

---

# **CONTRIBUTIONS THÉORIQUES CONCERNANT LES MÉTHODES DE DÉTERMINATION DE LA DIMENSION FRACTALE DANS LE CAS DES PROFILS DE RUPTURE OBTENUS PAR DES SOLLICITATIONS DYNAMIQUES**

Puisqu'ils présentent des rapports de contraction différents selon la direction, les profils de rupture des éprouvettes Charpy possèdent donc la propriété d'auto affinité. Toutefois, ils peuvent être auto affines à l'échelle de petites observations, et auto similaires à une échelle plus grande. Deux illustrations de telles fractales sont fournies par la fonction de Weierstrass (chapitre 3.7.2.) et le mouvement brownien fractionnaire.

## **4.1. Surfaces de rupture fractale auto similaires par rapport aux surfaces de rupture fractale auto affines**

Ce sous-chapitre qui se rapporte essentiellement aux caractères auto affine et auto similaire des surfaces de rupture, a fait l'objet d'une publication présentée lors de la Conférence Chaos 2008, qui s'est tenue du 3 au 6 Juin 2008, en Grèce: Secrieru C. Bigerelle M. and Iost A., Self similar versus self-affine in fractal fracture [Secrieru C. Bigerelle M. and Iost A, 2008]

Premièrement, nous répertorions les résultats de la littérature sur les conditions, les matériaux, les méthodes et les sollicitations mécaniques contribuant à la détermination du caractère auto similaire ou auto affine des surfaces de rupture. Nous établissons ensuite, selon la mesure de rugosité du profil, les conditions effectives d'auto similarité ou d'auto affinité d'une surface rugueuse.

Différents matériaux ont été utilisés, afin d'en analyser l'influence sur le caractère auto affine de leurs surfaces de rupture. Nous nous sommes, par ailleurs, particulièrement intéressés au fait de savoir, si nous mesurions effectivement, pour une surface de rupture, l'auto similarité existante ou l'auto affinité.

Expérimentalement, il a été observé que les surfaces des matériaux ne sont généralement fractales que sur une certaine zone; la plus grande échelle possible étant

déterminée par la taille du spécimen, tandis que la plus petite est déterminée par la dimension atomique.

Les objets fractals sont invariants au changement de l'échelle de représentation et sont caractérisés par des dimensions non entières. Il apparaît cependant, que certaines données ou conditions expérimentales peuvent exercer une influence sur la valeur de la dimension fractale. C'est ainsi que l'on peut observer des propriétés de changement de l'échelle de représentation sur une amplitude de plus de cinq décades de grandeurs d'échelle, lorsqu'on utilise simultanément un microscope électronique à balayage (SEM) et un microscope à force atomique (AFM).

La dimension fractale d'une surface de rupture en représente la complexité géométrique, indépendamment de l'échelle de représentation.

Sa partie entière indique seulement si les données analysées représentent une trace (bidimensionnelle) ou une surface (tridimensionnelle). Elle n'est véritablement pas importante.

La partie fractionnaire contient, quant à elle, l'information la plus importante. Et en général, plus elle est grande, plus la surface est rugueuse.

Il y a actuellement dans la littérature, une certaine polémique au sujet de la nature auto similaire ou auto affine des surfaces rompues.

Le concept d'autosimilarité développé par Mandelbrot a été, par ailleurs, étendu à l'explication de l'anisotropie, via la notion de symétrie auto affine.

Les surfaces de rupture s'avèrent être auto affines avec un exposant bien défini et, de surcroît, peu sensible au matériau ainsi qu'au mode de rupture.

L'évidence de l'auto similarité des microstructures est a été mise en œuvre dans les métaux [Mandelbrot B. et al, 1984], les roches poreuses, le béton et le mortier [Bažant Z.P., 2005], [Carpinteri A., 1994], [Carpinteri A. et al., 1995].

L'autosimilarité est, par ailleurs, évaluée en analysant certaines caractéristiques géométriques, et en les mesurant à différentes grandeurs d'échelle.

La microscopie électronique à balayage est particulièrement utile dans l'établissement de l'étendue d'autosimilarité dans la surface de rupture.

La dimension fractale de surfaces de rupture auto-similaires peut, quant à elle, être mesurée en utilisant la méthode du Slit Island [Mandelbrot B. et al., 1984].

Selon la littérature, les surfaces de rupture qui sont formées dans les matériaux isotropes, sont considérées comme autosimilaires (verres, matériaux fragiles polycristallins à grains fins).

Et, bien qu'il n'y ait aucune règle générale, le bon sens suggère, tout de même, que l'autosimilarité sur moins de deux à trois ordres de grandeur, ne soit pas une indication de phénomènes physiques importants, et doive, de ce fait, être négligée [Bažant Z.P., 2005].

Par ailleurs, il est bien connu que la dimension fractale des surfaces de rupture est associée au mécanisme de rupture et est généralement affectée par des microstructures telles que les microfissures. Cependant, nous ne pouvons corréliser une valeur donnée de la dimension fractale avec une microstructure spécifique, parce que les surfaces de rupture ne sont "fractales" qu'au sens statistique, et que par conséquent, leurs profils ne correspondent pas mathématiquement, à des figures rigoureusement fractales. Il se pose alors la question d'une estimation par intervalles de confiance, de la dimension fractale des surfaces de rupture.

La valeur de la dimension fractale peut ainsi dépendre de l'étendue dans laquelle celle-ci est estimée, parce que l'étendue de l'analyse fractale est associée à l'étendue de la microstructure caractéristique.

Il est également à noter, qu'une surface auto similaire, vue au microscope sous différents grossissements, produit des statistiques identiques à celle d'une surface

rugueuse ; puisqu'en réalité, l'autosimilarité est indépendante de l'échelle de représentation.

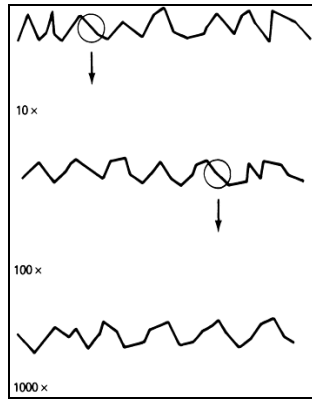


Figure 4.1. Fractale auto similaire

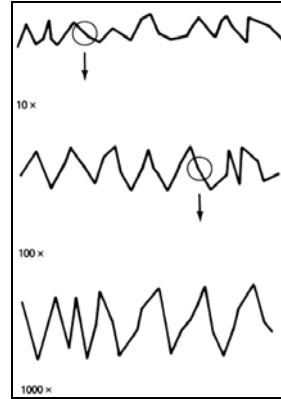


Figure 4.1. Fractale auto affine

Une fractale auto affine est, quant à elle, seulement auto similaire lorsque qu'elle est plus étirée dans une direction que dans une autre [Whitenton E.P., 1992]: la taille verticale augmente, alors que la taille latérale reste constante. L'autosimilarité est ainsi obtenue, par compression de l'échelle verticale. Les figures 4.1 et 4.2 en sont une illustration.

La notion d'auto affinité a été utilisée, pour la première fois, pour caractériser le relief fractionnaire brownien, présenté par Mandelbrot. Elle est caractérisée par la transformation anisotrope suivante:

$$(x, y, z) \rightarrow (bx, by, b^{\zeta}z) \quad (4.1.)$$

où  $b$  est le facteur d'échelle,  $x$  et  $y$  les coordonnées d'un point quelconque du plan perpendiculaire à la direction portée par la hauteur  $z$ ; et  $\zeta$ , l'indice de rugosité local, encore dit, exposant de Hurst. Ce dernier est lié aux dimensions fractale et topologique de la surface, respectivement notées  $\Delta$  et  $d$ , par la relation:

$$\Delta = d + 1 - \zeta \quad (4.2.)$$

Il a été proposé que cet exposant  $\zeta$  puisse être universel, et indépendant du mode de rupture, ainsi que du matériau [Balankin A.S., 1997], [Bouchaud E., 1997], [Katowski P., 2006].

Pour Wang, cela reviendrait à dire, que des matériaux différents posséderaient ainsi, une même dimension fractale universelle; ce qui ne paraît pas possible [Wang S.G, 2003].

Toutefois, la caractérisation d'une structure auto affine est faite par l'estimation de la dimension fractale de son profil, selon deux classes de méthodes expérimentales, [Katowski P., 2006] basées sur la mesure de l'exposant de rugosité:

**Les méthodes classiques** où l'exposant auto affine est calculé sur la base de la dimension fractale : Box Counting, méthode de l'arpenteur, relation entre périmètre-aire, analyse du spectre de puissance.

**Les méthodes directes** : méthode de la bande de largeur variable (angl. variable band-width method) [Schmittbuhl J. et al., 1995], méthode de la probabilité de retour [Katowski P, 2006], analyse du spectre de puissance, transformation en ondelettes [Katowski P, 2006].

Selon la méthode de la bande de largeur variable, par exemple, la rugosité peut représenter l'écart type des fluctuations de la hauteur d'un échantillon du profil, prélevé à travers une fenêtre de largeur donnée. Ainsi, pour un comportement fractal auto affine, cette largeur de bande est négligeable par rapport à la taille du motif fractal; et lorsqu'il n'en est pas le cas, la mesure de la rugosité de l'échantillon, se ramène alors, à celle d'un certain nombre de motifs similaires; on dit alors que la rugosité sature.

L'indice de rugosité local, s'obtient ainsi, comme étant la pente, dans un diagramme log-log, du graphe de la rugosité en fonction de l'échelle d'observation, c'est à dire en fonction de la largeur de la fenêtre.

Une définition de la rugosité basée sur la différence des hauteurs respectives, sur la fenêtre, entre le point le plus haut et le point le plus bas, est également applicable à cette méthode.

La méthode d'analyse du spectre de puissance, quant à elle, présente l'avantage de pouvoir mesurer les surfaces anisotropes, par la détermination de leur dimension fractale, en fonction de la direction.

Le diagramme log-log du grossissement, en fonction de la fréquence, de la transformée de Fourier, est une ligne droite, dont la pente est liée à la dimension fractale.

#### **4.1.1. Fractale ou artefact dans l'étude de surfaces de rupture ?**

La rugosité d'une surface est un paramètre de forme, pouvant mesurer la taille moyenne d'une surface donnée. Elle dépend de l'échelle de mesure.

Toutefois, la dimension fractale d'une surface n'est pas clairement une mesure de rugosité, au sens du paramètre moyen de rugosité  $Ra$ , ou au sens de l'un des autres paramètres classiques de rugosité, utilisés pour la description des irrégularités des profils ou des surfaces.

Mandelbrot et al. ont étudié six échantillons d'acier auxquels des traitements thermiques différents ont conféré des énergies de rupture différentes, mesurées à travers des essais Charpy [Mandelbrot B. et al, 1984]. Pour analyser les surfaces de rupture résultantes, ils ont appliqué la méthode des îles, avec pour contours, les intersections de la surface de rupture avec un plan d'équation  $z=\text{constante}$ . Alors que la surface est, elle-même, auto affine de dimension  $\Delta$ , ils ont obtenu, pour les îles qui sont des objets bidimensionnels denses, une dimension  $\Delta-1$ .

Par ailleurs, la corrélation entre l'exposant de rugosité et la ténacité à la rupture n'étant pas établie, Bouchaud a ainsi proposé l'universalité de l'exposant de Hurst, avec une valeur fixée à  $\zeta = 0.8 \pm 0.05$ , indépendamment du mode de rupture, de la ténacité à la rupture et du matériau [Bouchaud E., 1997].

Il n'y aurait donc pas de corrélation entre l'indice de rugosité et n'importe quel autre paramètre physique du matériau [Secrieru et al., 2008].

Effectivement, en effectuant juste un choc sur une éprouvette entaillée du matériau étudié dans le cas d'un essai Charpy, on a observé une fissuration brutale, et obtenu un indice de rugosité  $\zeta$  d'environ 0,8.

Par contre, les essais de fatigue oligocycliques qui peuvent être considérés comme un processus plus lent, ont conduit à un indice de rugosité d'une valeur plus petite, et approximativement égal à 0,6.

Toutefois, les valeurs enregistrées par le microscope à l'effet tunnel (STM), étaient significativement plus petites que l'exposant universel, et généralement comprises entre 0,4 et 0,6. [Whitenton E.P., 1992]

Selon d'autres chercheurs [Balankin A.S., 1997], l'exposant de rugosité ne peut dépendre de la microstructure du matériau.

D'un point de vue purement mathématique, une courbe ou une surface fractale est définie comme un objet statistiquement auto similaire, à n'importe quelle échelle dimensionnelle. On observe ainsi, beaucoup d'objets fractals sur une certaine plage d'échelles d'observation, dont la limite supérieure correspond typiquement à la taille maximale de l'objet, et la limite inférieure, à une valeur pouvant être fixée par la résolution disponible de l'image ou par un certain changement de la physique qui produit la ligne ou la surface.

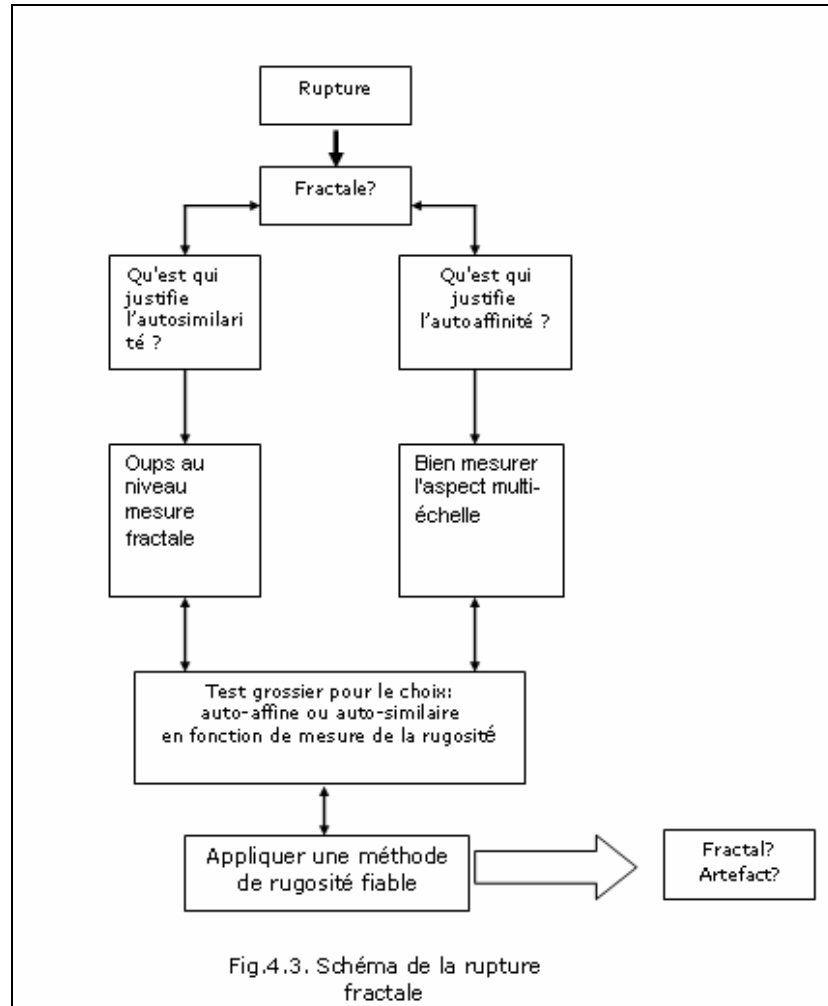
Par exemple, aux très petites dimensions, comme dans le cas de forces atomiques, la cristallographie et la tension superficielle pourraient intervenir pour créer le comportement euclidien.

Rappelons, par ailleurs, que l'intersection d'une surface auto affine avec le plan ( $z=0$ ), est un objet auto similaire de dimension  $\Delta-1$  [Bouchaud E., 1997].

Une des méthodes les plus utilisées pour caractériser une structure auto affine est l'estimation de la dimension fractale du profil de la surface de rupture (par l'intermédiaire de la profilométrie tactile ou de la profilométrie optique). La dimension fractale pour un profil de rupture:

$$D_s = D_p + 1 \quad (4.3.)$$

où  $D_s$  représente la dimension fractale du profil de rupture, et  $D_p$ , celle du profil obtenu par la coupe verticale de la surface de rupture.



On constate que les mesures relatives à l'auto affinité correspondent également à celles relatives à l'autosimilarité; sans pour autant que l'inverse soit vraie.

Il apparaît, en définitive, que la dimension fractale d'une surface n'est pas explicitement une mesure de rugosité, puisqu'elle ne dépend pas du changement de l'échelle de représentation.

## 4.2. Discussions concernant l'application de la méthode du Box Counting

Pour l'estimation de la dimension fractale par la méthode du *Box Counting* il faut respecter les étapes suivantes :

- a). le recouvrement de l'image avec des carrés de différentes grandeurs
- b). le comptage des carrés

- c). la représentation d'un diagramme en coordonnées log - log en fonction du nombre de carrés  
Pour différentes longueurs  $r$ , on compte  $N(r)$ , le nombre le plus petit de carrés de côté  $r$ , nécessaires pour couvrir un objet.

La dépendance  $N(r)$  en fonction de  $r$ :

- a). Pour un contour unidimensionnel (segment de droite), on a:

$$N(r) = 1/r \quad (4.3.)$$

- b). Pour un contour bidimensionnel, on a plutôt:

$$N(r) = (1/r)^2 \quad (4.4.)$$

- c). et, pour un contour tridimensionnel, la relation correspondante s'écrit:

$$N(r) = (1/r)^3 \quad (4.5.)$$

Pour des formes plus complexes, la relation entre  $N(r)$  et  $1/r$  est plus difficile à formaliser.

Pour des images binaires il est plus convenable de choisir comme côté des carrés, le nombre de pixels.

En général, il y a trois types d'ensembles, du point de vue des propriétés fractales et de l'utilisation de la méthode du Box Counting [Górski, A.Z., 2001]:

- les fractales mathématiques, qui sont des ensembles bien définis, avec une formulation rigoureuse des propriétés fractales (sans approximation numérique), à l'image du triadique de Cantor ;

- les fractales physiques qui sont des ensembles finis, exprimant des représentations informatiques de fractales mathématiques.

Dans ce cas, on pourrait obtenir une régression linéaire convenable pour la détermination de la dimension fractale, en utilisant la méthode Box du Counting;

- les structures pseudo fractales, qui sont des ensembles finis, ne représentant pas des fractales mathématiques.

De très nombreux résultats de la littérature sont controversés, du fait d'une mauvaise application de l'algorithme de régression linéaire [Grau J. et al., 2006], [Górski, A.Z., Skrzat J, 2006], [Gonzato G. et al., 1998], [Wendt U. et al., 2002].

Un nombre adéquat d'étapes (au moins 15 à 20) sont nécessaires pour l'application de la technique de régression linéaire, du point de vue des propriétés fractales et de la méthode du Box Counting [Gonzato G. et al., 1998].

La longueur, l'orientation et le placement d'une image par rapport à la boîte initiale, sont les causes potentielles des erreurs qui peuvent se propager, lors de l'évaluation de la dimension fractale. Le processus de numérisation lui-même est une cause majeure d'erreur.

Dans le cadre de la méthode du Box Counting, les boîtes utilisées sont carrées, dans le cas de surfaces auto similaires, et rectangulaires, lorsqu'il s'agit d'objets fractals auto affines.

Tanaka et al., ont mis en application la méthode du Box Counting pour l'étude de la surface de rupture de métaux et céramiques, après l'essai de fatigue, en utilisant des images obtenues par micrographies de la surface de rupture, à l'aide du microscope électronique à balayage. [Tanaka M. et al., 2004].

La méthode du Box Counting peut être utilisée seulement après que la fissure entière se soit propagée [L.M.Alvez , 2005].

Usov V.V. et Shkatulyak N.M. ont examiné l'effet des changements, à l'échelle de la grille, de la dimension fractale des frontières choisies. Dans ce but, ils ont agrandi 4 à 16 fois l'image, et ont ainsi établi, avec de tels changements de la taille de boîtes élémentaires de la grille, avec un nombre limité de points expérimentaux, qu'il est possible de calculer la dimension fractale avec une erreur d'environ 5 % [Usov V.V., Shkatulyak N.M., 2005].

Perret J.S. a, quant à lui, utilisé la méthode du Box Counting, pour des objets de dimension 3, afin de caractériser la dimension  $\Delta_b$  de réseaux de macrospores. Dans ce but, les réseaux de macrospores dans quatre grandes colonnes de sol, ont été visualisés puis quantitativement évalués, en deux et trois dimensions, par le biais de la tomographie X. Il a comparé les résultats de cette méthode avec les co-dimensions obtenues en dimension 2; obtenant des valeurs différentes, pouvant être justifiées par le faible nombre de données [Perret J.S., 2003].

#### **4.2.1. Le problème de la corrélation des données**

Une autre erreur classique d'évaluation de la dimension fractale à l'aide de la méthode des boîtes, porte sur la trop grande taille de celles-ci, comparée à celle de l'objet. L'erreur est engendrée par les boîtes positionnées sur les bords, dans la mesure où, elles sont susceptibles d'intercepter le vide.

La perturbation du résultat est d'autant plus sensible, que le nombre de ces boîtes est non négligeable par rapport au total des boîtes.

S'agissant de l'application de la méthode de régression linéaire, ainsi que des erreurs qui s'en suivent, un développement très détaillé a été fait dans le chapitre 2.

#### **4.2.2. Vérification de la robustesse de la méthode Box Counting**

Dans le cas du fameux "tapis du Sierpinski", le facteur d'échelle est 3. C'est-à-dire, que partant d'un carré plein, on en fait une subdivision en 9 parties égales, puis on élimine la partie centrale qui en résulte; générant ainsi un rapport de masse égal à 8, dans le sens où, seuls les 8 carrés noirs restés éloignés du milieu, demeurent. On reproduit ensuite indéfiniment ce procédé sur chacun de ces carrés.



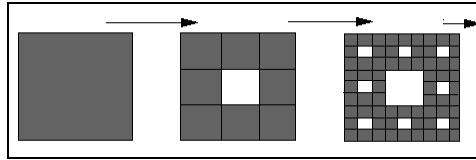


Fig.4.4. Génération de la courbe "tapis du Sierpinski"

Pour tester l'applicabilité de la méthode du Box Counting aux surfaces de rupture, nous avons, dans un premier temps, fait une comparaison entre la dimension fractale théorique du tapis, et les dimensions fractales obtenues par le biais des logiciels *Image J* et *Harfa*.

*Image J* est une application Java, en vue de l'analyse des images et de leur traitement, par utilisation des principes de la méthode du Box Counting, pour l'estimation de la dimension fractale. Cet algorithme est basé sur le comptage des pixels, par la variation de la résolution et de la position. *Image J* peut ainsi filtrer une image 2048 x 2048 en 0,1 seconde, soit 40 millions de pixels par seconde. Cependant, ce logiciel ne peut traiter que des images binaires (blanc et noir); d'où une segmentation de l'image, qui permettra, par la suite, de bien distinguer l'objet (le profil de rupture) par rapport au fond de l'image.

Le programme *Harfa* est, quant à lui, un programme produit par l'*Institute of Physical and Applied Chemistry de l'Université Technologique Brno* de Cehia, et par lequel, il a été réalisé une modification de la méthode du Box Counting de détermination de la dimension fractale. D'où les trois dimensions fractales suivantes:

- $BW$ , qui caractérise les propriétés noires de la figure;
- $B+ BW$  qui présente les caractéristiques du contour de l'objet, et représente la dimension fractale du contour de la surface de rupture;
- $W+BW$  qui caractérise les parties blanches de l'objet.

L'analyse effectuée avec les deux logiciels, a conduit à la détermination d'intervalles contenant la dimension fractale, et centrés sur sa valeur théorique ( $\Delta=1,89$ ). C'est ainsi que par le programme *Image J*, le résultat obtenu est situé dans l'intervalle  $[\Delta-0,03, \Delta+0,03]$ ; en justifiant ainsi, l'application systématique.

Pour suivre le procédé du Box Counting en détail, nous avons étudié une surface simple représentée par une portion fissurée d'une vis en acier OLC 15.



Fig.4.5. Structure linéaire à analyser avec l'algorithme du Box Counting

Nous essayons, dans un premier temps, d'appliquer l'algorithme du Box Counting, en faisant une simulation de la fissure comme dans la figure 4.6, sans utiliser un quelconque logiciel de traitement de l'image.

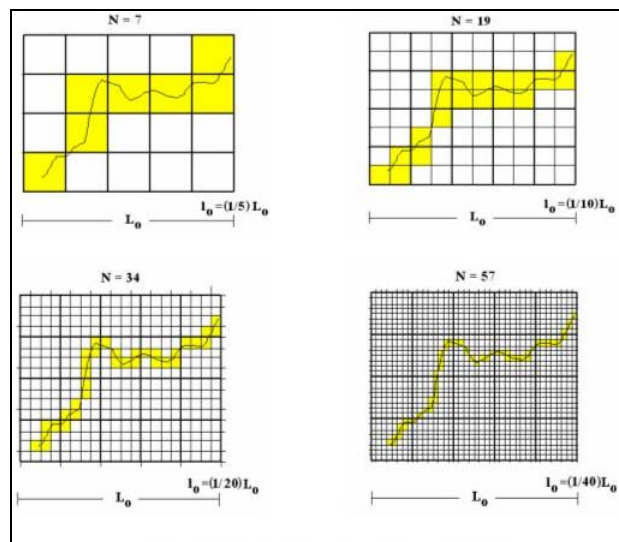


Fig.4.6. L'algorithme du Box Counting appliqué dans le cas d'une structure linéaire:

- (a). Simulation de la méthode du Box Counting dans le cas dans lequel  $N=7$
- (b). Simulation de la méthode du Box Counting dans le cas dans lequel  $N=19$
- (c). Simulation de la méthode du Box Counting dans le cas dans lequel  $N=34$
- (d). Simulation de la méthode du Box Counting dans le cas dans lequel  $N=57$

Nous avons, par ailleurs, suivi le mode, par lequel, le nombre de grilles ( $N$ ) nécessaires au recouvrement de la structure mesurée, varie en fonction de leur côté  $L_0$ . La dimension fractale a pu être obtenue à l'aide de la relation suivante:

$$\Delta = -\frac{\ln N}{\ln(l_0/L_0)} \quad (4.6)$$

L'application de l'algorithme du *Box Counting* (fig.4.4.), conduit, en effet, à:

$$\Delta = -\frac{\ln 57}{\ln(1/40)} = 1.096 \quad (4.7)$$

On obtient ainsi, pour une fissure, une dimension fractale comprise entre 1 et 2. (figure 4.5).

Par la suite, nous tentons d'améliorer l'efficacité de l'algorithme du *Box Counting*, en utilisant les programmes *Image J* et *Harfa*.

Dans la figure 4.7, la dimension fractale est estimée, à l'aide du programme *Image J*.

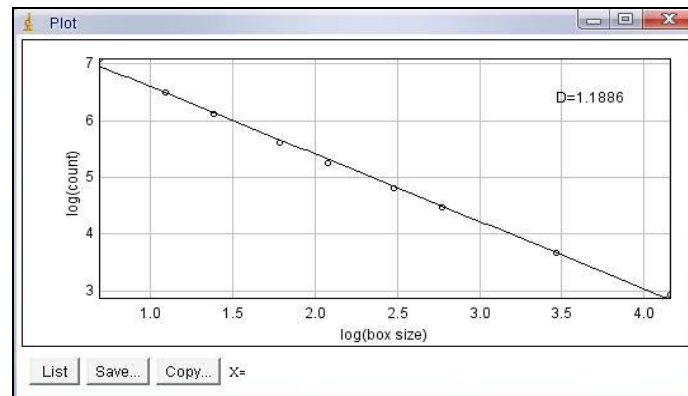


Fig.4.7. La dimension fractale de la fissure:  $\Delta=1,18$   
(Programme *Image J*)

La dimension fractale,  $\Delta=1,19$ , du profil de fissure, est représentée par la pente du graphe de la figure 4.7.

Dans la figure 4.8 on a estimé la dimension fractale à l'aide du programme *Harfa*.

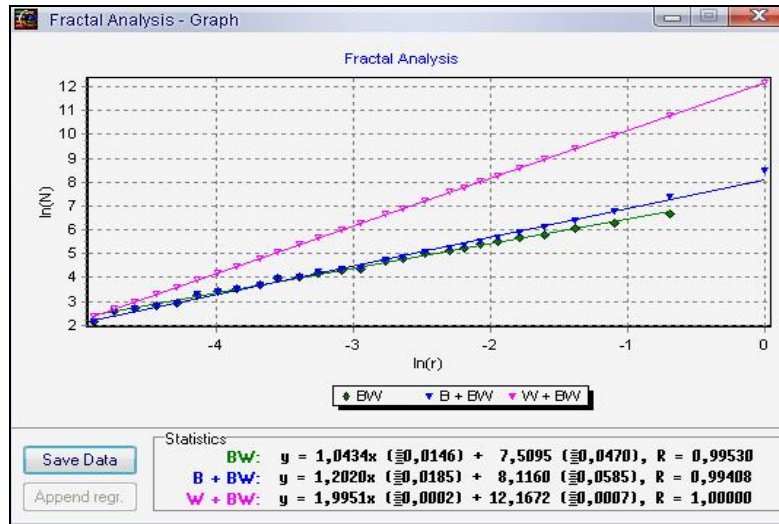


Fig.4.8. La dimension fractale de la fissure  $\Delta=1,20$  ,  
coefficient de corrélation  $R=0,99$ ) dans le  
programme *Harfa*

Nous pouvons observer que le programme *Harfa* nous donne une valeur plus élevée de la dimension fractale par rapport au logiciel *Image J* ( $\Delta=1,20$ , avec un coefficient de corrélation  $R=0,99$ ).

Nous pouvons observer que le programme *Harfa* nous donne une valeur plus élevée de la dimension fractale par rapport au logiciel *Image J* ( $\Delta=1,20$ , avec un coefficient de corrélation  $R=0,99$ ).

Nous pouvons conclure que le logiciel *Image J* est plus avantageux à être utilisé, par rapport au logiciel *Harfa* ou dans le cas d'application de l'algorithme *Box Counting* sans utiliser un logiciel de calcul.

### 4.3. Particularités sur la méthode des oscillations

On a, ensuite, analysé l'applicabilité de la méthode des oscillations aux profils de rupture. Cette méthode est, théoriquement, conçue pour les graphes de fonctions continues, donc applicable à ce type de profils. Elle est, de plus, comme cela a été souligné dans le chapitre 2, basée sur l'intégration des oscillations locales.

#### 4.3.1. L'aspect local de la méthode

La méthode des oscillations permet d'obtenir la dimension Minkowski-Bouligand  $\Delta_{MB}$  par l'intégrale des oscillations locales.

Nous pensons à créer un modèle correspondant au cas dans lequel la continuité n'est pas vraisemblable en utilisant la théorie des distributions.

Nous discutons les deux cas qui peuvent exister pour la longueur d'une courbe:

a). La courbe est de longueur finie :

Dans le cas de longueur finie, la fonction  $z(t)$  est presque partout dérivable et il existe donc, presque partout, une vitesse instantanée  $v(t)$  ayant la forme :

$$v(t) = \sqrt{1 + z'(t)^2} \quad (4.8.)$$

Pour le calcul de la dérivée de  $z$  on mesure la pente :

$$z'(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{z(t+\tau) - z(t)}{\tau} \quad (4.9)$$

La longueur de la courbe est définie par :

$$L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + z'(t)^2} dt \quad (4.10.)$$

Plus l'oscillation de  $z$  en  $t$  est grande, plus la vitesse de  $z$  en  $t$  est grande.

b). La courbe est de longueur infinie (fractale) :

La courbe  $\Gamma$  est fractale si :

$$\frac{osc_{\tau}(t)}{\tau} \rightarrow_{\tau \rightarrow 0} +\infty \quad (4.11)$$

uniformément par rapport à  $t$ .

Est-ce qu'on peut trouver des courbes presque partout dérivables ?

Pour envisager une courbe de longueur finie, il faut imaginer une interpolation du genre rectifiable entre les données : les points successifs sont reliés par des segments, ou par des fonctions de type spline, de façon que la courbe théorique admette une tangente presque partout.

Les courbes de longueur infinie peuvent être classées en deux familles : celles qui sont localement rectifiables, telles les spirales et celles qui ne sont rectifiables nulle part, dont tout sous-arc est de longueur infinie et qui peuvent alors être appelées *fractales*.

Si la courbe est de longueur infinie,  $z'(t)$  n'a plus de sens, la notion dérivée disparaît et on ne peut que mesurer des oscillations locales (autour d'un point).

L'étude des oscillations en tout point de  $[a, b]$  nécessite l'étude des cas où :

$$\begin{cases} t - \tau < a \\ t + \tau > b \end{cases} \quad (4.12)$$

$z$  est désormais défini sur l'intervalle :

$$z: [a-\tau_0, b+\tau_0], \tau_0 > 0 \quad (4.13)$$

### 4.3.2. L'aspect global de la méthode

La méthode des oscillations est essentiellement déduite de la méthode de Minkowski. En effet on part toujours d'un recouvrement de la courbe initiale. Ici, cela revient à effectuer un recouvrement par des segments de longueur égale, à  $t$  donné, à  $osc_\tau$ .

Ce qui nous intéresse donc, c'est la somme des oscillations sur une courbe  $\Gamma$  [Secrieru, Jean-Marie Nianga, Iost Alain, 2008], [Tricot, 1994].

$$Var_\tau = \int_a^b osc_\tau(t) dt \quad (4.14.)$$

La  $\tau$  variation va correspondre à une aire, semblable à une saucisse. On déduit la dimension fractale de ce calcul de  $\tau$  variation par :

$$\Delta(\Gamma) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left( 2 - \frac{\log VAR_\tau(z)}{\log(\tau)} \right) \quad (4.15.)$$

## 4.4. Conclusions du chapitre 4

Dans ce chapitre, une première étape a consisté en la mise en œuvre de critères théoriques de détermination et de différenciation des caractères auto similaire et auto affine d'une structure fractale. Il s'en est finalement déduit, à toute échelle de représentation, l'auto similarité statistique des surfaces de rupture.

Nous avons, ensuite, étudié les principales erreurs relevant de l'application de l'algorithme du *Box Counting*; erreurs notamment causées par la topographie de la forme de l'objet étudié, et/ou par la résolution de l'appareil de mesure du profil soumis à l'étude.

Nous avons, par ailleurs, fait une comparaison entre la dimension fractale théorique du "tapis de Sierpinski" et les dimensions fractales obtenues par le biais des logiciels *Image J* et *Harfa*. L'analyse effectuée avec ces deux logiciels a conduit à la détermination de quelques intervalles de confiance de la dimension fractale; intervalles centrés autour de la valeur théorique ( $\Delta=1,89$ ). Ainsi, par le biais du programme *Image J*, le résultat obtenu est situé dans l'intervalle [ $\Delta-0,03$ ,  $\Delta+0,03$ ]; faisant porter notre choix pratique, sur une utilisation soutenue de ce programme.

Par ailleurs, pour expérimenter la méthode du *Box Counting*, nous avons étudié une surface simple, consistant en une portion fissurée d'une vis en acier OLC 15.

Pour cet exemple, le logiciel *Image J* s'est, à nouveau, avéré plus avantageux que le logiciel *Harfa*, ou une application stricte et exclusive de l'algorithme du *Box Counting*.

Nous avons, également, rappelé, en nous inspirant de nos deux premiers chapitres, la méthode mathématique des oscillations.