Combinatoire des groupes linéaires finis

Dans ce chapitre, nous exposons la théorie des groupes de matrices $\mathrm{GL}(n,k)$, où $k = \mathbb{F}_q$ est un corps fini. Nous rappelons la combinatoire des classes de conjugaison de telles matrices (section 6.1), et nous présentons un résultat analogue à l'isomorphisme de Frobenius-Schur 1.5 (section 6.2), ce qui permettra de calculer les caractères des groupes $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)$ (section 6.3). On montre alors que les **caractères irréductibles** de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)$ sont en bijection avec les familles de partitions $\mathbb{\lambda} : L/\mathfrak{G} \to \mathscr{Y}$ de poids n, l'ensemble d'indexation $L/\mathfrak{G}$ étant en bijection avec

$$\overline{\mathbb{F}_q}^{\times} / \mathrm{Galois}(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q),$$

c'est-à-dire l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles sur $\mathbb{F}_q$ et différents de X. Enfin, dans la section 6.4, on rappelle les résultats de Dudko et Fulman (*cf.* [Dud08, Ful06]) concernant l'asymptotique de la mesure de Plancherel de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)$ sur ces familles de partitions.

Il existe en réalité deux familles fondamentales de caractères de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)$: les caractères irréductibles, et les **caractères de Deligne-Lusztig** obtenus par induction parabolique à partir de caractères de tores. Ces derniers fourniront des mesures de probabilité sur des familles de partitions $\mathbb{\lambda}$ réduites à un élément, ce qui mènera à l'étude de la q-mesure de Plancherel (chapitres 7 et 8).

6.1 Réduction de Jordan-Frobenius et classes de conjugaison

Si $q = p^e$ est la puissance d'un nombre premier, on rappelle qu'il existe à isomorphisme près un unique corps fini $\mathbb{F}_q$ de cardinal q, et on peut le réaliser comme corps de rupture (et de décomposition) du polynôme $X^q - X$ sur $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Les extensions de corps de $\mathbb{F}_q$ sont les $\mathbb{F}_{q^d}$, et elles sont toutes galoisiennes ; le groupe $\mathrm{Galois}(\mathbb{F}_{q^d}/\mathbb{F}_q)$ est cyclique d'ordre d et est engendré par le morphisme de Frobenius

$$\sigma : x \mapsto x^q.$$

La clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}_q}$ a pour groupe de Galois sur $\mathbb{F}_q$ la limite profinie $\overline{\mathbb{Z}} = \varprojlim_d \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, et ce groupe contient $\mathbb{Z} = \langle \sigma \rangle$ comme sous-groupe dense.

Soit $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$ le groupe des matrices inversibles de taille $n \times n$ et à coefficients dans $k = \mathbb{F}_q$. Par représentation matricielle, on peut voir G comme le groupe des isomorphismes linéaires d'un espace vectoriel V de dimension n sur $\mathbb{F}_q$. Un tel espace est de cardinal q^n, et le nombre de familles libres de rang k dans $V = (\mathbb{F}_q)^n$ est

$$(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \cdots (q^n - q^{r-1}) = \prod_{i=1}^{r} (q^n - q^{i-1})\,.$$

En effet, pour construire une famille libre $(v_1, \ldots, v_r)$, on choisit un vecteur non nul v_1, puis un vecteur v_2 qui n'est pas dans l'espace vectoriel $\mathbb{F}_q[v_1]$ engendré par v_1, puis un vecteur v_3 qui n'est pas dans $\mathbb{F}_q[v_1, v_2]$, etc. jusqu'au vecteur v_r qui n'est pas dans $\mathbb{F}_q[v_1, \ldots, v_{r-1}]$. Il y a $q^n - 1$ possibilités pour le premier vecteur, $q^n - q$ pour le second, etc. jusqu'à $q^n - q^{r-1}$ possibilités pour le vecteur v_r, d'où le résultat. Comme un élément de G peut être vu comme la matrice de transition entre la base canonique et une base quelconque $\mathcal{B}'$ de V, on en déduit :

$$\operatorname{card} \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q) = \text{nombre de bases de } V = (q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-1})\,.$$

Dans cette section, on s'intéresse aux classes de conjugaison de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$, c'est-à-dire les classes d'équivalence de matrices pour la relation

$$g_1 \sim g_2 \quad \iff \quad \exists h \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q),\ \ g_1 = h\, g_2\, h^{-1}\,.$$

Nous allons montrer que ces classes de conjugaison sont indexées par des familles de partitions appelées **polypartitions**. Si $u \in \mathrm{M}(n, k)$ est une matrice arbitraire de taille $n \times n$ (pas nécessairement inversible), son action sur $V = k^n$ fournit une structure de $k[X]$-module compatible avec la k-structure préexistante :

$$\forall P \in k[X],\ \ \forall v \in V,\ \ P \cdot v = [P(u)](v)\,.$$

Notons V_u l'espace V considéré comme $k[X]$-module. Comme $k[X]$ est un anneau principal et V_u est finiment engendré sur cet anneau (par exemple par une k-base de V), on peut appliquer le théorème de structure des modules finis sur les anneaux principaux : il existe des polynômes k-irréductibles unitaires $\phi_1, \ldots, \phi_r$ et des partitions $\mu_1, \ldots, \mu_r$ telles que

$$n = \sum_{i=1}^{r} |\mu_i| \deg \phi_i \qquad \text{et} \qquad V_u \simeq_{k[X]} \bigoplus_{i=1}^{r} \bigoplus_{j=1}^{\ell(\mu_i)} k[X]/(\phi_i^{\mu_{i,j}})\,.$$

De plus, les polynômes ϕ_i et les partitions μ_i sont entièrement déterminés par u, et la décomposition de V_u en modules primaires peut être interprétée de la façon suivante : dans une k-base $\mathcal{B}'$ de V, l'action de u sur V est donnée par une matrice diagonale par blocs, les blocs étant les matrices de Jordan $J_{(\phi_i)^{\mu_{i,j}}}$ — on rappelle que

$$J_P = \begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

si $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$. Nous noterons $\mathbb{\mu} = \mathbb{\mu}_u$ l'ensemble des paires (ϕ_i, μ_i) ; c'est une k-polypartition de taille n. La matrice par blocs précédemment évoquée sera notée J_{μ}, et elle est conjuguée à u par la matrice de transition de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}$ désignant la base canonique de $V = k^n$. En particulier, le polynôme minimal m_u et le polynôme χ_u peuvent aisément être retrouvés à partir de la polypartition μ :

$$m_u(X) = \prod_{i=1}^{r} (\phi_i(X))^{\mu_{i,\ell(\mu_i)}} \qquad ; \qquad \chi_u(X) = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{\ell(\mu_i)} (\phi_i(X))^{\mu_{i,j}}\,.$$

La matrice u est donc inversible si et seulement si X n'apparaît pas dans la polypartition μ_u. Si u_1 et u_2 sont deux matrices conjuguées dans $\mathrm{M}(n,k)$ par $h \in \mathrm{GL}(n,k)$, alors h est un isomorphisme de $k[X]$-module entre V_{u_1} et V_{u_2}, car pour tout polynôme P,

$$P(u_2) \circ h = h \circ P(u_1)\,.$$

Par conséquent, V_{u_1} et V_{u_2} ont la même décomposition en $k[X]$-modules primaires, et u_1 et u_2 sont conjuguées à la même matrice J_{μ}. D'autre part, comme la décomposition d'un $k[X]$-module fini est unique, deux matrices J_{λ} et J_{μ} ne peuvent pas être conjuguées. Ainsi :

Proposition 6.1 (Réduction de Jordan-Frobenius)**.** *Les classes de conjugaison de matrices dans* $\mathrm{M}(n,k)$ *sont indexées par les k-polypartitions de poids n, et les classes de matrices inversibles correspondent aux polypartitions dans lesquelles le polynôme X n'apparaît pas. Un représentant de la classe* C_{μ} *est la matrice diagonale par blocs de Jordan* J_{μ}.

Notons M le groupe multiplicatif de $\overline{\mathbb{F}_q}$, et $\mathfrak{G}$ le groupe $\mathrm{Galois}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$. Si $P(X) \neq X$ est un polynôme unitaire irréductible sur $\mathbb{F}_q$, alors il se scinde dans $\overline{\mathbb{F}_q}$ sous la forme

$$P(X) = \prod_{i=1}^{\deg P} (X - \sigma^i(a))\,,$$

où a est une racine (non nulle) de P qui appartient à l'extension $\mathbb{F}_{q^{\deg P}}$. Par conséquent, l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires différents de X s'identifie à l'ensemble quotient $M/\mathfrak{G}$. Nous noterons $\mathscr{Y}(\mathbb{F}_q)$ l'ensemble des fonctions $\mu : M/\mathfrak{G} \to \mathscr{Y}$ qui sont presque nulles, et $\mathscr{Y}_n(\mathbb{F}_q)$ le sous-ensemble constitué des fonctions de poids n, c'est-à-dire que

$$\|\mu\| = \sum_{P \in M/\mathfrak{G}} \deg P\ |\mu(P)| = n$$

si $\mu \in \mathscr{Y}_n(\mathbb{F}_q)$. D'après ce qui précède :

Corollaire 6.2 (Classes de conjugaison de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)$)**.** *Les classes de conjugaison de* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)$ *sont en bijection avec les polypartitions de* $\mathscr{Y}_n(\mathbb{F}_q)$.

Exemple. Supposons $k = \mathbb{F}_3$ et $n = 2$. Pour tout q et tout n, le polynôme $X^{q^n} - X$ se scinde dans $\mathbb{F}_q[X]$ en le produit de tous les polynômes irréductibles unitaires de degré d divisant n. Par conséquent, comme

$$X^9 - X = X\,(X+1)\,(X+2)\,(X^2+1)\,(X^2+X+2)\,(X^2+2X+2)$$

dans $\mathbb{F}_3[X]$, les classes de conjugaison de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_3)$ sont indexées par les polypartitions de $\mathscr{Y}_2(\mathbb{F}_3)$ suivantes :

$$\{X^2+1:1\} \quad ; \quad \{X^2+X+2:1\} \quad ; \quad \{X^2+2X+2:1\} \quad ; \quad \{X+1:2\}$$
$$\{X+2:2\} \quad ; \quad \{X+1:1^2\} \quad ; \quad \{X+2:1^2\} \quad ; \quad \{X+1:1\ ;\ X+2:1\}\,.$$

Pour conclure cette section, calculons le cardinal de la classe de conjugaison $C_{\mathbb{m}}$ dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)$, où $\mathbb{m}$ est une polypartition arbitraire de $\mathscr{Y}_n(\mathbb{F}_q)$. Le centralisateur de la matrice $J_{\mathbb{m}}$ dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)$ peut être vu comme l'ensemble des automorphismes de $k[X]$-modules de $V_{\mathbb{m}}$; par la formule des classes, on a donc

$$\mathrm{card}\, C_{\mathbb{m}} = \mathrm{card}\, \mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q) \,/\, \mathrm{card}\, \mathrm{Aut}_{k[X]}(V_{\mathbb{m}})\,.$$

Notons V_{ϕ_i,μ_i} la composante ϕ_i-primaire de $V_{\mathbb{m}}$, où $\mathbb{m} = (\phi_i,\mu_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$. Il est clair que

$$\mathrm{Aut}_{k[X]}(V_{\mathbb{m}}) = \prod_{i=1}^{r} \mathrm{Aut}_{k[X]}(V_{\phi_i,\mu_i})\,,$$

donc le calcul du cardinal de $C_{\mathbb{m}}$ se ramène à celui du cardinal du groupe d'automorphismes d'un $k[X]$-module primaire $V_{\phi,\mu}$. Dans ce qui suit, on note

$$\|\mathbb{m}\| = \sum_{i=1}^{r} (\deg \phi_i)\, |\mu_i| \qquad ; \qquad b(\mathbb{m}) = \sum_{i=1}^{r} (\deg \phi_i)\, b(\mu_i)\,.$$

Si $x \neq 1$ est un nombre réel, $(x;x)_m$ est le symbole de Pochhammer usuel, *i.e.*, $(x;x)_m = (1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)$.

Proposition 6.3 (Cardinal d'un classe de conjugaison dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)$)**.** *Le nombre d'automorphismes d'un $\mathbb{F}_q[X]$-module primaire $V_{\phi,\mu}$ est*

$$Q^{|\mu|+2b(\mu)} \prod_{s\geqslant 1} (Q^{-1};Q^{-1})_{m_s(\mu)}\,,$$

où $Q = q^{\deg \phi}$. Par conséquent, le cardinal de la classe de conjugaison $C_{\mathbb{m}}$ dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)$ est

$$\frac{(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-1})}{q^{\|\mathbb{m}\|+2b(\mathbb{m})} \prod_{i=1}^{r}\prod_{k\geqslant 1} (q^{-\deg\phi_i};q^{-\deg\phi_i})_{m_k(\mu_i)}}\,.$$

L'isomorphisme de Frobenius-Schur pour l'anneau de Grothendieck de la catégorie des représentations des groupes linéaires $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)$ donnera une preuve indirecte de ce résultat, *cf.* le paragraphe suivant. Une autre preuve repose sur la **théorie de Hall** des modules sur un anneau de valuation discrète $\mathfrak{o}$, *cf.* [Mac95, chapitre 2, théorème 1.6]. En effet, si $V_{\phi,\mu}$ est ϕ-primaire — ce qui revient à dire que le polynôme minimal de tout élément de $V_{\phi,\mu}$ est une puissance de ϕ — alors on peut considérer $V_{\phi,\mu}$ comme un $k[X]_\phi$-module, $k[X]_\phi$ désignant l'anneau local constitué des fractions P/Q sans puissance de ϕ dans Q. Cet anneau $\mathfrak{o} = k[X]_\phi$ est un anneau de valuation discrète d'idéal maximal $\mathfrak{p} = \phi\, k[X]_\phi$, et de corps résiduel l'unique extension de corps de k de degré $\deg\phi$. Dans ce cadre, $V_{\phi,\mu}$ est un $\mathfrak{o}$-module de torsion de type μ :

$$V_{\phi,\mu} \simeq_{\mathfrak{o}} \bigoplus_{j\geqslant 1} \mathfrak{o}/\mathfrak{p}^{\mu_j}$$

et il suffit de montrer que $\mathrm{Aut}_{k[X]}(V_{\phi,\mu}) = \mathrm{Aut}_{\mathfrak{o}}(V_{\phi,\mu})$ a le cardinal énoncé dans la proposition 6.3. Ceci peut être fait par induction sur la hauteur du module de torsion, c'est-à-dire la taille maximale d'une part de μ. En effet, si V est un $\mathfrak{o}$-module de torsion de hauteur h et de type μ, alors $\mathfrak{p} \otimes_{\mathfrak{o}} V$ est un module de torsion de hauteur $h-1$ et de type $\mu - 1 = (\mu_1 - 1, \mu_2 - 1, \ldots)$. De plus, tout automorphisme g de V fournit un automorphisme $\widetilde{g} = \mathrm{id}_{\mathfrak{p}} \otimes g$ de $\mathfrak{p}\otimes_{\mathfrak{o}} V$, donc il suffit de montrer que la préimage par $\sim$ d'un automorphisme de $\mathfrak{p}\otimes_{\mathfrak{o}} V$ a

$$Q^{\ell(\mu)^2}\,(Q^{-1};Q^{-1})_{m_1(\mu)}$$

éléments, ce qui n'est pas très difficile.

6.2 Isomorphisme de Frobenius-Schur pour $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)$

Détaillons maintenant la théorie des représentations du groupe $G = \mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)$, en s'intéressant en premier lieu à l'induction à partir de sous-groupes diagonaux par blocs du type $\mathrm{GL}(n_1,\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}(n_2,\mathbb{F}_q) \times \cdots \times \mathrm{GL}(n_r,\mathbb{F}_q)$, où $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ est une composition. Comme dans la section 1.4, il sera utile d'introduire la somme directe $K(\mathbb{F}_q)$ des groupes de Grothendieck $K(\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q))$, et ses versions tensorisées $K_R(\mathbb{F}_q) = R \otimes_{\mathbb{Z}} K(\mathbb{F}_q) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} K_R(\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q))$. Nous aurons également besoin de la théorie des **polynômes de Hall-Littlewood** et des **chaînes de modules** finis sur un anneau de valuation discrète ; rappelons-en brièvement les points principaux (voir [Mac95, chapitres 2 et 3]). Si $\mathfrak{o}$ est un anneau de valuation discrète de corps résiduel $k = \mathbb{F}_q$ et si $\lambda, \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r)}$ est une famille de partitions telle que $|\lambda| = \sum_{i=1}^r |\lambda^{(i)}|$, notons $G^{\lambda}_{\lambda^{(1)},\ldots,\lambda^{(r)}}$ le nombre de chaînes

$$0 = M^{(0)} \subset M^{(1)} \subset \cdots \subset M^{(r)} = M$$

de $\mathfrak{o}$-modules de torsion, où M est un module de torsion de type λ fixé, et où chaque quotient $M^{(i)}/M^{(i-1)}$ est de type $\lambda^{(i)}$. On peut montrer que ces nombres $G^{\lambda}_{\lambda^{(1)},\ldots,\lambda^{(r)}}(q)$ ne dépendent que de q, et de façon polynomiale. L'**algèbre de Hall** de $\mathfrak{o}$ est l'espace vectoriel complexe $H(\mathfrak{o})$ de base $(u_\lambda)_{\lambda\in\mathscr{Y}}$, avec les règles de multiplication

$$u_\lambda * u_\mu = \sum_{\rho} G^{\nu}_{\lambda,\mu}(q)\, u_\nu\,.$$

Ces règles peuvent être encodées au moyen de fonction symétriques. Pour toute partition λ, notons $P_\lambda(x;t)$ la fonction symétrique de Hall-Littlewood limite inverse des polynômes

$$P_\lambda(x_1,\ldots,x_n;t) = \left(\prod_{m_s(\lambda)\geqslant 1} \frac{1-t}{1-t^{m_s(\lambda)}}\right) \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \left(x_1^{\lambda_1}\, x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n} \prod_{i<j} \frac{x_i - t x_j}{x_i - x_j}\right)^{\sigma}$$

dans $\Lambda[t] = \varprojlim_{n\to\infty} \mathbb{C}[x_1,x_2,\ldots,x_n;t]^{\mathfrak{S}_n}$. Lorsque $t=0$, on retrouve les fonctions de Schur : $P_\lambda(x;0) = s_\lambda(x)$.

Proposition 6.4 (Fonction caractéristique d'une algèbre de Hall, [Lit61])**.** *Il existe un unique isomorphisme d'algèbres complexes $\psi : H(\mathfrak{o}) \to \Lambda$ tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \psi(u_{(1^n)}) = q^{-\frac{n(n-1)}{2}}\, e_n(x)\,.$$

Cet isomorphisme est donné sur la base $(u_\lambda)_{\lambda\in\mathscr{Y}}$ par $\psi(u_\lambda) = q^{-b(\lambda)}\, P_\lambda(x;q^{-1})$.

Ceci étant, fixons un entier n, une composition $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$, et des fonctions centrales $u_1 \in Z(\mathbb{C}\mathrm{GL}(n_1,\mathbb{F}_q)), \ldots, u_r \in Z(\mathbb{C}\mathrm{GL}(n_r,\mathbb{F}_q))$. Si L est le groupe produit $\mathrm{GL}(n_1,\mathbb{F}_q) \times \cdots \times \mathrm{GL}(n_r,\mathbb{F}_q)$ et si $G = \mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)$, alors par analogie avec la construction du paragraphe 1.4, on pourrait munir $K_{\mathbb{C}}(\mathbb{F}_q)$ d'une structure d'anneau en posant

$$u_1 \circ \cdots \circ u_r = \mathrm{Ind}_L^G(u_1 \otimes \cdots \otimes u_r)\,.$$

Mais pour ce produit, les règles de branchement sont complexes, et il n'existe pas de structure d'algèbre de Hopf raisonnable compatible avec ce produit. Ainsi, il faut plutôt considérer le

produit d'induction parabolique d'Harish-Chandra, qui est défini comme suit. Notons P le sous-groupe parabolique de G constitué des matrices triangulaires par blocs

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1r} \\ 0 & g_{22} & \cdots & g_{2r} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & g_{rr} \end{pmatrix},$$

avec chaque g_{ii} dans $\mathrm{GL}(n_i,\mathbb{F}_q)$. Si $U \subset P$ est le sous-groupe des matrices par blocs unipotentes (*i.e.*, $g_{ii} = 1$ pour tout i), alors on a une suite exacte scindée de morphismes de groupes

$$1 \longrightarrow U \longrightarrow P \xrightarrow{\pi} L \longrightarrow 1$$

avec $\pi(g) = (g_{11},\ldots,g_{rr})$. Autrement dit, tout élément $p \in P$ s'écrit de manière unique $p = ul$ avec $u \in U$ et $\pi(p) = l \in L$. Par conséquent, une fonction centrale u sur L peut être relevée en une fonction centrale sur P en posant $u_{L\to P}(p) = u(\pi(p))$ — de façon équivalente, un L-module V peut être relevé en un P-module en posant $p \cdot_P v = \pi(p) \cdot_L v$. Dans ce cadre, le produit d'induction parabolique de fonctions centrales est défini par

$$u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_r = \mathrm{Ind}_P^G((u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_r)_{L\to P}).$$

On définit de façon analogue le produit d'induction parabolique de modules (éventuellement virtuels) $V_1,\ldots,V_r$ au-dessus des groupes $\mathrm{GL}(n_1,\mathbb{F}_q),\ldots,\mathrm{GL}(n_r,\mathbb{F}_q)$. Cette opération est clairement distributive vis-à-vis de la somme directe de modules, d'où une structure d'anneau gradué sur $K_{\mathbb{C}}(\mathbb{F}_q)$, le degré d'une combinaison linéaire de $\mathrm{GL}(n_i,\mathbb{F}_q)$-modules étant le plus grand entier n_i mis en jeu dans la combinaison.

Notons que l'opération d'induction parabolique fait sens dès que P est un sous-groupe parabolique de $G = \mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)$, et L est un sous-groupe de Lévi, de sorte que $P = U \rtimes L$ avec U sous-groupe unipotent (*cf.* [DM91] et [Lus84]). Dans ce contexte plus général, nous noterons $\mathrm{R}_L^G(u)$ ou $\mathrm{R}_L^G(V)$ la fonction centrale ou le module obtenu par induction parabolique de L vers G. Le foncteur additif R_L^G admet toujours un adjoint ${\mathrm{R}^*}_L^G$, d'où un coproduit

$$\Delta\Big(V \in K_{\mathbb{C}}(\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q))\Big) = \sum_{l+m=n} {\mathrm{R}^*}_{\mathrm{GL}(l,\mathbb{F}_q)\times\mathrm{GL}(m,\mathbb{F}_q)}^{\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)}(V)$$

sur $K_{\mathbb{C}}(\mathbb{F}_q)$ et une structure d'algèbre de Hopf graduée positive autoadjointe. L'objectif de cette section est d'obtenir un isomorphisme entre cette algèbre de Hopf et un produit tensoriel infini d'algèbres de fonctions symétriques.

Pour commencer, calculons plus explicitement la fonction centrale u obtenue par induction parabolique à partir de fonctions centrales $u_1,\ldots,u_r$. Si $H \subset G$ sont deux groupes finis et si χ est un caractère de H, alors le caractère induit $\theta = \mathrm{Ind}_H^G(\chi)$ s'écrit

$$\theta(g) = \sum_{xH\in G/H} \chi(x^{-1}gx),$$

étant entendu qu'on étend la fonction χ par 0 en dehors de H. Ainsi,

$$u(g) = (u_1 \circ \cdots \circ u_r)(g) = \sum_{xP\in G/P} (u_1 \otimes \cdots \otimes u_r)_{L\to P}(x^{-1}gx).$$

Or, si $F = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r$ est le drapeau standard de $(\mathbb{F}_q)^n$ associé à la composition $n = n_1 + \cdots + n_r$, alors $x^{-1}gx$ est dans P si et seulement si $(x^{-1}gx)(F) = F$, donc, si et seulement si $g(x(F)) = x(F)$. On en déduit que si $\mathbb{\mu}$ est le type de g, alors

$$u(g) = u(\mathbb{\mu}) = \sum u_1(\mathbb{\mu}_1) \times u_2(\mathbb{\mu}_2) \times \cdots \times u_r(\mathbb{\mu}_r)$$

la somme étant effectuée sur les chaînes de $k[X]$-modules

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r = V_g = V_{\mathbb{\mu}}$$

avec $\dim V_i/V_{i-1} = n_i$, et $\mathbb{\mu}_i$ désignant le type du quotient V_i/V_{i-1}. En regroupant les chaînes de modules en fonction de leurs types, on voit donc que

$$(u_1 \circ \cdots \circ u_r)(\mathbb{\mu}) = \sum F^{\mathbb{\mu}}_{\mathbb{\mu}_1,\ldots,\mathbb{\mu}_r}(q)\, u_1(\mathbb{\mu}_1) \cdots u_r(\mathbb{\mu}_r)\,,$$

où la somme est prise sur les familles de polypartitions $\mathbb{\mu}_1, \ldots, \mathbb{\mu}_r$ de tailles $n_1, \ldots, n_r$, et où $F^{\mathbb{\mu}}_{\mathbb{\mu}_1,\ldots,\mathbb{\mu}_r}(q)$ est le nombre de chaînes de $\mathbb{F}_q[X]$-modules $0 = V_0 \subset \cdots \subset V_r = V$, avec V module fixé de type $\mathbb{\mu}$, et chaque quotient V_i/V_{i-1} étant de type $\mathbb{\mu}_i$. Par unicité de la décomposition d'un $\mathbb{F}_q[X]$-module en modules primaires, ces nombres s'écrivent

$$F^{\mathbb{\mu}}_{\mathbb{\mu}_1,\ldots,\mathbb{\mu}_r}(q) = \prod_{\phi \in M/\mathfrak{G}} G^{\mathbb{\mu}(\phi)}_{\mathbb{\mu}_1(\phi),\ldots,\mathbb{\mu}_r(\phi)}(q^{\deg \phi})\,.$$

Fixons quelques notations supplémentaires : pour tout polynôme $\phi \in M/\mathfrak{G}$, $(X_{\phi,i})_{i \geqslant 1}$ est un ensemble de variables indépendantes de degrés $\deg X_{\phi,i} = \deg \phi$; Λ_ϕ est l'algèbre des fonctions symétriques complexes en les $X_{\phi,i}$; $\Lambda(\mathbb{F}_q)$ est le produit tensoriel infini $\bigotimes_{\phi \in M/\mathfrak{G}} \Lambda_\phi$; et ψ_ϕ est l'isomorphisme d'algèbres complexes entre $H(\mathbb{F}_q[X]_\phi)$ et Λ_ϕ de la proposition 6.4. Un élément $f(X_\phi)$ de Λ_ϕ sera noté plus simplement $f(\phi)$; par conséquent, $\Lambda(\mathbb{F}_q)$ est l'algèbre librement engendrée par les $p_n(\phi)$, $n \geqslant 1$ et $\phi \in M/\mathfrak{G}$.

Théorème 6.5 (Isomorphisme de Frobenius-Schur pour les groupes $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$, [Zel81]). *Si $\mathbb{\mu}$ est une polypartition de $\mathscr{Y}_n(\mathbb{F}_q)$, considérons la classe $C_{\mathbb{\mu}}$ comme un élement de $K_{\mathbb{C}}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q))$. Alors, l'application linéaire*

$$C_{\mathbb{\mu}} \mapsto \bigotimes_{\phi \in M/\mathfrak{G}} u_{\mathbb{\mu}(\phi)}$$

est un isomorphisme d'algèbres complexes entre $K(\mathbb{F}_q)$ et $\bigotimes_{\phi \in M/\mathfrak{G}} H(\mathbb{F}_q[X]_\phi)$. Si l'on compose cette application par $\bigotimes_{\phi \in M/\mathfrak{G}} \psi_\phi$, l'application caractéristique ainsi obtenue est un isomorphisme d'algèbres de Hopf graduées entre $K(\mathbb{F}_q)$ et $\Lambda(\mathbb{F}_q)$ qui vérifie

$$\forall \mathbb{\mu} \in \mathscr{Y}(\mathbb{F}_q),\ \ \mathrm{ch}(C_{\mathbb{\mu}}) = \prod_{\phi \in M/\mathfrak{G}} (q^{-\deg \phi})^{b(\mathbb{\mu}(\phi))}\, P_{\mathbb{\mu}(\phi)}(\phi; q^{-\deg \phi}) = P_{\mathbb{\mu}}\,.$$

L'application ch est même un isomorphisme d'algèbres de Hopf positives autoadjointes (*cf.* les derniers chapitres de [Zel81]), à condition qu'on munisse $\Lambda(\mathbb{F}_q)$ d'un produit scalaire qui est le produit tensoriel infini de $q^{\deg \phi}$-produits sur les anneaux Λ_ϕ (voir [Mac95, chapitre 3, §4]). Pour ce produit scalaire, la base duale de $(P_{\mathbb{\mu}})_{\mathbb{\mu} \in \mathscr{Y}(\mathbb{F}_q)}$ est $(Q_{\mathbb{\mu}})_{\mathbb{\mu} \in \mathscr{Y}(\mathbb{F}_q)}$, avec

$$Q_{\mathbb{\mu}} = \prod_{\phi \in M/\mathfrak{G}} (q^{\deg \phi})^{|\mathbb{\mu}(\phi)| + b(\mathbb{\mu}(\phi))}\, Q_{\mathbb{\mu}(\phi)}(\phi; q^{-\deg \phi})\,,$$

où $Q_\mu(X;t)$ est la fonction symétrique $\prod_{k\geqslant 1}(t;t)_{m_k(\mu)}\,P_\mu(X;t)$. Avec ces formules, on retrouve bien

$$\frac{1}{\mathrm{card}\,\mathrm{Aut}(V_{\mathbb{\mu}})}=\frac{\mathrm{card}\,C_{\mathbb{\mu}}}{\mathrm{card}\,\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)}=\langle C_{\mathbb{\mu}}\mid C_{\mathbb{\mu}}\rangle=\langle P_{\mathbb{\mu}}\mid P_{\mathbb{\mu}}\rangle=P_{\mathbb{\mu}}/Q_{\mathbb{\mu}}$$
$$=\frac{1}{q^{\|\mathbb{\mu}\|+2b(\mathbb{\mu})}\prod_\phi\prod_{k\geqslant 1}(q^{-\deg\phi};q^{-\deg\phi})_{m_k(\mathbb{\mu}(\phi))}}\,.$$

Ainsi, la combinatoire dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)$ de l'opération d'induction à partir de sous-groupes diagonaux peut être encodée comme dans la section 1.4 par des fonctions symétriques, et les classes de conjugaison sont cette fois-ci en correspondance avec des produits de fonctions de Hall-Littlewood.

6.3 Caractères de Deligne-Lusztig et caractères irréductibles

Il s'agit maintenant de décrire les représentations irréductibles de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)$ avec le même formalisme ; les représentations de Deligne-Lusztig joueront un rôle intermédiaire dans notre présentation. Dans le groupe multiplicatif M, on rappelle que σ est l'application de Frobenius $x\mapsto x^q$. Si $n\geqslant 1$, notons M_n le groupe multiplicatif $(\mathbb{F}_{q^n})^\times$, qui est aussi M^{σ^n} ; le groupe M est la limite directe des groupes M_n. Le groupe M_n est cyclique de cardinal q^n-1, donc son groupe dual $L_n=(M_n)^*$ est également cyclique de cardinal q^n-1. Notons L la limite directe des groupes L_n :

$$L=\varinjlim_{n\to\infty}L_n=\varinjlim_{n\to\infty}\mathrm{Hom}(M_n,\mathbb{C}^\times)=\mathrm{Hom}(\varprojlim_{n\to\infty}M_n,\mathbb{C}^\times)=\mathrm{Hom}(M_\sharp,\mathbb{C}^\times)\,,$$

la limite inverse $M_\sharp$ étant prise par rapport aux normes $x\in M_n\mapsto\prod_{i=1}^{n/d}\sigma^{di}(x)\in M_d$ définies pour $d\mid n$. Un élément $\xi\in L$ est la donnée d'appariements $\langle\xi\mid\cdot\rangle_n\in L_n$ pour n assez grand (au sens de la divisibilité), de telle sorte que si $d\mid n$, alors

$$\forall x\in M_n,\ \ \langle\xi\mid x\rangle_n=\langle\xi\mid N_{d,n}(x)\rangle_d\ ,$$

$N_{d,n}$ désignant l'application norme précédemment évoquée[1]. L'application de Frobenius agit sur L, et L_n s'identifie à L^{σ^n}. Dans l'ensemble quotient $L/\mathfrak{S}$, le degré d'une classe $\Theta=[\xi]$ est $\deg\Theta=\mathrm{card}\,\Theta$. Une **polypartition duale** est une fonction presque nulle $\mathbb{\lambda}:L/\mathfrak{S}\to\mathscr{Y}$, et on dit que $\mathbb{\lambda}$ est de poids n si

$$\|\mathbb{\lambda}\|=\sum_{\Theta\in L/\mathfrak{S}}\deg\Theta\,|\mathbb{\lambda}(\Theta)|=n\,.$$

Nous noterons $\mathscr{Y}^*(\mathbb{F}_q)$ l'ensemble des $\mathbb{F}_q$-polypartitions duales, et $\mathscr{Y}_n^*(\mathbb{F}_q)$ l'ensemble des polypartitions duales de poids n. Ces objets apparaissent naturellement dans la théorie des représentations du groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)$, car ils paramètrent[2] les $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)$-classes de conjugaison de caractères de tores maximaux ; expliquons en détail ce point. Dans $G=\mathrm{GL}(n,\overline{k})$, l'**application de Frobenius** F est la transformation qui agit par σ sur chaque coordonnée ; c'est un morphisme de groupes, et $\mathrm{GL}(n,k)=G^F$. Un **tore** de G est un sous-groupe commutatif isomorphe à M^r pour un certain entier $r\leqslant n$; on appelle tore de G^F l'ensemble des points

1. En particulier, si $x\in M_d\subset M_n$, alors $\langle\xi\mid x\rangle_n=(\langle\xi\mid x\rangle_d)^{n/d}$ est en général différent de $\langle\xi\mid x\rangle_d$.
2. Notons que pour tout n, $\mathscr{Y}_n^*(\mathbb{F}_q)$ et $\mathscr{Y}_n(\mathbb{F}_q)$ ont le même cardinal ; par contre, il n'y a pas de bijection privilégiée.

fixes T^F dans un tore $T \subset G$ qui est laissé stable par l'application de Frobenius F. Un tore T^F est dit **maximal** si son rang r est égal à n, et il est dit **scindé** sur k s'il est déjà isomorphe à k^r dans $\mathrm{GL}(n,k)$; dans le cas contraire, il existe une extension de corps minimale $K|k$ telle que T^F se scinde lorsqu'on étend les scalaires[3] à K. Dans $G = \mathrm{GL}(n,\overline{k})$, un tore est toujours scindé, et deux tores maximaux sont toujours conjugués sous l'action de G (*cf.* [Che04]). En revanche, deux tores F-stables S et T ne sont pas forcément conjugués dans G sous l'action de G^F, et on peut montrer que les G^F-classes de conjugaison de tores sont paramétrées par les F-classes de conjugaison du **groupe de Weyl**[4] W de G, deux éléments ω_1 et ω_2 étant F-conjugués dans W s'il existe ζ tel que

$$\omega_1 = \zeta\, \omega_2\, F(\zeta)^{-1}.$$

On renvoie à [DM91] pour ces questions de rationalité des groupes algébriques définis sur un corps fini. Ici, G^F admet un tore scindé maximal (à savoir, le sous-groupe diagonal k^n), et ceci implique que F agit trivialement sur $W = \mathfrak{S}_n$. Les F-classes de conjugaison sont donc les classes usuelles, et les G^F-classes de conjugaison de tores maximaux F-stables sont indexées par les partitions $\lambda \in \mathscr{Y}_n$. Un tore maximal T de type λ vérifie

$$T^F \simeq_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)} \prod_{i \geqslant 1} M_{\lambda_i}\,.$$

Si l'on considère maintenant les G^F-classes de conjugaison de paires (T^F,ζ) avec ζ caractère (unidimensionnel) de T^F, alors on peut montrer qu'elles sont indexées par les polypartitions duales de $\mathscr{Y}_n^*(\mathbb{F}_q)$: les tores dans la classe Λ vérifient

$$T^F \simeq_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)} \prod_{\Theta \in L/\mathfrak{G}} \prod_{i \geqslant 1} M_{\deg \Theta\ \Lambda(\Theta)_i}\,,$$

et modulo ces isomorphismes, les caractères dans la classe Λ s'écrivent

$$\zeta \simeq_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)} \prod_{\Theta \in L/\mathfrak{G}} \prod_{i \geqslant 1} \langle \xi \mid \cdot \rangle_{\deg \Theta\ \Lambda(\Theta)_i}\,,$$

cf. [Hen03, §1.3]. Dans ce qui suit, nous notons $(T^{\Lambda},\zeta^{\Lambda})$ un tore et un caractère dans la $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)$-classe de conjugaison Λ.

Pour toute polypartition duale Λ, on peut construire un $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)$-module virtuel R^{Λ} par induction à partir du caractère ζ^{Λ} d'un tore T^{Λ}. Si le tore T est contenu dans un sous-groupe de Borel $B \subset G$ qui est F-stable, il suffit d'utiliser l'induction parabolique de T^F à G^F *via* B^F ; malheureusement, pour de nombreux couples $(T^{\Lambda},\zeta^{\Lambda})$, le $\overline{k}$-tore sous-jacent n'est contenu dans aucun sous-groupe de Borel F-stable. Il y a néanmoins une façon de définir l'induction parabolique de T^F à G^F même lorsque T n'est pas inclus dans un sous groupe de Borel F-stable. Cette méthode est due à Deligne et Lusztig (voir [DL76]), et peut être utilisée dès que G est un groupe réductif de type Lie et T est un tore maximal F-stable. L'idée est de considérer une certaine variété X sur laquelle G^F agit à gauche et T^F agit à droite. La somme alternée $H_c^{\bullet}(X) = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n\, H_c^n(X)$ des groupes de cohomologie à support compact de cette variété de Deligne-Lusztig est un (G^F,T^F)-bimodule virtuel, et le produit tensoriel au-dessus

3. Il est utile de voir G et T comme des **k-schémas en groupes**, c'est-à-dire, des groupes algébriques déterminés par équations polynomiales, et dont on peut considérer les solutions dans k ou dans toute extension de corps de k ; *cf.* [DG70].

4. On renvoie au chapitre 7 pour un rappel de la définition du groupe de Weyl et des sous-groupes de Borel d'un groupe algébrique.

de $\mathbb{C}[T^F]$ de $H^\bullet_c(X)$ avec un T^F-module à gauche produit un G^F-module à gauche ; nous le noterons

$$\mathrm{R}_{T^F}^{G^F}(V) = H^\bullet_c(X) \otimes_{\mathbb{C}[T^F]} V.$$

Cette opération constitue l'**induction de Deligne-Lusztig**, et on retrouve l'induction parabolique d'Harish-Chandra lorsque T est contenu dans un sous-groupe de Borel F-stable. Notons qu'on peut remplacer T par un sous-groupe de Lévi L rationnel, auquel cas l'induction de Deligne-Lusztig permet de passer outre l'absence éventuelle de sous-groupe parabolique F-stable contenant L. Ceci étant dit, les **caractères de Deligne-Lusztig** de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$, aussi appelés caractères basiques, sont les

$$R^{\mathbb{\lambda}} = \mathrm{R}_{T^{\mathbb{\lambda}}}^{G^F}(\zeta^{\mathbb{\lambda}})\,;$$

ces caractères virtuels ne dépendent du choix de représentants $(T^{\mathbb{\lambda}}, \zeta^{\mathbb{\lambda}})$ dans les classes de conjugaison $\mathbb{\lambda}$.

La description des $R^{\mathbb{\lambda}}$ en termes de fonctions symétriques dans $\Lambda(\mathbb{F}_q)$ est due à J. A. Green, voir [Gre55] ; nous reprendrons les notations de [Mac95, chapitre 4]. Si ϕ est un polynôme irréductible sur $\mathbb{F}_q$ et si $f \in \Lambda$, nous avons déjà défini le symbole $f(\phi) \in \Lambda(\mathbb{F}_q)$; voyons de même comment « évaluer » une fonction symétrique en un élément $x \in M$, un caractère $\xi \in L$ ou une orbite $\Theta \in L/\mathfrak{G}$. Comme Λ est librement engendré par les sommes de puissances, il suffit de décrire les spécialisations $p_n(x)$, $p_n(\xi)$ et $p_n(\Theta)$. Pour $x \in M$, on pose :

$$p_n(x) = \begin{cases} p_{[n/\deg m_x]}(m_x) & \text{si } x \in M_n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, $p_n(x)$ est homogène de degré n ou $-\infty$, et met seulement en jeu les variables $X_{\phi,i}$ avec $\phi = m_x$ polynôme minimal de x. Ensuite, si $\xi \in L$, on pose :

$$p_n(\xi) = \begin{cases} (-1)^{n-1} \sum_{x \in M_n} \langle \xi \mid x \rangle_n \; p_n(x) & \text{si } \xi \in L_n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction $p_n(\xi)$ est encore de degré n ou $-\infty$ dans $\Lambda(\mathbb{F}_q)$. Finalement, si $\Theta = [\xi]$ est une orbite dans $L/\mathfrak{G}$, on pose $p_n(\Theta) = p_{[n \deg \Theta]}(\xi)$; le choix d'un représentant ξ de Θ ne change pas la définition. Dans ce contexte, le théorème 14 de [Gre55] peut être interprété comme suit :

Proposition 6.6 (Caractères de Deligne-Lusztig et fonctions symétriques, [Gre55]). *Pour toute polypartition duale $\mathbb{\lambda}$, si $B^{\mathbb{\lambda}} = \mathrm{ch}(R^{\mathbb{\lambda}})$, alors*

$$B^{\mathbb{\lambda}} = (-1)^{|\mathbb{\lambda}| - \sum_{\Theta \in L/\mathfrak{G}} |\mathbb{\lambda}(\Theta)|} \prod_{\Theta \in L/\mathfrak{G}} p_{\mathbb{\lambda}(\Theta)}(\Theta)\,.$$

Théorème 6.7 (Caractères irréductibles de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$ et fonctions symétriques, [Gre55]). *Les caractères irréductibles de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$ sont indexées par les polypartitions duales $\mathbb{\lambda} \in \mathscr{Y}_n^*(\mathbb{F}_q)$, et si $S^{\mathbb{\lambda}} = \mathrm{ch}(\chi^{\mathbb{\lambda}})$, alors*

$$S^{\mathbb{\lambda}} = \prod_{\Theta \in L/\mathfrak{G}} s_{\mathbb{\lambda}(\Theta)}(\Theta)\,.$$

Par suite, les modules de Deligne-Lusztig $(R^{\mathbb{\lambda}})_{\mathbb{\lambda} \in \mathscr{Y}_n^*(\mathbb{F}_q)}$ forment une base linéaire du groupe de Grothendieck $K_{\mathbb{C}}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q))$ — plus généralement d'ailleurs, si G^F est un groupe réductif fini de type Lie, alors tout caractère irréductible apparaît dans au moins un caractère de Deligne-Lusztig, et deux caractères irréductibles qui interviennent dans le même caractère de Deligne-Lusztig ont des valeurs identiques en les éléments unipotents, ces valeurs étant données par des polynômes de Green (*cf.* [Lus76]). Les matrices de transition entre la base des caractères irréductibles et la base de Deligne-Lusztig s'écrivent :

$$\begin{aligned}\varepsilon(\mathbb{p})\, B^{\mathbb{p}} &= \sum_{\forall \Theta,\ |\mathbb{\lambda}(\Theta)|=|\mathbb{p}(\Theta)|} \left(\prod_{\Theta \in L/\mathfrak{G}} \varsigma^{\mathbb{\lambda}(\Theta)}(\mathbb{p}(\Theta))\right) S^{\mathbb{\lambda}} \\ \varepsilon(\mathbb{\lambda})\, S^{\mathbb{\lambda}} &= \sum_{\forall \Theta,\ |\mathbb{\lambda}(\Theta)|=|\mathbb{p}(\Theta)|} \left(\prod_{\Theta \in L/\mathfrak{G}} \frac{\varsigma^{\mathbb{\lambda}(\Theta)}(\mathbb{p}(\Theta))}{z_{\mathbb{p}(\Theta)}}\right) B^{\mathbb{p}}\end{aligned}$$

où $\varepsilon(\mathbb{p})$ est le signe qui apparaît dans la définition de $B^{\mathbb{p}}$, et où les $\varsigma^{\lambda}(\rho)$ sont les valeurs des caractères des groupes symétriques. Ainsi, la combinatoire des représentations irréductibles et des représentations obtenues par induction de Deligne-Lusztig à partir de tores peut de nouveau être traitée à partir de fonctions symétriques dans $\Lambda(\mathbb{F}_q) = \bigotimes_{\phi \in M/\mathfrak{G}} \Lambda_\phi = \bigotimes_{\Theta \in L/\mathfrak{G}} \Lambda_\Theta$: les caractère irréductibles correspondent à des produits de fonctions de Schur, et les caractères de Deligne-Lusztig correspondent à des produits de fonctions puissances.

Exemple. On considère la polypartition duale $\mathbb{p} = ([\mathbb{1}] : 1^n)$, $\mathbb{1}$ désignant le caractère trivial défini par $\langle \mathbb{1} \mid x\rangle_n = 1$ pour tout x et tout n. Elle correspond au tore scindé $T^F = k^n$ et à son caractère trivial $\zeta(x_1, \ldots, x_n) = 1$. Dans ce cas particulier, la représentation induite $R^{\mathbb{p}}$ l'est au sens d'Harish-Chandra, car T^F est inclus dans le sous-groupe de Borel rationnel $\mathrm{B}(n,k)$ constitué des matrices triangulaires supérieures. On a donc :

$$R^{\mathbb{p}} = \mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(n,\mathbb{F}_q)}^{\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)}(1) = \mathbb{C}[\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)/\mathrm{B}(n,\mathbb{F}_q)]\,.$$

Autrement dit, $R^{\mathbb{p}}$ est simplement l'espace des fonctions sur la variété des drapeaux complets $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)/\mathrm{B}(n,\mathbb{F}_q)$. Compte tenu des formules de changement de base entre les $S^{\mathbb{\lambda}}$ et les $B^{\mathbb{p}}$, les polypartitions duales qui interviennent dans la décomposition de ce module en irréductibles sont celles qui sont supportées par la seule orbite $[\mathbb{1}]$; notons-les pour simplifier $\{[\mathbb{1}] : \lambda\} = \lambda$, et notons U^{λ} les modules irréductibles correspondant, appelés **modules unipotents**. Alors :

$$\mathbb{C}[\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)/\mathrm{B}(n,\mathbb{F}_q)] = \sum_{\lambda \in \mathscr{Y}_n} \varsigma^{\lambda}(1^n)\, V^{\lambda} = \sum_{\lambda \in \mathscr{Y}_n} (\dim \lambda)\; U^{\lambda}\,.$$

Ainsi, la multiplicité du module unipotent U^{λ} est égale à la dimension de la représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$ indexée par la partition λ. Une généralisation importante de ce résultat est due à Lusztig ; nous y reviendrons dans le chapitre 9.

Exemple. L'objet principal des deux chapitres suivants est l'étude de la mesure de Plancherel du module $\mathbb{C}[\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)/\mathrm{B}(n,\mathbb{F}_q)]$; compte tenu ce qui précède, pour calculer cette mesure de probabilité, il suffit de connaître les **degrés génériques** $D_{\lambda}(q)$, c'est-à-dire les dimensions des modules unipotents U^{λ}. Il existe en fait une formule générale pour la dimension d'un module irréductible $V^{\mathbb{\lambda}}$:

$$\dim V^{\mathbb{\lambda}} = \left(\prod_{i=1}^{n} q^i - 1\right) \times \left(\prod_{\Theta \in L/\mathfrak{G}} \frac{(q^{\deg \Theta})^{b(\mathbb{\lambda}'(\Theta))}}{\prod_{(i,j)\in \mathbb{\lambda}(\Theta)} (q^{\deg \Theta})^{h(i,j)} - 1}\right)$$

On renvoie à [Mac95, chapitre 4, §6] pour une preuve de cette formule ; il s'agit de calculer dans $\Lambda(\mathbb{F}_q)$ le produit scalaire $\langle S^{\lambda}|P_{(1:1^n)}\rangle$, et on utilise en particulier l'identité

$$s_\lambda(q^{-1},q^{-2},\ldots)=\frac{q^{b(\lambda')}}{\prod_{(i,j)\in\lambda} q^{h(i,j)}-1}\,,$$

voir [Mac95, chapitre 1, §3, exemples 1 à 5]. Ainsi, la théorie des fonctions symétriques fournit une formule des équerres pour $\dim \lambda$ analogue à celle qui existe pour les représentations irréductibles des groupes symétriques (*cf.* §1.4). Dans le cas particulier des modules unipotents U^λ, la formule se spécialise en

$$D_\lambda(q)=\dim U^\lambda=q^{b(\lambda')}\,\frac{\prod_{i=1}^n q^i-1}{\prod_{(i,j)\in\lambda} q^{h(i,j)}-1}\,.$$

Nous reviendrons en détail sur ce point dans la section 7.1.

6.4 Asymptotique des mesures de Plancherel des groupes linéaires finis

Pour conclure ce chapitre, exposons les résultats de A. Dudko et J. Fulman relatifs à l'asymptotique de la mesure de Plancherel des représentations régulières des groupes linéaires finis $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)$. Si $\lambda\in\mathscr{Y}_n^*(\mathbb{F}_q)$, on vient de voir que

$$\dim\lambda=\left(\prod_{i=1}^n q^i-1\right)\prod_{\Theta\in L/\mathfrak{G}} s_{\lambda(\Theta)}(q^{-\deg\Theta},q^{-2\deg\Theta},\ldots)\,.$$

La mesure de Plancherel de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)$ s'écrit donc :

$$\mathrm{Pl}_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)}[\lambda]=\frac{(\dim\lambda)^2}{\mathrm{card}\,\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)}=q^{-\frac{n(n-1)}{2}}\left(\prod_{i=1}^n q^i-1\right)\prod_{\Theta\in L/\mathfrak{G}} s^2_{\lambda(\Theta)}(q^{-\deg\Theta},q^{-2\deg\Theta},\ldots)\,.$$

Si $v<1$ est un paramètre réel, on rappelle l'identité d'Euler :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\prod_{r=0}^\infty(1-vq^{-r})}&=\prod_{r=0}^\infty\left(\sum_{n_r=0}^\infty(vq^{-r})^{n_r}\right)=\sum_{n=0}^\infty v^n\left(\sum_{n_1+\cdots+n_r+\cdots=n} q^{-(n_1+2n_2+\cdots+rn_r+\cdots)}\right)\\&=\sum_{n=0}^\infty v^n\left(\sum_{\ell(\lambda)\leqslant n} q^{-|\lambda|}\right)=\sum_{n=0}^\infty v^n\left(\sum_{\lambda_1'\leqslant n} q^{-|\lambda'|}\right)\\&=\sum_{n=0}^\infty v^n\left(\sum_{m_1,\ldots,m_n} q^{-(m_1+2m_2+\cdots+nm_n)}\right)=\sum_{n=0}^\infty\frac{v^n}{\prod_{i=1}^n(1-q^{-i})}\,.\end{aligned}$$

Par conséquent, l'expression suivante est une mesure de probabilité sur l'ensemble des poly-diagrammes duaux $\mathscr{Y}^*(\mathbb{F}_q)=\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{Y}_n^*(\mathbb{F}_q)$:

$$\begin{aligned}M[\lambda]&=q^{\frac{n(n+1)}{2}}\,v^n\prod_{r=0}^\infty(1-vq^{-r})\prod_{i=1}^n(q^i-1)^{-1}\,\mathrm{Pl}_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)}[\lambda]\\&=(qv)^n\prod_{r=0}^\infty(1-vq^{-r})\prod_{\Theta\in L/\mathfrak{G}} s^2_{\lambda(\Theta)}(q^{-\deg\Theta},q^{-2\deg\Theta},\ldots)\,.\end{aligned}$$

Pour toute partie A de $\mathscr{Y}_n^*(\mathbb{F}_q)$, $\prod_{i=1}^{n}(1-q^{-i})^{-1}\,\mathrm{Pl}_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)}[A]$ est le coefficient de v^n dans la série $\prod_{r=0}^{\infty}(1-vq^{-r})^{-1}\,M[A]$. Notons $\mathcal{L}_{v,q}$ la mesure de Schur $\mathcal{S}$ de paramètres

$$a=(q^{-1},q^{-2},q^{-3},\ldots)\ \text{ et }\ b=(v,vq^{-1},vq^{-2},\ldots)\,.$$

Pour toute partition λ,

$$\mathcal{L}_{v,q}[\lambda]=\left(\prod_{r=1}^{\infty}(1-vq^{-r})^{r}\right)q^{2b(\lambda')+|\lambda|}\,v^{|\lambda|}\,s_\lambda^2(q^{-1},q^{-2},\ldots)\,.$$

Fixons des partitions $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ arbitraires, et des orbites $\Theta_1,\ldots,\Theta_k\in L/\mathfrak{G}$. Si A est l'événement $\{\mathbb{\lambda}(\Theta_1)=\lambda_1,\ldots,\mathbb{\lambda}(\Theta_k)=\lambda_k\}$, alors d'après ce qui précède,

$$\prod_{i=1}^{n}(1-q^{-i})^{-1}\,\mathrm{Pl}_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)}[A]=[v^n]\,\prod_{r=0}^{\infty}(1-vq^{-r})^{-1}\,\prod_{j=1}^{k}\mathcal{L}_{v^{\deg\Theta_j},q^{\deg\Theta_j}}[\lambda_j]\,.$$

De plus, si f est une fonction holomorphe de rayon de convergence 1 et de série de Taylor convergente en 1, alors $f(1)=\lim_{n\to\infty}[v^n]\,f(v)\,(1-v)^{-1}$. Par conséquent :

Théorème 6.8 (Dudko-Fulman, [Ful06, Dud08]). *Pour toutes partitions λ_j et toutes orbites $\Theta_j\in L/\mathfrak{G}$,*

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Pl}_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)}[\mathbb{\lambda}(\Theta_1)=\lambda_1,\ldots,\mathbb{\lambda}(\Theta_k)=\lambda_k]=\prod_{j=1}^{k}\mathcal{L}_{1,q^{\deg\Theta_j}}[\lambda_j]\,.$$

Ainsi, sous la $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)$-mesure de Plancherel, les coordonnées $\mathbb{\lambda}(\Theta_1),\ldots,\mathbb{\lambda}(\Theta_k)$ sont asymptotiquement indépendantes, et asymptotiquement réparties suivant des mesures de Schur dont les paramètres ne dépendent que des $q^{\deg\Theta_j}$. En particulier, si une orbite Θ est fixée, alors la partition aléatoire $\mathbb{\lambda}(\Theta)$ avec $\mathbb{\lambda}$ répartie suivant la $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)$-mesure de Plancherel « reste de taille bornée » lorsque n tend vers l'infini, et une étude asymptotique semblable à celle menée dans la première partie du mémoire n'a pas de sens.