

Combinatoire des observables de diagrammes

En théorie asymptotique des représentations des groupes symétriques \mathfrak{S}_n , on considère des diagrammes λ distribués aléatoirement suivant diverses mesures de probabilité, la taille du groupe symétrique tendant vers l'infini (cf. les chapitres 3, 8, 9, 10 et 11). Les coordonnées $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sont donc des variables aléatoires, et on s'intéresse à leur loi limite modulo une éventuelle renormalisation. Mais dans ce contexte, les coordonnées standards ne sont pas forcément les plus pratiques à manipuler ; ainsi, il est utile d'introduire d'autres coordonnées de diagrammes (cf. [Mac95, §1.1]), ainsi que les fonctions symétriques en ces nouvelles coordonnées. Dans [IO02], V. Ivanov et S. Kerov présentent une algèbre d'observables en ces coordonnées construite sur le modèle de l'algèbre des fonctions symétriques Λ . Ce chapitre est consacré à un exposé succinct de leur article, et à la présentation de quatre bases remarquables : la base des moments en les coordonnées de Frobenius, la base des moments en les coordonnées entrelacées, la base des caractères centraux et la base des cumulants libres ([Bia98, Biao3a]).

Toutes ces observables peuvent être évaluées sur toutes les partitions, et plus généralement sur toute une classe de fonctions continues qui contient les diagrammes de Young et leurs versions renormalisées. L'espace formé par ces **diagrammes continus** est un cadre topologique agréable pour énoncer les résultats de convergence de théorie asymptotique des représentations. Ainsi, dans la dernière section du chapitre (§2.5), nous expliquerons en détail à quelle topologie sur les diagrammes continus correspond la convergence des observables, ces arguments jouant un rôle crucial dans la preuve des théorèmes limites 3.3, 10.3 et 11.10 (entre autres).

Pour ce qui suit, il est utile d'introduire les **notations de λ -anneaux**, qui sont présentées clairement par exemple dans [RRW96, §1]. Si

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$$

est un alphabet fini en m variables, notons $p_k(X)$ la somme de puissances $\sum_{i=1}^m (x_i)^k$. Comme les fonctions sommes de puissances forment une base algébrique de $\Lambda_{\mathbb{Q}}$, on peut calculer à partir des $p_k(X)$ toutes les autres fonctions symétriques de X , en particulier, les fonctions de Schur $s_{\lambda}(X)$, les fonctions homogènes $h_{\lambda}(X)$ et les fonctions élémentaires $e_{\lambda}(X)$, etc. Ceci étant, si X et Y sont deux alphabets (finis), on note :

$$X + Y = \{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_l\} \quad ; \quad XY = \{x_i y_j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq l\}.$$

Les spécialisations des fonctions symétriques associées à ces alphabets sont :

$$\forall k \geq 1, p_k(X + Y) = p_k(X) + p_k(Y) \quad ; \quad \forall k \geq 1, p_k(XY) = p_k(X) p_k(Y).$$

Maintenant, on peut définir des alphabets « virtuels » en se contentant de décrire la spécialisation de l'algèbre Λ (par exemple, en donnant les fonctions sommes de puissances). Ainsi, on peut définir un alphabet formel $X - Y$ dont les fonctions symétriques sont données par

$$p_k(X - Y) = p_k(X) - p_k(Y).$$

Un autre exemple important d'alphabet formel est l'alphabet exponentiel E défini par $p_1(E) = 1$ et $p_{k \geq 2}(E) = 0$. Pour cette spécialisation de Λ , la formule de Frobenius (inversée) montre que les fonctions de Schur sont données par $|\lambda|! s_\lambda(E) = \dim \lambda$. Dans ce qui suit, nous utiliserons librement ces notations; elles seront en particulier indispensables pour la description des caractères des algèbres d'Iwahori-Hecke, cf. la section 7.3.

2.1 Coordonnées entrelacées et coordonnées de Frobenius

Si λ est un diagramme de poids n , on peut lui associer une fonction ω_λ affine par morceaux de pente ± 1 et telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} (\omega_\lambda(s) - |s|) ds = 2n.$$

En effet, il suffit de tourner la représentation du diagramme de 45 degrés et de considérer la fonction « bord supérieur », prolongée par la valeur absolue en dehors de son support (voir la figure 2.1; on demande aussi que les cases aient pour aire 2). Dans ce qui suit, on note

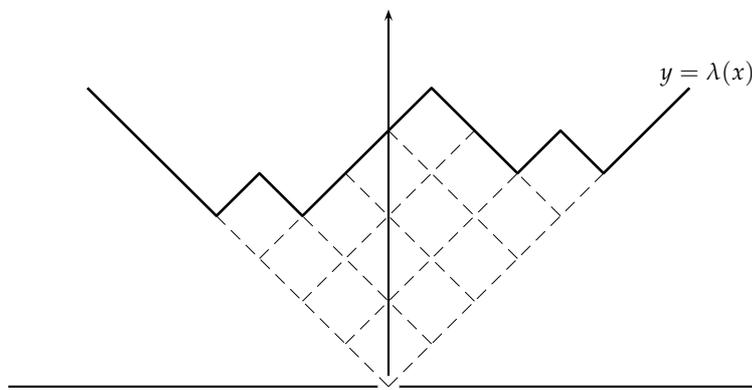


FIGURE 2.1 – Fonction $s \mapsto \lambda(s)$ associée au diagramme de Young $\lambda = (5, 4, 4, 1)$.

$\lambda(s) = \omega_\lambda(s)$ et on identifie le diagramme de Young à la fonction continue associée. Cette interprétation fonctionnelle est très utile pour l'étude asymptotique de mesures de probabilité sur les partitions, en particulier parce qu'elle permet de considérer des diagrammes renormalisés, voir la section 2.2. Étant donné un diagramme λ , la fonction $s \mapsto \lambda(s)$ est déterminée par la suite de ses extrema locaux $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < x_{v-1} < y_{v-1} < x_v$, où les x_i sont les minima et les y_i sont les maxima. Par exemple, pour $\lambda = (5, 4, 4, 1)$, les extrema locaux sont les entiers

$$-4 < -3' < -2 < 1' < 3 < 4' < 5,$$

le ' indiquant les maxima. On dit que les x_i et les y_i sont les **coordonnées entrelacées** du diagramme. Ces coordonnées permettront d'exprimer relativement simplement les probabilités de transition du processus de Plancherel et du q -processus de Plancherel, voir les paragraphes 3.2 et 7.1.

D'autre part, si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots)$ est une partition de taille n , on appelle **coordonnées de Frobenius** de λ les deux suites

$$a_i = \lambda_i - i + 1/2 \quad ; \quad b_i = \lambda'_i - i + 1/2,$$

où i varie entre 1 et la taille d de la diagonale du diagramme. Les deux suites $(a_i)_{1 \leq i \leq d}$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq d}$ sont strictement décroissantes et déterminent entièrement le diagramme λ . De plus, on dispose de l'identité

$$\sum_{i=1}^d a_i + \sum_{i=1}^d b_i = n = |\lambda|,$$

qui est évidente si l'on voit a_i ou b_i comme l'aire d'une ligne ou colonne partant de la diagonale, les cases de la diagonale étant coupées en deux. Dans ce qui suit, nous noterons $A = A(\lambda) = \{a_1, \dots, a_d\}$ et $-B = -B(\lambda) = \{-b_1, \dots, -b_d\}$ les deux alphabets associés aux coordonnées de Frobenius d'un diagramme ; ces deux parties de $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z} + 1/2$ ont même cardinal.

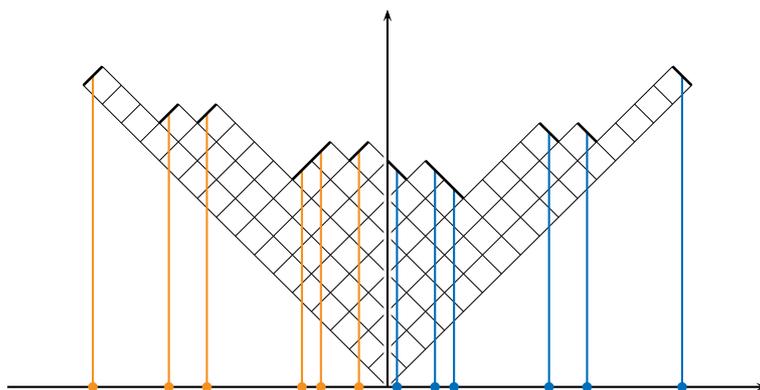


FIGURE 2.2 – Coordonnées de Frobenius d'un diagramme de Young.

2.2 Moments d'un diagramme et graduations sur l'algèbre d'observables

Définition 2.1 (Observable de diagrammes). *On appelle observable d'un diagramme λ toute fonction symétrique en l'alphabet (virtuel) $A - (-B)$, donc, toute combinaison linéaire de produits des moments de Frobenius*

$$p_k(\lambda) = p_k(A - (-B)) = \sum_{i=1}^d (a_i)^k - (-b_i)^k.$$

Par exemple, la taille $|\lambda|$ est une observable de diagrammes, car c'est le premier moment $p_1(\lambda)$. Dans ce qui suit, on note \mathcal{O} l'**algèbre des observables de diagrammes** ; l'algèbre \mathcal{O}

est librement engendrée par les moments de Frobenius ([IO02, proposition 1.5]), et est donc isomorphe à l'algèbre Λ . En particulier, les fonctions

$$\lambda \mapsto p_\mu(\lambda), \quad \mu \in \mathcal{Y}$$

forment une base linéaire de \mathcal{O} . Le **degré** d'une observable de diagrammes est obtenu en transportant par l'isomorphisme $\Lambda \simeq \mathcal{O}$ le degré standard des fonctions symétriques. Autrement dit, $\deg p_\mu = |\mu|$. Ainsi, on dispose d'une première graduation sur l'algèbre \mathcal{O} .

Examinons maintenant une seconde base. De façon analogue à ce qui précède, on définit les **moments entrelacés** d'un diagramme λ par :

$$\tilde{p}_k(\lambda) = p_k(X - Y) = \sum_{i=1}^v (x_i)^k - \sum_{i=1}^{v-1} (y_i)^k.$$

En particulier, $\tilde{p}_1(\lambda) = \sum_{i=1}^v x_i - \sum_{i=1}^{v-1} y_i = 0$ pour tout diagramme, car cette quantité est aussi la somme des pentes de $\lambda(s) - |s|$. Soit

$$G_\lambda(z) = \frac{\prod_{i=1}^{v-1} (z - y_i)}{\prod_{i=1}^v (z - x_i)} = \frac{1}{z} \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{p}_k(\lambda)}{k} z^{-k} \right)$$

$$\Phi_\lambda(z) = \prod_{i=1}^d \frac{z + b_i}{z - a_i} = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k(\lambda)}{k} z^{-k} \right)$$

les fonctions génératrices des coordonnées entrelacées et des coordonnées de Frobenius du diagramme. On peut montrer que $z G_\lambda(z) = \Phi_\lambda(z - 1/2) / \Phi_\lambda(z + 1/2)$ pour tout diagramme λ , voir [IO02, proposition 2.6]. Par conséquent, les moments entrelacés \tilde{p}_k sont aussi des observables de diagrammes, et on dispose des formules de changement de base

$$\tilde{p}_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{1}{2^{2k}} \binom{n}{2k+1} p_{n-1-2k}(\lambda)$$

$$p_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{2^{2k}} n^{\downarrow(2k-1)} C_k \tilde{p}_{n+1-2k}(\lambda)$$

où C_k désigne la somme sur toutes les compositions $k = \sum_i k_i$ des inverses des produits $\prod_i -(2k_i + 1)!$, et où $n^{\downarrow k} = n(n-1) \cdots (n-k+1)$, avec par convention $n^{\downarrow -1} = 1/(n+1)$. On en déduit que les observables $(\tilde{p}_k)_{k \geq 2}$ forment une base de transcendance de \mathcal{O} . Le **poids** des observables de diagrammes est la graduation d'algèbre définie par $\text{wt}(\tilde{p}_k) = k$ pour $k \geq 2$. Compte tenu des formules de changement de base, $\text{wt}(p_k) = k + 1$, et la composante de plus haut poids de p_k est $\tilde{p}_{k+1}/(k+1)$.

La base des moments entrelacés est particulièrement adaptée à l'étude analytique des diagrammes de Young, et en particulier, elle permet de généraliser la définition des observables de diagrammes. Ainsi, on appellera **diagramme continu** toute fonction $s \mapsto \omega(s)$ positive, 1-lipschitzienne et égale à $|s|$ pour $|s|$ assez grand. L'ensemble des diagrammes continus sera noté \mathcal{CY} ; via l'interprétation fonctionnelle des diagrammes de Young, \mathcal{Y} se plonge dans \mathcal{CY} .

Si $\omega \in \mathcal{CY}$, on note $\sigma_\omega(s) = (\omega(s) - |s|)/2$; c'est une fonction 1-lipschitzienne à support compact. Les moments entrelacés d'un diagramme de Young continu sont définis par

$$\tilde{p}_k(\omega) = \int_{\mathbb{R}} s^k \sigma_\omega''(s) ds,$$

la dérivée s'entendant éventuellement au sens des distributions. On retrouve les moments entrelacés usuels pour des diagrammes de Young de partitions, et ceci permet d'étendre l'ensemble de définition d'une observable de \mathcal{Y} à \mathcal{CY} . D'autre part, si ω est un diagramme continu et si t est un nombre réel strictement positif, on note

$$\omega^t(s) = \sqrt{t} \omega(s/\sqrt{t})$$

le **diagramme renormalisé** en abscisse et en ordonnée d'un facteur \sqrt{t} , voir l'exemple de la figure 2.3. Dans ce cadre, si f est une observable de diagrammes homogène de poids k ,

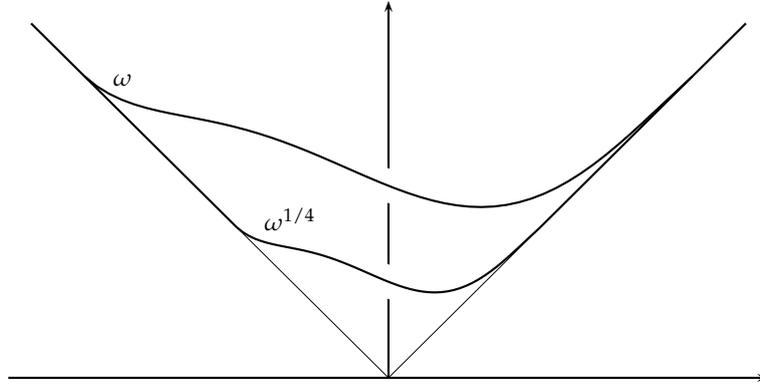


FIGURE 2.3 – Renormalisation ω^t d'un diagramme continu ω . L'aire entre la courbe et la fonction valeur absolue est multipliée par t .

alors $f(\omega^t) = t^{k/2} f(\omega)$. Le poids est donc la graduation de \mathcal{O} adaptée à la renormalisation « isotrope » de diagrammes équilibrés; dans le chapitre 8, nous verrons que le degré est une graduation adaptée à la renormalisation de certains diagrammes non équilibrés.

2.3 Permutations partielles et caractères centraux

Les caractères centraux forment une autre base de l'algèbre d'observables, et ils permettent d'établir le lien avec la théorie des représentations des groupes symétriques ([IO02, Śo6a]). L'idée est d'associer à toute partition μ la fonction

$$\lambda \mapsto \zeta^\lambda(\sigma_{\mu \sqcup 1^{n-|\mu|}}),$$

où ζ^λ désigne le caractère irréductible du module de Specht V^λ , et avec $n = |\lambda|$. Ces applications doivent néanmoins être renormalisées, et d'autre part, il faut pouvoir traiter convenablement le cas où $|\mu| > n$. Pour ces deux raisons, il est utile de voir les caractères centraux comme éléments de l'algèbre des permutations partielles. On appelle **permutation partielle** de taille n un couple (σ, S) , où $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et S est une partie de $\llbracket 1, n \rrbracket$ telle que $\sigma(x) = x$ pour tout $x \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus S$. Alternativement, on peut voir une permutation partielle de taille n comme

la donnée d'un support $S \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ et d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(S)$. Le produit de deux permutations partielles est défini par

$$(\sigma, S) (\tau, T) = (\sigma\tau, S \cup T),$$

et les permutations partielles de taille n forment ainsi un monoïde non commutatif, de neutre $(\text{id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}, \emptyset)$. Nous noterons \mathcal{B}_n l'algèbre (complexe) de ce monoïde. La théorie des représentations de cette algèbre sera précisée dans la section 12.1, et l'on verra dans le chapitre 13 que cette construction rentre dans un cadre très général. Pour l'instant, nous aurons seulement besoin de la limite projective \mathcal{B}_∞ des algèbres \mathcal{B}_n . Si $N \geq n$, on peut définir une projection linéaire $\phi_{N,n} : \mathcal{B}_N \rightarrow \mathcal{B}_n$ en posant

$$\phi_{N,n}(\sigma, S) = \begin{cases} (\sigma, S) & \text{si } S \subset \llbracket 1, n \rrbracket, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les applications $\phi_{N,n}$ sont des morphismes d'algèbres, et elles sont compatibles entre elles. De plus, si le degré d'une permutation partielle est défini par $\text{deg}(\sigma, S) = \text{card } S$, alors les applications $\phi_{N,n}$ sont compatibles avec les filtrations d'algèbres associées au degré. On note $\mathcal{B}_\infty = \varprojlim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{B}_n$ la limite projective des algèbres de permutations partielles dans la catégorie des algèbres filtrées; ses éléments sont les combinaisons linéaires formelles éventuellement infinies de permutations partielles de degrés bornés.

Fixons maintenant une partition μ , et notons Σ_μ la somme formelle infinie des permutations partielles

$$(a_{1,1}, \dots, a_{1,\mu_1})(a_{2,1}, \dots, a_{2,\mu_2}) \cdots (a_{r,1}, \dots, a_{r,\mu_r}), \{a_{i,j} \mid 1 \leq i \leq \ell(\mu), 1 \leq j \leq \mu_i\}$$

où a est n'importe quelle fonction injective $\{(i, j) \mid 1 \leq i \leq \ell(\mu), 1 \leq j \leq \mu_i\} \rightarrow \mathbb{N}^*$. Si ϕ_n est la projection canonique $\mathcal{B}_\infty \rightarrow \mathcal{B}_n$, alors le projeté $\phi_n(\Sigma_\mu)$ est donné par la même somme, mais avec l'indice de sommation a restreint aux fonctions injectives à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Soit π_n la projection de \mathcal{B}_n vers $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ qui à une permutation partielle (σ, S) associe la permutation σ . Le projeté $\Sigma_{\mu,n} = \pi_n(\phi_n(\Sigma_\mu))$ vaut 0 lorsque $n < |\mu|$, et dans le cas contraire, c'est un multiple de la classe de conjugaison $C_{\mu \sqcup 1^{n-|\mu|}}$:

$$\Sigma_{\mu,n} = n(n-1) \cdots (n-|\mu|+1) \tilde{C}_{\mu \sqcup 1^{n-|\mu|}} = n^{|\mu|} \tilde{C}_{\mu \sqcup 1^{n-|\mu|}},$$

où pour toute partition λ de taille n , $\tilde{C}_\lambda = C_\lambda / \text{card } C_\lambda$. Ceci étant, le **caractère central** Σ_μ est l'observable de diagrammes définie par

$$\Sigma_\mu(\lambda \in \mathcal{Y}_n) = \chi^\lambda(\Sigma_{\mu,n}),$$

où χ^λ désigne le caractère irréductible renormalisé, c'est-à-dire que $(\dim \lambda) \chi^\lambda = \zeta^\lambda$. L'appartenance de Σ_μ à \mathcal{O} est en réalité tout à fait non triviale, et elle découle des deux résultats suivants :

1. Dans \mathcal{B}_∞ , les éléments Σ_μ engendrent une sous-algèbre commutative \mathcal{A}_∞ , et $\text{wt}(\Sigma_\mu) = |\mu| + \ell(\mu)$ est une graduation d'algèbre sur \mathcal{A}_∞ . Plus précisément,

$$\Sigma_{\mu_1} * \Sigma_{\mu_2} = \Sigma_{\mu_1 \sqcup \mu_2} + \left(\begin{array}{c} \text{combinaison linéaire de termes de poids} \\ \text{inférieur à } |\mu_1| + \ell(\mu_1) + |\mu_2| + \ell(\mu_2) - 2 \end{array} \right)$$

voir [S06a, corollaire 3.8]. Essentiellement, c'est parce que pour n assez grand, une permutation partielle de type μ_1 et une autre permutation partielle de type μ_2 sont génériquement à supports disjoints, donc commutent et ont pour produit une permutation partielle de type $\mu_1 \sqcup \mu_2$.

2. D'autre part, pour tout groupe fini G , si a et b sont deux éléments du centre $(\mathbb{C}G)^G$ de l'algèbre du groupe, et si χ est un caractère irréductible normalisé de G , alors $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$. En effet, dans la décomposition de $\mathbb{C}G$ en blocs matriciels, $(\mathbb{C}G)^G$ s'identifie à la somme directe d'espaces d'homothéties $\bigoplus_{V \in \widehat{G}} \text{Cid}_V$, et la restriction de χ^V à $(\mathbb{C}G)^G$ est la projection sur Cid_V ; c'est donc bien un morphisme d'algèbres. Par suite, pour toutes partitions μ_1, μ_2, λ ,

$$\begin{aligned} \Sigma_{\mu_1}(\lambda) \times_{\mathbb{C}} \Sigma_{\mu_2}(\lambda) &= \chi^\lambda(\Sigma_{\mu_1, n}) \times_{\mathbb{C}} \chi^\lambda(\Sigma_{\mu_2, n}) = \chi^\lambda(\Sigma_{\mu_1, n} \times_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n} \Sigma_{\mu_2, n}) \\ &= \chi^\lambda(\pi_n \circ \phi_n(\Sigma_{\mu_1} \times_{\mathcal{A}_\infty} \Sigma_{\mu_2})) = (\Sigma_{\mu_1} \times_{\mathcal{A}_\infty} \Sigma_{\mu_2})(\lambda) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que le produit d'observables Σ_{μ_1} et Σ_{μ_2} peut être effectué directement dans $\mathcal{A}_\infty \subset \mathcal{B}_\infty$. Par conséquent, compte tenu de la décomposition graduée des produits de caractères centraux $\Sigma_{\mu_1} * \Sigma_{\mu_2}$, il suffit de montrer que les caractères centraux des cycles Σ_k sont des observables de diagrammes.

3. En utilisant la formule de Frobenius pour $\mu = k1^{n-k}$, on peut montrer que $\Sigma_k(\lambda)$ est le coefficient de z^{-1} dans la série de Laurent

$$-\frac{1}{k} \left(z - \frac{1}{2} \right)^{\downarrow k} \frac{\Phi_\lambda(z)}{\Phi_\lambda(z-k)},$$

d'où une expression de Σ_k en fonction des $p_{l \leq k}$, voir [IO02, proposition 3.2]. Par exemple, $\Sigma_1 = p_1$, $\Sigma_2 = p_2$, $\Sigma_3 = p_3 - \frac{3}{2}p_{11} + \frac{5}{4}p_1$ et $\Sigma_4 = p_4 - 4p_{21} + \frac{11}{2}p_2$. Ainsi, les Σ_k et les Σ_μ sont bien dans \mathcal{O} .

  partir de ces observations, on peut établir la proposition suivante, voir [IO02, corollaire 4.3, corollaire 4.4 et proposition 4.9] :

Proposition 2.2 (Base des caractères centraux). *Les observables $(\Sigma_\mu)_{\mu \in \mathcal{Y}}$ forment une base linéaire de \mathcal{O} , et les caractères centraux des cycles $(\Sigma_k)_{k \geq 1}$ forment une base de transcendance. La composante de plus haut degré de Σ_μ est toujours égale à p_μ . Par suite,*

$$\Sigma_{\mu_1} * \Sigma_{\mu_2} = \Sigma_{\mu_1 \sqcup \mu_2} + (\text{termes de degré inférieur}).$$

La filtration de l'algèbre \mathcal{A}_∞ précédemment définie correspond à la filtration des poids sur l'algèbre d'observables \mathcal{O} ; par conséquent, on a aussi

$$\Sigma_{\mu_1} * \Sigma_{\mu_2} = \Sigma_{\mu_1 \sqcup \mu_2} + (\text{termes de poids inférieur}).$$

Ces propriétés de factorisation des caractères centraux en plus haut degré ou en plus haut poids joueront un rôle essentiel pour l'asymptotique des caractères et des mesures sur les partitions¹. Concluons cette section en dressant une liste des diverses descriptions isomorphiques de l'algèbre d'observables \mathcal{O} :

1. Nous décrirons plus en détail les termes du produit $\Sigma_{\mu_1} * \Sigma_{\mu_2}$ dans la section 8.3; ainsi, le produit peut être écrit comme somme sur des appariements entre les points des cycles de type μ_1 et les points de cycles de type μ_2 , le terme $\Sigma_{\mu_1 \sqcup \mu_2}$ correspondant à l'appariement vide.

1. Les moments de Frobenius p_λ définissent un isomorphisme canonique $\mathcal{O} \simeq \Lambda$, ce qui permet d'effectuer des calculs dans l'algèbre des fonctions symétriques.
2. Les caractères centraux Σ_μ sont issus de l'algèbre des permutations partielles \mathcal{B}_∞ , et plus précisément de l'algèbre \mathcal{A}_∞ des invariants pour l'action par conjugaison de \mathfrak{S}_∞ . Cette sous-algèbre commutative est l'**algèbre d'Ivanov-Kerov**, voir la section 12.1. On dispose donc d'un isomorphisme canonique $\mathcal{O} \simeq \mathcal{A}_\infty$, ce qui permet en particulier de calculer les coefficients de structure de l'algèbre \mathcal{O} dans la base des caractères centraux, cf. [IO02, proposition 4.5] et [IK99, proposition 6.2 et théorème 9.1]. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 12.
3. Enfin, les caractères centraux Σ_μ peuvent également être vus comme éléments de l'algèbre des fonctions symétriques décalées, voir [OO98]. Un polynôme symétrique décalé en m variables est un polynôme $p(x_1, x_2, \dots, x_m)$ symétrique en les nouvelles variables $y_i = x_i - i + \text{const}$, la valeur de la constante étant arbitraire (on la prendra par exemple égale à 0). Les polynômes symétriques décalés en m variables forment une algèbre $\Lambda^\sharp(m)$, et on appelle **fonction symétrique décalée** un élément de la limite projective $\Lambda^\sharp = \varprojlim_{m \rightarrow \infty} \Lambda^\sharp(m)$. Une base de cette algèbre est formée des fonctions de Schur décalées :

$$s_\mu^\sharp(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{\det((x_i + m - i)^{\downarrow \mu_j + m - j})_{i,j}}{\det((x_i + m - i)^{\downarrow m - j})_{i,j}} \text{ si } \ell(\mu) \leq m, \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

On définit les fonctions sommes de puissances décalées en utilisant la formule de Frobenius :

$$\forall \mu \in \mathcal{Y}_n, \quad p_\mu^\sharp = \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_n} \zeta^\lambda(\mu) s_\lambda^\sharp.$$

Alors, on peut montrer que la fonction symétrique décalée $p_\mu^\sharp(\lambda)$ en les coordonnées standards $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ d'un diagramme est égale à $\Sigma_\mu(\lambda)$, cf. [OO98, théorème 8.1] et [IK99, théorème 9.1]. Cette identité fournit un troisième isomorphisme $\mathcal{O} \simeq \Lambda^\sharp$.

Notons que l'algèbre Λ^\sharp est également mise en jeu dans un analogue du théorème de Frobenius-Schur pour les groupes linéaires complexes $\text{GL}(m, \mathbb{C})$. Ainsi, on peut montrer que $\Lambda^\sharp(m)$ est naturellement isomorphe au centre $Z(U(\mathfrak{gl}(m, \mathbb{C})))$ de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{C})$ — c'est l'**isomorphisme d'Harish-Chandra**, voir par exemple [OO98, §2].

2.4 Cumulants libres et asymptotique des caractères

La dernière base importante de l'algèbre \mathcal{O} est la base des cumulants libres ; elle a été introduite par P. Biane dans [Bia98, Biao3a], et elle est inspirée par la théorie des probabilités libres de Voiculescu ([VDN92, Biao3b]). Si λ est un diagramme de Young, on appelle **mesure de transition** de λ la mesure de probabilité

$$\mu_\lambda = \sum_{k=1}^v \left(\frac{\prod_{i=1}^{v-1} x_k - y_i}{\prod_{i \neq k} x_k - x_i} \right) \delta_{x_k}.$$

Alors, $G_\lambda(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-s} \mu_\lambda(ds)$ est la **transformée de Cauchy** de la mesure de transition de λ . De plus,

$$G_\lambda(z) = \frac{1}{z} \exp \left(- \int_{\mathbb{R}} \frac{\sigma'_\lambda(s)}{z-s} ds \right),$$

et compte tenu de cette expression analytique, on peut aussi définir la mesure de transition μ_ω d'un diagramme continu $\omega \in \mathcal{E}\mathcal{Y}$. Nous expliquerons dans la section 3.2 l'origine de la terminologie « mesure de transition ».

Ceci étant, pour toute mesure de probabilité μ à support compact $S \subset \mathbb{R}$, on appelle **R-transformée** de μ la fonction réciproque de la transformée de Cauchy C_μ au voisinage de l'infini :

$$C_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(ds)}{z-s} \sim_{\infty} \frac{1}{z} \quad ; \quad R_\mu(C_\mu(z)) = z \quad \text{et} \quad R_\mu(z) = \frac{1}{z} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} R_k(\mu) z^k \right).$$

Les coefficients $R_k(\mu)$ sont appelés **cumulants libres** de la mesure μ . En théorie des probabilités non commutatives, la R-transformée et les cumulants libres jouent un rôle analogue à la transformée de Fourier et aux cumulants standards des variables aléatoires. Les cumulants libres d'un diagramme sont les cumulants libres de sa mesure de transition : $R_k(\lambda) = R_k(\mu_\lambda)$. Le premier cumulant est toujours nul, et par inversion de Lagrange,

$$R_{k+1}(\lambda) = -\frac{1}{k} [z^{-1}] (G_\lambda(z))^{-k}$$

pour tout entier k . On en déduit que les cumulants libres R_k sont des observables de diagrammes, et d'autre part, la définition analytique des cumulants prouve que

$$R_k(\omega^t) = t^{k/2} R_k(\omega)$$

pour tout diagramme continu ω et tout entier $k \geq 2$. Par conséquent, R_{k+1} est une observable homogène de poids $k+1$, et c'est en fait la composante homogène de plus haut poids $k+1$ de Σ_k , car

$$\Sigma_k(\lambda) = -\frac{1}{k} [z^{-1}] (G_\lambda(z) G_\lambda(z-1) \cdots G_\lambda(z-k+1))^{-1}$$

cf. [Biao3a, section 5] et [IO02, proposition 10.1]. Notons R_μ un produit $R_{\mu_1} R_{\mu_2} \cdots R_{\mu_r}$ de cumulants libres de diagrammes. Alors, compte tenu de la propriété de factorisation en plus haut poids des caractères centraux,

$$\Sigma_\mu = R_{\mu+1} + (\text{termes de poids inférieur})$$

pour toute partition μ , où $\mu+1$ désigne la partition obtenue à partir de μ en ajoutant 1 à toutes ses parts. En particulier, les $(R_{k+1})_{k \geq 1}$ forment une base de transcendance de \mathcal{O} , et les $(R_{\mu+1})_{\mu \in \mathcal{Y}}$ forment une base linéaire. Dans la formule précédente, on peut montrer que les termes de poids inférieur à $|\mu| + \ell(\mu) - 1$ sont en réalité de poids inférieur à $|\mu| + \ell(\mu) - 2$; en effet, tous les poids apparaissant ont la même parité que $|\mu| + \ell(\mu)$.

L'identité reliant Σ_μ à $R_{\mu+1}$ est à la base de résultats asymptotiques importants pour les caractères du groupe symétrique. Étant donnée une constante $A > 1$, une partition λ est dite **A-équilibrée** si sa longueur $\ell(\lambda)$ et sa plus grande part λ_1 sont inférieures à $A\sqrt{n}$, où $n = |\lambda|$. Alors, le diagramme continu $\omega = (\omega_\lambda)^{1/|\lambda|}$ vérifie $\omega(s) = |s|$ pour tout $s \geq A$. En particulier, les diagrammes continus obtenus par renormalisation de diagrammes A-équilibrés forment

une partie relativement compacte de $\mathcal{C}\mathcal{Y}$, et toute observable de diagrammes (continus) est bornée sur cette partie. On en déduit que

$$\begin{aligned} |\Sigma_\mu(\lambda) - R_{\mu+1}(\lambda)| &= \left| \sum_{k=0}^{|\mu|+\ell(\mu)-2} f_k(\lambda) \right| \leq \sum_{k=0}^{|\mu|+\ell(\mu)-2} |f_k(\lambda)| \\ &\leq n^{\frac{|\mu|+\ell(\mu)-2}{2}} \sum_{k=0}^{|\mu|+\ell(\mu)-2} |f_k(\omega)| \leq C n^{\frac{|\mu|+\ell(\mu)-2}{2}} \end{aligned}$$

où C est une constante qui ne dépend que de A (et de μ). Dans ce qui suit, si μ est une partition et si n est un entier plus grand que $|\mu|$, on note $\sigma_{\mu,n}$ une permutation de \mathfrak{S}_n de type $\mu 1^{n-|\mu|}$, et $|\sigma_{\mu,n}|$ le nombre minimal de transpositions dans une factorisation de $\sigma_{\mu,n}$ en cycles, c'est-à-dire $|\mu| - \ell(\mu)$. On déduit de ce qui précède :

Théorème 2.3 (Expression asymptotique des caractères des groupes symétriques, [Bia98]).
Pour tout $A > 1$ et toute partition μ , il existe une constante positive $C(A, \mu)$ telle que

$$|\chi^\lambda(\sigma_{\mu,n}) - n^{-|\mu|} R_{\mu+1}(\lambda)| \leq C(A, \mu) n^{-\frac{|\sigma_{\mu,n}|}{2}-1}$$

pour tout diagramme A -équilibré λ de taille $n \geq |\mu|$. En particulier, $\chi^\lambda(\sigma_{\mu,n}) = O(n^{-\frac{|\sigma_{\mu,n}|}{2}})$, et d'autre part, l'estimation précédente implique la factorisation asymptotique des caractères. Ainsi, si $\sigma_{\mu,n}$ et $\sigma_{\tau,n}$ commutent, alors

$$|\chi^\lambda(\sigma_{\mu,n} \sigma_{\tau,n}) - \chi^\lambda(\sigma_{\mu,n}) \chi^\lambda(\sigma_{\tau,n})| \leq D(A, \mu, \tau) n^{-\frac{|\sigma_{\mu,n}|+|\sigma_{\tau,n}|}{2}-1}$$

pour tout diagramme A -équilibré λ de taille $n \geq |\mu| + |\tau|$.

L'expression asymptotique des caractères indexés par des partitions A -équilibrées implique également des résultats de concentration pour la forme d'une partition apparaissant dans la décomposition d'un $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$ -module construit par produit tensoriel, restriction ou induction, voir [Bia98, théorèmes 1.4.1, 1.5.1 et 1.6.1], et [Biao1a, §6b]. D'autre part, le lien entre caractères centraux et cumulants libres permet de démontrer très facilement des lois limites pour les grandes partitions aléatoires, voir en particulier les sections 3.3 et 10.2 ; c'est l'intérêt essentiel de cette notion. Concluons ce paragraphe en évoquant deux propriétés additionnelles des cumulants libres.

1. Notons $M_\mu(\lambda)$ les moments de la mesure de transition d'un diagramme λ ; ce sont des observables de diagrammes, car si

$$G_\lambda(z) = \frac{1}{z} \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{p}_k(\lambda)}{k} z^{-k} \right) = \frac{1}{z} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{h}_k(\lambda) z^{-k} \right),$$

alors $M_\mu(\lambda) = \tilde{h}_\mu(\lambda)$ pour toute partition μ . On doit à R. Speicher une interprétation combinatoire des relations entre moments et cumulants libres d'une mesure de probabilité, cf. [Spe98, NSo6]. Si π est une partition ensembliste de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note $M_\pi = M_\rho$ et $R_\pi = R_\rho$ les moments et cumulants libres indexés par la partition ρ obtenue en prenant les tailles des parts de π . La partition π est dite **non croisée** s'il n'existe pas de quadruplets $i < j < k < l$ tels que $i \sim_\pi k$ et $j \sim_\pi l$. Si l'on place les entiers $1, 2, \dots, n$

sur une droite et si l'on dessine les blocs de la partition π , alors la condition de non croisement a une signification géométrique évidente, voir la figure 2.4. L'ensemble $\mathfrak{NC}(n)$ des partitions non croisées de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est de cardinal le nombre de Catalan C_n , et il forme un treillis ordonné pour l'ordre de raffinement sur les partitions d'ensemble. Dans ce cadre, on peut montrer que

$$M_k = \sum_{\pi \in \mathfrak{NC}(k)} R_\pi \quad ; \quad R_k = \sum_{\pi \in \mathfrak{NC}(k)} \mu(\pi_{\text{comp}}) M_\pi$$

où $\mu(\pi) = \prod_{i \geq 1} (-1)^{|\pi_i|-1} C_{|\pi_i|-1}$ est la fonction de Möbius du treillis $\mathfrak{NC}(k)$, et π_{comp} désigne le complémentaire de π au sens de Kreweras, voir par exemple [Šo6a, §2.2.4]. Ainsi, au prix d'une inversion de Möbius, on peut ramener l'étude des cumulants libres de diagrammes $R_\mu(\lambda)$ à celle des moments $M_\mu(\lambda)$. Or, ces derniers peuvent être vus comme **moments des éléments de Jucys-Murphy** au sens des probabilités non commutatives. On renvoie à [Bia98, Biao3a] et [Šo6a, §2.1.8 et §4.2] pour de plus amples détails au sujet de cette interprétation.

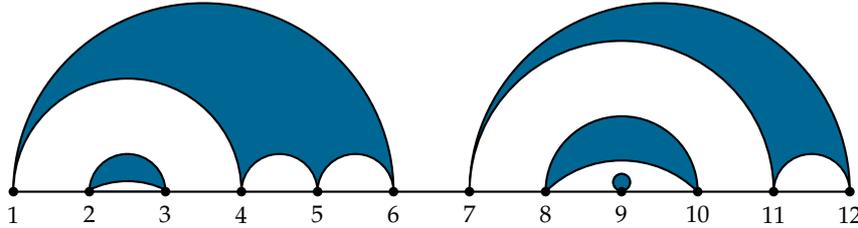


FIGURE 2.4 – La partition $\pi = \{1, 4, 5, 6\} \sqcup \{7, 11, 12\} \sqcup \{2, 3\} \sqcup \{8, 10\} \sqcup \{9\}$ est non croisée.

- La composante de plus haut poids de Σ_k étant le cumulant R_{k+1} , on peut montrer que tout caractère central (d'un cycle) s'écrit comme polynôme à coefficients entiers en les cumulants d'ordre inférieur à son poids. Par exemple,

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= R_2 & ; & & \Sigma_2 &= R_3 & ; & & \Sigma_3 &= R_4 + R_2 & ; \\ \Sigma_4 &= R_5 + 3R_3 & ; & & \Sigma_5 &= R_6 + 15R_4 + 5R_2^2 + 8R_2. \end{aligned}$$

Les termes suivants sont calculés à la fin de [Biao3a]. On appelle **polynôme de Kerov** le polynôme universel K_k tel que $\Sigma_k = K_k(R_2, \dots, R_{k+1})$. Le polynôme de Kerov associé au caractère central d'un cycle a tous ses coefficients positifs (cf. [Fé07]), et on peut donner une interprétation combinatoire des dits coefficients en termes de nombres de factorisations d'une permutation, voir [DFS08, théorème 1.4].

Un dernier point que nous avons omis est la détermination de toutes les filtrations d'algèbre de \mathcal{O} ; ainsi, une classe très générale de telles filtrations est décrite par [IK99, proposition 10.3] et [IO02, proposition 4.7], et nous renvoyons le lecteur à ces articles s'il souhaite pallier cette omission. Outre le degré canonique et le poids, nous aurons par la suite besoin du degré de Kerov (section 3.4 et chapitre 11) et du α -degré (section 10.3) ; nous les présenterons en temps voulu.

2.5 Correspondance de Markov-Krein et topologie des diagrammes continus

Pour conclure ce chapitre, nous souhaitons préciser très clairement la topologie induite sur \mathcal{CY} par la convergence des observables de diagrammes de l'algèbre \mathcal{O} . Ainsi, étant donnée une suite — pour l'instant déterministe — $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de diagrammes continus, que peut-on dire si pour toute observable $f \in \mathcal{O}$, $f(\omega_n)$ admet une limite? La réponse rentre dans le cadre de la **correspondance de Markov-Krein**, qui est exposée dans son cadre le plus général dans les articles [Ker93b, Ker98]. Nous suivrons ici peu ou prou le second article.

Si ω est un diagramme de Young continu dans \mathcal{CY} , nous avons vu dans les paragraphes précédents comment lui associer :

- une fonction $G_\omega(z)$ analytique sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$:

$$G_\omega(z) = \frac{1}{z} \exp \left(- \int_{\mathbb{R}} \frac{\sigma'_\omega(s)}{z-s} ds \right).$$

La fonction $G_\omega(z)$ a sa partie imaginaire négative lorsque z reste dans \mathbb{H} ; de plus, $\lim_{y \rightarrow +\infty} iy G_\omega(iy) = 1$. Enfin, elle admet une limite finie lorsque z tend vers $t \in \mathbb{R}$ avec t en dehors du support de σ_ω .

- une mesure de probabilité à support compact μ_ω dont la transformée de Cauchy est la fonction $G_\omega(z)$:

$$G_\omega(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu_\omega(ds)}{z-s}.$$

On obtient ainsi une bijection entre \mathcal{CY} , les mesures de probabilité sur \mathbb{R} à support compact, et les fonctions analytiques sur \mathbb{H} qui vérifient

$$\forall z \in \mathbb{H}, \Im(N(z)) \leq 0 \quad ; \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} iy N(iy) = 1 \quad ;$$

$$\forall t \text{ réel en dehors d'un certain compact, } \lim_{z \rightarrow t, z \in \mathbb{H}} N(z) \text{ existe.}$$

Cette correspondance $\omega \leftrightarrow G_\omega \leftrightarrow \mu_\omega$ est appelée correspondance de Markov-Krein, et elle est homéomorphique pour la topologie de la convergence uniforme sur \mathcal{CY} , la topologie de la convergence en loi des mesures de probabilité, et une topologie que nous préciserons plus loin sur les fonctions analytiques à partie imaginaire négative. Malheureusement, ces topologies (métrisables) ne rendent pas les espaces sous-jacents complets; par suite, il convient d'introduire des objets plus généraux pour comprendre pleinement les propriétés topologiques de cette correspondance. Définissons donc les quatres espaces métrisables complets suivants :

- **diagrammes continus généralisés** : soit \mathcal{Y}^1 l'ensemble des fonctions $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont 1-lipschitziennes et vérifient

$$\int_{-\infty}^{-1} (1 + \omega'(s)) \frac{ds}{|s|} < \infty \quad ; \quad \int_1^{+\infty} (1 - \omega'(s)) \frac{ds}{|s|} < \infty,$$

étant entendu qu'on identifie deux telles fonctions si elles diffèrent d'une constante. Il existe une distance sur \mathcal{Y}^1 qui en fait un espace métrique complet, et telle que $([\omega_n])_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une classe d'équivalence $[\omega]$ dans \mathcal{Y}^1 si et seulement si l'on peut choisir des représentants tels que $\omega_n \rightarrow \omega$ uniformément sur toute partie compacte $S \subset \mathbb{R}$. On a bien sûr $\mathcal{Y} \subset \mathcal{CY} \subset \mathcal{Y}^1$.

– **fonctions de Rayleigh** : soit \mathcal{R}^1 l'ensemble des fonctions mesurables sur \mathbb{R} telles que

$$\forall s, 0 \leq R(s) \leq 1 \quad ; \quad \int_{-\infty}^0 \frac{R(s)}{1+|s|} ds < \infty \quad ; \quad \int_0^{\infty} \frac{1-R(s)}{1+|s|} ds < \infty,$$

étant entendu qu'on identifie deux telles fonctions si elles sont égales presque partout. Une suite de fonctions de Rayleigh $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une fonction R si

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^x \frac{R_n(s)}{1+|s|} ds &= \int_{-\infty}^x \frac{R(s)}{1+|s|} ds \quad ; \\ \forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} \int_x^{\infty} \frac{1-R_n(s)}{1+|s|} ds &= \int_x^{\infty} \frac{1-R(s)}{1+|s|} ds. \end{aligned}$$

Dans ce cas, la limite R est encore une fonction de Rayleigh. Il existe une distance sur \mathcal{R}^1 compatible avec cette notion de convergence, et complète ; pour cette distance, la convergence $R_n \rightarrow R$ dans \mathcal{R}^1 est équivalente² à

$$\int_a^b R_n(s) ds \rightarrow \int_a^b R(s) ds$$

pour tout intervalle borné $[a, b]$.

– **fonctions à parties imaginaires négatives** : soit \mathcal{N}^1 l'ensemble des fonctions analytiques sur \mathbb{H} qui ont leur partie imaginaire négative, et vérifient $\lim_{y \rightarrow \infty} iy N(iy) = 1$. On munit \mathcal{N}^1 de la restriction de la topologie de Montel, c'est-à-dire la topologie de la convergence uniforme sur tous les compacts de \mathbb{H} . De nouveau, il existe une distance sur \mathcal{N}^1 compatible avec cette topologie et complète. De plus, si $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suites de fonctions de \mathcal{N}^1 converge pour la topologie de Montel vers une fonction analytique (à partie imaginaire négative) f , alors f appartient à \mathcal{N}^1 si et seulement si

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}, y \geq Y} |iy f_n(iy) - 1| = 0.$$

– **mesures de probabilité** : on note $\mathcal{M}^1 = \mathcal{M}^1(\mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ l'espace des mesures de probabilité (boréliennes) sur la droite réelle, et on le munit de la topologie de Skorohod de la convergence en loi, cf. [Bil69, chapitre 1]. Il est bien connu qu'il existe une distance (naturelle !) sur \mathcal{M}^1 compatible avec cette topologie, et qui en fait un espace complet.

Avec ces définitions, la correspondance de Markov-Krein généralisée s'énonce comme suit :

Théorème 2.4 (Correspondance de Markov-Krein généralisée, [Ker98]). *La correspondance de Markov-Krein entre diagrammes de Young continus, mesures à supports compacts et fonctions analytiques à partie imaginaire négative est la restriction d'une correspondance homéomorphique entre les quatre espaces métriques complets :*

$$\mathcal{Y}^1 \leftrightarrow \mathcal{R}^1 \leftrightarrow \mathcal{N}^1 \leftrightarrow \mathcal{M}^1.$$

1. La bijection $\mathcal{R}^1 \leftrightarrow \mathcal{Y}^1$ est donnée par :

$$R(s) = \frac{1}{2}(1 + \omega'(s)) \quad ; \quad \omega(s) = \int_0^s (2R(t) - 1) dt.$$

2. Attention, si une suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de Rayleigh converge en ce sens vers une fonction mesurable R , il n'y a a priori aucune garantie pour que R soit une fonction de Rayleigh dans \mathcal{R}^1 . C'est la raison pour laquelle on doit attacher une distance à cette topologie ; des phénomènes du même type ont lieu pour les deux autres espaces \mathcal{Y}^1 et \mathcal{N}^1 .

2. L'homéomorphisme $\mathcal{N}^1 \leftrightarrow \mathcal{R}^1$ est fourni par la représentation intégrale de Nevanlinna des fonctions à partie imaginaire négative :

$$N(z) = \frac{1}{z} \exp \left(- \int_{-\infty}^0 \frac{R(s)}{z-s} ds + \int_0^{\infty} \frac{1-R(s)}{z-s} ds \right).$$

3. La correspondance $\mathcal{M}^1 \leftrightarrow \mathcal{N}^1$ est la transformée de Cauchy des mesures de probabilité, qui peut être inversée par la formule de Perron-Frobenius :

$$N(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(ds)}{z-s} \quad ; \quad \int_a^b \mu(ds) = -\frac{1}{\pi} \lim_{y \rightarrow \infty} \int_a^b \Im(N(s+iy)) ds.$$

Muni de ce résultat abstrait, plaçons-nous dans la situation décrite au début de ce paragraphe, c'est-à-dire avec une suite $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de diagrammes continus dont on sait que certaines observables admettent des limites. Il arrivera souvent dans la suite qu'on sache par exemple calculer les limites des cumulants libres :

$$\forall k \geq 2, \exists r_k = \lim_{n \rightarrow \infty} R_k(\omega_n).$$

Comme les cumulants libres engendrent l'algèbre \mathcal{O} , en effectuant des changements de base, on peut alors virtuellement calculer les limites de toutes les observables $f(\omega_n)$; en particulier, les moments $\tilde{h}_k(\omega_n)$ des mesures de transition μ_n des diagrammes ont tous des limites m_k . S'il existe une mesure de probabilité sur \mathbb{R} qui a pour moments les nombres m_k , et qui est déterminée par ses moments, ceci implique la convergence en loi $\mu_n \rightarrow \mu$ dans l'espace $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Alors, par la correspondance de Markov-Krein généralisée, il existe un diagramme continu généralisé ω tel que $\omega_n \rightarrow \omega$ uniformément sur tout compact de \mathbb{R} . En particulier, si les moments m_k correspondent à une mesure à support compact μ , alors cette mesure est automatiquement déterminée par ses moments, et elle correspond à un (vrai) diagramme continu ω . Ainsi :

Proposition 2.5 (Topologies faible et forte sur les diagrammes continus). *Soit $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de diagrammes continus qui converge pour la topologie faible vers un diagramme continu $\omega_\infty \in \mathcal{CY}$, c'est-à-dire que pour toute observable de diagrammes f dans \mathcal{O} (ou toute observable dans une base algébrique), $f(\omega_n)$ tend vers $f(\omega_\infty)$. Alors, ω_n converge vers ω_∞ uniformément sur tout \mathbb{R} .*

Autrement dit, si $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ω_∞ pour la topologie faible induite sur \mathcal{CY} par \mathcal{O} , alors la suite converge en fait pour la topologie forte³ — notons que l'appartenance $\omega_\infty \in \mathcal{CY}$ fait partie des hypothèses de l'énoncé.

Démonstration. Comme un diagramme continu $\omega(s)$ est 1-lipschitzien est égal à $|s|$ pour s assez petit ou s assez grand, on a forcément $\omega(s) \geq |s|$ pour tout s . En effet, si $\omega(s) < |s|$ pour un certain s , disons s positif, alors $\omega(s) \leq s - \varepsilon$ pour un certain $\varepsilon > 0$, et par caractère 1-lipschitzien, $\omega(t) \leq t - \varepsilon$ pour tout t plus grand que s ; ceci contredit l'hypothèse précédente. Maintenant, on sait déjà que sous les hypothèses de l'énoncé, ω_n converge vers ω_∞ uniformément sur toute partie compacte ; en particulier, c'est vrai sur le support $S = [a, b]$ de $\sigma_\infty(s) = (\omega_\infty(s) - |s|)/2$. Quitte à étendre ce support, on peut supposer $a \leq 0$ et $b \geq 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, au-delà d'un certain rang N ,

$$\|\omega_n - \omega_\infty\|_{\infty, S} \leq \varepsilon.$$

3. Ce point précis et sa preuve ne sont pas vraiment mentionnés dans [IO02] ; c'est essentiellement pour cela que nous avons consacré une section complète à ces subtilités topologiques.

Si $s \leq a$, alors $\omega_n(s) - \omega_\infty(s) = \omega_n(s) - |s| \geq 0$ par hypothèse sur les ω_n . Mais d'autre part, $(\omega_n(s) - |s|)' = \omega_n'(s) + 1 \geq 0$, donc :

$$\omega_n(s) - \omega_\infty(s) = \omega_n(s) - |s| \leq \omega_n(a) - |a| \leq \varepsilon.$$

On conclut que sur $S_- =]-\infty, a]$, on a également $\|\omega_n - \omega_\infty\|_{\infty, S_-} \leq \varepsilon$. De même, si $s \geq b$, alors $(\omega_n(s) - |s|)' = \omega_n'(s) - 1 \leq 0$, donc :

$$0 \leq \omega_n(s) - \omega_\infty(s) = \omega_n(s) - |s| \leq \omega_n(b) - |b| \leq \varepsilon.$$

et $\|\omega_n - \omega_\infty\|_{\infty, S_+} \leq \varepsilon$ si $S_+ = [b, +\infty[$. Tout ceci implique bien :

$$\|\omega_n - \omega_\infty\|_{\infty, \mathbb{R}} \leq \varepsilon$$

pour n assez grand, ce que l'on souhaitait. □

Ainsi, l'algèbre des observables de diagrammes permet d'établir la convergence pour la topologie uniforme (sur tout \mathbb{R}) d'une suite $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de diagrammes de Young continus vers un diagramme continu ω_∞ . Néanmoins, cette notion de convergence n'est pas la plus forte que l'on puisse espérer. Ainsi, en plus de demander que $\|\omega_n - \omega_\infty\|_\infty$ tende vers 0, on peut souhaiter que les supports des diagrammes ω_n restent bornés et convergent vers celui de ω_∞ , c'est-à-dire que :

$$\begin{aligned} a(\omega_n) &= \inf\{s \in \mathbb{R} \mid \omega_n(s) \neq |s|\} \rightarrow a(\omega_\infty) ; \\ b(\omega_n) &= \sup\{s \in \mathbb{R} \mid \omega_n(s) \neq |s|\} \rightarrow b(\omega_\infty). \end{aligned}$$

On dira dans ce cas que $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge **ultra-fortement**⁴ vers ω_∞ . Dans ce qui suit, nous observerons à trois reprises ce phénomène de convergence ultra-forte, à savoir, pour les diagrammes de Young renormalisés tirés aléatoirement sous les mesures de Plancherel (chapitre 3), sous les mesures de Schur-Weyl de paramètre $\alpha = 1/2$ (chapitre 10), et sous les mesures de Gelfand (chapitre 11). Dans ces contextes, les techniques d'observables de diagrammes ne donneront rien de plus que la convergence uniforme, et nous aurons recours à d'autres types d'arguments pour établir la convergence des supports.

4. La terminologie est locale et n'a rien à voir avec la notion de topologie ultra-forte d'algèbre d'opérateurs.