| \prod_{j=1}^3 D_n(x_j,t_j) - \prod_{j=1}^3 D(x_j,t_j) \right|^2 dx \right)^{1/2} \right|.$$

Le second terme converge vers 0 lorsque $n \to \infty$ donc reste borné à partir d'un certain rang. Quant au premier terme, après le changement de variable $x/n \to x$ et en procédant comme dans (3.2.4) dans la preuve du Théorème 7, il s'écrit

$$\int_{|x_1|>c} \tilde{F}_{[nt_1]+1}(x_1)dx_1 \int_{-\pi}^{\pi} |x_2|^{\alpha} \tilde{F}_{[nt_2]+1}(x_2)dx_2 \int_{-\pi}^{\pi} |x_3|^{\alpha} \tilde{F}_{[nt_3]+1}(x_3)dx_3$$

où $\tilde{F}$ a été défini en (3.2.5). D'après la propriété 3. de la Proposition 6 de la partie annexe 3.5, cette expression est supérieure à

$$\frac{1}{n}\left(\pi - c + \frac{\sin(([nt_1]+1)c)}{[nt_1]+1}\right) \int_{-\pi}^{\pi} |x_2|^{\alpha} \tilde{F}_{[nt_2]}(x_2)dx_2 \int_{-\pi}^{\pi} |x_3|^{\alpha} \tilde{F}_{[nt_3]}(x_3)dx_3.$$

Le dernier point de cette proposition nous fournit également un équivalent pour les deux intégrales ci-dessus et finalement pour n assez grand,

$$\int_{|x_1|>c} \tilde{F}_{[nt_1]}(x_1)dx_1 \int_{-\pi}^{\pi} |x_2|^{\alpha} \tilde{F}_{[nt_2]}(x_2)dx_2 \int_{-\pi}^{\pi} |x_3|^{\alpha} \tilde{F}_{[nt_3]}(x_3)dx_3 \geq \kappa n^{-2\alpha-1},$$

où $\kappa > 0$ est une constante dépendante de c et des t_i. Comme $\alpha < -1/2$, nous obtenons donc, à t fixé, que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \left| a\left(\frac{x}{n}\right) \prod_{j=1}^{3} D_n(x_j, t_j) - \prod_{j=1}^{3} D(x_j, t_j) \right|^2 dx = \infty.$$

□

Nous présentons deux types de résultats concernant la convergence des sommes partielles en dimension d quelconque. La première partie concerne des champs aléatoires construits à partir d'un filtre continu et non nul en $x = 0$. Nous venons de montrer que cette condition n'est pas suffisante pour obtenir la convergence souhaitée, nous supposerons donc que le filtre est de plus borné ou qu'il appartient à une classe restreinte de filtres non-bornés et continus en l'origine. Les sommes partielles de champs aléatoires construits à partir de tels filtres suivront un théorème central limite comme dans le (i) du Théorème 7.

Dans la seconde partie, nous nous intéressons à des champs aléatoires dont les sommes partielles ne vérifient pas un théorème central limite. Ce sont des champs construits à partir de filtres non continus en $x = 0$. Ces derniers seront supposés homogènes ou de type produit tensoriel de telle sorte que le champ aléatoire résultant sera à longue mémoire non-isotrope.

3.3.1 Champs aléatoires obtenus à partir d'un filtre continu à l'origine

Nous supposons d'abord que le filtre est continu en $x = 0$ et qu'il est borné sur $[-\pi, \pi]^d$. Dans ce cas les sommes partielles du champ X construit selon (3.1.2) convergent vers la même limite que celles de ξ, en particulier vers le drap Brownien lorsque ξ est un bruit blanc fort.

Théorème 8. *Soit $(\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire stationnaire vérifiant* **H 1**.

Soit $a \in L^2[-\pi,\pi]^d$, borné sur $[-\pi,\pi]^d$ et continu en 0 tel que $a(0)\neq 0$.

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ le champ aléatoire défini par (3.1.2), construit en filtrant ξ à travers a, alors

$$\frac{1}{n^{d/2}}\sum_{k_1=0}^{[nt_1]}\cdots\sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1,\ldots,k_d} \xrightarrow[n\to\infty]{fidi} a(0)B(t),$$

où B est la limite des sommes partielles de ξ introduit dans **H 1**.

Démonstration. Nous montrons la convergence en loi à t fixé, la convergence des lois fini-dimensionnelles s'en déduisant facilement. D'après le Théorème 6 nous devons montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\left|a\left(\frac{x}{n}\right)\prod_{j=1}^d D_n(x_j,t_j)-a(0)\prod_{j=1}^d D(x_j,t_j)\right|^2 dx=0. \tag{3.3.1}$$

Nous coupons le domaine d'intégration comme pour l'intégrale (3.2.3) dans la démonstration du Théorème 7 et nous utilisons les mêmes arguments jusqu'à l'étude de

$$\int_{[-\pi,\pi]^d}|a(x)-a(0)|^2\prod_{j=1}^d \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j)dx.$$

Pour $t_j>0$ fixé, $\tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j)$ est, à une constante près, une approximation forte de l'unité. D'après la Proposition 5 de l'Annexe 3.5, $\prod_{j=1}^d \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j)$ n'est plus qu'une approximation de l'unité au sens faible. Cependant, comme $|a(x)-a(0)|^2$ est continu en $x=0$ et borné sur $[-\pi,\pi]^d$, le Théorème 13 nous assure à travers (3.5.3) que

$$\lim_{n\to 0}\int_{[-\pi,\pi]^d}|a(x)-a(0)|^2\prod_{j=1}^d \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j)dx=0.$$

□

Nous nous plaçons à présent dans le cas de champs obtenus à partir d'un filtre continu en 0 mais non nécessairement borné.

Théorème 9. *Soit $(\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire stationnaire vérifiant* **H 1**. *Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ le champ aléatoire défini par (3.1.2).*

Nous supposons que le filtre $a\in L^2([-\pi,\pi]^d)$ est de la forme

$$a(x_1,\ldots,x_d)=g\left(\sum_{i=1}^d c_i x_i\right),$$

où les c_i sont des constantes réelles et où g est une fonction définie sur un ensemble compact de $\mathbb{R}$, de carré intégrable et continue en $x=0$ avec $g(0)\neq 0$.

Alors,

$$\frac{1}{n^{d/2}} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1,\ldots,k_d} \xrightarrow[n\to\infty]{fidi} a(0)B(t),$$

où B est la limite des sommes partielles de ξ introduit dans **H 1**.

Démonstration. Nous devons montrer (3.2.3). En suivant les mêmes arguments que dans la preuve du Théorème 7 nous sommes amenés à étudier

$$\int_{[-\pi,\pi]^d} |a(x)-a(0)|^2 \prod_{j=1}^d \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j)dx = \int_{[-\pi,\pi]^d} \left| g\left(\sum_{i=1}^d c_i x_i\right) - g(0)\right|^2 \prod_{j=1}^d \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j)dx.$$

Nous supposons sans perte de généralité que $c_1 \neq 0$ et nous effectuons le changement de variable $u = x_1 + \sum_{i=2}^d \frac{c_i}{c_1} x_i$, les autres variables restant inchangées. Ainsi,

$$\int_{[-\pi,\pi]^d} |a(x)-a(0)|^2 \prod_{j=1}^d \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j)dx \leq$$

$$\int_{[-\tau,\tau]} |g(c_1u)-g(0)|^2 \left(\int_{[-\pi,\pi]^{d-1}} \tilde{F}_{[nt_1]+1}\left(u - \sum_{i=2}^d \frac{c_i}{c_1}x_i\right) \prod_{j=2}^d \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j)dx_2\ldots dx_d\right) du,$$

où $[-\tau,\tau]$ est un ensemble compact contenant le domaine d'intégration de u. Soit

$$K_n(u) = \int_{[-\pi,\pi]^{d-1}} \tilde{F}_{[nt_1]+1}\left(u - \sum_{i=2}^d \frac{c_i}{c_1}x_i\right) \prod_{j=2}^d \tilde{F}_{[nt_j]+1}(x_j)dx_2\ldots dx_d,$$

nous devons montrer que lorsque $n\to\infty$,

$$\int_{[-\tau,\tau]} |g(c_1u)-g(0)|^2 K_n(u)du \longrightarrow 0. \tag{3.3.2}$$

Dans le cas particulier où pour tout i, $c_i = t_i = 1$, K_n est, à une constante multlipli-cative près, le produit de convolution $(d-1)^{\text{ème}}$ du noyau de Fejer F_n avec lui-même. D'après la Proposition 5 de la partie annexe 3.5, K_n est donc, à une constante près, une approximation de l'unité au sens fort sur $[-\tau,\tau]$.

Le Théorème 13 conclut alors la preuve puisque $|g(c_1u)-g(0)|^2$ est intégrable et continu en $u=0$.

Dans le cas général où les c_i (ou les t_i) ne sont pas tous égaux à 1, il est facile d'adapter le raisonnement précédent pour obtenir (3.3.2). □

3.3.2 Champs aléatoires obtenus à partir d'un filtre singulier à l'origine

Nous supposons dans un premier temps que le champ aléatoire X est issu d'un filtre de type produit tensoriel. Cette situation est en fait très similaire au cas $d=1$. Le produit tensoriel composant le filtre est supposé construit à partir de filtres suivant les hypothèses dans (i) ou dans (ii) du Théorème 7.

Théorème 10. *Soit $(\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire stationnaire vérifiant* **H1**. *Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ le champ aléatoire défini par (3.1.2) où le filtre a admet la forme*

$$a(x_1,\ldots,x_d)=\prod_{j=1}^{d}a_j(x_j), \tag{3.3.3}$$

expression dans laquelle
- *ou bien $a_j\in L^2([-\pi,\pi])$ est continu en 0 avec $a_j(0)\neq 0$*
- *ou bien $a_j(x)$ est équivalent en 0 à $\tilde a_j(x)$ où $\tilde a_j$ est homogène de degré $\alpha_j\in\,]-1/2,0[$ garantissant $a_j\in L^2([-\pi,\pi])$.*

En notant $\mathcal{J}$ l'ensemble des indices j tels que a_j est équivalent en 0 à une fonction homogène de degré α_j et en notant $\mathcal{I}$ les autres indices,

$$\frac{1}{n^{\left(d/2-\sum_{j\in\mathcal{J}}\alpha_j\right)}}\sum_{k_1=0}^{[nt_1]}\cdots\sum_{k_d=0}^{[nt_d]}X_{k_1,\ldots,k_d}\xrightarrow[n\to\infty]{fidi}\left(\prod_{j\in\mathcal{I}}a_j(0)\right)\,I\left(\prod_{j\in\mathcal{J}}\tilde a_j(x_j)\prod_{j=1}^{d}D(x_j,t_j)\right),$$

où I est l'application linéaire définie dans le Théorème 6.

Remarque 19. Si ξ est un bruit blanc fort, I peut alors s'écrire comme une intégrale stochastique (voir la remarque 14). Dans ce cas et lorsque pour tout j, $\tilde a_j(x)=|x|^{\alpha_j}$ avec $-1/2<\alpha_j<0$, la limite des sommes partielles est le drap Brownien fractionnaire

$$\frac{1}{n^{\left(d/2-\sum_{j=1}^{d}\alpha_j\right)}}\sum_{k_1=0}^{[nt_1]}\cdots\sum_{k_d=0}^{[nt_d]}X_{k_1,\ldots,k_d}\xrightarrow[n\to\infty]{fidi}\int_{\mathbb{R}^d}\prod_{j=1}^{d}\frac{e^{it_jx_j}-1}{ix_j|x_j|^{-\alpha_j}}dW_0(x),$$

où W_0 est la mesure spectrale associée au bruit blanc gaussien.

Preuve du Théorème 10. La convergence des lois fini-dimensionnelles se déduit aisément de la convergence en loi à t fixé. Nous appliquons le Théorème 6 en montrant que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\left|n^{(\sum_{j\in\mathcal{J}}\alpha_j)}\prod_{j=1}^{d}a_j\left(\frac{x_j}{n}\right)D_n(x_j,t_j)-\prod_{j\in\mathcal{I}}a_j(0)\prod_{j\in\mathcal{J}}\tilde a_j(x_j)\prod_{j=1}^{d}D(x_j,t_j)\right|^2dx=0.$$

Ce résultat est déjà montré en dimension $d=1$ dans le Théorème 7 et il n'est pas difficile de l'étendre par récurrence pour tout d en s'appuyant sur la décomposition :

$$AB-CD=(A-C)(B-D)+(A-C)D+(B-D)C.$$

□

Le Théorème 11 ci-dessous concerne des champs à longue mémoire non-isotrope. Ils sont construits à partir d'un filtre singulier sur tout un sous-espace linéaire de $[-\pi,\pi]^d$.

Théorème 11. *Soit $(\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire stationnaire vérifiant* **H1**. *Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ le champ aléatoire défini par (3.1.2) où a est de la forme :*

$$a(x) = \left|\sum_{i=1}^{d} c_i x_i\right|^{\alpha},$$

où $-1/2 < \alpha < 0$ et où les c_i sont des constantes réelles. Alors

(i) Si $d \leq 3$,

$$\frac{1}{n^{d/2-\alpha}} \sum_{k_1=0}^{[nt_1]} \cdots \sum_{k_d=0}^{[nt_d]} X_{k_1,\ldots,k_d} \xrightarrow[n\to\infty]{fidi} I\left(a(x)\prod_{i=1}^{d} D(x_i,t_i)\right), \tag{3.3.4}$$

où I est l'application linéaire définie dans le Théorème 6.

(ii) Si $d \geq 4$ et si $-\frac{1}{d-2} < 2\alpha < 0$ alors la convergence (3.3.4) a encore lieu.

Démonstration. Nous devons montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \left|\sum_{i=1}^{d} c_i x_i\right|^{2\alpha} \left|\prod_{i=1}^{d} D_n(x_i,t_i) - \prod_{i=1}^{d} D(x_i,t_i)\right|^2 dx = 0.$$

Nous découpons le domaine d'intégration de cette intégrale comme suit :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \left|\sum_{i=1}^{d} c_i x_i\right|^{2\alpha} \left|\prod_{i=1}^{d} D_n(x_i,t_i) - \prod_{i=1}^{d} D(x_i,t_i)\right|^2 dx \\
&\qquad = \int_{[-n\pi,n\pi]^d} \left|\sum_{i=1}^{d} c_i x_i\right|^{2\alpha} \left|\prod_{i=1}^{d} D_n(x_i,t_i) - \prod_{i=1}^{d} D(x_i,t_i)\right|^2 dx \\
&\qquad\qquad + \int_{\cup_i\{|x_i|>n\pi\}} \left|\sum_{i=1}^{d} c_i x_i\right|^{2\alpha} \prod_{i=1}^{d} |D(x_j,t_j)|^2 dx.
\end{aligned}$$

La dernière intégrale converge vers 0 ; pour la première, le changement de variables $x/n \to x$ conduit à :

$$\begin{aligned}
&\int_{[-n\pi,n\pi]^d} \left|\sum_{i=1}^{d} c_i x_i\right|^{2\alpha} \left|\prod_{i=1}^{d} D_n(x_i,t_i) - \prod_{i=1}^{d} D(x_i,t_i)\right|^2 dx \\
&\qquad = n^{2\alpha+d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \left|\sum_{i=1}^{d} c_i x_i\right|^{2\alpha} \left|\prod_{i=1}^{d} D_n(nx_i,t_i) - \prod_{i=1}^{d} D(nx_i,t_i)\right|^2 dx.
\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Définissons à présent l'ensemble suivant :

$$\mathcal{A}_n = \left\{ x \in [-\pi,\pi]^d \; ; \; \left|\sum_{i=1}^{d} c_i x_i\right|^{2\alpha} \geq n^{\gamma} \text{ où } \gamma < 1-2\alpha \right\}.$$

En notant $\overline{\mathcal{A}_n}$ le complémentaire de $\mathcal{A}_n$ dans $[-\pi,\pi]^d$, nous découpons l'ensemble d'intégration de (3.3.5) selon $\mathcal{A}_n$ et $\overline{\mathcal{A}_n}$. D'après le Lemme 12 de la section 3.4

$$\int_{[-n\pi,n\pi]^d} \left|\prod_j D_n(x_j,t_j) - \prod_j D(x_j,t_j)\right|^2 dx = O(n^{-1}),$$

donc

$$\int_{[-\pi,\pi]^d} \left|\prod_j D_n(nx_j,t_j) - \prod_j D(nx_j,t_j)\right|^2 dx = O(n^{-d-1}). \tag{3.3.6}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} n^{2\alpha+d} &\int_{\overline{\mathcal{A}_n}} \left|\sum_{i=1}^d c_i x_i\right|^{2\alpha} \left|\prod_{i=1}^d D_n(nx_i,t_i) - \prod_{i=1}^d D(nx_i,t_i)\right|^2 dx \\ &\leq n^{2\alpha+d+\gamma} \int_{[-\pi,\pi]^d} \left|\prod_{i=1}^d D_n(nx_i,t_i) - \prod_{i=1}^d D(nx_i,t_i)\right|^2 dx = O(n^{2\alpha-1+\gamma}). \end{aligned}$$

Comme $\gamma < 1-2\alpha$, ce terme tend vers 0 lorsque $n \to \infty$.

Il reste à étudier l'intégrale (3.3.5) sur $\mathcal{A}_n$. D'après (3.2.11)

$$\begin{aligned} n^{2\alpha+d} &\int_{\mathcal{A}_n} \left|\sum_{i=1}^d c_i x_i\right|^{2\alpha} \left|\prod_{i=1}^d D_n(nx_i,t_i) - \prod_{i=1}^d D(nx_i,t_i)\right|^2 dx \\ &\leq O(n^{2\alpha+d-2}) \int_{\mathcal{A}_n} \left|\sum_{i=1}^d c_i x_i\right|^{2\alpha} dx. \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Après un changement de variables,

$$\int_{\mathcal{A}_n} \left|\sum_{i=1}^d c_i x_i\right|^{2\alpha} dx = \int_{-n^{\frac{\gamma}{2\alpha}}}^{n^{\frac{\gamma}{2\alpha}}} |u|^{2\alpha} du \int_{[-\pi,\pi]^{d-1}} dx_2 \ldots dx_d = c\; n^{\frac{\gamma}{2\alpha}(2\alpha+1)}.$$

Afin d'obtenir la convergence vers 0 du terme de droite dans (3.3.7), il suffit que

$$\int_{\mathcal{A}_n} \left|\sum_{i=1}^d \lambda_i x_i\right|^{2\alpha} dx = o(n^{2-d-2\alpha}),$$

ce qui est satisfait lorsque

$$\frac{\gamma}{2\alpha}(2\alpha+1) - 2 + d + 2\alpha < 0. \tag{3.3.8}$$

Si $d = 3$,

$$\frac{\gamma}{2\alpha}(2\alpha+1) + 2\alpha + 1 < 0 \Leftrightarrow \gamma > -2\alpha$$

et (3.3.4) est prouvé en choisissant γ dans $]-2\alpha;\ 1-2\alpha[$.

Si $d \geq 4$, la condtion (3.3.8) est vérifiée si

$$\gamma > -2\alpha\frac{d+2\alpha-2}{2\alpha+1},$$

ce qui est possible dès que $-\frac{1}{d-2} < 2\alpha < 0$ compte tenu de la condition initiale $\gamma < 1-2\alpha$. □

3.4 Démonstration du théorème 6

Nous commençons par un lemme établissant la mesurabilité du champ B défini dans l'hypothèse **H 1**.

Lemme 11. *Sous* **H 1***, le champ aléatoire B est mesurable et séparable.*

La démonstration de ce lemme est reporté à la section 3.4.1.

La preuve du théorème 6 s'inspire de celle de Lang et Soulier (2000) en dimension $d=1$.

Définissons le champ B_n sur $\mathbb{R}^d$ par :

$$B_n(t_1,\ldots,t_d) = \int_{[-n\pi,\ n\pi]^d} \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{it_jx_j}-1}{ix_j} dW_n(x_1,\ldots,x_d). \tag{3.4.1}$$

L'intégrale est bien définie car l'intégrand, étant proportionnel à la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ de $\mathbf{I}_{[0,t_1]\times\cdots\times[0,t_d]}$, est de carré integrable.

L'idée de la démonstration est de définir l'intégrale stochastique par rapport à B_n dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, puis de transformer son expression afin de pouvoir utiliser des arguments de convergence et faire apparaître le champ B. Ceci nous conduira à la définition de l'application linéaire I.

La mesure de contrôle de W_n est $f_n(x) = f_\xi(n^{-1}x),\ x \in [-n\pi, n\pi]^d$; elle est donc, comme f_ξ, bornée par M.

Pour $t_j \in \mathbb{R}$ et $x_j \in \mathbb{R}$, on rappelle que $D(t_j,x_j) = \frac{e^{it_jx_j}-1}{ix_j}$ si $x_j \neq 0$ et $D(t_j,0) = t_j$. On a

$$\begin{aligned} E(B_n(t_1,\ldots,t_d)^2) &= \int_{[-n\pi,\ n\pi]^d} \prod_{j=1}^{d} |D(t_j,x_j)|^2 f_n(x)dx \\ &\leq M\prod_{j=1}^{d}\int_{-\infty}^{\infty} |D(t_j,x_j)|^2 dx_j \\ &\leq M\prod_{j=1}^{d} 4|t_j| \int_0^{\infty} \frac{1-\cos u}{u^2} du \leq c\prod_{j=1}^{d}|t_j|, \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

où c est une constante strictement positive.

Montrons dans un premier temps la convergence de B_n vers B au sens des répartitions finies. On peut réecrire S_n^ξ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
S_n^\xi(t) &= n^{-d/2}\sum_{k=0}^{[nt_1]}\cdots\sum_{k_d=0}^{[nt_d]}\int_{[-\pi,\ \pi]^d} e^{i<k;\ x>}dW(x)\\
&= n^{-d}\sum_{k=0}^{[nt_1]}\cdots\sum_{k_d=0}^{[nt_d]}\int_{[-n\pi,\ n\pi]^d} e^{i<k;\ x/n>}\ dW_n(x)\\
&= \int_{[-n\pi,\ n\pi]^d}\prod_{j=1}^{d} n^{-1}\left(\sum_{k_j=0}^{[nt_j]} e^{ik_jx_j/n}\right)\ dW_n(x)\\
&= \int_{[-n\pi,\ n\pi]^d}\prod_{j=1}^{d} D_n(x_j,\ t_j)\ dW_n(x).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$E\left(B_n(t_1,\ldots,t_d)-S_n^\xi(t_1,\ldots,t_d)\right)^2 = \int_{[-n\pi,\ n\pi]^d}\left|\prod_{j=1}^{d}D(x_j,t_j)-\prod_{j=1}^{d}D_n(x_j,t_j)\right|^2 f_n(x)dx. \tag{3.4.3}$$

La suite de fonctions f_n étant uniformément bornée par M, la convergence vers 0 de (3.4.3) découle du lemme 12 ci-dessous. Cette convergence et l'hypothèse **H 1** impliquent la convergence de B_n vers B au sens des répartitions finies.

Lemme 12. *Nous avons les taux de convergence suivants :*

$$\sup_{x\in[-n\pi,n\pi]^d}\left|\prod_{j=1}^{d}D_n(x_j,t_j)-\prod_{j=1}^{d}D(x_j,t_j)\right|^2 \le O(n^{-2}) \tag{3.4.4}$$

$$\int_{[-n\pi,\ n\pi]^d}\left|\prod_{j=1}^{d}D_n(x_j,t_j)-\prod_{j=1}^{d}D(x_j,t_j)\right|^2 dx \le O(n^{-1}) \tag{3.4.5}$$

Démonstration du Lemme 12. En dimension $d=1$, à t fixé et pour tout $|x|<n\pi$:

$$\begin{aligned}
|D_n(x,t)-D(x,t)| &= \left|\frac{e^{ix([tn]+1)/n}-1}{n(e^{ix/n}-1)}-\frac{e^{itx}-1}{ix}\right|\\
&\le \left|(e^{ix([tn]+1)/n}-1)\left(\frac{1}{n(e^{ix/n}-1)}-\frac{1}{ix}\right)\right| + \left|\frac{e^{ix([tn]+1)/n}-e^{itx}}{ix}\right|\\
&\le 2\left|\frac{1}{n(e^{ix/n}-1)}-\frac{1}{ix}\right| + \left|\frac{e^{ix([tn]+1)/n}-e^{itx}}{ix}\right|.
\end{aligned}$$

D'une part,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n(e^{i\frac{x}{n}}-1)}-\frac{1}{ix}\right|^2 &= \frac{|ix-n(e^{i\frac{x}{n}}-1)|^2}{4n^2x^2\sin^2(\frac{x}{2n})}\\ &= \frac{(x-n\sin(\frac{x}{n}))^2+n^2\sin^4(\frac{x}{2n})}{4n^2x^2\sin^2(\frac{x}{2n})}\\ &= \frac{\sin^2(\frac{x}{2n})}{x^2}+\frac{(\frac{x}{n}-\sin(\frac{x}{n}))^2}{4x^2\sin^2(\frac{x}{2n})}.\end{aligned}$$

Le premier terme de la somme est inférieur à $1/(4n^2)$ et le second est une fonction paire de $u=x/n$ qui appartient à $[-\pi,\pi]$; de plus,

$$\frac{(u-\sin(u))^2}{4n^2u^2\sin^2(\frac{u}{2})}\leq\frac{1}{n^2}\,\frac{1\wedge u^4}{4\sin^2(\frac{u}{2})}\leq c\frac{1}{n^2}\qquad\forall u\in[0,\pi].$$

Ainsi

$$\left|\frac{1}{n(e^{i\frac{x}{n}}-1)}-\frac{1}{ix}\right|^2\leq c\frac{1}{n^2}. \tag{3.4.6}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^{ix\frac{([tn]+1)}{n}}-e^{itx}}{ix}\right|^2 &= \frac{\left|e^{ix\left(\frac{([tn]+1)}{n}-t\right)}-1\right|^2}{x^2}\\ &= \frac{4}{x^2}\sin^2\left(\frac{x}{2}\left(\frac{[tn]+1}{n}-t\right)\right)\\ &\leq\left|\frac{[tn]+1}{n}-t\right|^2=O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned} \tag{3.4.7}$$

Ainsi par (3.4.7) et (3.4.6)

$$\sup_{x\in[-n\pi,n\pi]}|D_n(x,t)-D(x,t)|^2\leq O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{3.4.8}$$

Par ailleurs, f_n étant borné,

$$\int_{-n\pi}^{n\pi}|D_n(t,x)-D(t,x)|^2f_n(x)dx\leq O\left(\frac{1}{n^2}\right)\int_{-n\pi}^{n\pi}f_n(x)dx\leq O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.4.9}$$

Les inégalités (3.4.8) et (3.4.9) prouvent le Lemme 12 pour $d=1$. Maintenant, lorsque $d=2$,

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in[-n\pi,n\pi]^2}|D_n(x_1,t_1)D_n(x_2,t_2)-D(x_1,t_1)D(x_2,t_2)|^2\\ &\leq 3\sup_{x\in[-n\pi,n\pi]^2}|D_n(x_1,t_1)-D(x_1,t_1)|^2\sup_{x\in[-n\pi,n\pi]^2}|D_n(x_2,t_2)-D(x_2,t_2)|^2\\ &\quad+3\sup_{x\in[-n\pi,n\pi]^2}|D_n(x_1,t_1)-D(x_1,t_1)|^2\sup_{x\in[-n\pi,n\pi]^2}|D(x_2,t_2)|^2\\ &\quad+3\sup_{x\in[-n\pi,n\pi]^2}|D_n(x_2,t_2)-D(x_2,t_2)|^2\sup_{x\in[-n\pi,n\pi]^2}|D(x_1,t_1)|^2.\end{aligned}$$

A t fixé, $D(.,t)$ est borné et la première inégalité du Lemme 12 découle de (3.4.8). Il est aisé d'étendre de la même manière le résultat au cas $d > 2$.

La preuve de (3.4.5) est similaire : il suffit de changer la norme sup par la norme L^1. □

Revenons à la démonstration du théorème 6.

Pour toute fonction Φ de $L^2(\mathbb{R}^d)$, on note $\hat{\Phi}$ sa transformée de Fourier définie de telle sorte que la transformation $\Phi \mapsto \hat{\Phi}$ soit une isométrie. Considérons l'application linéaire de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\Omega)$ qui à Φ associe $(2\pi)^{d/2}\int \hat{\Phi} dW_n$.

En applicant cette dernière à $\Phi = \mathbf{I}_{[0,t_1]\times\cdots\times[0,t_d]}$ et en interprétant $B_n(t_1,\ldots,t_d)$ comme $B_n([0,t_1]\times\cdots\times[0,t_d])$, on remarque que (3.4.1) permet d'écrire l'application linéaire que nous venons de définir comme une intégrale stochastique par rapport à B_n. Nous posons donc :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t) dB_n(t) = (2\pi)^{d/2} \int_{[-n\pi,\ n\pi]^d} \hat{\Phi}(x) dW_n(x), \tag{3.4.10}$$

où $x = (x_1,\ldots,x_d)$ et $t = (t_1,\ldots,t_d)$.

Nous nous intéressons à la convergence en loi de cette intégrale.

On se restreint dans un premier temps au cas où Φ est différentiable à support compact pour réecrire $\hat{\Phi}$. Dans l'expression

$$\hat{\Phi}(x_1,\ldots,x_d) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(t_1,\ldots,t_d) e^{it_1x_1}\ldots e^{it_dx_d} dt_1\ldots dt_d,$$

on effectue d intégrations par parties en dérivant Φ et en intégrant le reste en t_1, puis en t_2, etc. jusqu'à t_d (à chaque étape on change l'ordre d'intégration en utilisant Fubini). La première étape est la suivante :

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}(x_1,\ldots,x_d) &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left[\Phi(t_1,\ldots,t_d)\frac{e^{i(t_1x_1+\cdots+t_dx_d)}}{ix_1}\right]_{t_1\in\mathbb{R}} dt_2\ldots dt_d \\ &- (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial\Phi(t_1,\ldots,t_d)}{\partial t_1}\left(\frac{e^{i(t_1x_1+\cdots+t_dx_d)}}{ix_1} + (-1)^{d-(d-1)}\frac{e^{i(t_2x_2+\cdots+t_dx_d)}}{ix_1}\right) dt_1,\ldots,t_d,\end{aligned}$$

le premier terme est nul car Φ est à support compact et l'on a

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}(x_1,\ldots,x_d) &= -(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial\Phi(t)}{\partial t_1}\left(\frac{e^{i(t_1x_1+\cdots+t_dx_d)}}{ix_1} - \frac{e^{i(t_2x_2+\cdots+t_dx_d)}}{ix_1}\right) dt \\ &= -(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial\Phi(t)}{\partial t_1}\frac{e^{it_1x_1}-1}{ix_1} e^{i(t_2x_2+\cdots+t_dx_d)} dt.\end{aligned}$$

L'intégration par parties suivante nous donne :

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}(x) &= (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial\Phi(t)}{\partial t_1\partial t_2}\left(\frac{e^{i(t_1x_1+\cdots+t_dx_d)}}{ix_1ix_2} - \frac{e^{i(t_2x_2+\cdots+t_dx_d)}}{ix_1ix_2}\right. \\ &\qquad\left. + \frac{e^{i(t_3x_3+\cdots+t_dx_d)}}{ix_1ix_2} - \frac{e^{it_1x_1}e^{i(t_3x_3+\cdots+t_dx_d)}}{ix_1ix_2}\right) dt \\ &= (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial\Phi(t)}{\partial t_1\partial t_2}\frac{e^{it_1x_1}-1}{ix_1}\frac{e^{it_2x_2}-1}{ix_2} e^{i(t_3x_3+\cdots+t_dx_d)} dt.\end{aligned}$$

De même à l'étape p, on choisit une primitive en t_p avec 2^{p-1} termes constants par rapport à t_p. Ces termes constants sont tous les produits possibles entre $\frac{e^{it_{p+1}x_{p+1}+\cdots+it_dx_d}}{ix_p}$ d'une part et 1, $e^{it_1x_1},\ldots,e^{it_{p-1}x_{p-1}}$ d'autre part, affectés du signe $(-1)^{d-q}$ si q est le nombre de t_i distincts présents dans le produit. Tous ces termes contiennent $e^{it_{p+1}x_{p+1}}$ et on peut passer à l'intégration par parties suivante concernant t_{p+1} qui factorisera $1/ix_{p+1}$. Finalement à la dernière étape, tous les termes intégrés représentent une somme de $(1+\sum_{p=1}^{d}2^{p-1})$ termes, soit 2^d termes qui correspondent au développement de $\prod_{j=1}^{d}\frac{e^{it_jx_j}-1}{ix_j}$.

Ainsi dans le cas où Φ est différentiable à support compact, on a

$$\hat{\Phi}(x_1,\ldots,x_d)=(-1)^d(2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial\Phi(t_1,\ldots,t_d)}{\partial t_1\ldots\partial t_d}\prod_{j=1}^{d}\frac{e^{it_jx_j}-1}{ix_j}dt_1\ldots dt_d.$$

En utilisant le théorème de Fubini stochastique, qui se démontre dans notre cas comme dans le lemme 3 de Lang et Soulier (2000), on peut réecrire l'intégrale (3.4.10) de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d}\Phi(t)dB_n(t)=(2\pi)^{d/2}\int_{[-n\pi,\ n\pi]^d}\hat{\Phi}(x)dW_n(x)\\
&=(2\pi)^{d/2}\int_{[-n\pi,\ n\pi]^d}\left((-1)^d(2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial\Phi(t_1,\ldots,t_d)}{\partial t_1\ldots\partial t_d}\prod_{j=1}^{d}\frac{e^{it_jx_j}-1}{ix_j}dt\right)dW_n(x)\\
&=(-1)^d\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial\Phi(t_1,\ldots,t_d)}{\partial t_1\ldots\partial t_d}\left(\int_{[-n\pi,\ n\pi]^d}\prod_{j=1}^{d}\frac{e^{it_jx_j}-1}{ix_j}dW_n(x)\right)dt\\
&=(-1)^d\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial\Phi(t_1,\ldots,t_d)}{\partial t_1\ldots\partial t_d}B_n(t_1,\ldots,t_d)dt_1\ldots dt_d
\end{aligned}\tag{3.4.11}$$

Nous utilisons à présent un lemme qui généralise le théorème de Grinblatt (1976).

Lemme 13. *Soit les processus mesurables $(Y_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ et $Y(t)$ définis pour $t\in K$, K étant un compact de $\mathbb{R}^d$. Supposons que la suite $(Y_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens des répartitions finies vers $Y(t)$. Si $E|Y_n(t)|$ est uniformément borné par rapport à $n\in\mathbb{N}$ et $t\in K$, et si $E|Y_n(t)|\to E|Y(t)|$ pour tout $t\in K$ lorsque $n\to\infty$, alors pour toute fonctionnelle H continue sur $L^1(K)$, $H(Y_n)$ converge en loi vers $H(Y)$.*

Sa démonstration est donnée dans la partie 3.4.2.

D'après (3.4.2), $E(B_n^2(t))$ est uniformément borné en n et t, donc $E|B_n(t)|$ est uniformément bornée ; en outre la suite B_n est uniformément intégrable. La convergence en loi de $B_n(t)$ vers $B(t)$ donnée par le lemme 12 jointe à l'uniforme intégrabilité de B_n nous donne la convergence de $E|B_n(t)|$ vers $E|B(t)|$. D'après le lemme 11, B est mesurable et on peut appliquer le lemme 13 avec $Y_n=B_n$ et K un compact de $\mathbb{R}^d$ à la fonctionnelle

$$H(g)=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial\Phi(t_1,\ldots,t_d)}{\partial t_1\ldots\partial t_d}g(t_1,\ldots,t_d)dt_1\ldots dt_d,$$

où Φ est différentiable à support compact. Cette fonctionnelle H est bien continue sur $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Ainsi, pour toute Φ différentiable à support compact, $H(B_n)$ converge en loi vers $H(B)$. Donc d'après (3.4.11), $\int \Phi dB_n$ converge en loi vers $(-1)^d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t_1 \ldots \partial t_d} B(t)dt$. Notons I_B l'application linéaire :

$$I_B(\Phi) = (-1)^d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t_1 \ldots \partial t_d} B(t)dt.$$

L'ensemble des applications différentiables à support compact est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et l'application linéaire $I_B(\Phi)$ est bornée puisque

$$\begin{aligned} E\left(I_B(\Phi)\right)^2 &= E\left(\int_{\mathbb{R}^d} (-1)^d \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t_1 \ldots \partial t_d} B(t)dt\right)^2 \\ &\leq \underline{\lim}\ E\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t_1 \ldots \partial t_d} B_n(t)dt\right)^2 \\ &\leq \underline{\lim}\ E\left((2\pi)^{d/2} \int_{[-n\pi,\ n\pi]^d} \hat{\Phi} dW_n\right)^2 \\ &\leq (2\pi)^d M ||\hat{\Phi}||_2^2 = (2\pi)^d M ||\Phi||_2^2. \end{aligned} \tag{3.4.12}$$

En vertu du théorème de Hahn-Banach, nous pouvons donc étendre I_B à $L^2(\mathbb{R}^d)$ et (3.4.12) reste valide pour toute fonction Φ de $L^2(\mathbb{R}^d)$:

$$E\left(I_B(\Phi)\right)^2 \leq (2\pi)^d M ||\Phi||_2^2. \tag{3.4.13}$$

Nous définissons à présent l'application I du théorème par

$$I(\Psi) = I_B(\check{\Psi}), \quad \forall \Psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

où $\check{\Psi}$ est la transformée de Fourier inverse de Ψ.

La propriété (ii) du théorème provient de ce que

$$E\left(I(\Psi)\right)^2 = E\left(I_B(\check{\Phi})\right)^2 \leq (2\pi)^d M ||\check{\Psi}||_2^2 = (2\pi)^d M ||\Psi||_2^2.$$

On s'intéresse maintenant au résultat de convergence (i) du théorème. On s'appuie sur le théorème 4.2 de Billingsley (1968) qui affirme que lorsque les hypothèses suivantes sont vérifiées (toutes les variables aléatoires qui interviennent étant à valeurs dans le même espace séparable métrisé par ρ) :

(i) pour tout k, $X_{k,n}$ converge en loi vers X_k

(ii) X_k converge en loi vers X

(iii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{k\to\infty} \overline{\lim}_{n\to\infty} P\{\rho(X_{k,n},\ Y_n) \geq \varepsilon\} = 0$,

alors Y_n converge en loi vers X.

Soit une fonction Ψ quelconque de $L^2(\mathbb{R}^d)$, on considère une suite de fonctions Ψ_k tel que $\hat{\Psi}_k$ soit différentiable à support compact, convergeant dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ vers Ψ. On a alors :

(i) $\int \Psi_k dW_n$ converge en loi vers $I(\Psi_k)$ d'après le lemme 13,
(ii) $E\left(I(\Psi_k) - I(\Psi)\right)^2 \leq (2\pi)^d M||\Psi_k - \Psi||_2^2 \longrightarrow 0$ quand $k \to \infty$
(iii) $E(\int \Psi_k dW_n - \int \Psi dW_n)^2 \leq (2\pi)^d M||\Psi_k - \Psi||_2^2$, donc

$$\lim_{k\to\infty} \overline{\lim}_{n\to\infty} E(\int \Psi_k dW_n - \int \Psi dW_n)^2 = 0.$$

En prenant $X_{k,n} = \int \Psi_k dW_n$, $X_k = I(\Psi_k)$, $X = I(\Psi)$ et $Y_n = \int \Psi dW_n$, toutes à valeurs réelles, on remarque que les trois conditions de Billingsley sont respectivement impliquées par les trois points précédents, et donc pour toute fonction Ψ de $L^2(\mathbb{R}^d)$, $\int \Psi dW_n$ converge en loi vers $I(\Psi)$.

Si l'on considère enfin une suite de fonctions Ψ_n qui converge vers Ψ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, on obtient directement que $\int \Psi_n dW_n$ converge en loi vers $I(\Psi)$ et la propriété (i) du Théorème 6 est montrée.

En particulier pour $\check{\Psi} = \mathbf{I}_{[0,t_1]\times\cdots\times[0,t_d]}$

$$I\left(\prod_{j=1}^{d} \frac{e^{it_j x_j} - 1}{ix_j}\right) = \lim_{n\to\infty} \int \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{it_j x_j} - 1}{ix_j} dW_n(x) = \lim_{n\to\infty} B_n(t) = B(t),$$

qui est la propriété (iii) du Théorème 6.

Montrons enfin (iv) concernant le cas où ξ est supposé être un bruit blanc fort dont nous imposons, pour simplifier, la variance égale à 1. Dans ce cas $B(t)$ est le drap Brownien de fonction de covariance $\sigma(s,t) = \prod_{j=1}^{d} t_j \wedge s_j$. D'après le (ii) du théorème, la norme de l'application I est inférieure à 1 car $M = (2\pi)^{-d}$; par ailleurs cette valeur est atteinte au point particulier considéré en (iii). Ainsi I est une isométrie. Soit W_0 la mesure définie pour tout ensemble A par $W_0(A) = I(\mathbf{I}_A)$. C'est une mesure orthogonale car I, en tant qu'isométrie, conserve le produit scalaire. De plus

$$0 \leq E\left(W_0(A)\right) \leq \liminf_{n\to\infty} E\left(W_n(A)\right) = 0.$$

Donc I peut dans ce cas être considérée comme une intégrale stochastique par rapport à W_0 :

$$\forall \Phi \in L^2(\mathbb{R}^d)\ I(\Phi) = \int \Phi dW_0.$$

Dans ce cas, nous remarquons que le (iii) est en fait la représentation harmonisable du drap brownien et nous en déduisons que W_0 est la mesure spectrale associée au bruit blanc gaussien.

3.4.1 Démonstration du lemme 11

Si le champ $(B(t))_{t\in\mathbb{R}^d}$ est continu en probabilité presque partout, c'est à dire si pour presque tout $t \in \mathbb{R}^d$, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{s\to t} P\left(|B(s) - B(t)| > \varepsilon\right) = 0, \tag{3.4.14}$$

alors il existe une version mesurable et séparable de $B(t)$ (cf par exemple Gikhman et Skorokhod (1965)).

D'après **H1** la distribution jointe de $(S_n^\xi(s), S_n^\xi(t))$ converge vers celle de $(B(s), B(t))$. Ainsi, comme l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y-x| > \varepsilon\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$,

$$P\left(|B(s)-B(t)| > \varepsilon\right) \leq \liminf_{n\to\infty} P\left(\left|S_n^\xi(s) - S_n^\xi(t)\right| > \varepsilon\right). \tag{3.4.15}$$

Evaluons $E(S_n^\xi(s) - S_n^\xi(t))^2$.

$$E(S_n^\xi(s) - S_n^\xi(t))^2 = E\left(n^{-d/2}\sum_{k_1=0}^{[ns_1]}\cdots\sum_{k_d=0}^{[ns_d]}\xi_k - n^{-d/2}\sum_{k_1=0}^{[nt_1]}\cdots\sum_{k_d=0}^{[nt_d]}\xi_k\right)^2.$$

On décompose les ensembles de sommation de la façon suivante

$$\prod_{j=1}^{d}\Big\{0,\ldots,[ns_j]\Big\} = \prod_{j=1}^{d}\Big\{0,\ldots,[nt_j]\wedge[ns_j]\Big\} \cup \Big\{[nt_j]\wedge[ns_j]+1,\ldots,[ns_j]\Big\},$$

en posant $\Big\{[ns_j]+1,[ns_j]\Big\} = \emptyset$. En développant, cela donne

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{d}\Big\{0,\ldots,[ns_j]\Big\} = &\bigcup_{l=1}^{d-1}\bigcup_{C_d^l}\prod_{j\in C_d^l}\Big\{0,\ldots,[nt_j]\wedge[ns_j]\Big\}\prod_{j\in\overline{C_d^l}}\Big\{[nt_j]\wedge[ns_j]+1,\ldots,[ns_j]\Big\}\\ &\bigcup\prod_{j=1}^{d}\Big\{[nt_j]\wedge[ns_j]+1,\ldots,[ns_j]\Big\}\bigcup\prod_{j=1}^{d}\Big\{0,\ldots,[nt_j]\wedge[ns_j]\Big\}\end{aligned}$$

où C_d^l parcourt l'ensemble des l-uplets de $\{1,\ldots,d\}$ et où $\overline{C_d^l}$ est le complémentaire de C_d^l dans $\{1,\ldots,d\}$.

On peut à présent réecrire $S_n^\xi(s) - S_n^\xi(t)$ en utilisant cette décomposition et en remarquant que les termes associés à la dernière union ci-dessus s'annulent. Nous convenons dans les sommes qui suivent que lorsque $l=0$, la sommation se fait uniquement sur $j' \in \overline{C}_d^0 = \{1,\ldots,d\}$.

$$S_n^\xi(s) - S_n^\xi(t) = \frac{1}{n^{d/2}}\sum_{l=0}^{d-1}\sum_{C_d^l}\sum_{\substack{j\in C_d^l\\ j'\in\overline{C}_d^l}}\left(\sum_{k_j=0}^{[nt_j]\wedge[ns_j]}\sum_{k_{j'}=[nt_{j'}]\wedge[ns_{j'}]+1}^{[ns_{j'}]}\xi_k - \sum_{k_j=0}^{[nt_j]\wedge[ns_j]}\sum_{k_{j'}=[nt_{j'}]\wedge[ns_{j'}]+1}^{[nt_{j'}]}\xi_k\right).$$

En utilisant la convexité de $x \mapsto x^2$, il vient

$$E\left(S_n^\xi(s)-S_n^\xi(t)\right)^2 \le 2(2^d-1)\sum_{l=0}^{d-1}\sum_{C_d^l} E\left(n^{-d/2}\sum_{\substack{j\in C_d^l\\ j'\in\overline{C}_d^l}}\sum_{k_j=0}^{[nt_j]\wedge[ns_j]}\sum_{k_{j'}=[nt_{j'}]\wedge[ns_{j'}]+1}^{[ns_{j'}]}\xi_k\right)^2$$

$$+\,2(2^d-1)\sum_{l=0}^{d-1}\sum_{C_d^l} E\left(n^{-d/2}\sum_{\substack{j\in C_d^l\\ j'\in\overline{C}_d^l}}\sum_{k_j=0}^{[nt_j]\wedge[ns_j]}\sum_{k_{j'}=[nt_{j'}]\wedge[ns_{j'}]+1}^{[nt_{j'}]}\xi_k\right)^2.$$

La stationnarité de ξ nous permet de translater les indices dans les sommes

$$E\left(S_n^\xi(s)-S_n^\xi(t)\right)^2 \le 2(2^d-1)\sum_{l=0}^{d-1}\sum_{C_d^l} E\left(n^{-d/2}\sum_{\substack{j\in C_d^l\\ j'\in\overline{C}_d^l}}\sum_{k_j=0}^{[nt_j]\wedge[ns_j]}\sum_{k_{j'}=0}^{[ns_{j'}]-[nt_{j'}]\wedge[ns_{j'}]-1}\xi_k\right)^2$$

$$+\,2(2^d-1)\sum_{l=0}^{d-1}\sum_{C_d^l} E\left(n^{-d/2}\sum_{\substack{j\in C_d^l\\ j'\in\overline{C}_d^l}}\sum_{k_j=0}^{[nt_j]\wedge[ns_j]}\sum_{k_{j'}=0}^{[nt_{j'}]-[nt_{j'}]\wedge[ns_{j'}]-1}\xi_k\right)^2.$$

Maintenant il suffit de remarquer que pour tous $p_1,\ldots,p_d$ appartenant à $\{0,\ldots,n\}$

$$\begin{aligned}
E\left(n^{-d/2}\sum_{k_1=0}^{p_1}\cdots\sum_{k_d=0}^{p_d}\xi_k\right)^2 &= n^{-d}\sum_{k_1,k_1'=0}^{p_1}\cdots\sum_{k_d,k_d'=0}^{p_d}\int_{[-\pi,\pi]^d} f_\xi(\lambda)e^{i<k'-k,\lambda>}d\lambda\\
&\le Mn^{-d}\sum_{k_1,k_1'=0}^{p_1}\cdots\sum_{k_d,k_d'=0}^{p_d}\int_{[-\pi,\pi]^d} e^{i<k'-k,\lambda>}d\lambda\\
&\le M\prod_{j=1}^{d}\frac{p_j+1}{n}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$E\left(S_n^\xi(s)-S_n^\xi(t)\right)^2 \le c\sum_{l=0}^{d-1}\sum_{C_d^l}\left(\prod_{j\in C_d^l}\frac{[nt_j]\wedge[ns_j]+1}{n}\right)\left(\prod_{j\in\overline{C_d^l}}\frac{[ns_j]-[nt_j]\wedge[ns_j]}{n}\right)$$

$$+\,c\sum_{l=1}^{d-1}\sum_{C_d^l}\left(\prod_{j\in C_d^l}\frac{[nt_j]\wedge[ns_j]+1}{n}\right)\left(\prod_{j\in\overline{C_d^l}}\frac{[nt_j]-[nt_j]\wedge[ns_j]}{n}\right),$$

où c est une constante strictement positive, et finalement

$$E\left(S_n^{\xi}(s)-S_n^{\xi}(t)\right)^2 \leq$$
$$c\sum_{l=0}^{d-1}\sum_{C_d^l}\prod_{j\in C_d^l}(t_j\wedge s_j+n^{-1})\left(\prod_{j\in\overline{C_d^l}}\left(s_j-t_j\wedge s_j+n^{-1}\right)+\prod_{j\in\overline{C_d^l}}\left(t_j-t_j\wedge s_j+n^{-1}\right)\right).$$

Cette dernière inégalité montre que

$$\lim_{s\to t}\liminf_{n\to\infty} E\left(S_n^{\xi}(s)-S_n^{\xi}(t)\right)^2=0 \tag{3.4.16}$$

car $\overline{C_d^l}$ n'est jamais vide lorsque $l\leq d-1$.

Il suffit enfin, pour obtenir (3.4.14) et conclure la démonstration, d'appliquer l'inégalité de Tchebychev dans (3.4.15) et d'utiliser (3.4.16).

3.4.2 Démonstration du lemme 13

On reprend la démonstration du théorème de Grinblatt (1976) en la détaillant et en l'adaptant à notre cadre multidimensionnel.

On suppose, sans nuire à la généralité, que le compact K de l'énoncé est $[0,1]^d$.

Notons μ_n la mesure induite par $Y_n(t)$ sur $L^1([0,1]^d)$ et μ celle induite par $Y(t)$. Nous devons montrer la convergence faible de μ_n vers μ. Il suffit de montrer que la suite $\{\mu_n\}$ est faiblement compacte, la convergence des lois fini-dimensionnelles nous donnant alors le résultat. Pour cela on utilise le théorème de Prohorov donné par exemple dans Billingsley (1968) :

Théorème 12 (Prohorov)**.** *Soit X un espace mesuré et $\mathcal{B}$ sa tribu borélienne. Si pour tout $\varepsilon>0$ il existe un compact K tel que $sup_n\mu_n(X\setminus K)<\varepsilon$, alors la suite $\{\mu_n\}$ est faiblement compacte.*

Nous utilisons par ailleurs la caractérisation d'un compact dans $L^p([0,1]^d)$ due à Fréchet et Kolmogorov (voir Brezis (1983)).

Lemme 14 (Fréchet et Kolmogorov)**.** *Un ensemble $K\in L^p([0,1]^d)$ est compact si et seulement si :*

1. $sup_{x\in K}||x||_p<\infty$
2. $sup_{x\in K}lim_{|t|\to 0}\int_{[0,1]^d}|x(t+s)-x(s)|^p ds=0$. *(On considère la somme $t+s$ "modulo 1" pour rester dans $[0,1]^d$).*

Notons $(\Omega,\ P)$ l'espace probabilisé sous-jacent et μ_o la mesure produit $\lambda_d\times P$ où λ_d est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. On note $Y(t,\omega)$ le processus Y où $\omega\in\Omega$ et $t\in[0,1]^d$. Nous commençons la démonstration en montrant le lemme suivant :

Lemme 15. *Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble de cubes $(B_i)_{i\in I_\varepsilon}$ mutuellement disjoints, de volume V_i, vérifiant $\cup_{i\in I_\varepsilon} B_i \subset [0,1]^d$ et $\sum_{i\in I_\varepsilon} V_i > 1-\varepsilon^2$, tels que, pour tout i dans I_ε,*

$$\lambda_d(T_\varepsilon^i) > (1-\varepsilon^2)V_i,$$

où $T_\varepsilon^i = \{t \in B_i \ : \ E|Y(b_i) - Y(t)| < \varepsilon^2\}$ et $b_i \in B_i$.

Preuve du lemme 15. D'après la mesurabilité de $Y(t,\omega)$, on peut l'approcher par des fonctions en escaliers, c'est à dire que pour $\varepsilon > 0$, il existe des ensembles mutuellement disjoints $\hat\Omega_1, \dots, \hat\Omega_k$, des cubes mutuellement disjoints $B_1, \dots, B_k$, et une fonction $\hat Y(t,\omega)$ tels que :

1. $\Omega = \cup_{i=1}^k \hat\Omega_i$ et $[0,1]^d = \cup_{i=1}^k B_i$
2. La fonction $\hat Y(t,\omega)$ est constante sur les ensembles $B_j \times \hat\Omega_i$
3. $$\int |Y(t,\omega) - \hat Y(t,\omega)| d\mu_o(t,\omega) < \frac{\varepsilon^6}{2}. \tag{3.4.17}$$

Notons $\hat Y_j = \hat Y(t)$ lorsque $t \in B_j$. On choisit $(b_1, \dots, b_k)$ des éléments respectifs de $B_1, \dots, B_k$ tels que :

$$\sum_{j=1}^k V_j \ E|Y(b_j) - \hat Y_j| < \frac{\varepsilon^6}{2}, \tag{3.4.18}$$

où V_j représente le volume de B_j.

Montrons dans un premier temps que ce choix est possible. Supposons que quel que soit $(x_1, \dots, x_k) \in B_1 \times \dots \times B_k$, $\sum_{j=1}^k V_j E|Y(x_j) - \hat Y_j| \geq \frac{\varepsilon^6}{2}$. On aurait alors

$$\int_{B_1\times\dots\times B_k} \sum_{j=1}^k V_j E|Y(x_j) - \hat Y_j| dx_1 \dots dx_k \geq \int_{B_1\times\dots\times B_k} \frac{\varepsilon^6}{2} dx_1 \dots dx_k,$$

et donc

$$\prod_{i=1}^k V_i \sum_{j=1}^k \int_{B_j} E|Y(x_j) - \hat Y_j| dx_j \geq \frac{\varepsilon^6}{2} \prod_{i=1}^k V_i.$$

On aboutirait à $\sum_{j=1}^k \int_{B_j} E|Y(x) - \hat Y_j| dx \geq \frac{\varepsilon^6}{2}$ ce qui contredirait (3.4.17). On peut donc choisir $(b_1, \dots, b_k)$ dans $B_1 \times \dots \times B_k$ qui vérifient (3.4.18).

Soit maintenant

$$I_\varepsilon = \left\{ i \ : \ \frac{\int_{B_i} E|Y(b_i) - Y(t)| dt}{V_i} < \varepsilon^4 \right\}.$$

On a d'une part

$$\sum_{j=1}^k \int_{B_j} E|Y(b_j) - Y(t)| dt \leq \sum_{j=1}^k \int_{B_j} E|Y(b_j) - \hat Y_j| dt + \sum_{j=1}^k \int_{B_j} E|\hat Y_j - Y(t)| dt < \varepsilon^6$$

d'après le choix de $b_1, \dots, b_k$ et la propriété (3.4.17) ; d'autre part

$$\sum_{j=1}^{k} \int_{B_j} E|Y(b_j) - Y(t)|dt \geq \sum_{i \in \overline{I}_\varepsilon} \int_{B_i} E|Y(b_i) - Y(t)|dt \geq \varepsilon^4 \sum_{i \in \overline{I}_\varepsilon} V_i,$$

d'après la définition de $\overline{I}_\varepsilon$, le complémentaire de I_ε dans l'ensemble $\{1, \dots, k\}$. Si $\sum_{i \in \overline{I}_\varepsilon} V_i \geq \varepsilon^2$, on aboutit à une contradiction. Donc

$$\sum_{i \in I_\varepsilon} V_i > 1 - \varepsilon^2.$$

On considère à présent, pour $i \in I_\varepsilon$, l'ensemble T_ε^i du lemme 15. En appliquant l'inégalité de Markov et le fait que $i \in I_\varepsilon$, on obtient

$$\frac{\lambda_d(T_\varepsilon^i)}{V_i} > 1 - \frac{1}{\varepsilon^2 V_i} \int_{B_i} E|Y(b_i) - Y(t)|dt > 1 - \varepsilon^2.$$

Ceci achève la preuve du lemme 15. $\square$

Nous savons que, pour tout $t \in [0,1]^d$, $\lim_{n\to\infty} E|Y_n(t)| = E|Y(t)|$. En conservant les notations du lemme précédent, on a donc pour tout $t \in [0,1]^d$

$$\Phi_n^i(t) := E|Y_n(b_i) - Y_n(t)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi^i(t) := E|Y(b_i) - Y(t)|. \tag{3.4.19}$$

Nous allons maintenant contrôler uniformément cette dernière convergence sur T_ε^i . Pour $\varepsilon > 0$ et $i \in I$, on suppose que $t \in T_\varepsilon^i$. La convergence ponctuelle (3.4.19) implique la convergence en mesure, nous pouvons donc écrire :

$$\forall \eta > 0 \ \exists N \ \forall n \geq N \ \lambda_d \left\{ |\Phi_n^i(t) - \Phi^i(t)| < \varepsilon^2 \right\} > V_i(1 - \varepsilon^2) - \eta.$$

Soit $t \in T_\varepsilon^i$, $\Phi^i(t) < \varepsilon^2$, donc

$$|\Phi_n^i(t) - \Phi^i(t)| < \varepsilon^2 \Rightarrow \Phi_n^i(t) < 2\varepsilon^2.$$

En posant $S_{\varepsilon,n}^i = \{\Phi_n^i(t) < 2\varepsilon^2\}$, on a donc

$$\forall \eta > 0 \ \exists N \ \forall n \geq N \ \lambda_d(S_{\varepsilon,n}^i) \geq \lambda_d \left\{ |\Phi_n^i(t) - \Phi^i(t)| < \varepsilon^2 \right\} > V_i(1 - \varepsilon^2) - \eta.$$

Soit maintenant

$$S_{\varepsilon,N}^i = \bigcap_{n \geq N} S_{\varepsilon,n}^i.$$

Quel que soit $\eta > 0$, il existe un $N > 0$ tel que

$$S_{\varepsilon,N}^i = \left\{ t \in T_\varepsilon^i \ : \ \forall n > N, \ \Phi_n^i(t) < 2\varepsilon^2 \right\} \text{ et } \lambda_d(S_{\varepsilon,N}^i) > V_i(1 - \varepsilon^2) - \eta.$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, choisissons à présent $\eta = \varepsilon^2 V_i$, nous obtenons que quelque soit $i \in I_\varepsilon$, il existe un $N > 0$ et un ensemble $S_\varepsilon^i \subset T_\varepsilon^i$ tel que

1. $\forall t \in S^i_\varepsilon,\ \forall n > N\ \Phi^i_n(t) < 2\varepsilon^2$
2. $\lambda_d(S^i_\varepsilon) > (1-2\varepsilon^2)V_i$.

Nous voulons appliquer le Théorème de Prohorov ; il nous faut donc contrôler $\sup_n \mu_n(K)$ où K est un compact de $L^1([0,1]^d)$. Ce compact sera directement construit à partir des ensembles suivants :

$$K_{\varepsilon,\delta} = \left\{ x(t) \in L^1([0,1]^d) : \sup_{|\tau|<\delta} \int_{[0,1]^d} |x(t+\tau) - x(t)| dt < 4\varepsilon \right\}.$$

On a

$$\mu_n(K_{\varepsilon,\delta}) = P\left(\sup_{|\tau|<\delta} \int_{[0,1]^d} |Y_n(t+\tau,\omega) - Y_n(t,\omega)| dt < 4\varepsilon \right).$$

Nous allons donc à présent contrôler cette probabilité en construisant un évènement Ω_n approprié.

Rappelons que $E|Y_n(t)|$ est par hypothèse uniformément borné en n et en t. En notant A cette borne uniforme et $\overline{S^i_\varepsilon}$ le complémentaire de S^i_ε dans B_i, on a, pour $n > N$,

$$\begin{aligned} E\int_{B_i} |Y_n(b_i) - Y_n(t)| dt &= \int_{S^i_\varepsilon} \Phi^i_n(t) dt + \int_{\overline{S^i_\varepsilon}} \Phi^i_n(t) dt \\ &< 2\varepsilon^2 \lambda_d(S^i_\varepsilon) + 2A\lambda_d(\overline{S^i_\varepsilon}) \\ &< 2\varepsilon^2 V_i + 4A\varepsilon^2 V_i \\ &< 4\varepsilon^2 V_i (1+A), \end{aligned}$$

et donc

$$E \sum_{i \in I_\varepsilon} \int_{B_i} |Y_n(b_i) - Y_n(t)| dt < 4\varepsilon^2 (1+A).$$

Pour $n > N$ on considère à présent l'ensemble

$$\Omega^{(1)}_n = \{\omega : \sum_{i\in I_\varepsilon} \int_{B_i} |Y_n(b_i,\omega) - Y_n(t,\omega)| dt < \varepsilon\}.$$

D'après l'inégalité de Markov, $P(\Omega^{(1)}_n) > 1 - \frac{4\varepsilon^2(1+A)}{\varepsilon} = 1 - 4\varepsilon(1+A)$.

Soit maintenant $\delta > 0$. Pour chaque $i \in I_\varepsilon$, on considère le cube $B_i^{(-2\delta)}$ de même centre que B_i et de rayon $R_i - 2\delta$ si R_i est le rayon de B_i. On note son volume $V_i^{(-2\delta)}$. Soit l'ensemble $Q = [0,1]^d - \cup_{i\in I_\varepsilon} B_i^{(-2\delta)}$. On a

$$\lambda_d(Q) = 1 - \sum_{i \in I_\varepsilon} \lambda(B_i^{(-2\delta)}) = 1 - \sum_{i\in I_\varepsilon}^{k} V_i^{(-2\delta)}.$$

On sait que $\sum_{i\in I_\varepsilon} V_i > 1 - \varepsilon^2$, on choisit alors δ assez petit pour que $\lambda_d(Q) < 2\varepsilon^2$. Ainsi, $E\int_Q |Y_n(t)| dt < 2\varepsilon^2 A$.

On considère l'ensemble $\Omega_n^{(2)} = \{\omega : \int_Q |Y_n(t,\omega)|dt < \varepsilon\}$. D'après l'inégalité de Markov, $P(\Omega_n^{(2)}) > 1 - 2\varepsilon A$.

Soit maintenant $\Omega_n = \Omega_n^{(1)} \cap \Omega_n^{(2)}$,

$$P(\Omega_n) > 1 - 4\varepsilon(1+A) - 2\varepsilon A.$$

Considérons $Q' = [0,1]^d - \cup_{i\in I_\varepsilon} B_i^{(-\delta)}$. L'implication $Q' \subset Q$ est évidente. Si $\omega \in \Omega_n$, $n > N$ et $|\tau| < \delta$, alors

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^d} &|Y_n(t+\tau,\omega) - Y_n(t,\omega)|dt \\ &= \sum_{i\in I_\varepsilon} \int_{B_i^{(-\delta)}} |Y_n(t+\tau,\omega) - Y_n(b_i,\omega) + Y_n(b_i,\omega) - Y_n(t,\omega)|dt \\ &\qquad + \int_{Q'} |Y_n(t+\tau,\omega) - Y_n(t,\omega)|dt,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^d} &|Y_n(t+\tau,\omega) - Y_n(t,\omega)|dt \\ &\le \sum_{i\in I_\varepsilon} \int_{B_i^{(-\delta)}} |Y_n(t+\tau,\omega) - Y_n(b_i,\omega)|dt + \sum_{i\in I_\varepsilon} \int_{B_i^{(-\delta)}} |Y_n(t,\omega) - Y_n(b_i,\omega)|dt \\ &\qquad + \int_{Q'} |Y_n(t+\tau,\omega)|dt + \int_{Q'} |Y_n(t,\omega)|dt.\end{aligned}$$

Dans les intégrales du premier et du troisième terme de l'expression ci-dessus, on applique le changement de variable $u = t + \tau$. Notons c_i le centre de B_i. Si $t \in B_i^{(-\delta)}$, $|t - c_i| \le R_i - \delta$; sachant que $|\tau| < \delta$, on a alors $|u - c_i| \le R_i$ et donc $u \in B_i$. Si $t \in Q'$, on a $\forall i \in I_\varepsilon,\ |t - c_i| > R_i - \delta$, donc $|u - c_i| > |t - c_i| - |\tau| > R_i - 2\delta$ et $u \in Q$. En utilisant dans les termes restants le fait que $B_i^{(-\delta)} \subset B_i$ et que $Q' \subset Q$, on obtient, si $\omega \in \Omega_n$, $n > N$ et $|\tau| < \delta$:

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^d} |Y_n(t+\tau,\omega) - Y_n(t,\omega)|dt &\le \sum_{i\in I} 2\int_{B_i} |Y_n(b_i,\omega) - Y_n(t,\omega)|dt + 2\int_Q |Y_n(t,\omega)|dt \\ &\le 4\varepsilon.\end{aligned}$$

On peut revenir maintenant à l'ensemble

$$K_{\varepsilon,\delta} = \left\{ x(t) \in L^1([0,1]^d) : \sup_{|\tau|<\delta} \int_{[0,1]^d} |x(t+\tau) - x(t)|dt < 4\varepsilon \right\}.$$

Si $\omega \in \Omega_n$, $n > N$ et $|\tau| < \delta$,

$$\int_{[0,1]^d} |Y_n(t+\tau,\omega) - Y_n(t,\omega)|dt < 4\varepsilon,$$

donc pour $n \geq N$,

$$\mu_n(K_{\varepsilon,\delta}) \geq P(\Omega_n) > 1-(4+2A)\varepsilon. \tag{3.4.20}$$

Pour tout n fixé, $n < N$, on peut appliquer la même idée que dans le lemme 15. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B_{1,n},\ldots,B_{k,n}$ mutuellement disjoints tels que $\cup_{i=1}^k B_{i,n} = [0,1]^d$ et

$$\sum_{i=1}^k \int_{B_{i,n}} E|Y_n(t) - \hat{Y}_{i,n}|dt < \varepsilon^2, \tag{3.4.21}$$

où $\hat{Y}_{i,n} = \hat{Y}_n(t)$ pour $t \in B_{i,n}$. On considère alors $Q_n = [0,1]^d - \cup_{i=1}^k B_{i,n}^{(-\delta_n)}$. On peut choisir δ_n tel que $\lambda_d(Q_n) < \varepsilon^2$ et alors

$$\int_{[0,1]^d} E|Y_n(t+\tau)-Y_n(t)|dt = \\ \sum_{i=1}^k \int_{B_{i,n}^{(-\delta_n)}} E|Y_n(t+\tau)-Y_n(t)|dt + \int_Q E|Y_n(t+\tau)-Y_n(t)|dt.$$

Le second terme est majoré par $2\varepsilon^2 A$; on décompose le premier de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k \int_{B_{i,n}^{(-\delta_n)}} & E|Y_n(t+\tau)-Y_n(t)|dt \\ &\leq \sum_{i=1}^k \int_{B_{i,n}^{(-\delta_n)}} E|Y_n(t+\tau)-\hat{Y}_n(t+\tau)|dt + \sum_{i=1}^k \int_{B_{i,n}^{(-\delta_n)}} E|\hat{Y}_n(t+\tau)-\hat{Y}_n(t)|dt \\ &\qquad + \sum_{i=1}^k \int_{B_{i,n}^{(-\delta_n)}} E|\hat{Y}_n(t)-Y_n(t)|dt.\end{aligned}$$

Si $|\tau| < \delta_n$, le premier et le dernier terme sont majorés par ε^2 d'après (3.4.21) et le terme du milieu est nul. Ainsi, $\forall n < N$, d'après l'inégalité de Markov, $\mu_n(K_{\varepsilon,\delta_n}) > 1-c\varepsilon$, où c est une constante strictement positive qui pourra varier de ligne à ligne dans la suite.

Il suffit à présent de choisir pour chaque $\varepsilon > 0$, $\delta_o = \max\{(\delta_n)_{n<N},\ \delta\}$ et la propriété (3.4.20) est vraie pour tout n, i.e :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta \quad \sup_n \mu_n(K_{\varepsilon,\delta}) > 1-c\varepsilon. \tag{3.4.22}$$

Soit maintenant $\varepsilon_o > 0$ et $K_{\varepsilon_o} = \cap_{k\geq 1} K_{\frac{\varepsilon_o}{k^2},\delta}$ où δ est choisi tel que la minoration dans (3.4.22) soit vraie. On a, en posant $\overline{K}$ le complémentaire de K dans $L^1([0,1]^d)$,

$$\mu_n\left(\overline{K}_{\varepsilon_o}\right) = \mu_n\left(\underset{k\geq 1}{\cup}\overline{K}_{\frac{\varepsilon_o}{k^2},\delta}\right) \leq \sum_{k\geq 1}\mu_n\left(\overline{K}_{\frac{\varepsilon_o}{k^2},\delta}\right) \leq \sum_{k\geq 1} c\frac{\varepsilon_o}{k^2} = c'\varepsilon_o,$$

où c' est une constante strictement positive.

Posons enfin, pour $\varepsilon_o > 0$ fixé,

$$K'_{\varepsilon_o} = K_{\varepsilon_o} \cap \left\{ ||x||_1 < \frac{A}{\varepsilon_o} \right\}.$$

Nous noterons par la suite $B = \{||x||_1 < \frac{A}{\varepsilon_o}\}$. L'ensemble K'_{ε_o} remplit de façon évidente la première condition du lemme 14, i.e.

$$\sum_{x \in K'_{\varepsilon_o}} ||x||_1 < \infty.$$

Pour la seconde condition : soit $\eta > 0$, il existe $k_1 \geq 1$ tel que $\eta > 4\frac{\varepsilon_o}{k_1^2}$, on a alors

$$\forall x \in K'_{\varepsilon_o} \subset K_{\frac{\varepsilon_o}{k_1^2}, \delta_1}, \quad |\tau| \leq \delta_1 \Rightarrow \int_{[0,1]^d} |x(t+\tau) - x(t)| dt < 4\frac{\varepsilon_o}{k_1^2} < \eta.$$

Les deux conditions du lemme 14 sont satisfaites et donc K'_{ε_o} est un ensemble compact de $L^1([0,1]^d)$. Quelque soit $n > 0$,

$$\mu_n(K'_{\varepsilon_o}) = \mu_n(K_{\varepsilon_o}) - \mu_n(K_{\varepsilon_o} \cap \overline{B}),$$

or

$$\mu_n(K_{\varepsilon_o} \cap \overline{B}) \leq \mu_n(\overline{B}) = P\left(\int_{[0,1]^d} |Y_n(t)| dt \geq \frac{A}{\varepsilon_o} \right) \leq \frac{E \int_{[0,1]^d} |Y_n(t)| dt}{A} \varepsilon_o \leq \varepsilon_o,$$

donc, quelque soit $n > 0$, $\mu_n(K'_{\varepsilon_o}) \geq 1 - (c' + 1)\varepsilon_o$.

Quelque soit $\varepsilon_o > 0$, il existe donc un ensemble compact $K = K'_{\varepsilon_o/(c'-1)}$ inclus dans $L^1([0,1]^d)$ tel que $\sup_n \mu_n(L^1([0,1]) \backslash K) < \varepsilon_o$. L'application du théorème de Prohorov permet de conclure la démonstration du lemme 13.

3.5 Annexe : propriétés des approximations de l'unité

Dans cette partie, nous résumons quelques propriétés des approximations de l'unité dont nous avons besoin pour nos démonstrations. Certaines sont connues ou évidentes, d'autres sont particulières à l'utilisation que nous en avons et n'ont pas été trouvées dans la littérature. Il s'agit notamment des propriétés du produit tensoriel et du produit de convolution d'approximations de l'unité. Ces propriétés dépendent de la nature des approximations de l'unité que l'on considère. Nous en distinguons deux classes : la première concerne les approximations de l'unité en un sens faible (c'est le sens courant d'une approximation de l'unité), l'autre en un sens fort. Nous appliquons ces résultats au noyau de Fejer qui est une approximation de l'unité au sens fort ; nous en résumons finalement les propriétés spécifiques, transversales aux démonstrations des parties précédentes. En vue de cette utilisation finale, nous focalisons notre étude sur des approximations de l'unité définies sur $[-\pi, \pi]^d$.

Définition 6. Nous dirons qu'une fonction $K_n : [-\pi,\pi]^d \to \mathbb{R}$ est une approximation de l'unité au sens faible si $\forall n,\ K_n \geq 0,\ \int_{[-\pi,\pi]^d} K_n(x)dx = 1$ et si

$$\forall \delta > 0,\ \lim_{n\to\infty} \int_{|x|>\delta} K_n(x)dx = 0. \tag{3.5.1}$$

Nous dirons qu'une fonction $K_n : [-\pi,\pi]^d \to \mathbb{R}$ est une approximation de l'unité au sens fort si $\forall n,\ K_n \geq 0,\ \int_{[-\pi,\pi]^d} K_n(x)dx = 1$ et si

$$\forall \delta > 0,\ \lim_{n\to\infty} \sup_{|x|>\delta} K_n(x) = 0. \tag{3.5.2}$$

Une approximation de l'unité au sens fort l'est aussi clairement au sens faible. Ces fonctions sont principalement utilisées pour la propriété bien connue suivante, applicable à une plus large classe de fonctions dans le cas des approximations de l'unité au sens fort.

Théorème 13. *Soit K_n une approximation de l'unité au sens faible de $[-\pi,\pi]^d$, alors pour toute fonction $g \in L^1([-\pi,\pi]^d)$, bornée et continue en 0,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[-\pi,\pi]^d} g(x)K_n(x)dx = g(0) \tag{3.5.3}$$

Soit K_n une approximation de l'unité au sens fort de $[-\pi,\pi]^d$, alors pour toute fonction $g \in L^1([-\pi,\pi]^d)$ continue en 0,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[-\pi,\pi]^d} g(x)K_n(x)dx = g(0) \tag{3.5.4}$$

Démonstration. Dans le cas d'une approximation de l'unité au sens faible, (3.5.3) provient de la décomposition suivante, sachant que pour tout $\varepsilon > 0$, la continuité de g en 0 assure l'existence d'un $\delta > 0$ tel que $|x| \leq \delta \Rightarrow |g(x) - g(0)| < \varepsilon$:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{[-\pi,\pi]^d} g(x)K_n(x)dx - g(0) \right| &= \left| \int_{[-\pi,\pi]^d} (g(x) - g(0))K_n(x)dx \right| \\
&\leq \int_{|x|\leq\delta} |g(x) - g(0)|K_n(x)dx + \int_{|x|>\delta} |g(x) - g(0)|K_n(x)dx \\
&\leq \varepsilon + 2 \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \{|g(x)|\} \int_{|x|>\delta} K_n(x)dx,
\end{aligned}$$

la première majoration étant due à la continuité de g en 0 et la seconde au fait que g est borné. En utilisant enfin la propriété (3.5.1) d'une approximation au sens faible, nous obtenons la convergence vers 0 voulue.

Dans le cas d'une approximation de l'unité au sens fort, g n'est pas nécessairement borné :

$$\left| \int_{[-\pi,\pi]^d} g(x)K_n(x)dx - g(0) \right| =$$
$$\left| \int_{|x|\leq\delta} (g(x) - g(0))K_n(x)dx + \int_{|x|>\delta} g(x)K_n(x)dx - g(0) \int_{|x|>\delta} K_n(x)dx \right|,$$

d'où

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} g(x)K_n(x)dx - g(0)\right|$$
$$\leq \int_{|x|\leq\delta} |g(x)-g(0)|K_n(x)dx + ||g||_{L^1} \sup_{|x|>\delta}\{K_n(x)\} + |g(0)| \int_{|x|>\delta} K_n(x)dx.$$

En choisissant δ correctement, le premier terme est aussi petit que l'on veut par continuité de g à l'origine. Le second terme tend vers 0 lorsque $n \to \infty$ par la propriété (3.5.2) d'une approximation de l'unité au sens fort et le dernier terme également par la propriété (3.5.1) vérifiée par une approximation de l'unité au sens faible, à plus forte raison par une approximation de l'unité au sens fort. □

La propriété d'approximation de l'unité se conserve de la manière suivante pour le produit de convolution et le produit tensoriel :

Proposition 5. *Soit $K_n^{(1)}, \ldots, K_n^{(d)}$ des approximations de l'unité de $[-\pi,\pi]$ dans $\mathbb{R}$. Si les $K_n^{(i)}$ sont des approximations de l'unité au sens faible, alors*

1. *$K_n^{(1)} * \cdots * K_n^{(d)}(t)$ est encore une approximation de l'unité au sens faible de $[-\pi,\pi]$.*
2. *$P_n(x_1,\ldots,x_d) = \prod_{i=1}^d K_n^{(i)}(x_i)$ est une approximation de l'unité au sens faible de $[-\pi,\pi]^d$.*

Si les $K_n^{(i)}$ sont des approximations de l'unité au sens fort, alors

1. *$K_n^{(1)} * \cdots * K_n^{(d)}(t)$ est encore une approximation de l'unité au sens fort de $[-\pi,\pi]$.*
2. *$P_n(x_1,\ldots,x_d) = \prod_{i=1}^d K_n^{(i)}(x_i)$ n'est plus une approximation de l'unité au sens fort de $[-\pi,\pi]^d$, mais uniquement au sens faible.*

Démonstration. Nous montrons ces propriétés pour $d=2$, les résultats se généralisant facilement par récurrence à d quelconque.

Soit pour commencer $K_n^{(1)}$ et $K_n^{(2)}$ deux approximations de l'unité au sens faible de $[-\pi,\pi]$. Ces deux approximations de l'unité peuvent être considérées comme des densités de probabilité sur $[-\pi,\pi]$. Soient donc $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires ayant pour densité $K_n^{(1)}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires ayant pour densité $K_n^{(2)}$. La condition (3.5.1) sur $K_n^{(1)}$ et $K_n^{(2)}$ signifie :

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0 \qquad \text{et} \qquad Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0,$$

les convergences ayant lieu en probabilité. La suite $(X_n+Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de densité $K_n^{(1)} * K_n^{(2)}$ et converge elle aussi en probabilité vers 0. Le produit de convolution de $K_n^{(1)}$ et $K_n^{(2)}$ vérifie donc la propriété (3.5.1), est positif et d'intégrale 1 quel que soit $n \in \mathbb{N}$: c'est donc une approximation de l'unité au sens faible.

Considérons à présent le produit $P_n(x,y) = K_n^{(1)}(x)K_n^{(2)}(y)$. La fonction P_n est positive et de somme 1 dans $[-\pi,\pi]^2$ de façon évidente. Regardons la propriété (3.5.1), nous supposons sans perte de généralité que la norme est la norme infini : $||(x,y)|| = \max(x,y)$, on obtient ainsi :

$$\int_{||(x,y)||>\delta} K_n^{(1)}(x)K_n^{(2)}(y)dxdy \leq \int_{|x|>\delta} K_n^{(1)}(x)dx + \int_{|y|>\delta} K_n^{(2)}(y)dy,$$

car les $K_n^{(i)}$ sont positifs et de somme 1. La propriété (3.5.1) s'en déduit directement et P_n est une approximation de l'unité au sens faible de $[-\pi,\pi]^2$.

Soit maintenant $K_n^{(1)}$ et $K_n^{(2)}$ deux approximations de l'unité au sens fort de $[-\pi,\pi]$. Considérons leur produit de convolution $K_n(t) = K_n^{(1)} * K_n^{(2)}(t)$, il est positif et de somme 1 dans $[-\pi,\pi]$ de façon évidente. Montrons qu'il vérifie la propriété (3.5.2). Soit $\delta > 0$, soit $0 < \gamma < \delta$,

$$\sup_{|t|>\delta} K_n(t) = \sup_{|t|>\delta}\left(\int_{|x|>\gamma} K_n^{(1)}(t-x)K_n^{(2)}(x)dx + \int_{|x|\leq\gamma} K_n^{(1)}(t-x)K_n^{(2)}(x)dx\right).$$

Soit $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain rang on a $\sup_{|x|>\gamma} K_n^{(2)}(x) < \varepsilon$. D'autre part, si $|t| > \delta$ et $|x| \leq \gamma$, alors $|t-x| > \delta - \gamma > 0$ et donc, uniformément sur ce domaine, $K_n^{(1)}(t-x) < \varepsilon$ à partir d'un certain rang. D'où quel que soit $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain rang,

$$\sup_{|t|>\delta} K_n(t) \leq \varepsilon \sup_{|t|>\delta}\int_{|x|>\gamma} K_n^{(1)}(t-x)dx + \varepsilon \sup_{|t|>\delta}\int_{|x|\leq\gamma} K_n^{(2)}(x)dx \leq 2\varepsilon,$$

car les $K_n^{(i)}$ sont de somme 1. La propriété (3.5.2) est donc vérifiée pour K_n et c'est une approximation de l'unité au sens fort.

Enfin, le produit tensoriel de deux approximations de l'unité au sens fort n'est pas nécessairement une approximation de l'unité au sens fort. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer le noyau de Fejer F_n défini en (3.5.5) ci-dessous. C'est une approximation de l'unité au sens fort, mais on a $F_n(0)F_n(\pi) = 0$ si n est pair et $F_n(0)F_n(\pi) = \frac{1}{4\pi^2}$ si n est impair. La propriété (3.5.2) n'est donc pas vérifiée pour le produit tensoriel $(x,y) \mapsto F_n(x)F_n(y)$. □

Nous nous focalisons maintenant plus particulièrement sur le noyau de Fejer, défini sur $[-\pi,\pi]$ par

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{2\pi n}\frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2))} && \text{si } x \neq 0 \\ &= \frac{n}{2\pi} && \text{si } x = 0. \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

Nous résumons certaines de ses propriétés dont nous avons constamment besoin dans les autres parties.

Proposition 6. *Soit F_n le noyau de Fejer défini sur $[-\pi,\pi]$.*

1. *F_n est une approximation de l'unité au sens fort de $[-\pi,\pi]$ dans $\mathbb{R}$*
2. *$\forall\delta > 0$ $\sup_{|x|>\delta} F_n(x) \leq \frac{\pi}{2n\delta^2}$*
3. *$\forall\delta > 0$ $\int_{|x|>\delta} F_n(x)dx \geq \frac{1}{2\pi n}\left(\pi - \delta + \frac{\sin(n\delta)}{n}\right)$*

4. *$\forall g \in L^1([-\pi,\pi])$, $\int_{-\pi}^{\pi} g(x)F_n(x)dx = o(n)$ lorsque $n \to \infty$*
5. *Soit $\alpha > -1$, alors $\int_{-\pi}^{\pi} |x|^\alpha F_n(x)dx \sim \kappa n^{-\alpha}$ lorsque $n \to \infty$, où κ est une constante strictement positive.*

Démonstration. Soit $\delta > 0$ et $\delta < |x| \leq \pi$, par concavité de la fonction $x \mapsto \sin x$ sur $[0,\pi/2]$,

$$F_n(x) \leq \frac{1}{2\pi n}\frac{1}{\sin^2(\delta/2)} \leq \frac{\pi}{2n\delta^2},$$

ce qui montre le point 2.

On sait par ailleurs que F_n est positif et de somme 1 sur $[-\pi,\pi]$. La propriété (3.5.2) est impliquée par l'inégalité précédente donc F_n est un noyau au sens fort.

Pour $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}\int_{\delta<|x|\leq\pi} F_n(x)dx &\geq \frac{2}{2\pi n}\int_\delta^\pi \sin^2(nx/2)dx \\ &\geq \frac{1}{2\pi n}\int_\delta^\pi (1-\cos(nx))dx = \frac{1}{2\pi n}\left(\pi - \delta + \frac{\sin(n\delta)}{n}\right),\end{aligned}$$

ce qui montre le point 3.

Enfin, quel que soit $x \in [-\pi,\pi]$,

$$\frac{g(x)F_n(x)}{n} \leq \frac{g(x)}{2\pi},$$

qui est dans $L^1([-\pi,\pi])$. Par ailleurs $x \mapsto \frac{g(x)F_n(x)}{n}$ converge presque surement vers 0 lorsque $n \to \infty$, donc d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[-\pi,\pi]} \frac{g(x)F_n(x)}{n}dx = 0,$$

ce qui montre le point 4.

Le point 5 est montré dans le lemme 9 de Viano et al. (1995). $\square$