

Construction d'opérades à partir de monoïdes

Plusieurs opérades qui mettent en jeu des objets combinatoires furent introduites et étudiées ces dernières années. Additionnellement aux exemples classiques que constituent l'opérade associative, l'opérade commutative et associative et l'opérade de Lie, la plupart des opérades d'introduction récente portent sur divers objets combinatoires. Beaucoup portent en particulier sur diverses espèces d'arbres [Lod01], [CL01], [BF03], [Cha04], [Cha06b], [Liv06], [Cha10]. Ces opérades sont construites de manière plus ou moins indépendante les unes par rapport aux autres et il ne semble pas qu'il existe de construction unificatrice pour les obtenir toutes et les étudier d'un même tenant.

L'objectif de ce chapitre est d'introduire un procédé de construction d'opérades qui se veut, d'un certain point de vue, assez général. Le point de départ de cette construction consiste en un monoïde M quelconque. On considère alors l'ensemble des mots dont les lettres sont des éléments de M . L'arité d'un élément est sa longueur, et cet ensemble est muni d'une substitution partielle dont la définition est dictée par l'expression du produit de M . Cet ensemble est également muni d'une action du groupe symétrique où ce dernier agit sur un mot en permutant ses lettres. La structure ainsi obtenue est une opérade ensembliste.

L'aspect combinatoire de cette construction s'illustre par le fait que ce procédé donne gratuitement de nombreuses nouvelles opérades dont certaines séries de Hilbert sont connues en combinatoire. Ainsi, en choisissant une bijection appropriée entre les éléments de l'opérade et une classe combinatoire qui possède la même série génératrice, la substitution partielle et l'action du groupe symétrique peuvent se réinterpréter en termes d'opérations sur ces objets combinatoires.

Ce travail encore en cours s'appuie sur une grande part d'expérimentation informatique. Nous avons en effet à ce titre développé plusieurs programmes sur Sage [S⁺11] qui implantent notre construction. Ainsi, sur l'entrée d'un monoïde, l'opérade associée est instanciée et nous pouvons lui poser diverses questions, comme par exemple les premiers coefficients de la série de Hilbert d'une sous-opérade engendrée par une famille finie G de générateurs, afficher les éléments engendrés par G arité par arité ou encore calculer les relations non triviales entre les éléments de G .

Comme cela est mentionné dans le paragraphe 3.3 du chapitre 3, une opérade permet de construire un groupe et deux algèbres de Hopf, l'une commutative et l'autre non. Ainsi, en composant cette construction avec la nôtre, il est possible d'obtenir un groupe et deux algèbres de Hopf à partir d'un monoïde. Nous considérons ici l'algèbre de Hopf non commutative obtenue

à partir de l'une des opérades que nous construisons. Celle-ci est basée sur des forêts ordonnées d'arbres plans enracinés où le degré d'un élément est la donnée de son nombre d'arêtes. Cette algèbre de Hopf est très similaire à l'algèbre de Hopf de Connes-Kreimer (voir le paragraphe 2.2.2 du chapitre 2) notamment dans l'expression de son coproduit.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Le paragraphe 6.1 est consacré à la définition de l'ingrédient principal du chapitre, à savoir la construction qui à un monoïde associe une opérade. Nous montrons que cette construction est un foncteur de la catégorie des monoïdes vers la catégorie des opérades et que celui-ci respecte les injections et les surjections. Nous développons ensuite dans le paragraphe 6.2 plusieurs exemples de sous-opérades, symétriques ou non, de l'opérade obtenue à partir du monoïde additif. Les opérades que nous présentons mettent en jeu des objets combinatoires relativement variés : endofonctions, fonctions de parking, mots tassés, permutations, arbres plans enracinés, k -chemins de Dyck, arbres de Schröder, chemins de Motzkin, compositions d'entiers, animaux dirigés et compositions d'entiers segmentées. Ces opérades s'organisent dans un diagramme dont les flèches sont des injections ou des surjections et certaines sont de plus finement engendrées. Nous retrouvons aussi l'opérade diassociative [Lod01], [Zin10] comme sous-opérade de l'opérade obtenue à partir du monoïde multiplicatif. Nous terminons par le paragraphe 6.3 en étudiant l'algèbre de Hopf non commutative obtenue à partir de l'opérade sur les arbres plans enracinés définie dans le paragraphe précédent. Nous proposons une réalisation polynomiale de cette algèbre de Hopf en utilisant des procédés inspirés de [FNT10] introduits pour la réalisation polynomiale de l'algèbre de Hopf de Connes-Kreimer.

6.1 Un foncteur des monoïdes vers les opérades ensemblistes

Nous décrivons ici une construction qui à un monoïde M associe une opérade ensembliste dont les éléments sont des mots sur M vu comme un alphabet. Nous montrons ensuite quelques propriétés de cette construction et en particulier qu'elle est fonctorielle.

6.1.1 La construction

Définition 6.1.1. *La transformation T associe à tout monoïde $(M, \bullet, 1)$ la structure $\mathsf{TM} := (\mathsf{TM}, \circ, \mathbf{1}, \cdot)$ définie de la manière suivante. L'ensemble TM est de la forme*

$$\mathsf{TM} := \bigsqcup_{n \geq 1} \mathsf{TM}(n), \quad (6.1.1)$$

où, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathsf{TM}(n) := \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in M \text{ pour tout } i \in [n]\}. \quad (6.1.2)$$

Le symbole \circ est un opérateur de substitution partielle

$$\circ_i : \mathsf{TM}(n) \times \mathsf{TM}(m) \rightarrow \mathsf{TM}(n + m - 1), \quad (6.1.3)$$

qui est défini pour tous $x \in \mathsf{TM}(n)$, $y \in \mathsf{TM}(m)$ et $i \in [n]$ par

$$x \circ_i y := (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i \bullet y_1, \dots, x_i \bullet y_m, x_{i+1}, \dots, x_n). \quad (6.1.4)$$

L'élément $\mathbf{1} \in \mathsf{TM}(1)$ est défini par

$$\mathbf{1} := (1). \quad (6.1.5)$$

Le symbole \cdot est une action du groupe symétrique

$$\cdot : \mathsf{TM}(n) \times \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathsf{TM}(n), \quad (6.1.6)$$

qui est définie pour tous $x \in \mathsf{TM}(n)$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ par

$$x \cdot \sigma := (x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_n}). \quad (6.1.7)$$

Soit M un monoïde. Les éléments de TM sont des mots dont les lettres sont des éléments de M . La *longueur* d'un élément x de $\mathsf{TM}(n)$, notée $|x|$, est l'entier n . Pour des questions de lisibilité, nous noterons dans certains cas un élément $(x_1, \dots, x_n) \in \mathsf{TM}(n)$ sous forme de mot $x_1 \dots x_n$.

Proposition 6.1.2. *Soit M un monoïde. Alors, la structure TM est une opérade ensembliste.*

Démonstration. Soient \bullet le produit et 1 l'unité du monoïde M .

Tout d'abord, le domaine de définition de l'opérateur de substitution partielle \circ est bien conforme à (6.1.3). En effet, si $x \in \mathsf{TM}(n)$, $y \in \mathsf{TM}(m)$ et $i \in [n]$, l'élément $z := x \circ_i y$ est tel que $|z| = |x| + |y| - 1$, et ainsi $z \in \mathsf{TM}(n + m - 1)$.

Montrons que la condition d'associativité en série (voir (3.1.5) dans le chapitre 3) est vérifiée. Soient $x \in \mathsf{TM}(n)$, $y \in \mathsf{TM}(m)$, $z \in \mathsf{TM}(k)$, $i \in [n]$ et $j \in [m]$. Nous avons, en se basant sur le fait que le produit \bullet de M est associatif,

$$\begin{aligned} (x \circ_i y) \circ_{i+j-1} z & \quad (6.1.8) \\ &= (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i \bullet y_1, \dots, x_i \bullet y_m, x_{i+1}, \dots, x_n) \circ_{i+j-1} z \\ &= (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i \bullet y_1, \dots, x_i \bullet y_{j-1}, (x_i \bullet y_j) \bullet z_1, \dots, (x_i \bullet y_j) \bullet z_k, \\ & \quad x_i \bullet y_{j+1}, \dots, x_i \bullet y_m, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &= (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i \bullet y_1, \dots, x_i \bullet y_{j-1}, x_i \bullet (y_j \bullet z_1), \dots, x_i \bullet (y_j \bullet z_k), \\ & \quad x_i \bullet y_{j+1}, \dots, x_i \bullet y_m, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &= x \circ_i (y_1, \dots, y_{j-1}, y_j \bullet z_1, \dots, y_j \bullet z_k, y_{j+1}, \dots, y_m) \\ &= x \circ_i (y \circ_j z), \end{aligned}$$

ce qui montre cette relation.

Montrons maintenant que la condition d'associativité en parallèle (voir (3.1.6) dans le chapitre 3) est vérifiée. Soient $x \in \mathsf{TM}(n)$, $y \in \mathsf{TM}(m)$, $z \in \mathsf{TM}(k)$ et $i < j \in [n]$. Nous avons

$$\begin{aligned} (x \circ_j z) \circ_i y & \quad (6.1.9) \\ &= (x_1, \dots, x_{j-1}, x_j \bullet z_1, \dots, x_j \bullet z_k, x_{j+1}, \dots, x_n) \circ_i y, \\ &= (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i \bullet y_1, \dots, x_i \bullet y_m, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \\ & \quad x_j \bullet z_1, \dots, x_j \bullet z_k, x_{j+1}, \dots, x_n) \\ &= (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i \bullet y_1, \dots, x_i \bullet y_m, x_{i+1}, \dots, x_n) \circ_{j+m-1} z \\ &= (x \circ_i y) \circ_{j+m-1} z, \end{aligned}$$

ce qui montre cette relation.

Montrons que l'élément $\mathbf{1}$ est bien l'unité de la substitution partielle \circ . Tout d'abord, nous avons bien $\mathbf{1} \in \mathsf{TM}(1)$. D'autre part, pour tous $x \in \mathsf{TM}(n)$ et $i \in [n]$, nous avons

$$x \circ_i \mathbf{1} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i \bullet \mathbf{1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = x, \quad (6.1.10)$$

car $\mathbf{1}$ est l'élément neutre du monoïde M . De plus,

$$\mathbf{1} \circ_1 x = (\mathbf{1} \bullet x_1, \dots, \mathbf{1} \bullet x_n) = x, \quad (6.1.11)$$

pour la même raison, ce qui montre la propriété.

L'action du groupe symétrique \cdot sur TM respecte la relation d'équivariance (voir (3.1.9) dans le chapitre 3) car les éléments de \mathfrak{S}_n agissent par permutation des lettres des mots (x_1, \dots, x_n) de $\mathsf{TM}(n)$.

La structure TM est donc une opérade. Finalement, d'après la définition de sa substitution partielle, de son unité et de son action du groupe symétrique, cette opérade est de plus ensembliste. \square

D'après la proposition 6.1.2, la transformation T produit une opérade ensembliste sur la donnée d'un monoïde. Avec la définition suivante, T produit également une application sur l'entrée d'un morphisme de monoïdes.

Définition 6.1.3. *Soient M et N deux monoïdes. La transformation T associée à tout morphisme de monoïdes $\theta : M \rightarrow N$ l'application*

$$\mathsf{T}\theta : \mathsf{TM} \rightarrow \mathsf{TN} \quad (6.1.12)$$

définie, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathsf{TM}(n)$, par

$$\mathsf{T}\theta(x_1, \dots, x_n) := (\theta(x_1), \dots, \theta(x_n)). \quad (6.1.13)$$

Proposition 6.1.4. *Soient M et N deux monoïdes et $\theta : M \rightarrow N$ un morphisme de monoïdes. Alors, l'application $\mathsf{T}\theta : \mathsf{TM} \rightarrow \mathsf{TN}$ est un morphisme d'opérade.*

Démonstration. Soient \bullet_M (resp. \bullet_N) et 1_M (resp. 1_N) le produit et l'unité du monoïde M (resp. N).

Soient $x \in \mathsf{TM}(n)$, $y \in \mathsf{TM}(m)$ et $i \in [n]$. En utilisant le fait que θ est un morphisme de monoïde, nous avons

$$\begin{aligned} \mathsf{T}\theta(x \circ_i y) & \quad (6.1.14) \\ &= \mathsf{T}\theta(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i \bullet_M y_1, \dots, x_i \bullet_M y_m, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &= (\theta(x_1), \dots, \theta(x_{i-1}), \theta(x_i \bullet_M y_1), \dots, \theta(x_i \bullet_M y_m), \\ &\quad \theta(x_{i+1}), \dots, \theta(x_n)) \\ &= (\theta(x_1), \dots, \theta(x_{i-1}), \theta(x_i) \bullet_N \theta(y_1), \dots, \theta(x_i) \bullet_N \theta(y_m), \\ &\quad \theta(x_{i+1}), \dots, \theta(x_n)) \\ &= (\theta(x_1), \dots, \theta(x_n)) \circ_i (\theta(y_1), \dots, \theta(y_m)) \\ &= \mathsf{T}\theta(x) \circ_i \mathsf{T}\theta(y). \end{aligned}$$

Par définition de la transformation T , (1_M) est l'unité de TM , et nous avons

$$\mathsf{T}\theta(1_M) = (\theta(1_M)) = (1_N). \quad (6.1.15)$$

Finalement, pour tout $x \in \mathsf{TM}(n)$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a clairement $\mathsf{T}\theta(x \cdot \sigma) = \mathsf{T}\theta(x) \cdot \sigma$. L'application $\mathsf{T}\theta$ respecte ainsi les trois propriétés requises, et est ainsi un morphisme d'opérides. \square

6.1.2 Propriétés de la construction

Théorème 6.1.5. *La transformation T est un foncteur de la catégorie des monoïdes avec morphismes de monoïde vers la catégorie des opérides ensemblistes avec morphismes d'opérade.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que par la proposition 6.1.2, la transformation T construit bien une opérade ensembliste à partir d'un monoïde et par la proposition 6.1.4, un morphisme d'opérade à partir d'un morphisme de monoïde.

Soient M un monoïde, $\theta : M \rightarrow M$ le morphisme identité associé à M et x un élément de $TM(n)$. Nous avons

$$T\theta(x) = (\theta(x_1), \dots, \theta(x_n)) = (x_1, \dots, x_n) = x, \quad (6.1.16)$$

ce qui montre que $T\theta$ est bien le morphisme identité d'opérade associé à l'opérade TM .

Soient (L, \bullet_L) , (M, \bullet_M) et (N, \bullet_N) trois monoïdes, $\theta : L \rightarrow M$ et $\omega : M \rightarrow N$ deux morphismes de monoïde et x un élément de $TL(n)$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} T(\omega \circ \theta)(x) &= (\omega \circ \theta(x_1), \dots, \omega \circ \theta(x_n)) \\ &= (\omega(\theta(x_1)), \dots, \omega(\theta(x_n))) \\ &= T\omega(\theta(x_1), \dots, \theta(x_n)) \\ &= (T\omega \circ T\theta)(x), \end{aligned} \quad (6.1.17)$$

ce qui montre que T est compatible avec la composition. La transformation T est ainsi un foncteur. \square

Proposition 6.1.6. *Soient M et N deux monoïdes et $\theta : M \rightarrow N$ un morphisme de monoïde. Si θ est injectif (resp. surjectif), alors $T\theta$ est injectif (resp. surjectif).*

Démonstration. Supposons θ injectif. S'il existe deux éléments x et y de TM tels que $T\theta(x) = T\theta(y)$, alors,

$$T\theta(x) = (\theta(x_1), \dots, \theta(x_n)) = (\theta(y_1), \dots, \theta(y_n)) = T\theta(y), \quad (6.1.18)$$

ce qui implique $\theta(x_i) = \theta(y_i)$ pour tout $i \in [n]$. Comme θ est injectif, on a $x_i = y_i$ pour tout $i \in [n]$, ce qui implique $x = y$. Le morphisme d'opérade $T\theta$ est donc injectif.

Supposons θ surjectif. Soit y un élément de $TN(n)$. Comme θ est surjectif, il existe des éléments x_i de M tels que $\theta(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [n]$. Nous avons donc

$$T\theta(x_1, \dots, x_n) = (\theta(x_1), \dots, \theta(x_n)) = (y_1, \dots, y_n), \quad (6.1.19)$$

et comme (x_1, \dots, x_n) est par définition un élément de TM , le morphisme d'opérade $T\theta$ est surjectif. \square

6.2 Quelques opérades issues de la construction

Nous allons utiliser la construction décrite dans le paragraphe précédent pour définir plusieurs opérades TM associées à des monoïdes M . Ces opérades possèdent un nombre fini d'éléments d'une arité donnée si et seulement si le monoïde M est fini. Comme nous nous intéresserons par la suite principalement à des opérades ayant un nombre fini d'éléments d'une arité donnée, nous allons considérer des sous-opérades de TM engendrées par un nombre fini de générateurs.

Énonçons tout d'abord le lemme suivant qui nous sera très utile dans ce paragraphe :

Lemme 6.2.1. *Soit \mathcal{P} une opérade ns ensembliste qui est engendrée par un ensemble G de générateurs d'arités supérieures à deux. Alors, tout élément x de \mathcal{P} différent de l'unité s'écrit sous la forme $x = y \circ_i g$ où $y \in \mathcal{P}(n)$, $g \in G$ et $i \in [n]$.*

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur l'arité de x . Si x est d'arité 2, alors $x \in G$ et x admet l'écriture $x = \mathbf{1} \circ_1 x$ où $\mathbf{1}$ est l'unité de \mathcal{P} .

Sinon, x est d'arité supérieure à 3, et, par définition d'une opérade ns ensembliste engendrée par un ensemble, x s'écrit sous la forme $x = y \circ_j z$ où $y, z \in \mathcal{P}$, $y \neq \mathbf{1}$, $z \neq \mathbf{1}$, et, comme les éléments de G sont d'arités supérieures à 2, les arités de y et de z sont strictement inférieures à l'arité de x . Par hypothèse de récurrence, il existe des éléments $y', z' \in \mathcal{P}$, des générateurs $g, h \in G$ et des entiers k, ℓ tels que $y = y' \circ_k g$ et $z = z' \circ_\ell h$. Nous avons donc

$$x = (y' \circ_k g) \circ_j (z' \circ_\ell h), \tag{6.2.1}$$

ce qui se réécrit, à l'aide de la relation d'associativité en série des opérades, en

$$x = ((y' \circ_k g) \circ_j z') \circ_{j+\ell-1} h, \tag{6.2.2}$$

et termine la démonstration du lemme. □

Pour le reste de ce paragraphe, \mathbb{N} désigne le monoïde additif des entiers naturels et \mathbb{N}_ℓ désigne pour tout entier $\ell \geq 1$ le monoïde quotient de \mathbb{N} constitué de l'ensemble $\{0, 1, \dots, \ell - 1\}$ où le produit est l'addition modulo ℓ . Nous considérons ici des sous-opérades symétriques ou non symétriques des opérades $\mathbb{T}\mathbb{N}$ et $\mathbb{T}\mathbb{N}_\ell$. Remarquons au passage que le fait que \mathbb{T} soit un foncteur (théorème 6.1.5) qui respecte les surjections (proposition 6.1.6) implique que $\mathbb{T}\mathbb{N}_\ell$ est une opérade quotient de $\mathbb{T}\mathbb{N}$.

Les opérades définies dans ce paragraphe s'agencent selon le diagramme de la figure 6.1.

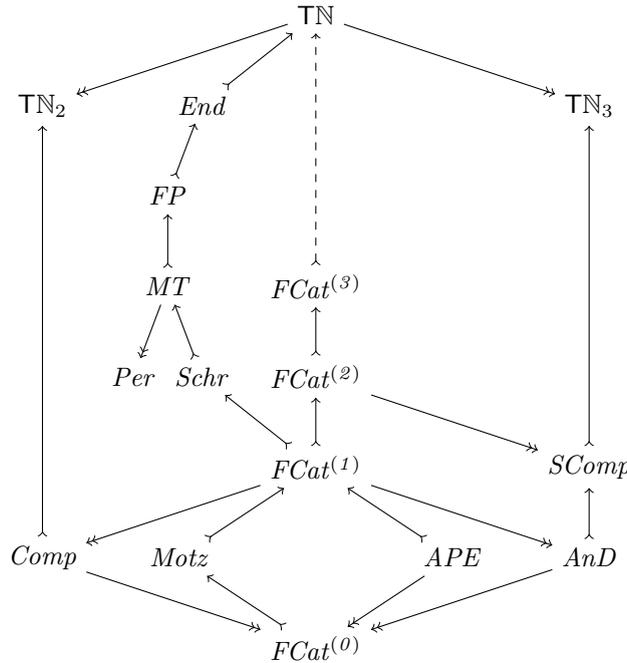


FIGURE 6.1 – Le diagramme des sous-opérades ns et quotients de $\mathbb{T}\mathbb{N}$. Les flèches \mapsto (resp. \twoheadrightarrow) sont des morphismes injectifs (resp. surjectifs) d'opérades ns.

6.2.1 Une opérade sur les endofonctions

Rappelons qu'une endofonction est une application de la forme $f : E \rightarrow E$ où E est un ensemble quelconque. Dans notre contexte, E est fini et nous utiliserons la définition suivante :

Définition 6.2.2. Un mot x sur l'alphabet \mathbb{N} est une endofonction si toute lettre x_i de x vérifie $0 \leq x_i \leq |x| - 1$. La taille d'une endofonction est sa longueur. L'ensemble des endofonctions de taille n est noté \mathcal{F}_n .

On retrouve les endofonctions dans leur définition habituelle par la transformation bijective qui consiste à incrémenter chaque lettre du mot. En effet, si $x \in \mathcal{F}(n)$, l'endofonction $f : [n] \rightarrow [n]$ encodée par x est définie par $f(i) := x_i + 1$. Le décalage induit par cet encodage est néanmoins nécessaire dans notre contexte puisque l'ensemble des endofonctions dans leur définition originale n'est pas stable pour la substitution partielle de $\mathbb{T}\mathbb{N}$. En effet, nous avons par exemple

$$\mathbf{12} \circ_2 \mathbf{12} = \mathbf{134}, \quad (6.2.3)$$

et, bien que $\mathbf{12}$ soit une endofonction dans sa définition habituelle, $\mathbf{134}$ n'en est pas une.

Proposition 6.2.3. L'ensemble $End := \bigsqcup_{n \geq 1} \mathcal{F}_n$ forme une sous-opérade de $\mathbb{T}\mathbb{N}$.

Démonstration. Il s'agit de montrer que End est stable pour la substitution partielle de $\mathbb{T}\mathbb{N}$. Soient $x \in End(n)$, $y \in End(m)$ et $i \in [n]$. Notons qu'un mot z est une endofonction si et seulement si $0 \leq \min z$ et $\max z \leq |z| - 1$. Comme l'opération de substitution ne décrémente pas les valeurs des lettres des opérades, on a $0 \leq \min x \circ_i y$. De plus,

$$\max x \circ_i y = \max\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\} \cup \{x_i + y_1, \dots, x_i + y_m\} \quad (6.2.4)$$

$$\leq \max\{|x| - 1\} \cup \{|x| - 1 + |y| - 1\} \quad (6.2.5)$$

$$\leq |x| + |y| - 2, \quad (6.2.6)$$

ce qui montre que $x \circ_i y$, de longueur $|x| + |y| - 1$, est bien une endofonction.

L'unité de $\mathbb{T}\mathbb{N}$ est toujours un élément de End . En effet, c'est l'élément $\mathbf{1} = (0)$, qui est bien une endofonction.

Pour finir, End est stable pour l'action du groupe symétrique car si x est une endofonction, toute permutation de x l'est également. \square

Voici quelques exemples de substitutions partielles dans End :

$$\mathbf{110} \circ_3 \mathbf{11} = \mathbf{1111}, \quad (6.2.7)$$

$$\mathbf{212} \circ_2 \mathbf{3013} = \mathbf{241242}, \quad (6.2.8)$$

et d'applications de l'action du groupe symétrique :

$$11210 \cdot 23514 = 12011, \quad (6.2.9)$$

$$341413 \cdot 361425 = 133441. \quad (6.2.10)$$

Cette opérade n'est pas finiment engendrée. En effet, pour tout $n \geq 2$, les éléments $x \in End(n)$ vérifiant $x_i = n - 1$ pour tout $i \in [n]$ ne peuvent pas être obtenus par des substitution partielles d'éléments d'arités strictement inférieures.

D'après la proposition 6.2.3, nous avons $\dim End(n) = n^n$. La suite des dimensions de End forme la suite **A000312** de [Slo] et ses premières valeurs sont

$$1, 4, 27, 256, 3125, 46656, 823543. \quad (6.2.11)$$

6.2.2 Une opérade sur les fonctions de parking

Nous utiliserons, dans notre contexte, la définition suivante des fonctions de parking :

Définition 6.2.4. *Un mot x sur l'alphabet \mathbb{N} est une fonction de parking si pour toute lettre x_i de x , on a $0 \leq x_i \leq |x| - 1$ et il existe un sous-mot y de x de longueur x_i tel que toutes les lettres de y sont strictement inférieures à x_i . La taille d'une fonction de parking est sa longueur. L'ensemble des fonctions de parking de taille n est noté $FP(n)$.*

On retrouve les fonctions de parking dans leur définition habituelle par la transformation bijective visant à incrémenter chaque lettre du mot. Ce choix est motivé par les mêmes raisons qui nous ont poussé à considérer une définition alternative des endofonctions dans le paragraphe 6.2.1.

Proposition 6.2.5. *L'ensemble $FP := \biguplus_{n \geq 1} FP(n)$ forme une sous-opérade de End .*

Démonstration. Nous avons, immédiatement depuis la définition 6.2.4, $FP(n) \subseteq End(n)$ pour tout $n \geq 1$. Montrons que FP est stable pour la substitution partielle. Soient $x \in FP(n)$, $y \in FP(m)$, $i \in [n]$ et $z := x \circ_i y$. Montrons que z est une fonction de parking. Pour cela, montrons que pour toute lettre z_j de z , il existe un sous-mot u de z de longueur z_j constitué de lettres strictement inférieures à z_j . Nous avons deux cas à explorer en fonction de la valeur de j .

Si $1 \leq j \leq i - 1$ ou $i + m \leq j \leq n + m - 1$, alors z_j est aussi une lettre de x . Comme x est une fonction de parking, il existe un sous-mot v de x de longueur z_j dont les lettres sont strictement inférieures à z_j . Maintenant, si v n'a aucune lettre en commun avec la lettre x_i , alors le mot $u := v$ convient. En revanche, si v est formé de la lettre x_i , comme y est une fonction de parking, il admet une occurrence de la lettre 0, si bien que v est encore un sous-mot de z , et de ce fait, le mot $u := v$ convient.

Sinon, lorsque $i \leq j \leq i + m - 1$, la lettre z_j se trouve dans le facteur de la forme $w := (x_i + y_1, \dots, x_i + y_m)$ de z . Dans ce cas, comme y est une fonction de parking et que z admet comme facteur le mot y dont les lettres sont incrémentées de x_i , il existe un sous-mot v de w de longueur $z_j - x_i$ et tel que ses lettres sont strictement inférieures à $z_j - x_i$. De plus, comme x est aussi une fonction de parking, il existe un sous-mot v' de x de longueur x_i composé de lettres strictement inférieures à x_i . Ce sous-mot est bien entendu aussi un sous-mot de z . Par conséquent, un mélange adéquat de v et v' produit un sous-mot u de z de longueur $z_j - x_i + x_i = z_j$ et tel que toutes ses lettres sont bien strictement inférieures à z_j .

L'unité de End est toujours un élément de FP . En effet, c'est l'élément $\mathbf{1} = (0)$, qui est bien une fonction de parking.

Pour finir, FP est stable pour l'action du groupe symétrique car si x est une fonction de parking, toute permutation de x l'est par définition également. \square

Voici un exemple de substitution partielle dans FP :

$$0202 \circ_2 1013 = 0323502. \quad (6.2.12)$$

Cette opérade n'est pas finiment engendrée car, pour tout $n \geq 3$, les éléments $x \in FP(n)$ vérifiant $x_i = 0$ pour tout $i \in [n - 1]$ et $x_n = n - 1$ ne peuvent pas être obtenus par des substitutions partielles d'éléments d'arités strictement inférieures.

D'après la proposition 6.2.5, nous avons $\dim FP(n) = (n + 1)^{(n-1)}$. La suite des dimensions de FP forme la suite **A000272** de [Slo] et ses premières valeurs sont

$$1, 3, 16, 125, 1296, 16807, 262144. \quad (6.2.13)$$

6.2.3 Une opérade sur les mots tassés

Nous utiliserons, dans notre contexte, la définition suivante des mots tassés :

Définition 6.2.6. *Un mot x sur l'alphabet \mathbb{N} est un mot tassé si pour toute lettre x_i de x on a $0 \leq x_i \leq |x| - 1$ et de plus, si $x_i \geq 1$, alors $x_i - 1$ apparaît dans x . La taille d'un mot tassé est sa longueur. L'ensemble des mots tassés de taille n est noté $MT(n)$.*

Notons que l'on retrouve les mots tassés dans leur définition habituelle par la transformation bijective qui consiste à incrémenter chaque lettre du mot. Ce choix est motivé par les mêmes raisons qui nous ont poussé à considérer une définition alternative des endofonctions et des fonctions de parking dans les paragraphes 6.2.1 et 6.2.2.

Proposition 6.2.7. *L'ensemble $MT := \bigsqcup_{n \geq 1} MT(n)$ forme une sous-opérade de FP .*

Démonstration. Nous avons, immédiatement depuis la définition 6.2.6, $MT(n) \subseteq FP(n)$ pour tout $n \geq 1$. Montrons que MT est stable pour la substitution partielle. Soient $x \in MT(n)$, $y \in MT(m)$, et $i \in [n]$. Montrons que $z := x \circ_i y$ est un mot tassé. Pour cela, montrons que pour toute lettre z_j de z vérifiant $z_j \geq 1$, il existe une lettre a de z telle que $a = z_j - 1$. Nous avons deux cas à explorer en fonction de la valeur de j .

Si $1 \leq j \leq i - 1$ ou $i + m \leq j \leq n + m - 1$, la lettre z_j est aussi dans x . Comme x est un mot tassé, il existe un indice k tel que $x_k = z_j - 1$. Maintenant, si $k \neq i$, la lettre $a := x_k = z_j - 1$ se trouve également dans le mot z . Sinon, lorsque $k = i$, comme y est un mot tassé, il possède au moins une occurrence de la lettre 0, ce qui implique l'existence d'une lettre de valeur $a := x_i = x_k = z_j - 1$ dans z .

Sinon, lorsque $i \leq j \leq i + m - 1$, la lettre z_j se trouve dans le facteur de la forme $(x_i + y_1, \dots, x_i + y_m)$ de z et on a $z_j = x_i + y_k$ où y_k est une lettre de y . Maintenant, si $y_k \geq 1$, comme y est un mot tassé, il existe une lettre y_ℓ dans y telle que $y_\ell = y_k - 1$. Il existe donc une lettre de valeur $a := x_i + y_\ell = x_i + y_k - 1 = z_j - 1$ dans z . Sinon, lorsque $y_k = 0$, on a $z_j = x_i$, et comme x est un mot tassé, il existe une lettre x_ℓ dans x telle que $a := x_\ell = x_i - 1 = z_j - 1$. Cette lettre a existe également dans z .

L'unité de FP est toujours un élément de MT . En effet, c'est l'élément $\mathbf{1} = (0)$, qui est bien un mot tassé.

Pour finir, MT est stable pour l'action du groupe symétrique car si x est un mot tassé, toute permutation de x l'est par définition également. \square

Contrairement aux opérades End et FP , l'opérade MT est finiment engendrée :

Proposition 6.2.8. *L'opérade MT est la sous-opérade de $T\mathbb{N}$ engendrée, en tant qu'opérade symétrique, par les générateurs 00 et 01.*

Démonstration. Tout d'abord, d'après la proposition 6.2.7, étant donné que 00 et 01 sont des mots tassés, les éléments de $\langle 00, 01 \rangle$ sont aussi des mots tassés.

Soit x un mot tassé croissant. Montrons par récurrence sur la longueur de x que $x \in \langle 00, 01 \rangle$. Si $|x| = 1$, alors, comme x est un mot tassé, la seule possibilité est $x = 0 = \mathbf{1}$ et comme $\mathbf{1} \in \langle 00, 01 \rangle$, le cas de base est vérifié. Sinon, considérons un mot tassé croissant y de longueur $n + 1$ avec $n \geq 1$. Posons $x := y_1 \dots y_n$ le préfixe de longueur n de y . Comme x est de longueur n , par hypothèse de récurrence, $x \in \langle 00, 01 \rangle$. Maintenant, étant donné que y est croissant et est un mot tassé, il existe exactement deux possibilités pour exprimer sa dernière lettre en fonction de son avant-dernière : si $y_{n+1} = y_n$, alors on a $y = x \circ_n 00$. Si $y_{n+1} = y_n + 1$, alors on a $y = x \circ_n 01$. Ceci montre que tout mot tassé croissant y vérifie $y \in \langle 00, 01 \rangle$. De plus, tout mot tassé x peut être obtenu à partir d'un mot tassé croissant y par un réordonnement de ses lettres. En d'autres termes, on a $x = y \cdot \sigma$ pour une certaine permutation σ . Cela implique le résultat. \square

D'après la proposition 6.2.7, nous avons $\dim MT(n) = \sum_{i \in [n]} i! \operatorname{stir}(n, i)$ où $\operatorname{stir}(n, i)$ dénote le nombre de Stirling de seconde espèce en n et i , c'est-à-dire le nombre de partitions en i sous-ensembles d'un ensemble à n éléments. La suite des dimensions de MT forme la suite **A000670** de [Slo] et ses premières valeurs sont

$$1, 3, 13, 75, 541, 4683, 47293. \quad (6.2.14)$$

6.2.4 Une opérade sur les permutations

Un simple essai suffit à se rendre compte que l'ensemble des permutations n'est pas stable dans $\mathbb{T}\mathbb{N}$. Nous allons cependant construire dans ce paragraphe une opérade sur les permutations comme un quotient de MT . Nous considérons également dans ce paragraphe l'opérade ensembliste $\mathbb{T}\mathbb{N}$ et ses sous-opérades comme des opérades non ensemblistes, où la substitution partielle et l'action du groupe symétrique sont étendues par linéarité.

Soit $I := \bigoplus_{n \geq 1} I(n)$ le sous-espace vectoriel de MT où, pour tout $n \geq 1$,

$$I(n) := \operatorname{Vect}(MT(n) \setminus \mathfrak{S}_n). \quad (6.2.15)$$

L'espace vectoriel I est donc engendré par les mots tassés qui possèdent au moins une double occurrence d'une lettre.

Proposition 6.2.9. *L'espace vectoriel I un idéal d'opérade de MT .*

Démonstration. Soient $x \in I(n)$, $y \in MT(m)$ et $i \in [n]$. Montrons que $z := x \circ_i y \in I(n+m-1)$. Notons d'abord que le mot z est bien un mot tassé puisque $I(n) \subseteq MT(n)$. Comme x est un mot tassé mais pas une permutation, il existe deux indices $j < k$ tels que $x_j = x_k$. Si $i \neq j$ et $i \neq k$, le mot z est de la forme $z = u \cdot x_j \cdot v \cdot x_k \cdot w$ avec $u, v, w \in \mathbb{T}\mathbb{N}$. Comme z possède deux occurrences d'une même lettre, ce n'est pas une permutation. On a donc $z \in I$. Si $i = j$ ou $i = k$, comme y est un mot tassé, il possède une occurrence de la lettre 0. Lors de son insertion dans x , cette lettre 0 est changée en la lettre x_i . Le mot z possède donc deux occurrences d'une même lettre, ce qui montre que l'on a également $z \in I$ dans ce cas.

Soient $x \in MT(n)$, $y \in I(m)$ et $i \in [n]$. Montrons que $z := x \circ_i y \in I(n+m-1)$. Notons d'abord que le mot z est bien un mot tassé puisque $I(n) \subseteq MT(n)$. Comme y est un mot tassé mais pas une permutation, il existe deux indices $j < k$ tels que $y_j = y_k$. Il est de la forme $y = u \cdot y_j \cdot v \cdot y_k \cdot w$ avec $u, v, w \in \mathbb{T}\mathbb{N}$. Le mot z est obtenu en insérant dans x une version de y dont les lettres ont été incrémentées de la valeur de x_i . Le mot z possède donc les deux occurrences identiques $y_j + x_i$ et $y_k + x_i$, montrant que z n'est pas une permutation et ainsi, $z \in I$.

Il reste à montrer que pour tout $n \geq 1$, $I(n)$ est invariant pour l'action du groupe symétrique. C'est le cas car si $x \in I(n)$, alors pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, le mot $x \cdot \sigma$ possède la même évaluation que x . C'est donc un mot tassé, mais pas une permutation. \square

Nous déduisons de la proposition 6.2.9 que la structure $Per := MT/I$ est une opérade. Puisque l'espace vectoriel MT/I contient uniquement les mots tassés qui ne possèdent pas d'occurrence multiple de lettre, les bases de $Per(n)$ sont indexées par les permutations de l'ensemble $\{0, \dots, n-1\}$.

Soient $n, m \geq 2$, $x \in Per(n)$, $y \in Per(m)$ et $i \in [n]$. Si $x_i \neq n-1$, il est clair que l'élément $x \circ_i y$ possède une double occurrence de la lettre $x_i - 1$. Autrement, si $x_i = n-1$, l'élément $x \circ_i y$ est une permutation. Ces observations mènent à l'expression suivante de la substitution partielle dans Per :

$$x \circ_i y = \begin{cases} x \circ_i y & \text{si } x_i = \max x, \\ 0_{\mathbb{K}} & \text{sinon,} \end{cases} \quad (6.2.16)$$

où la substitution partielle dans le membre droit de (6.2.16) est celle de l'opérade MT .

Par la proposition 6.2.8, MT est finiment engendrée, en tant qu'opérade symétrique, par les éléments 00 et 01. La définition de Per implique donc que cette dernière est également finiment engendrée, en tant qu'opérade symétrique, par l'élément 01.

Voici quelques exemples de substitutions partielles dans Per :

$$20431 \circ_1 102 = 0_{\mathbb{K}}, \quad (6.2.17)$$

$$20431 \circ_3 102 = 2054631. \quad (6.2.18)$$

6.2.5 Une opérade sur les arbres plans enracinés

Considérons la sous-opérade ns APE de TN engendrée par l'élément 01. Voici les premiers éléments qu'elle contient, arité par arité :

- arité 1 : 0 ;
- arité 2 : 01 ;
- arité 3 : 011, 012 ;
- arité 4 : 0111, 0112, 0121, 0122, 0123 ;
- arité 5 : 01111, 01112, 01121, 01122, 01123, 01211, 01212, 01221, 01222, 01223, 01231, 01232, 01233, 01234.

Les éléments de APE sont caractérisés de la manière suivante :

Lemme 6.2.10. *Les éléments de l'opérade ns APE sont exactement les mots x sur l'alphabet \mathbb{N} qui vérifient $x_1 = 0$ et $1 \leq x_{i+1} \leq x_i + 1$ pour tout $i \in [|x| - 1]$.*

Démonstration. Commençons par montrer par récurrence sur la longueur des mots que tout mot y engendré par APE vérifie les conditions du lemme. Tout d'abord, si $|y| = 1$, alors la seule possibilité est $y = \mathbf{1} = 0$ et y vérifie les conditions du lemme. Sinon, d'après le lemme 6.2.1, il existe un élément x de APE de longueur n et $i \in [n]$ tels que $y := x \circ_i 01$. Nous avons alors

$$y = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_i + 1, x_{i+1}, \dots, x_n). \quad (6.2.19)$$

Étant donné que, par hypothèse de récurrence, x vérifie les conditions du lemme, que $y_1 = x_1 = 0$, que

$$y_{i+1} = x_i + 1 \leq x_i + 1 = y_i + 1, \quad (6.2.20)$$

et que

$$y_{i+2} = x_{i+1} \leq x_i + 1 = y_{i+1} \leq y_{i+1} + 1, \quad (6.2.21)$$

le mot y vérifie les conditions du lemme.

Montrons maintenant par récurrence sur la longueur des mots que APE permet d'engendrer tous les mots qui vérifient les conditions du lemme. C'est bien le cas pour le mot $0 = \mathbf{1}$ de longueur 1. Considérons maintenant un mot x de longueur $n \geq 2$ et qui vérifie les conditions du lemme. De part le fait que l'on a toujours $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$, il existe dans x un facteur de la forme $x_i \cdot x_{i+1}$ où i est le plus grand indice tel que $x_{i+1} = x_i + 1$. De cela, en posant $y := (x_1, \dots, x_i, x_{i+2}, \dots, x_n)$, on en déduit que $x = y \circ_i 01$. Maintenant, comme i est maximal, on a soit $i + 1 = n$, soit $x_{i+2} \leq x_{i+1}$. Ceci implique que le mot y respecte les conditions du lemme. Par hypothèse de récurrence, y est engendré par APE , et comme $x = y \circ_i 01$, x l'est également. \square

Si T est un arbre plan enraciné, on appelle i^e nœud de T le i^e nœud que l'on visite lors d'un parcours en profondeur gauche droite de T .

D'après la caractérisation des éléments de APE fournie par le lemme 6.2.10, on peut établir une bijection, pour tout $n \geq 1$, entre les éléments de $APE(n)$ et les arbres plans enracinés à n nœuds de la manière suivante. Soit $x \in APE$. On traite les lettres de x de la gauche vers la

droite en créant un nœud pour chacune de ses lettres : chaque lettre x_i correspond au i^{e} nœud de l'arbre construit. La lettre $x_1 = 0$ correspond à la racine, et ensuite, à la lecture d'une lettre x_i , on crée un nœud de profondeur x_i , fils le plus à droite possible du dernier nœud créé de profondeur x_{i-1} . La condition $x_1 = 0$ garantit que le premier nœud créé est bien de profondeur zéro et donc une racine, et la condition $1 \leq x_{i+1} \leq x_i + 1$ pour tout $i \in [|x| - 1]$ garantit à la fois qu'aucun autre nœud de profondeur zéro n'est créé et que tout nœud possède un parent.

L'inverse de cette bijection s'obtient simplement en réalisant un parcours en profondeur gauche droite de l'arbre plan enraciné et en notant successivement les profondeurs des nœuds visités. La figure 6.2 illustre un exemple de cette bijection.

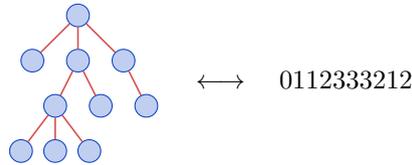


FIGURE 6.2 – Un arbre plan enraciné et l'élément correspondant de l'opérade ns APE .

Cette bijection et le fait que les arbres plans enracinés à $n + 1$ nœuds sont énumérés selon la suite de Catalan $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ (voir [Sta99a]) impliquent que la série de Hilbert de APE vérifie

$$F_{APE}(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t}}{2} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} t^n \quad (6.2.22)$$

$$= t + t^2 + 2t^3 + 5t^4 + 14t^5 + 42t^6 + 132t^7 + 429t^8 + 1430t^9 + \dots \quad (6.2.23)$$

Cette bijection peut également être utilisée pour donner une description de la substitution partielle de APE en termes d'arbres plans enracinés :

Lemme 6.2.11. *Soient T et S deux arbres plans enracinés et t le i^{e} nœud de T . La substitution partielle $T \circ_i S$ dans l'opérade ns APE revient à greffer dans T les sous-arbres de la racine de S comme fils les plus à gauche de t .*

Démonstration. Soit $x \in APE(n)$ (resp. $y \in APE(m)$) l'élément correspondant à T (resp. S) selon la bijection que nous venons de décrire. Nous avons alors

$$z := x \circ_i y = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + y_1, \dots, x_i + y_m, x_{i+1}, \dots, x_n). \quad (6.2.24)$$

L'arbre en bijection avec le préfixe $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + y_1)$ de z est, d'après la définition de la bijection et le fait que $y_1 = 0$, l'arbre T restreint à ses i premiers nœuds. Ensuite, encore d'après la bijection, l'arbre correspondant au préfixe $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + y_1, \dots, x_i + y_m)$ est l'arbre T restreint à ses i premiers nœuds, auquel sont greffés sur son i^{e} nœud t les sous-arbres de la racine de S . Remarquons que les nœuds qui proviennent de S sont, une fois greffés, de profondeur strictement supérieure à x_i . Finalement, d'après le lemme 6.2.10, nous avons $1 \leq x_{i+1} \leq x_i + 1$, impliquant $1 \leq x_{i+1} \leq x_i + y_j$ pour tout $2 \leq j \leq m$. Ainsi, les $n - i$ derniers nœuds qui proviennent de T se retrouvent greffés à des nœuds de profondeur inférieure à x_i , qui sont précisément les i premiers nœuds de T . Les $n - i$ derniers nœuds se retrouvent ainsi greffés de la même manière qu'ils l'étaient dans T . Ceci implique que l'arbre en bijection avec z est conforme à la description du lemme. \square

La figure 6.3 montre un exemple de substitution dans APE en se basant sur l'interprétation fournie par le lemme 6.2.11.

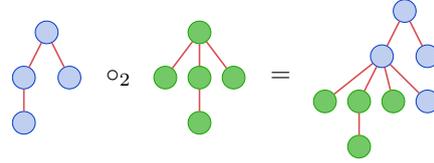


FIGURE 6.3 – Un exemple de substitution partielle dans l’opérade ns APE .

Proposition 6.2.12. *L’opérade ns APE est isomorphe à l’opérade ns libre sur un générateur d’arité deux.*

Démonstration. En se basant ce qui est exposé dans le paragraphe 3.1.2 du chapitre 3, les éléments d’arité n de l’opérade ns libre sur un générateur d’arité deux peuvent s’identifier à des arbres binaires à n feuilles. La conclusion tient au fait qu’il n’y a pas de relation quadratique mettant en jeu le générateur 01 de APE et qu’il ne peut y en avoir non plus de plus haut degré car la série de Hilbert (6.2.22) de APE est la même que la série de Hilbert de l’opérade ns libre sur un générateur d’arité deux. \square

L’opérade ns APE peut se voir comme une version planaire de l’opérade NAP .

6.2.6 Une famille d’opérades sur les k -chemins de Dyck

Soit $k \geq 0$ un entier et $FCat^{(k)}$ la sous-opérade ns de TN engendrée par l’ensemble

$$\{00, 01, \dots, 0k\}. \tag{6.2.25}$$

Voici par exemple les premiers éléments de $FCat^{(1)}$, arité par arité :

- arité 1 : 0 ;
 - arité 2 : 00, 01 ;
 - arité 3 : 000, 001, 010, 011, 012 ;
 - arité 4 : 0000, 0001, 0010, 0011, 0012, 0100, 0101, 0110, 0111, 0112, 0120, 0121, 0122, 0123 ;
- et ceux de $FCat^{(2)}$:

- arité 1 : 0 ;
- arité 2 : 00, 01, 02 ;
- arité 3 : 000, 001, 002, 010, 011, 012, 013, 020, 021, 022, 023, 024.

Les éléments de $FCat^{(k)}$ sont caractérisés de la manière suivante :

Lemme 6.2.13. *Les éléments de l’opérade ns $FCat^{(k)}$ sont exactement les mots x sur l’alphabet \mathbb{N} qui vérifient $x_1 = 0$ et $0 \leq x_{i+1} \leq x_i + k$ pour tout $i \in [|x| - 1]$.*

Démonstration. Commençons par montrer par récurrence sur la longueur des mots que tout élément y engendré par $FCat^{(k)}$ vérifie les conditions du lemme. Si $|y| = 1$, alors $y = \mathbf{1} = 0$ et y vérifie les conditions du lemme. Sinon, d’après le lemme 6.2.1, il existe un élément x de $FCat^{(k)}$ de longueur n , $i \in [n]$ et $0 \leq h \leq k$ tels que $y := x \circ_i 0h$. Nous avons alors

$$y = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n). \tag{6.2.26}$$

Étant donné que, par hypothèse de récurrence, x vérifie les conditions du lemme, que $y_1 = x_1 = 0$, que

$$y_{i+1} = x_i + h \leq x_i + k = y_i + k, \tag{6.2.27}$$

et que

$$y_{i+2} = x_{i+1} \leq x_i + k \leq x_i + h + k = y_{i+1} + k, \tag{6.2.28}$$

le mot y vérifie les conditions du lemme.

Montrons maintenant par récurrence sur la longueur des mots que $FCat^{(k)}$ permet d'engendrer tous les mots qui vérifient les conditions du lemme. C'est bien le cas pour le mot 0 de longueur un. Considérons maintenant un mot x de longueur $n \geq 2$ qui vérifie les conditions du lemme. Soit $i \in [n-1]$ le plus grand indice tel que $x_i \leq x_{i+1}$. Notons que cet indice existe nécessairement puisque $x_1 = 0$ et $0 \leq x_2 \leq k$. De cela, en posant $h := x_{i+1} - x_i$ et $y := (x_1, \dots, x_i, x_{i+2}, \dots, x_n)$, nous avons $x = y \circ_i 0h$. Maintenant, si $i = |y|$, le mot y respecte les conditions du lemme puisque y est un préfixe de x . Sinon, lorsque $i \leq |y| - 1$, comme i est maximal, on a $x_{i+2} + 1 \leq x_{i+1}$, et ceci implique que y respecte également dans ce cas les conditions du lemme. Dans ces deux cas, par hypothèse de récurrence, y est engendré par $FCat^{(k)}$ et comme $x = y \circ_i 0h$, x l'est également. \square

Nous avons maintenant besoin de la définition des k -chemins de Dyck, que nous rappelons ici.

Définition 6.2.14. Un k -chemin de Dyck de taille n est un chemin dans le réseau \mathbb{Z}^2 qui relie les points de coordonnées $(0, 0)$ et $((k+1)n, 0)$ par n pas montants $(1, k)$ et kn pas descendants $(1, -1)$, avec la condition supplémentaire que le chemin reste au dessus de la droite horizontale d'ordonnée 0.

Il est bien connu [DM47] que les k -chemins de Dyck sont dénombrés par la suite de Fuss-Catalan, dont le n^e terme est donné par

$$\frac{1}{kn+1} \binom{(k+1)n}{n}. \quad (6.2.29)$$

Notons que l'on retrouve les chemins de Dyck classiques, et ainsi les nombres de Catalan, avec la spécialisation $k := 1$.

Il existe une bijection h , justifiée par le lemme 6.2.13, entre les k -chemins de Dyck et les éléments de l'opérade $FCat^{(k)}$. Celle-ci possède la description suivante. Si c est un k -chemin de Dyck de taille n , on construit le mot $h(c)$ en notant de gauche à droite les ordonnées des points de départ de chacun des pas montants de c . Le mot $h(c)$ respecte les conditions du lemme 6.2.13 et est de ce fait un élément de $FCat^{(k)}$. La figure 6.4 illustre un exemple de cette bijection.



FIGURE 6.4 – Un 2-chemin de Dyck et l'élément correspondant de l'opérade ns $FCat^{(2)}$.

On déduit de cette bijection que la série de Hilbert de $FCat^{(k)}$ est

$$F_{FCat^{(k)}}(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{kn+1} \binom{(k+1)n}{n} t^n. \quad (6.2.30)$$

Nous pouvons de plus reformuler la substitution partielle dans $FCat^{(k)}$ en termes de k -chemins de Dyck de la manière suivante. Soient c et d deux k -chemins de Dyck. La substitution partielle $c \circ_i d$ revient à supprimer le i^e pas montant de c ainsi que les pas descendants qui le suivent, à placer à cet endroit le préfixe de d privé de son plus long suffixe constitué uniquement de pas descendants, et à recoller la partie restante de droite de c en complétant si nécessaire avec des pas descendants au milieu. La figure 6.5 montre un exemple de substitution.

Nous notons à présent par α_i un générateur $0i$ de $FCat^{(k)}$ pour tout $0 \leq i \leq k$.

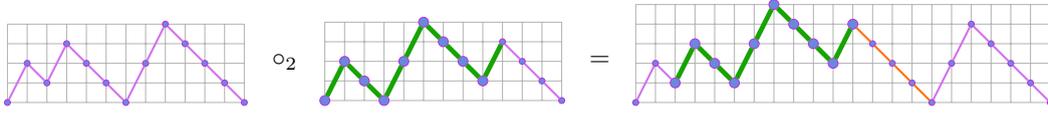


FIGURE 6.5 – Un exemple de substitution partielle dans l'opérade ns $FCat^{(2)}$.

Proposition 6.2.15. *Les générateurs $\{\alpha_0, \dots, \alpha_k\}$ de l'opérade ns $FCat^{(k)}$ sont soumis, en degré deux, uniquement aux relations*

$$\alpha_i \circ_1 \alpha_j = \alpha_j \circ_2 \alpha_{i-j}, \tag{6.2.31}$$

pour tous $0 \leq j \leq i \leq k$.

Démonstration. La relation (6.2.31) est bien vérifiée : nous avons en effet

$$\alpha_i \circ_1 \alpha_j = (0, j, i), \tag{6.2.32}$$

et

$$\alpha_j \circ_2 \alpha_{i-j} = (0, j, i - j + j) = (0, j, i). \tag{6.2.33}$$

Une simple inspection montre que ce sont les seules relations de degré deux. En effet, les relations $\alpha_i \circ_1 \alpha_j = \alpha_k \circ_1 \alpha_\ell$ et $\alpha_i \circ_2 \alpha_j = \alpha_k \circ_2 \alpha_\ell$ impliquent $i = k$ et $j = \ell$. \square

Remarquons que la proposition 6.2.15 ne signifie pas que les seules relations non triviales de $FCat^{(k)}$ sont de la forme (6.2.31).

Notons que la relation $\alpha_0 \circ_1 \alpha_0 = \alpha_0 \circ_2 \alpha_0$ entraîne simplement l'associativité de α_0 . La relation $\alpha_1 \circ_1 \alpha_1 = \alpha_1 \circ_2 \alpha_0$ est l'une de celles qui figurent dans l'opérade diptère [LR03], [Zin10] et la relation $\alpha_1 \circ_1 \alpha_0 = \alpha_0 \circ_2 \alpha_1$ figure quant à elle dans l'opérade dupliciale [Lod08], [Zin10].

6.2.7 Une opérade sur les arbres de Schröder

Considérons maintenant l'opérade ns $Schr$, sous-opérade ns de TN engendrée par l'ensemble $\{00, 01, 10\}$. Listons ses premiers éléments, arité par arité :

- arité 1 : 0 ;
- arité 2 : 00, 01, 10 ;
- arité 3 : 000, 001, 010, 011, 012, 021, 100, 101, 110, 120, 210 ;
- arité 4 : 0000, 0001, 0010, 0011, 0012, 0021, 0100, 0101, 0110, 0111, 0112, 0120, 0121, 0122, 0123, 0132, 0210, 0211, 0212, 0221, 0231, 0321, 1000, 1001, 1010, 1011, 1012, 1021, 1100, 1101, 1110, 1120, 1200, 1201, 1210, 1220, 1230, 1320, 2100, 2101, 2110, 2120, 2210, 2310, 3210.

Les éléments de $Schr$ sont caractérisés de la manière suivante :

Lemme 6.2.16. *Les éléments de l'opérade ns $Schr$ sont exactement les mots x sur l'alphabet \mathbb{N} , qui possèdent au moins une occurrence de la lettre 0 et tels que pour toute lettre $x_i \geq 1$, il existe une lettre $x_j := x_i - 1$ telle que le facteur de x situé entre x_i et x_j soit composé uniquement de lettres x_k vérifiant $x_k \geq x_i$.*

Démonstration. Montrons d'abord que tout mot de $Schr$ vérifie les conditions du lemme. On procède par récurrence sur la longueur des mots. Le cas de base est vérifié car $x := 1 = 0$ respecte les conditions du lemme. Soit x un élément de $Schr$ d'arité $n \geq 2$. D'après le lemme 6.2.1, x peut s'écrire sous la forme $x = y \circ_i g$ où y est un élément d'arité $n - 1$ et $g \in \{00, 01, 10\}$. Nous avons maintenant trois cas à examiner en fonction de g . Si $g = 00$, comme

$$x = (y_1, \dots, y_{i-1}, y_i, y_i, y_{i+1}, \dots, y_{n-1}), \tag{6.2.34}$$

et que, par hypothèse de récurrence, y vérifie le lemme, c'est aussi le cas pour x . Si $g = 01$, nous avons

$$x = (y_1, \dots, y_{i-1}, y_i, y_i + 1, y_{i+1}, \dots, y_{n-1}), \quad (6.2.35)$$

et on observe facilement que x vérifie les conditions du lemme puisque y les vérifie. Le cas $g = 10$ est analogue au précédent.

Montrons maintenant que *Schr* permet d'engendrer tous les mots qui satisfont les conditions du lemme. Nous procédons par récurrence sur la longueur des mots. Il existe un unique mot $x := 0 = \mathbf{1}$ de longueur 1 qui respecte les conditions du lemme et celui-ci figure bien dans *Schr*. Observons de plus que tout mot x constitué uniquement de 0 appartient bien à *Schr* puisqu'il est engendré par substitutions partielles successives du générateur 00. Soit x un mot vérifiant les conditions du lemme, de longueur $n \geq 2$ et qui possède au moins une occurrence d'une lettre différente de 0. Posons $\mathbf{b} := \max x$ et $\mathbf{a} := \mathbf{b} - 1$. Il existe alors un facteur $x_i \cdot x_{i+1}$ dans x tel que $x_i \cdot x_{i+1} \in \{\mathbf{bb}, \mathbf{ba}, \mathbf{ab}\}$. En effet, si un tel facteur n'existait pas, cela entraînerait l'existence d'un facteur u non vide séparant les lettres \mathbf{b} et \mathbf{a} dans x , et étant donné que \mathbf{b} est la plus grande lettre de x , les lettres de u seraient toutes strictement inférieures à \mathbf{b} , ce qui montrerait que x ne respecte pas les conditions du lemme. Supposons dans un premier temps que x admet un facteur \mathbf{bb} . Nous avons donc

$$x = (x_1, \dots, x_i = \mathbf{b}, x_{i+1} = \mathbf{b}, \dots, x_n), \quad (6.2.36)$$

et en posant

$$y := (x_1, \dots, x_i, x_{i+2}, \dots, x_n), \quad (6.2.37)$$

nous avons $x = y \circ_i 00$. Comme x satisfait les conditions du lemme et que y est obtenu en supprimant dans x sa plus grande lettre, y les satisfait également. L'application de l'hypothèse de récurrence sur y implique que x est un élément de *Schr*. Dans l'autre cas, si x admet un facteur \mathbf{ba} , nous avons

$$x = (x_1, \dots, x_i = \mathbf{b}, x_{i+1} = \mathbf{a}, \dots, x_n), \quad (6.2.38)$$

et en posant

$$y := (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad (6.2.39)$$

on nous avons $x = y \circ_i 10$. Pour les mêmes raisons que dans le cas précédent, le mot x est un élément de *Schr*. Le cas où x admet un facteur \mathbf{ab} est analogue au précédent. \square

Nous avons besoin maintenant de la définition des arbres Schröder, que nous rappelons ici.

Définition 6.2.17. *Un arbre de Schröder est un arbre plan enraciné tel qu'aucun nœud ne possède un unique fils. Les nœuds qui possèdent au moins deux fils sont appelés nœuds internes ou simplement nœuds et les nœuds sans fils sont appelés feuilles. La taille d'un arbre de Schröder est son nombre de feuilles.*

Décrivons une construction \mathcal{S} , analogue de celle exposée dans [NT07] et [HNT08b], qui étant donné un mot u de longueur $n \geq 1$ sur l'alphabet \mathbb{N} , construit un arbre de Schröder de taille $n + 1$. Posons $\mathbf{a} := \min u$. Le mot u admet alors l'écriture $u = u^{(1)} \cdot \mathbf{a} \cdot \dots \cdot \mathbf{a} \cdot u^{(\ell)}$ où aucun des $u^{(i)}$ ne possède d'occurrence de \mathbf{a} . De cette façon, on définit \mathcal{S} de manière récursive par

$$\mathcal{S}(u) := \begin{cases} \wedge(\perp, \perp) & \text{si } |u| = 1, \\ \wedge(\mathcal{S}(u^{(1)}), \dots, \mathcal{S}(u^{(\ell)})) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (6.2.40)$$

où \wedge est l'opérateur qui, à une suite s d'arbres plans enracinés, associe l'arbre obtenu en créant une racine qui admet, de gauche à droite, les arbres de s comme sous-arbres (voir le paragraphe 1.3.2 du chapitre 1).

- arité 2 : 00 ;
- arité 3 : 000, 010 ;
- arité 4 : 0000, 0010, 0100, 0110 ;
- arité 5 : 00000, 00010, 00100, 00110, 01000, 01010, 01100, 01110, 01210.

Les éléments de *Motz* sont caractérisés de la manière suivante :

Lemme 6.2.19. *Les éléments de l'opérade ns Motz sont exactement les mots x sur l'alphabet \mathbb{N} qui commencent et se terminent par 0 et tels que $|x_i - x_{i+1}| \leq 1$ pour tout $i \in [|x| - 1]$.*

Démonstration. Montrons d'abord que tout mot de *Motz* vérifie les conditions du lemme. On procède par récurrence sur la longueur des mots. Le cas de base est vérifié car $x := \mathbf{1} = 0$ respecte les conditions du lemme. Soit x un élément de *Motz* d'arité $n \geq 2$. D'après le lemme 6.2.1, x peut s'écrire sous la forme $x = y \circ_i g$ où y est un élément d'arité strictement inférieure à n et $g \in \{00, 010\}$. Nous avons maintenant deux cas à examiner en fonction de g . Si $g = 00$, nous avons

$$x = (y_1, \dots, y_{i-1}, y_i, y_i, y_{i+1}, \dots, y_{|y|}), \quad (6.2.50)$$

et, comme par hypothèse de récurrence y vérifie les conditions du lemme, x les vérifie clairement aussi. Dans l'autre cas, nous avons

$$x = (y_1, \dots, y_{i-1}, y_i, y_i + 1, y_i, y_{i+1}, \dots, y_{|y|}), \quad (6.2.51)$$

et ici encore, le fait que y vérifie par hypothèse de récurrence les conditions du lemme implique que c'est aussi le cas pour x .

Montrons maintenant que *Motz* permet d'engendrer tous les mots qui vérifient les conditions du lemme. Nous procédons par récurrence sur la longueur des mots. Il existe un unique mot $x := 0 = \mathbf{1}$ de longueur 1 qui respecte les conditions du lemme et celui-ci figure bien dans *Motz*. Soit maintenant x un mot de longueur $n \geq 2$ qui satisfait les conditions du lemme. S'il existe dans x un facteur $x_i \cdot x_{i+1}$ avec $x_i = x_{i+1}$, en posant

$$y := (x_1, \dots, x_i, x_{i+2}, \dots, x_n), \quad (6.2.52)$$

nous avons bien $y \circ_i 00 = x$. Ainsi, par hypothèse de récurrence, y est un mot engendré par *Motz*, ce qui implique que x l'est aussi. Sinon, lorsque x n'admet pas de tel facteur, en posant $\mathbf{b} := \max x$, d'après les conditions du lemme que vérifie x , ce dernier admet un facteur $x_i \cdot x_{i+1} \cdot x_{i+2}$ avec $x_{i+1} = \mathbf{b}$ et $x_i = x_{i+2} = \mathbf{b} - 1$. En posant

$$y := (x_1, \dots, x_i, x_{i+3}, \dots, x_n), \quad (6.2.53)$$

nous avons $y \circ_i 010 = x$. Par conséquent, comme dans le cas précédent, x est bien engendré par *Motz*. \square

Dans le but de déterminer la série de Hilbert de *Motz*, nous avons besoin de la définition suivante :

Définition 6.2.20. *Un chemin de Motzkin de taille n est un chemin dans le réseau \mathbb{Z}^2 qui relie les points de coordonnées $(0, 0)$ et $(n, 0)$ par des pas montants $(1, 1)$, des pas descendants $(1, -1)$ et des pas stationnaires $(1, 0)$, avec la condition supplémentaire que le chemin reste au dessus de la droite horizontale d'ordonnée 0.*

Les éléments de *Motz* d'arité n sont en bijection avec les chemins de Motzkin de taille $n - 1$ de la manière suivante. À tout élément $x \in \text{Motz}(n)$, on associe une suite $s := s_1 \dots s_{n-1}$ sur l'alphabet $\{-1, 0, 1\}$ telle que $s_i := x_{i+1} - x_i$. Les conditions du lemme 6.2.19 que respecte x impliquent que $s_1 + \dots + s_{n-1} = 0$ et $s_1 + \dots + s_i \geq 0$ pour tout $i \in [n - 1]$. Ainsi, en associant à chaque lettre s_i de s un pas montant si $s_i = 1$, un pas descendant si $s_i = -1$ et un pas

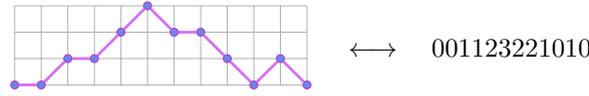


FIGURE 6.7 – Un chemin de Motzkin et l’élément correspondant dans l’opérade ns *Motz*.

stationnaire sinon, un chemin de Motzkin de taille $n - 1$ est obtenu. Cette construction est de plus clairement inversible. Un exemple de cette bijection est donné dans la figure 6.7.

Nous déduisons ainsi de cette bijection que la série de Hilbert de *Motz* est la série génératrice des mots de Motzkin (suite **A001006** de [Slo]) vérifiant

$$F_{Motz}(t) = \frac{1 - t - \sqrt{-3t^2 - 2t + 1}}{2t} = t + t^2 + 2t^3 + 4t^4 + 9t^5 + 21t^6 + 51t^7 + 127t^8 + \dots \quad (6.2.54)$$

6.2.9 Une opérade sur les compositions d’entiers

Soit la sous-opérade ns *Comp* de TN_2 engendrée par les éléments 00 et 01. Comme $FCat^{(1)}$ est la sous-opérade ns de TN engendrée par 00 et 01 et que TN_2 est un quotient de TN , *Comp* est un quotient de $FCat^{(1)}$. Voici les premiers éléments de *Comp*, arité par arité :

- arité 1 : 0 ;
- arité 2 : 00, 01 ;
- arité 3 : 000, 001, 010, 011 ;
- arité 4 : 0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111.

Les éléments de *Comp* sont caractérisés de la manière suivante :

Lemme 6.2.21. *Les éléments de l’opérade ns Comp sont exactement les mots sur l’alphabet $\{0, 1\}$ dont la première lettre est 0.*

Démonstration. Il est immédiat que tous les mots de *Comp* sont des mots sur l’alphabet $\{0, 1\}$. Il commencent par 0 car les générateurs 00 et 01 commencent par 0.

Montrons que *Comp* permet d’engendrer tous les mots qui vérifient les conditions du lemme. Nous procédons par récurrence sur la longueur des mots. L’unique mot de longueur 1 est $0 = \mathbf{1}$ et il figure bien dans *Comp*. Soit x un mot de longueur $n \geq 2$ qui respecte les conditions du lemme. Si x ne possède aucune occurrence de 1, x est obtenu en réalisant des substitutions partielles du générateur 00 avec lui-même. Sinon, comme la première lettre de x est 0, il existe dans x un facteur $x_i \cdot x_{i+1}$ égal à 01. Nous avons

$$x = (x_1, \dots, x_i = 0, x_{i+1} = 1, \dots, x_n), \quad (6.2.55)$$

et en posant

$$y := (x_1, \dots, x_i, x_{i+2}, \dots, x_n), \quad (6.2.56)$$

nous avons $x = y \circ_i 01$. Le mot y respecte les conditions du lemme, et, par hypothèse de récurrence, il est engendré par *Comp*. Le mot x l’est donc également. \square

Nous déduisons du lemme 6.2.21 que la série de Hilbert de *Comp* est

$$F_{Comp}(t) = \frac{t}{1 - 2t} = t + 2t^2 + 4t^3 + 8t^4 + 16t^5 + 32t^6 + 64t^7 + \dots \quad (6.2.57)$$

Rappelons qu’une *composition d’entiers* est une suite finie d’entiers $C := (c_1, \dots, c_\ell)$. Les lettres c_i sont appelées *parts* de C et sa *taille* est la somme de ses parts. Il est bien connu que le nombre de compositions de taille $n \geq 1$ est 2^{n-1} .

On peut encoder une composition C par son *diagramme ruban*, où l'on représente chaque part c_i de C par une colonne de c_i cases et où la case la plus en haut de la colonne correspondant à la part c_{i+1} est attachée à droite de la case la plus en bas de la colonne correspondant à la part c_i . On appelle i^e case du diagramme ruban de C la i^e case que l'on rencontre lorsque l'on parcourt les cases du diagramme ruban de C de haut en bas et de gauche à droite. Le *transposé* du diagramme ruban de C est le diagramme ruban dans lequel les colonnes sont changées en lignes et réciproquement.

Il existe une bijection entre les mots de longueur $n \geq 1$ qui satisfont les conditions du lemme 6.2.21 et les compositions d'entiers de taille n . En effet, étant donné un tel mot x , celui-ci se factorise en

$$x = 01^{k_1} \cdot 01^{k_2} \cdot \dots \cdot 01^{k_\ell}, \quad (6.2.58)$$

où $k_i \geq 0$ pour tout $i \in [\ell]$ et on lui associe la composition $(k_1 + 1, k_2 + 1, \dots, k_\ell + 1)$. Ce processus est bien entendu bijectif.

La substitution partielle de $Comp$ peut se reformuler en termes de diagrammes ruban. Soient C et D deux diagrammes ruban de tailles respectives n et m et $i \in [n]$. Nous avons deux cas : si la i^e case de C est la case la plus en haut de sa colonne, le diagramme ruban $C \circ_i D$ est obtenu en remplaçant la i^e case de C par D ; sinon, lorsque il existe une case au dessus de la i^e case de C , le diagramme ruban $C \circ_i D$ est obtenu en remplaçant la i^e case de C par le transposé de D . La figure 6.8 montre deux exemples de substitutions partielles dans $Comp$.

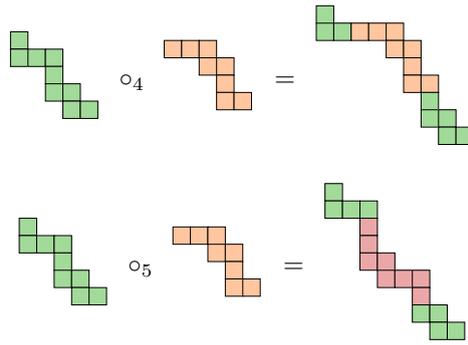


FIGURE 6.8 – Deux exemples de substitutions partielles dans l'opérade ns $Comp$.

Notons à présent respectivement \blacksquare et \blacklozenge les générateurs 00 et 01 de $Comp$.

Proposition 6.2.22. *Les générateurs $\{\blacksquare, \blacklozenge\}$ de l'opérade ns $Comp$ sont soumis, en degré deux, uniquement aux relations*

$$\blacksquare \circ_1 \blacksquare = \blacksquare \circ_2 \blacksquare, \quad (6.2.59)$$

$$\blacklozenge \circ_1 \blacksquare = \blacksquare \circ_2 \blacklozenge, \quad (6.2.60)$$

$$\blacklozenge \circ_1 \blacklozenge = \blacklozenge \circ_2 \blacksquare, \quad (6.2.61)$$

$$\blacksquare \circ_1 \blacklozenge = \blacklozenge \circ_2 \blacklozenge. \quad (6.2.62)$$

Démonstration. C'est une inspection directe des $2 \times 2 \times 2 = 8$ expressions de degré deux que l'on peut construire sur deux générateurs d'arité deux. \square

Remarquons que la proposition 6.2.22 ne signifie pas que les seules relations non triviales de $Comp$ sont uniquement les quatre relations mentionnées.

6.2.10 Une opérade sur les animaux dirigés

Soit la sous-opérade ns AnD de $T\mathbb{N}_3$ engendrée par les éléments 00 et 01. Comme $FCat^{(1)}$ est la sous-opérade ns de $T\mathbb{N}$ engendrée par 00 et 01 et que $T\mathbb{N}_3$ est un quotient de $T\mathbb{N}$, AnD est un quotient de $FCat^{(1)}$. Voici les premiers éléments de AnD , arité par arité :

- arité 1 : 0 ;
- arité 2 : 00, 01 ;
- arité 3 : 000, 001, 010, 011, 012 ;
- arité 4 : 0000, 0001, 0010, 0011, 0012, 0100, 0101, 0110, 0111, 0112, 0120, 0121, 0122 ;
- arité 5 : 00000, 00001, 00010, 00011, 00012, 00100, 00101, 00110, 00111, 00112, 00120, 00121, 00122, 01000, 01001, 01010, 01011, 01012, 01100, 01101, 01110, 01111, 01112, 01120, 01121, 01122, 01200, 01201, 01202, 01210, 01211, 01212, 01220, 01221, 01222.

Avant d’aller plus loin, nous avons besoin de quelques définitions sur les animaux dirigés.

Définition 6.2.23. *Un animal dirigé A est un sous-ensemble de points du réseau \mathbb{N}^2 qui contient le point $(0, 0)$ et tel que*

$$(i, j) \in A \text{ avec } i \geq 1 \text{ ou } j \geq 1 \quad \text{implique} \quad (i - 1, j) \in A \text{ ou } (i, j - 1) \in A. \quad (6.2.63)$$

La taille d’un animal dirigé est le nombre de points qui le constituent

Les animaux dirigés sont habituellement représentés sous forme de diagrammes. Chaque point (i, j) d’un animal dirigé est encodé par un point d’abscisse i et d’ordonnée j . Le point $(0, 0)$ est dessiné le plus en bas et à gauche. La figure 6.9 montre un animal dirigé.

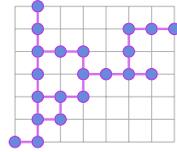


FIGURE 6.9 – Un animal dirigé de taille 21.

Soit \mathcal{L}_n l’ensemble des mots x de longueur n sur l’alphabet $\{-1, 0, 1\}$ tels que, pour tout préfixe $x_1 \dots x_\ell$ de x , l’entier $x_1 + \dots + x_\ell$ est positif.

Une bijection entre les animaux dirigés de taille n et les éléments de \mathcal{L}_{n-1} fut construite par Gouyou-Beauchamps et Viennot en [GBV88]. Il ne nous est pas nécessaire ici de la détailler, nous nous appuyons dans ce qui suit uniquement sur le fait que ces deux ensembles sont en bijection.

Introduisons l’application

$$\phi : \{0, 1, 2\}^2 \rightarrow \{-1, 0, 1\}, \quad (6.2.64)$$

définie par

$$\phi(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) := \begin{cases} \mathbf{b} - \mathbf{a} & \text{si } |\mathbf{b} - \mathbf{a}| \leq 1, \\ 1 & \text{si } \mathbf{a} = 2 \text{ et } \mathbf{b} = 0, \\ -1 & \text{sinon (} \mathbf{a} = 0 \text{ et } \mathbf{b} = 2\text{)}. \end{cases} \quad (6.2.65)$$

Cette application peut se comprendre de la manière suivante. Étant donné que -1 est congru à 2 modulo 3, nous pouvons représenter l’élément 2 de \mathbb{N}_3 par l’élément -1 . Avec cet encodage, ϕ s’exprime simplement par $\phi(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{b} - \mathbf{a}$.

Nous étendons ϕ en l’application

$$\phi : \{0, 1, 2\}^n \rightarrow \{-1, 0, 1\}^{n-1}, \quad (6.2.66)$$

où l'on pose, pour tous $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \{0, 1, 2\}$ et $u \in \{0, 1, 2\}^*$, $\phi(\mathbf{a}) := \epsilon$ et

$$\phi(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot u) := \phi(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \phi(\mathbf{b} \cdot u). \quad (6.2.67)$$

Lemme 6.2.24. *Si x est un élément de $AnD(n)$, alors le mot $\phi(x)$ appartient à \mathcal{L}_{n-1} .*

Démonstration. On procède par récurrence sur la longueur de x . Si $|x| = 1$, alors $x = \mathbf{1} = 0$, et comme l'élément $\phi(0) = \epsilon$ figure dans \mathcal{L}_0 , le lemme est vérifié.

Sinon, lorsque x est de longueur $n \geq 2$, d'après le lemme 6.2.1, il existe $y \in AnD(n-1)$, $g \in \{00, 01\}$ et $i \in [n]$ tels que $x = y \circ_i g$. Si $g = 00$, nous avons

$$x = (y_1, \dots, y_i, y_i, \dots, y_{n-1}), \quad (6.2.68)$$

et, d'après la définition de ϕ et l'hypothèse de récurrence, le mot $\phi(x)$ est obtenu à partir de $\phi(y) \in \mathcal{L}_{n-2}$ en y insérant à un endroit approprié la lettre 0. Nous avons donc $\phi(x) \in \mathcal{L}_{n-1}$. Si $g = 01$, nous avons en revanche

$$x = (y_1, \dots, y_i, y_i + 1, \dots, y_{n-1}), \quad (6.2.69)$$

et deux sous-cas à explorer. Si $y_i + 1$ est la dernière lettre de x , alors, d'après la définition de ϕ et l'hypothèse de récurrence, le mot $\phi(x)$ est obtenu à partir de $\phi(y) \in \mathcal{L}_{n-2}$ en y concaténant à sa droite la lettre 1. Nous avons donc $\phi(x) \in \mathcal{L}_{n-1}$. Dans le cas contraire, d'après la définition de ϕ , le mot $\phi(x)$ est obtenu à partir de $\phi(y)$ en substituant la lettre qui correspond à $\phi(y_i \cdot y_{i+1})$ par le facteur $\phi(y_i \cdot y_i + 1) \cdot \phi(y_i + 1 \cdot y_{i+1})$. Encore d'après la définition de ϕ et un simple calcul, nous obtenons l'inégalité

$$\phi(y_i \cdot y_{i+1}) \leq \phi(y_i \cdot y_i + 1) + \phi(y_i + 1 \cdot y_{i+1}), \quad (6.2.70)$$

pour toutes les valeurs possibles de y_i et de y_{i+1} . Finalement, comme $\phi(y_i \cdot y_i + 1) = -1$ implique $\phi(y_i \cdot y_{i+1}) = -1$, et d'après l'hypothèse de récurrence, nous avons bien $\phi(x) \in \mathcal{L}_{n-1}$. \square

Proposition 6.2.25. *L'application ϕ définit une bijection entre $AnD(n)$ et \mathcal{L}_{n-1} .*

Démonstration. Le lemme 6.2.24 montre que ϕ est bien définie, *i.e.*, il s'agit bien d'une application de $AnD(n)$ dans \mathcal{L}_{n-1} .

L'injectivité de ϕ provient du fait que tout mot de AnD commence par 0 (car ses générateurs commencent par 0) et du fait que si $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \{0, 1, 2\}$ sont telles que $\mathbf{b} \neq \mathbf{c}$, alors $\phi(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \neq \phi(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$.

Montrons à présent que ϕ est surjective. Nous procédons par récurrence sur la longueur des mots pour montrer que tout élément de \mathcal{L}_{n-1} admet un antécédent dans $AnD(n)$. Le cas de base est vérifié car $\mathcal{L}_0 = \{\epsilon\}$, $\phi(0) = \epsilon$ et $0 = \mathbf{1} \in AnD$. Soit maintenant u un élément de \mathcal{L}_{n-1} . Il est évident, d'après la définition de ϕ , qu'il existe un élément de $TN_3(n)$ tel que $\phi(x) = u$. Montrons que x est également un élément de AnD . Nous trois cas à examiner suivant la dernière lettre \mathbf{a} de u .

Cas 1. Si $\mathbf{a} = 0$, alors x se termine par un suffixe 00, 11, ou 22. Posons $y := (x_1, \dots, x_{n-1})$. Nous avons $x = y \circ_{n-1} 00$, et, comme $\phi(y)$ est un préfixe de $\phi(x)$, y est par hypothèse de récurrence un élément de $AnD(n-1)$. Ceci implique donc que x est un élément de AnD .

Cas 2. Si $\mathbf{a} = 1$, alors x se termine par un suffixe 01, 12, ou 20. Posons $y := (x_1, \dots, x_{n-1})$. Nous avons $x = y \circ_{n-1} 01$, et, comme $\phi(y)$ est ici aussi un préfixe de $\phi(x)$, y est par hypothèse de récurrence un élément de $AnD(n-1)$. Ceci implique donc que x est un élément de AnD .

Cas 3. Si $\mathbf{a} = -1$, il existe dans u une occurrence de 1. Ceci implique l'existence d'un facteur $x_i \cdot x_{i+1}$ égal à 01, 12, ou 20 dans x . Prenons i maximal. Comme la dernière lettre de u est -1 , il existe une lettre à droite de x_{i+1} . La maximalité de i implique qu'il y a exactement six possibilités pour le facteur $x_i \cdot x_{i+1} \cdot x_{i+2}$ qui se regroupent en deux cas.

Cas 3.1. Si $x_i \cdot x_{i+1} \cdot x_{i+2} \in \{011, 122, 200\}$, on pose $y := (x_1, \dots, x_i, x_{i+2}, \dots, x_n)$. Comme dans ce cas, $\phi(x_i \cdot x_{i+2}) = \phi(x_i \cdot x_{i+1}) + \phi(x_{i+1} \cdot x_{i+2})$, on a $y \in \mathcal{L}_{n-2}$, et par hypothèse de récurrence, y est dans AnD . Étant donné que $x = y \circ_{i+1} 00$, x l'est également.

Cas 3.2. Si $x_i \cdot x_{i+1} \cdot x_{i+2} \in \{010, 121, 202\}$, on pose $y := (x_1, \dots, x_i, x_{i+2}, \dots, x_n)$. Comme dans ce cas, $\phi(x_i \cdot x_{i+2}) = \phi(x_i \cdot x_{i+1}) + \phi(x_{i+1} \cdot x_{i+2})$, on a $y \in \mathcal{L}_{n-2}$, et par hypothèse de récurrence, y est dans AnD . Étant donné que $x = y \circ_i 01$, x l'est également. \square

La proposition 6.2.25 montre que l'on peut interpréter les éléments de AnD d'arité n comme des animaux dirigés de taille n . La série de Hilbert de AnD est donc de la forme

$$F_{AnD}(t) = \frac{2t}{3t - 1 + \sqrt{1 - 2t - 3t^2}} - 1 = t + 2t^2 + 5t^3 + 13t^4 + 35t^5 + 96t^6 + 267t^7 + \dots, \quad (6.2.71)$$

et ses coefficients forment la suite [A005773](#) de [Slo].

6.2.11 Une opérade sur les compositions d'entiers segmentées

Soit la sous-opérade ns $SComp$ de TN_3 engendrée par les éléments 00, 01 et 02. Comme $FCat^{(2)}$ est la sous-opérade ns de TN engendrée par 00, 01 et 02 et que TN_3 est un quotient de TN , $SComp$ est un quotient de $FCat^{(2)}$. Voici les premiers éléments de $SComp$, arité par arité :

- arité 1 : 0 ;
- arité 2 : 00, 01, 02 ;
- arité 3 : 000, 001, 002, 010, 011, 012, 020, 021, 022.

Les éléments de $SComp$ sont caractérisés de la manière suivante :

Lemme 6.2.26. *Les éléments de l'opérade ns $SComp$ sont exactement les mots sur l'alphabet $\{0, 1, 2\}$ dont la première lettre est 0.*

Démonstration. Il est immédiat que tous les mots de $SComp$ sont des mots sur l'alphabet $\{0, 1, 2\}$. Il commencent par 0 car les générateurs 00, 01 et 02 commencent par 0.

Montrons que $SComp$ permet d'engendrer tous les mots qui vérifient les conditions du lemme. Nous procédons par récurrence sur la longueur des mots. L'unique mot de longueur 1 est $0 = \mathbf{1}$ et il figure bien dans $SComp$. Soit x un mot de longueur $n \geq 2$ qui respecte les conditions du lemme. Si x ne possède aucune occurrence ni de 1 ni de 2, x est obtenu en réalisant des substitutions partielles du générateur 00 avec lui-même. Sinon, comme la première lettre de x est 0, il existe dans x un facteur $x_i \cdot x_{i+1} =: g$ égal à 01 ou à 02. En posant

$$y := (x_1, \dots, x_i, x_{i+2}, \dots, x_n), \quad (6.2.72)$$

nous avons $x = y \circ_i g$. Le mot y respecte les conditions du lemme, et, par hypothèse de récurrence, il est engendré par $SComp$. Le mot x l'est donc également. \square

Nous déduisons du lemme 6.2.26 que la série de Hilbert de $SComp$ est

$$F_{SComp}(t) = \frac{t}{1 - 3t} = t + 3t^2 + 9t^3 + 27t^4 + 81t^5 + 243t^6 + \dots. \quad (6.2.73)$$

Une *composition d'entiers segmentée* [NT07] est une suite finie $S := (S_1, \dots, S_\ell)$ de compositions d'entiers. Sa taille est la somme des tailles des compositions d'entiers S_i pour tout $i \in [n]$. Le nombre de compositions d'entiers segmentées de taille $n \geq 1$ est 3^{n-1} .

Une composition d'entiers segmentée $S := (S_1, \dots, S_\ell)$ peut être encodée par un *diagramme ruban*. On considère pour cela les diagrammes ruban des compositions d'entiers S_1, \dots, S_ℓ où l'on marque les premières cases de chacun d'eux. On colle ensuite ensemble ces diagrammes de

gauche à droite, *i.e.*, pour tout $i \in [\ell - 1]$, on juxtapose la première case du diagramme de S_{i+1} juste à droite de la dernière case du diagramme de S_i .

Il existe une bijection simple entre les mots de longueur $n \geq 1$ qui satisfont les conditions du lemme 6.2.26 et les compositions d'entiers segmentées de taille n . Étant donné un tel mot x , celui-ci se factorise en

$$x = 0u^{(1)} \cdot 0u^{(2)} \cdots 0u^{(\ell)}, \quad (6.2.74)$$

où les mots $u^{(i)}$ sont sur l'alphabet $\{1, 2\}$. On associe à x la composition d'entiers segmentée (S_1, \dots, S_ℓ) où pour tout $i \in [\ell]$, S_i est la composition d'entiers associée au mot $0u^{(i)'}$ selon (6.2.58), où $u^{(i)'}$ est le mot $u^{(i)}$ dans lequel ses lettres sont décrémentées.

De la même manière que ce que nous avons fait dans le cas de l'opérade ns $Comp$, la substitution partielle de $SComp$ peut être interprétée en termes de diagrammes de compositions d'entiers segmentées.

6.2.12 L'opérade diassociative

Soit $M := \{0, 1\}$ le sous-monoïde du monoïde multiplicatif \cdot . Soit \mathcal{P} la sous-opérade ns de TM engendrée par l'ensemble $\{01, 10\}$. Voici les premiers éléments de \mathcal{P} , arité par arité :

- arité 1 : 1 ;
- arité 2 : 01, 10 ;
- arité 3 : 001, 010, 100 ;
- arité 4 : 0001, 0010, 0100, 1000.

L'objectif de ce paragraphe est de montrer que \mathcal{P} est isomorphe à l'opérade *diassociative*. Rappelons que cette opérade, introduite par Loday [Lod01] (voir aussi [Zin10]), est engendrée par deux éléments d'arité deux \dashv et \vdash , appelés respectivement *gauche* et *droite*, et soumis aux relations suivantes :

$$\dashv \circ_1 \dashv = \dashv \circ_2 \dashv = \dashv \circ_2 \vdash, \quad (6.2.75)$$

$$\dashv \circ_1 \vdash = \vdash \circ_2 \dashv, \quad (6.2.76)$$

$$\vdash \circ_2 \vdash = \vdash \circ_1 \vdash = \vdash \circ_1 \dashv. \quad (6.2.77)$$

Cette opérade — que l'on note *Dias* — est non symétrique, ensembliste, binaire et quadratique et est le dual de Koszul de l'opérade ns dendriforme (voir le paragraphe 3.2.4 du chapitre 3). La série de Hilbert de *Dias* est

$$F_{Dias}(t) = \frac{t}{(1-t)^2} = t + 2t^2 + 3t^3 + 4t^4 + \cdots. \quad (6.2.78)$$

Les éléments de \mathcal{P} sont caractérisés de la manière suivante :

Lemme 6.2.27. *Les éléments de l'opérade ns \mathcal{P} sont exactement les mots sur l'alphabet $\{0, 1\}$ qui possèdent une unique lettre 1.*

Démonstration. On montre facilement par récurrence sur la longueur des mots, et en utilisant le lemme 6.2.1, que tout élément de \mathcal{P} respecte la condition du lemme.

Montrons par récurrence sur la longueur des mots que \mathcal{P} contient tous les mots qui vérifient la condition du lemme. Soit x un mot sur l'alphabet $\{0, 1\}$ possédant une unique occurrence de 1. Si $x = 1$, x est bien un élément de \mathcal{P} puisque $x = \mathbf{1}$. Sinon, il existe dans x un facteur $x_i \cdot x_{i+1}$ de x égal à 01 ou 10. Sans perte de généralité, supposons $x_i \cdot x_{i+1} = 01$ et posons

$$y := (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{|x|}). \quad (6.2.79)$$

Le mot y possède clairement une unique occurrence de 1, et ainsi, par hypothèse de récurrence, y est un élément de \mathcal{P} . Étant donné que $x = y \circ_i 01$, x est également un élément de \mathcal{P} . \square

Nous déduisons du lemme 6.2.27 que les opérades \mathcal{P} et $Dias$ ont la même série de Hilbert.

Proposition 6.2.28. *Les opérades ns $Dias$ et \mathcal{P} sont isomorphes.*

Démonstration. Considérons l'opérade ns ensembliste $\mathcal{Q} := \bigsqcup_{n \geq 1} \mathcal{Q}(n)$ où

$$\mathcal{Q}(n) := \{(j, n) : j \in [n]\}, \quad (6.2.80)$$

et la substitution partielle est définie par

$$(j, n) \circ_i (k, m) := \begin{cases} (j + m - 1, n + m - 1) & \text{si } i < j, \\ (j + k - 1, n + m - 1) & \text{si } i = j, \\ (j, n + m - 1) & \text{si } i > j. \end{cases} \quad (6.2.81)$$

Il est connu (voir [Cha05]) que l'opérade $Dias$ est isomorphe à \mathcal{Q} pour l'isomorphisme d'opérade $\phi : Dias \rightarrow \mathcal{Q}$ défini par $\phi(-) := (1, 2)$ et $\phi(\vdash) := (2, 2)$.

Considérons à présent l'application $\psi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ définie par tout $u := 0 \dots 010 \dots 0 \in \mathcal{P}(n)$ par $\psi(0 \dots 1 \dots 0) := (j, n)$ où la lettre 1 est en j^e position dans u . D'après le lemme 6.2.27, ψ est bien définie et est de plus une bijection. Une inspection directe montre que ψ est un morphisme d'opérade. Ainsi, \mathcal{P} et $Dias$ sont isomorphes pour l'isomorphisme d'opérade $\phi^{-1} \circ \psi : \mathcal{P} \rightarrow Dias$ qui vérifie $(\phi^{-1} \circ \psi)(10) = \dashv$ et $(\phi^{-1} \circ \psi)(01) = \vdash$. \square

6.3 L'algèbre de Hopf de l'opérade des arbres plans enracinés

Nous appliquons ici, à l'opérade APE des arbres plans enracinés définie dans le paragraphe 6.2.5, la construction rappelée dans le paragraphe 3.3.2 du chapitre 3 qui sur la donnée d'une opérade ensembliste produit une algèbre de Hopf non commutative.

6.3.1 L'algèbre de Hopf des forêts planes enracinées

Forêts ordonnées d'arbres plans enracinés

Commençons par quelques définitions sur les forêts ordonnées d'arbres plans enracinés. Une *forêt ordonnée d'arbres plans enracinés* F est une suite d'arbres plans enracinés qui possèdent chacun au moins deux nœuds. La *taille* de F est son nombre d'arêtes. Dans ce qui suit, nous appelons simplement *forêt* une forêt ordonnée d'arbres plans enracinés et *arbre* un arbre plan enraciné.

On appelle i^e *nœud* d'une forêt F le i^e nœud que l'on rencontre en visitant les nœuds de F selon un parcours en profondeur gauche droite. Par convention, la racine de l'arbre le plus à gauche de F est son 0^e nœud. Pour faire référence aux arêtes de F , on note par r_{ij} toute arête de F qui connecte son i^e nœud à son j^e nœud. Par convention, on impose $i > j$. Avec cette notation, nous pouvons encoder une forêt par l'ensemble des éléments r_{ij} qui sont des arêtes de F . Par extension, on note $r_{ij} \in F$ si r_{ij} est une arête de F . La figure 6.10 illustre un exemple d'un tel encodage.

On appelle i^e *arête* de F la i^e arête que l'on rencontre en visitant les arêtes de F selon un parcours en profondeur. Par convention, la première arête visitée est la 1^e arête de F .

Une arête r_{ij} de F est dite *attachée* au j^e nœud de F . L'*extrémité* de r_{ij} est le i^e nœud de F . L'arête r_{ij} est l'*arête mère* d'une arête $r_{k\ell}$ de F si $\ell = i$. Autrement dit, l'arête $r_{k\ell}$ est attachée à l'extrémité de r_{ij} dans F . L'arête r_{ij} est l'*arête sœur gauche* de $r_{k\ell}$ si $j = \ell$ et $i < k$. Autrement dit, les arêtes r_{ij} et $r_{k\ell}$ sont toutes deux attachées au j^e nœud de F et le i^e nœud est à gauche du k^e nœud dans F . La notion d'*arête sœur droite* est définie de manière symétrique.

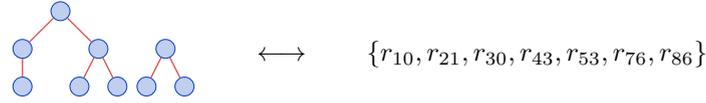


FIGURE 6.10 – Une forêt ordonnée d'arbres plans enracinés et son ensemble d'arêtes.

Éléments de base

Considérons l'algèbre de Hopf $\mathbf{APE} := \mathfrak{H}_{APE}$. Voici ses premiers éléments de base :

- degré 0 : \mathbf{E}_0 ;
- degré 1 : \mathbf{E}_{01} ;
- degré 2 : \mathbf{E}_{011} , \mathbf{E}_{012} , $\mathbf{E}_{01|01}$;
- degré 3 : \mathbf{E}_{0111} , \mathbf{E}_{0112} , \mathbf{E}_{0121} , \mathbf{E}_{0122} , \mathbf{E}_{0123} , $\mathbf{E}_{011|01}$, $\mathbf{E}_{012|01}$, $\mathbf{E}_{01|011}$, $\mathbf{E}_{01|012}$, $\mathbf{E}_{01|01|01}$.

D'après la construction du paragraphe 3.3.2 du chapitre 3, et d'après l'interprétation des éléments de l'opérade APE en termes d'arbres plans enracinés évoquée dans le paragraphe 6.2.5, nous pouvons interpréter les éléments de la base élémentaire de \mathbf{APE} en termes de forêts. Avec cette interprétation, le degré d'un élément \mathbf{E}_F de \mathbf{APE} est donné par le nombre d'arêtes de la forêt F et les éléments indécomposables de \mathbf{APE} sont les \mathbf{E}_T où T est un arbre.

Série de Hilbert

D'après le lemme 3.3.2, et étant donné l'expression la série de Hilbert de APE donnée en (6.2.22) dans le chapitre 6, celle de \mathbf{APE} vérifie

$$F_{\mathbf{APE}}(t) = \frac{2t}{4t - 1 + \sqrt{1 - 4t}} \quad (6.3.1)$$

$$= 1 + \sum_{n \geq 1} \binom{2n-1}{n} t^n \quad (6.3.2)$$

$$= 1 + t + 3t^2 + 10t^3 + 35t^4 + 126t^5 + 462t^6 + 1716t^7 + 6435t^8 + \dots \quad (6.3.3)$$

Exemples de produits et de coproduits

Voyons à présent quelques exemples. Nous avons dans \mathbf{APE}

$$\mathbf{E}_{0122|01} \cdot \mathbf{E}_{011|01} = \mathbf{E}_{0122|01|011|01}, \quad (6.3.4)$$

et, lorsque l'on interprète les éléments de (6.3.4) en termes de forêts, nous obtenons :

$$\mathbf{E}_{\text{forêt 1}} \cdot \mathbf{E}_{\text{forêt 2}} = \mathbf{E}_{\text{forêt 3}}. \quad (6.3.5)$$

The diagram shows the product of two forests. The first forest has a root with two children. The second forest has a root with two children. The product forest has a root with four children, representing the concatenation of the two forests.

Nous avons également

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{E}_{012122}) &= 1 \otimes \mathbf{E}_{012122} + \mathbf{E}_{01} \otimes \mathbf{E}_{012|011} + \mathbf{E}_{011} \otimes \mathbf{E}_{01|011} + \mathbf{E}_{012} \otimes \mathbf{E}_{012|01} \\ &\quad + \mathbf{E}_{0112} \otimes \mathbf{E}_{01|01} + \mathbf{E}_{0121} \otimes \mathbf{E}_{011} + \mathbf{E}_{0122} \otimes \mathbf{E}_{012} + \mathbf{E}_{01122} \otimes \mathbf{E}_{01} \\ &\quad + \mathbf{E}_{01212} \otimes \mathbf{E}_{01} + \mathbf{E}_{012122} \otimes 1, \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

et, de même, lorsque l'on interprète les éléments de (6.3.6) en termes de forêts, nous obtenons :

$$\Delta \left(\mathbf{E} \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \quad / \backslash \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \end{array} \right) = 1 \otimes \mathbf{E} \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \end{array} + \mathbf{E} \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \end{array} \otimes \mathbf{E} \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \end{array} + \mathbf{E} \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \end{array} \otimes \mathbf{E} \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \end{array} + \mathbf{E} \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \end{array} \otimes \mathbf{E} \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \end{array} + \mathbf{E} \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \end{array} \otimes \mathbf{E} \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \end{array} + \mathbf{E} \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \end{array} \otimes \mathbf{E} \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \end{array} + \mathbf{E} \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \end{array} \otimes 1. \tag{6.3.7}$$

Une définition alternative du coproduit

Nous définissons à présent sur l'ensemble $R := \{r_{ij} : 0 \leq j < i\}$ de toutes les arêtes possibles la relation binaire \rhd par

$$r_{ij} \rhd r_{k\ell} \quad \text{si et seulement si} \quad j = k \quad \text{ou} \quad j = \ell \text{ et } i < k. \tag{6.3.8}$$

Un idéal d'une forêt F pour la relation \rhd est un ensemble I d'arêtes de F tel que

$$r_{ij} \in I, r_{k\ell} \in F, \text{ et } r_{ij} \rhd r_{k\ell} \quad \text{impliquent} \quad r_{k\ell} \in I. \tag{6.3.9}$$

Lemme 6.3.1. *Soit T un arbre et I un idéal de T . Alors, les arêtes de I forment un arbre dont la racine est celle de T . De plus, si une arête de T appartient à I alors, si elle existe, sa sœur droite est également dans I .*

Démonstration. Montrons la première partie du lemme. Si une arête r_{ij} appartient à I et qu'elle possède une arête mère $r_{k\ell}$, alors, comme ces deux arêtes possèdent un nœud en commun et d'après notre notation des arêtes, nous avons $j = k$. Par conséquent $r_{ij} \rhd r_{k\ell}$, ce qui implique $r_{k\ell} \in I$. Ceci montre que si une arête est dans I alors toutes ses arêtes ancêtres le sont également. Le sous-graphe de T induit par I est donc un arbre, de racine égale à celle de T .

Montrons la seconde partie du lemme. Si une arête r_{ij} appartient à I et qu'elle possède une arête sœur droite $r_{k\ell}$ alors, comme ces deux arêtes sont sœurs, elles partagent le même nœud parent et donc $j = \ell$. De plus, comme les arêtes sont numérotées selon le parcours en profondeur gauche droite de T , on a $i < k$ et par conséquent $r_{ij} \rhd r_{k\ell}$, ce qui montre $r_{k\ell} \in I$. \square

On appelle *coloriage admissible* d'un arbre T tout idéal de T . Un coloriage admissible I permet, en s'appuyant sur le lemme 6.3.1, de construire à partir de T un couple $T|_I := (S, F)$ où S est l'arbre T restreint aux arêtes de I et à leurs nœuds adjacents et où F est la forêt composée des arêtes de T qui ne sont pas dans I ainsi que de leurs nœuds adjacents. Chaque composante connexe de F forme un arbre dont la racine est son unique nœud qui connectait dans T la racine de T par le chemin le plus court. Ces arbres apparaissent dans F de gauche à droite dans le même ordre qu'il apparaissent en tant que sous-arbres dans T . La figure 6.11 montre un exemple de coloriage admissible et le couple que l'on obtient à partir de celui-ci.

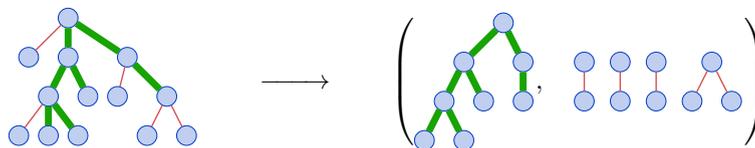


FIGURE 6.11 – Un arbre plan enraciné T et le couple $T|_I := (S, F)$ où I est le coloriage admissible qui contient les arêtes $r_{20}, r_{32}, r_{53}, r_{63}, r_{72}, r_{80}$ et $r_{10,8}$.

Proposition 6.3.2. Soit T un arbre. Un tenseur de la forme $\mathbf{E}_S \otimes \mathbf{E}_F$ apparaît dans $\Delta(\mathbf{E}_T)$ avec un coefficient à $1_{\mathbb{K}}$ si et seulement s'il existe un coloriage I de T tel que $T|_I = (S, F)$.

Démonstration. Soient S un arbre et F une forêt constituée de gauche à droite des arbres F_1, \dots, F_ℓ . Par définition du coproduit de **APE**, un tenseur $\mathbf{E}_S \otimes \mathbf{E}_F$ apparaît dans $\Delta(\mathbf{E}_T)$ si et seulement si nous avons l'écriture

$$T = S \circ [G_1, \dots, G_k], \quad (6.3.10)$$

où G_1, \dots, G_k est une suite d'arbres telle qu'il existe un ensemble d'indices

$$E := \{i_1 < \dots < i_\ell\} \quad (6.3.11)$$

vérifiant $G_{i_1} = F_1, \dots, G_{i_\ell} = F_\ell$ et G_j est la forêt vide pour tout $j \notin E$. Ceci est équivalent à dire, d'après l'expression de la substitution partielle en termes d'arbres fournie par le lemme 6.2.11 et d'après le lemme 6.3.1, qu'il existe un unique coloriage I de T tel que $T|_I = (S, F)$. Ceci montre la proposition. \square

Notons $\text{Adm}(T)$ l'ensemble des coloriages admissibles de l'arbre T . Nous pouvons tirer de la proposition 6.3.2 la reformulation du coproduit de **APE** suivante, similaire à celle du coproduit de l'algèbre de Hopf de Connes-Kreimer (voir le paragraphe 2.2.2 du chapitre 2) :

$$\Delta(\mathbf{E}_T) = \sum_{\substack{I \in \text{Adm}(T) \\ (S, F) := T|_I}} \mathbf{E}_S \otimes \mathbf{E}_F. \quad (6.3.12)$$

6.3.2 Une réalisation polynomiale

La F -compatibilité

Posons maintenant $A := \{a_{ij} : 0 \leq j < i\}$ un alphabet infini de variables bi-indexées et non commutatives. Nous définissons de plus sur A la relation binaire \prec par

$$a_{ij} \prec a_{kl} \quad \text{si et seulement si} \quad r_{ij} \uparrow r_{kl}. \quad (6.3.13)$$

Muni de cette relation, A est un \prec -alphabet au sens de la définition donnée dans le paragraphe 2.1.4 du chapitre 2.

Soit F une forêt à n arêtes. Un mot $u := u_1 \dots u_n$ sur A de longueur n est F -compatible si, pour tous $i, j \in [n]$, en notant r (resp. r') la i^e (resp. j^e) arête de F ,

$$r \uparrow r' \quad \text{implique} \quad u_i \prec u_j. \quad (6.3.14)$$

On note dans ce cas $u \Vdash F$.

Considérons par exemple la forêt

$$F := \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \end{array} . \quad (6.3.15)$$

Les mots F -compatibles $u := u_1 u_2 u_3 u_4 u_5$ doivent nécessairement vérifier $u_2 \prec u_1$, $u_2 \prec u_3$, $u_3 \prec u_1$ et $u_4 \prec u_5$. Ainsi, entre autres, les mots $a_{10} a_{21} a_{31} a_{54} a_{64}$, $a_{10} a_{21} a_{31} a_{10} a_{20}$, et $a_{30} a_{10} a_{20} a_{72} a_{82}$ sont F -compatibles.

Un morphisme vers l'algèbre associative libre

Soit $r_A : \mathbf{APE} \rightarrow \mathbb{K}\langle A \rangle$ le morphisme d'algèbre défini linéairement pour tout arbre T par

$$r_A(\mathbf{E}_T) := \sum_{\substack{u \in A^* \\ u \Vdash T}} u. \quad (6.3.16)$$

Notons que (6.3.16) définit r_A sur \mathbf{APE} tout entier car cette dernière est engendrée librement par les éléments \mathbf{E}_T où T est un arbre. Voici quelques exemples :

$$r_A(\mathbf{E}_{01}) = r_A\left(\mathbf{E}_{\begin{smallmatrix} \circ \\ \circ \\ \circ \end{smallmatrix}}\right) = \sum_{u_1} u_1 = \sum_{0 \leq j < i} a_{ij}, \quad (6.3.17)$$

$$r_A(\mathbf{E}_{011}) = r_A\left(\mathbf{E}_{\begin{smallmatrix} \circ \\ \circ \circ \\ \circ \end{smallmatrix}}\right) = \sum_{u_1 \prec u_2} u_1 u_2 = \sum_{0 \leq k < j < i} a_{ij} a_{jk} + \sum_{0 \leq j < i < k} a_{ij} a_{kj}, \quad (6.3.18)$$

$$r_A(\mathbf{E}_{012}) = r_A\left(\mathbf{E}_{\begin{smallmatrix} \circ \\ \circ \\ \circ \circ \end{smallmatrix}}\right) = \sum_{u_2 \prec u_1} u_1 u_2 = \sum_{0 \leq j < i < k} a_{ji} a_{kj} + \sum_{0 \leq j < k < i} a_{ij} a_{kj}, \quad (6.3.19)$$

$$r_A(\mathbf{E}_{01|01}) = r_A\left(\mathbf{E}_{\begin{smallmatrix} \circ \\ \circ \circ \\ \circ \circ \end{smallmatrix}}\right) = \left(\sum_{u_1} u_1\right) \left(\sum_{u_1} u_1\right) = \sum_{\substack{0 \leq j < i \\ 0 \leq k < \ell}} a_{ij} a_{k\ell}. \quad (6.3.20)$$

Un algorithme d'étiquetage

Dans l'objectif de montrer que le morphisme r_A est une réalisation polynomiale de \mathbf{APE} , nous avons besoin de l'ingrédient suivant. Nous introduisons dans ce paragraphe un algorithme qui, sur l'entrée d'un arbre à n nœuds, retourne un arbre de même forme et étiqueté sur l'ensemble $\{0, \dots, n-1\}$.

Algorithme : ÉTIQUETAGEMIN.

Entrée : un arbre plan enraciné T non étiqueté.

Sortie : une version de T étiquetée sur \mathbb{N} .

1. étiqueter la racine de T par 0.
2. Tant qu'il reste au moins un nœud non étiqueté dans T :
 - (a) pour tout nœud x non étiqueté dans T :
 - i. si x est le frère droit d'un nœud étiqueté par i , étiqueter x par $i+1$.
 - ii. Sinon, si x est le fils le plus à gauche d'un nœud étiqueté par i , étiqueter x par $i+1$.

Fin.

La figure 6.12 montre une exécution de l'algorithme ÉTIQUETAGEMIN.

Nous associons à tout arbre T à $n+1$ nœuds le mot sur l'alphabet A

$$m(T) := u_1 \dots u_n, \quad (6.3.21)$$

où $u_i := a_{k\ell}$ si la i^{e} arête de la version de T étiquetée par l'algorithme ÉTIQUETAGEMIN connecte deux nœuds dont le père est étiqueté par ℓ et le fils par k . Par exemple, pour l'arbre considéré dans la figure 6.12, nous obtenons le mot $a_{10} a_{21} a_{31} a_{43} a_{20} a_{32} a_{42} a_{54} a_{52}$. De plus, si F est une forêt, nous lui associons de la même façon le mot

$$m(F) := m(T_1) \cdot \dots \cdot m(T_r), \quad (6.3.22)$$

où F est la concaténation des arbres T_1, \dots, T_r .

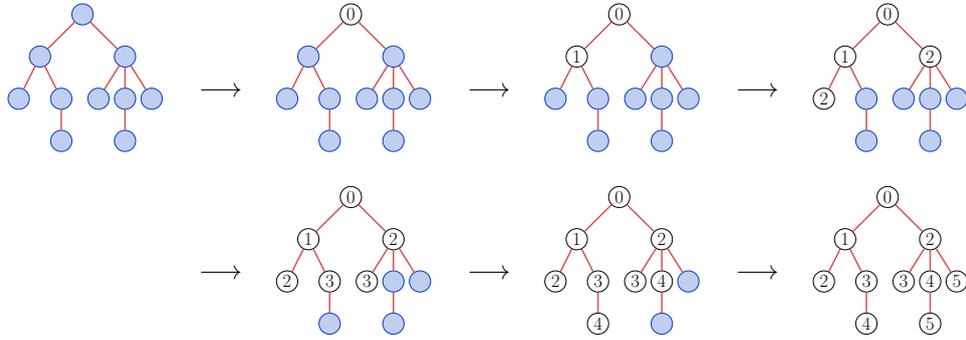


FIGURE 6.12 – Un exemple d'exécution de l'algorithme ÉTIQUETAGEMIN.

Démonstration de la réalisation polynomiale

Lemme 6.3.3. Soit F une forêt. Alors, le mot $m(F)$ est un monôme de $r_A(\mathbf{E}_F)$.

Démonstration. Considérons un nœud de F et ses fils après exécution de l'algorithme ÉTIQUETAGEMIN. Ils sont étiquetés de la manière suivante



où k est le nombre de fils du nœud étiqueté par i . Soit maintenant r (resp. r') la j^{e} (resp. j'^{e}) arête de F . Si r' est la sœur droite de r , alors, d'après (6.3.23), la j^{e} lettre de $m(F) =: u$ est de la forme a_{xy} et la j'^{e} lettre est de la forme a_{zy} avec $x < z$. Nous avons donc $u_j \prec u_{j'}$. De plus, lorsque r est une arête fille de r' , u_j est de la forme a_{xy} et $u_{j'}$ est de la forme a_{yz} . Nous avons dans ce cas aussi $u_j \prec u_{j'}$. Ceci montre que le mot $m(F)$ est F -compatible. Il apparaît donc en tant que monôme dans $r_A(\mathbf{E}_F)$. \square

Soit $\leq_{1\text{ex}}$ l'ordre lexicographique sur l'ensemble des mots sur A où l'on pose $a_{ij} \leq_{1\text{ex}} a_{kl}$ si $i < k$, ou $i = k$ et $j \leq l$.

Lemme 6.3.4. Soit F une forêt. Alors, le mot $m(F)$ est le plus petit monôme pour l'ordre $\leq_{1\text{ex}}$ qui apparaît dans $r_A(\mathbf{E}_F)$.

Démonstration. Notons tout d'abord qu'étant donné que les monômes, vus comme des mots, qui apparaissent dans le polynôme $r_A(\mathbf{E}_F)$ sont tous de même longueur et que les lettres de A sont indexées par des entiers positifs, il existe un plus petit mot dans $r_A(\mathbf{E}_F)$ pour l'ordre $\leq_{1\text{ex}}$.

Nous utilisons dans cette démonstration le lemme 6.3.3 de manière implicite — afin de ne pas surcharger le texte — pour s'assurer du fait que tout mot $m(F)$ apparaît bien en tant que monôme dans $r_A(\mathbf{E}_F)$.

Nous procédons par récurrence sur la taille des forêts. Si F est de taille 1, F est la forêt qui possède une unique arête. Nous avons alors $m(F) = a_{10}$, et comme a_{10} est la plus petite lettre pour l'ordre $\leq_{1\text{ex}}$, le lemme est vérifié. Sinon, supposons que F est de taille supérieure à 2 et qu'elle est obtenue à partir d'une forêt F' par l'ajout d'une arête r_{ij} en dernière position. Nous considérons que ces forêts sont étiquetées par l'algorithme ÉTIQUETAGEMIN. Posons $u' := m(F')$. Nous avons trois cas à examiner.

Cas 1. Si l'arête r_{ij} n'est attachée à aucun des nœuds de F' , la forêt F est la concaténation des arbres de F' et de T , l'arbre à une unique arête. Étant donné que par hypothèse de récurrence, u' est le plus petit mot pour l'ordre $\leq_{1\text{ex}}$ qui soit F' -compatible, le plus petit mot qui est F -compatible est $u' \cdot a_{10}$. D'après la définition de l'application m , nous avons

$$m(F) = m(F') \cdot m(T) = u' \cdot a_{10}, \quad (6.3.24)$$

ce qui est en accord avec le lemme.

Cas 2. Si l'arête r_{ij} est attachée à un nœud y de F' , et que son extrémité x ne possède pas de frère gauche, x est le fils le plus à gauche de y . Ceci implique, par définition de l'algorithme ÉTIQUETAGEMIN, que x est étiqueté par $\mathbf{b} := \mathbf{a} + 1$ où \mathbf{a} est l'étiquette de y . Ainsi, par définition de l'application m , nous avons

$$m(F) = u' \cdot a_{\mathbf{b}\mathbf{a}}, \quad (6.3.25)$$

et $a_{\mathbf{b}\mathbf{a}}$ est la plus petite lettre pour l'ordre $\leq_{1\text{ex}}$ qui est en \prec -relation avec la lettre qui correspond à l'arête mère de r_{ij} . Par hypothèse de récurrence, $m(F)$ vérifie bien le lemme.

Cas 3. Autrement, l'arête r_{ij} est attachée à un nœud y de F' et possède une arête sœur gauche r_{kj} . Notons z l'extrémité de r_{kj} . D'après la définition de l'algorithme ÉTIQUETAGEMIN, x est étiqueté par $\mathbf{b} := \mathbf{a} + 1$ où \mathbf{a} est l'étiquette de z . Par définition de l'application m , nous avons

$$m(F) = u' \cdot a_{\mathbf{b}\mathbf{a}}, \quad (6.3.26)$$

et $a_{\mathbf{b}\mathbf{a}}$ est la plus petite lettre pour l'ordre $\leq_{1\text{ex}}$ qui est en \prec -relation avec la lettre qui correspond à r_{kj} , et, si elle existe, avec la lettre qui correspond à l'arête mère de r_{ij} . Ainsi, et par hypothèse de récurrence, $m(F)$ vérifie le lemme. \square

Lemme 6.3.5. *L'application qui à une forêt F lui associe le mot $m(F)$ est injective.*

Démonstration. Soient F_1 et F_2 deux forêts différentes et s le plus petit indice tel que la s^{e} arête r_{ij} de F_1 est différente de la s^{e} arête $r_{k\ell}$ de F_2 . Soit H la forêt constituée des $s - 1$ premières arêtes communes à F_1 et F_2 et G_1 (resp. G_2) la forêt H à laquelle on ajoute l'arête r_{ij} (resp. $r_{k\ell}$). Nous supposons que ces forêts sont étiquetées selon l'algorithme ÉTIQUETAGEMIN. Remarquons que H est de taille supérieure à 1 puisque les premières arêtes de F_1 et F_2 sont nécessairement égales. Nous avons plusieurs cas à considérer.

Cas 1. Si r_{ij} n'est pas attachée à un nœud de H et $r_{k\ell}$ n'est pas non plus attachée à un nœud de H , alors on a $G_1 = G_2$, ce qui montre que les arêtes r_{ij} et $r_{k\ell}$ sont les mêmes. Ceci est contradictoire avec nos hypothèses. Il y a donc au moins une des deux arêtes parmi r_{ij} ou $r_{k\ell}$ qui est attachée à un nœud de H .

Cas 2. Supposons sans perte de généralité que r_{ij} est attachée à un nœud y de H mais pas $r_{k\ell}$. Notons x l'extrémité de r_{ij} . Nous avons, par définition de l'application m , $m(G_1) = m(H) \cdot a_{\mathbf{b}\mathbf{a}}$ où \mathbf{b} est l'étiquette de x et $\mathbf{b} - 1$ est l'étiquette du frère gauche de x , ou s'il n'en a pas, de son père y . Maintenant, comme H possède au moins une arête, nous avons $\mathbf{b} \geq 2$, ce qui implique $a_{\mathbf{b}\mathbf{a}} \neq a_{10}$. Finalement, étant donné que $m(G_2) = m(H) \cdot a_{10}$ et que, par définition de l'application m , le mot $m(G_1)$ (resp. $m(G_2)$) est un préfixe de $m(F_1)$ (resp. $m(F_2)$), nous avons $m(F_1) \neq m(F_2)$.

Cas 3. Supposons que r_{ij} et $r_{k\ell}$ sont attachées respectivement à des nœuds x et y de H . Comme ces arêtes sont les plus à droite dans G_1 et G_2 , x et y figurent dans la branche la plus à droite de H . D'après l'algorithme ÉTIQUETAGEMIN, les étiquettes des nœuds sur une branche croissent strictement de la racine vers les feuilles. Ainsi, les étiquettes de x et de y sont différentes. Nous avons donc $m(G_1) = m(H) \cdot a_{\mathbf{b}\mathbf{a}}$ où \mathbf{b} est l'étiquette de l'extrémité de r_{ij} et \mathbf{a} l'étiquette de x , et $m(G_2) = m(H) \cdot a_{\mathbf{d}\mathbf{c}}$ où \mathbf{d} est l'étiquette de l'extrémité de $r_{k\ell}$ et \mathbf{c} l'étiquette de y . Comme $\mathbf{a} \neq \mathbf{c}$, $a_{\mathbf{b}\mathbf{a}} \neq a_{\mathbf{d}\mathbf{c}}$, et étant donné que $m(G_1)$ (resp. $m(G_2)$) est un préfixe de $m(F_1)$ (resp. $m(F_2)$), nous avons $m(F_1) \neq m(F_2)$. \square

Théorème 6.3.6. *Le morphisme r_A défini en (6.3.16) est une réalisation polynomiale d'algèbre de Hopf de \mathbf{APE} .*

Démonstration. D'après la définition 2.1.12 du chapitre 2, nous devons montrer que, pour tout alphabet A muni de la relation \prec , r_A est un morphisme injectif d'algèbre et que l'on a l'identité

$$(r_A \otimes r_A) \Delta(\mathbf{E}_F) = r_{A \oplus A}(\mathbf{E}_F), \quad (6.3.27)$$

pour toute forêt F .

Le morphisme r_A est par définition un morphisme d'algèbre. En outre, nous avons, d'après le lemme 6.3.4 pour toute forêt F ,

$$r_A(\mathbf{E}_F) = m(F) + \sum_{\substack{u \Vdash F \\ m(F) \prec_{\text{lex}} u}} u. \quad (6.3.28)$$

Maintenant, étant donné que par le lemme 6.3.5, l'application $F \mapsto m(F)$ est injective, nous obtenons par triangularité le fait que r_A est un morphisme injectif.

Comme r_A est un morphisme d'algèbre, il suffit pour montrer (6.3.27) de se restreindre au cas où $F =: T$ est un arbre. Soient u un monôme qui apparaît dans $r_{A \oplus A}(\mathbf{E}_T)$, r_{ij} la s^e arête de T et r_{kl} la t^e arête de T . Si u_s est une lettre de la seconde copie de A et que l'on a $r_{ij} \uparrow r_{kl}$, alors, comme u est T -compatible, nous avons $u_s \prec u_t$. Ainsi, u_t est aussi une lettre qui provient de la seconde copie de A . Ceci implique que le mot u peut être identifié à un tenseur $v \otimes w$ où les lettres de v sont dans la seconde copie de A et celles de w dans la première et tel qu'il existe un coloriage admissible I tel que $T|_I = (S, R)$, v est S -compatible et w est R -compatible. D'après la proposition 6.3.2, $v \otimes w$ apparaît aussi dans $(r_A \otimes r_A) \Delta(\mathbf{E}_T)$.

Inversement, si un tenseur $v \otimes w$ apparaît dans $(r_A \otimes r_A) \Delta(\mathbf{E}_T)$, alors, par la proposition 6.3.2, il existe un coloriage admissible I de T tel que $T|_I = (S, R)$, v est S -compatible et w est R -compatible. Il suit, d'après la définition de la relation \prec que $v \otimes w$ apparaît également dans $r_{A \oplus A}(\mathbf{E}_T)$. Ceci termine de montrer (6.3.27). \square

Voici un exemple de doublement d'alphabet pour calculer le coproduit d'un élément de \mathbf{APE} . Nous avons d'un côté

$$\Delta \left(\mathbf{E} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right) = 1 \otimes \mathbf{E} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} + \mathbf{E} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \otimes \mathbf{E} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} + \mathbf{E} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \otimes \mathbf{E} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} + \mathbf{E} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \otimes \mathbf{E} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} + \mathbf{E} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \otimes 1, \quad (6.3.29)$$

et ainsi,

$$\begin{aligned} (r_A \otimes r_A) \left(\mathbf{E} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right) &= 1 \otimes r_A \left(\mathbf{E} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right) + r_A \left(\mathbf{E} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right) \otimes r_A \left(\mathbf{E} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right) + r_A \left(\mathbf{E} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right) \otimes r_A \left(\mathbf{E} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right) \\ &\quad + r_A \left(\mathbf{E} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right) \otimes r_A \left(\mathbf{E} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right) + r_A \left(\mathbf{E} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right) \otimes 1. \end{aligned} \quad (6.3.30)$$

De l'autre coté, en notant B la seconde copie de A nous avons

$$\begin{aligned}
 & r_{A \oplus B} \left(\mathbf{E} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right) \\
 &= \sum_{\substack{u_1, u_2, u_3 \in A \oplus B \\ u_1 \prec u_2 \\ u_3 \prec u_2}} u_1 u_2 u_3 \\
 &= \sum_{\substack{u_1, u_2, u_3 \in A \\ u_1 \prec u_2 \\ u_3 \prec u_2}} u_1 u_2 u_3 + \sum_{\substack{u_1, u_2 \in A \\ u_3 \in B \\ u_1 \prec u_2 \\ u_3 \prec u_2}} u_1 u_2 u_3 + \sum_{\substack{u_1, u_3 \in A \\ u_2 \in B \\ u_1 \prec u_2 \\ u_3 \prec u_2}} u_1 u_2 u_3 + \sum_{\substack{u_2, u_3 \in A \\ u_1 \in B \\ u_1 \prec u_2 \\ u_3 \prec u_2}} u_1 u_2 u_3 \\
 &\quad + \sum_{\substack{u_1 \in A \\ u_2, u_3 \in B \\ u_1 \prec u_2 \\ u_3 \prec u_2}} u_1 u_2 u_3 + \sum_{\substack{u_2 \in A \\ u_1, u_3 \in B \\ u_1 \prec u_2 \\ u_3 \prec u_2}} u_1 u_2 u_3 + \sum_{\substack{u_3 \in A \\ u_1, u_2 \in B \\ u_1 \prec u_2 \\ u_3 \prec u_2}} u_1 u_2 u_3 + \sum_{\substack{u_1, u_2, u_3 \in B \\ u_1 \prec u_2 \\ u_3 \prec u_2}} u_1 u_2 u_3 \\
 &= \sum_{\substack{u_1, u_2, u_3 \in A \\ u_1 \prec u_2 \\ u_3 \prec u_2}} 1 \otimes u_1 u_2 u_3 + 0 + \sum_{\substack{u_1, u_3 \in A \\ u_2 \in B}} u_2 \otimes u_1 u_3 + 0 \\
 &\quad + \sum_{\substack{u_1 \in A \\ u_2, u_3 \in B \\ u_1 \prec u_2 \\ u_3 \prec u_2}} u_2 u_3 \otimes u_1 + 0 + \sum_{\substack{u_3 \in A \\ u_1, u_2 \in B \\ u_1 \prec u_2}} u_1 u_2 \otimes u_3 + \sum_{\substack{u_1, u_2, u_3 \in B \\ u_1 \prec u_2 \\ u_3 \prec u_2}} u_1 u_2 u_3 \otimes 1 \\
 &= 1 \otimes r_A \left(\mathbf{E} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right) + r_B \left(\mathbf{E} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right) \otimes r_A \left(\mathbf{E} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right) + r_B \left(\mathbf{E} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right) \otimes r_A \left(\mathbf{E} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right) \\
 &\quad + r_B \left(\mathbf{E} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right) \otimes r_A \left(\mathbf{E} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right) + r_B \left(\mathbf{E} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right) \otimes 1.
 \end{aligned}$$

(6.3.31)

