Utilités progressives dynamiques

Sommaire

Résumé : Dans ce chapitre nous discutons de quelques problématiques et incohérences dans les problèmes d'optimisation de portefeuille étudiés dans les chapitres 2 et 3. Nous discutons essentiellement des questions d'intertemporalité, dematurités multiples et de cohérence avec l'univers d'investissement. Pour répondre à ces interrogations, il s'avère que la seule alternative est de considérer

des utilités dynamiques indépendantes de l'horizon d'investissement. Nous nous intéressons très particulièrement à des utilités dites progressives ou encore des utilités forward, introduites pour la première fois par Marek Musiela et Thaleia Zariphopoulou en 2002 [84]. L'avantage de ces utilités ainsi que des richesses optimales associées est qu'elles sont indépendantes de tout horizon d'investissement et s'adaptent au mieux avec le marché financier.
Dans ce chapitre, nous considérons une définition des utilités progressives légèrement différente de celle de Zariphopoulou. Nous donnons ensuite quelques exemples simples de ces utilités à l'aide de certains outils, à la fois simples et efficaces, basés sur le changement de numéraire ainsi que le changement de probabilités. Ces exemples d'utilités que nous proposons d'étudier sont par définition croissantes strictement concaves. Nous montrons alors que, malgré leur simplicité, il est difficile de vérifier la condition de compatibilité avec l'univers d'investissement (une condition nécessaire dans la définition 4.3 de ces utilités progressives).
Enfin, nous montrons que ces utilités dynamiques vérifient une équation aux dérivées partielles stochastiques (4.32) de second ordre complètement non linéaire que nous allons retrouver dans un cadre beaucoup plus général.

4.1 Introduction et Motivations

Nous avons étudié dans les chapitres 1 et 2 les problèmes d'optimisation de portefeuille par deux méthodes qui sont essentiellement les suivantes :

- La première consiste à utiliser des techniques d'équations aux dérivées partielles. Ainsi nous avons montré que la fonction valeur est solution (solution de viscosité) de l'EDP de Hamilton-Jacobi-Bellman (2.34). Nous avons aussi obtenu la formule exacte du portefeuille optimal.

- La deuxième méthode est basée sur les techniques de dualité dont nous avons montré la réelle efficacité. En effet, nous avons vu, dans le chapitre 3 basé essentiellement sur les résultats de D. Kramkov et W. Schachermayer [60] et ceux de I.Karatzas et S.Shreve [55], que le fait de considérer le problème dual nous a beaucoup aidé d'une part à mieux comprendre le problème primal et d'autre part à prouver l'existence d'un portefeuille optimal et ce en prouvant d'abord sous l'hypothèse d' " élasticité asymptotique strictement inférieure à 1" l'existence d'une martingale locale optimale au problème dual, ainsi qu'une caractérisation duale de ces deux optimums, l'identité (3.58), et une relation de conjugaison entre les deux fonctions valeurs, dans les théorèmes 3.3 et 3.6.

Mais dans l'une ou l'autre de ces deux méthodes aussi intéressantes et puissantes qu'elles soient, il est très difficile de spécifier la fonction valeur, à l'exception de quelques exemples markoviens ainsi que des cas particuliers des utilités exponentielles, puissances et logarithmiques. De plus, cette fonction valeurs s'avère loin d'être intuitive et elle est en général assez compliquée à interpréter.

4.1.1 Les utilités classiques et l'univers d'investissement

Les utilités *classiques* sont choisies sans rapport avec l'univers d'investissement.
En effet, dans ce même cadre *classique*, si l'investisseur a fixé son utilité, donc son aversion au risque, en $t = 0$ pour la date T, une fois sa stratégie optimale établie, pour les cinq ans à venir par exemple, il n'aura en pratique qu'à suivre cette stratégie jusqu'à la maturité. Donc le portefeuille ainsi construit à une date intermédiaire, par exemple deux ans, dépend non seulement de l'horizon mais surtout d'un choix que l'investisseur a fait il y a deux ans, ne tenant pas compte du nouvel état du marché à une telle date intermédiaire, un marché financier qui ne cesse d'évoluer de manière très significative, et ne tenant pas compte des contraintes d'investissements imposées à cet agent. En particulier, ceci n'est pas cohérent avec les périodes de crises assez fréquentes ces dernières années et qui peuvent influer de manière importante les choix et les préférences de tout agent par rapport à des produits qui deviennent beaucoup trop risqués ou plus rentables. L'investisseur se retrouve alors prisonnier de sa propre stratégie. D'un autre côté, il n'est pas cohérent de représenter ses préférences dans un tel marché très dynamique par une simple fonction déterministe indépendante en général du temps.

Pour pouvoir remédier à cette incohérence, il est très important que nous puissions avoir un degré de liberté de plus qui permettra de changer de stratégie si nécessaire et surtout réajuster l'utilité de l'agent si ses préférences changent au cours du temps. Pour ce, il est plus naturel de considérer des utilités *stochastiques* et *dynamiques* .

4.1.2 Banque d'investissement et intertemporalité

La question que nous posons ici est la question d'un agent qui choisit d'investir sa richesse initiale dans des produits financiers de différentes maturités et tente de d'identifier sa stratégie optimale par critère d'utilité espérée. Le problème qui se pose est, alors, comment cet agent définit son utilité ? Doit-elle être la même pour les différents horizons d'investissement ou non ?
Pour mieux comprendre les difficultés que nous pouvons rencontrer dans ce genre de problème, nous considérons les deux cas de figure suivants :

i) Un agent financier, ayant construit son portefeuille optimal $X_T^{x,*}$ jusqu'à la date T à l'aide d'une fonction d'utilité U, décide de redémarrer son investissement pour un horizon T_1 avec comme richesse initiale $X_T^{x,*}$ et ce en considérant une nouvelle utilité U_1. Une fois son portefeuille reconstitué et sa stratégie optimale établie, il réalisera ainsi la richesse $X_{T_1}^{X_T^{x,*},*}$.

ii) L'investisseur choisit dès la date 0 la maturité $T+T_1$ comme horizon à son investissement. Nous notons par $\hat{U}$ sa fonction d'utilité. Par conséquent, il réalisera à cette maturité la richesse $\hat{X}_{T+T_1}^{x,*}$.

Dans le premier scénario, la fonction valeur de l'investisseur à un instant $t \leq T$ est déterminée à la fois par le problème d'optimisation de portefeuille associé à U sur $[0, T]$ et par celui associé à U_1 entre T et T_1, alors que dans le second scénario, la fonction valeur de l'investisseur est donnée par le programme d'optimisation sur la période $[0, T + T_1]$ et dont la fonction d'utilité est $\hat{U}$.

Si le choix des utilités à différentes maturités dans ces deux cas est cohérent, alors le fait de s'arrêter à une date intermédiaire puis de reprendre les investissements ne doit, en aucun cas, générer ni des fonctions valeurs différentes ni des richesses optimales différentes. En effet, deux fonctions valeurs différentes (donc des satisfactions différentes pour un même gain) ou des richesses optimales différentes ne peuvent correspondre aux mêmes préférences d'un seul agent. Cela signifie aussi que si nous décidons d'arrêter d'investir à une date intermédiaire T_I quelconque, nous sommes certains que la richesse réalisée à cette date est encore optimale, dans le sens où elle coïncide avec celle que nous aurions pu réaliser si nous avions considéré le problème d'optimisation de portefeuille à horizon T_I. En d'autres termes, la richesse optimale ne doit pas dépendre de l'horizon d'investissement. Or, en général, ceci n'est pas le cas pour la raison suivante : du fait que l'utilité est déterministe et ne tient pas compte de l'évolution du marché, l'agent n'a pas le même point de vue sur sa fonction d'utilité dans sept ans que celui qu'il aura dans cinq ans pour une maturité de deux ans, c-à-d que son utilité pour les sept années à venir n'intègre pas l'évolution du marché et des préférences dans cinq ans.

Ceci n'est pas l'unique exemple de situations où nous pouvons être confrontés à la question des maturités différentes . En effet, prenons le cas d'une *banque d'investissement* dont une part importante de l'activité vise à trouver les placements financiers et les couvertures les plus rentables pour ses clients. Comme les fonds d'investissement s'attendent en général à un retour rapide sur investissement et à un rendement maximal, la banque prend des risques importants sur le court et le moyen terme pour répondre aux exigences de ses clients. Pour se couvrir contre tous ces risques, il est naturel de prendre position sur du long terme car un investisseur obtient plus de rendement sur ce genre de stratégies. Dans ce cadre de banque d'investissement, le gestionnaire utilise donc des stratégies à plusieurs horizons : court, moyen et long terme dans un même portefeuille. Qu'elle est alors la stratégie optimale pour cet investisseur ? Comment doit-il choisir sa fonction d'utilité ? Est-elle la même pour toutes les maturités ?

La réponse à cette question est clairement non. Nous espérons toujours réaliser un meilleur rendement sur du long terme que sur du court terme. De plus d'après ce qui précède les stratégies et les fonctions valeurs ne doivent pas trop dépendre de la maturité. Cependant ceci ne justifie pas le choix d'une même utilité pour différentes maturités, car certainement le fait de considérer une unique fonction d'utilité pour tous les horizons peut être une alternative pour répondre à la question d'intertemporalité, mais en aucun cas, comme nous l'avons expliqué ci-dessus, cette fonction déterministe peut intégrer l'évolution d'un marché très dynamique ni représenter les préférences d'un agent qui ne cessent à leur tour de changer selon l'état de ce marché.

Cette discussion, basée sur un raisonnement intuitif, va considérablement motiver l'intérêt que nous portons dans ce travail aux utilités stochastiques. En effet celles-ci se présentent comme une alternative aux utilités classiques permettant de mieux intégrer l'évolution du marché et les préférences d'un agent représentatif ; elles permettent ainsi de répondre aux problématiques exposées ci-dessus et dans le chapitre précédent. Nous allons plus particulièrement nous intéresser au concept des utilités stochastiques dites *utilités progressives* ou encore *progressive performances*, une notion développée sous le nom de "forward utilities" et "forward performances", par Zariphopoulou et Musiela dans [84],[89],[85], [86], [92], [113], [87],[88] et étudiée par Tehranchi et al. dans [36] et très récemment par Zitkovic dans [115].

4.2 Utilités progressive

Avant de définir les utilités progressives proprement dites, nous décrivons le marché dans lequel les stratégies de l'investisseur prennent place ; cet univers d'investissement jouera un rôle important dans la suite.

4.2.1 L'environnement

Univers d'investissement

Dans toute la suite, un espace de probabilité de type brownien est donné. Plus précisément, on considère un mouvement brownien standard de dimension d : $W = (W_1, W_2, ..., W_d)$, défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour simplifier, nous supposons que $\mathcal{F}_t$ coïncide avec la filtration générée par le mouvement brownien, c-à-d $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t)$ rendue continue à droite et complète.

Le marché financier lui-même est caractérisé comme d'habitude par le taux court terme r_t, le vecteur des primes de risque η_t associées aux sources de risque

W, que nous supposons généralement mesurables et bornés.
Les stratégies de portefeuille π conduisent à des processus de richesse satisfaisant la contrainte d'autofinancement :

$$dX_t^{x,\pi} = r_t X_t^{x,\pi} dt + \pi_t \sigma_t (dW_t + \eta_t dt), \qquad X_0^{x,\pi} = x \tag{4.1}$$

où x désigne le capital initial, et σ la matrice de volatilité des actifs, supposée ment mesurable non-singulière et bornée en (t, ω). Son inverse $\sigma_t^{-1}(\omega)$ est supposée aussi uniformément bornée en $(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$. Notons que cette écriture où π décrit le montant investi dans les actifs risqués suppose implicitement que la richesse est toujours positive.
Les investisseurs sont souvent restreints dans leur choix d'investissement π, qui doivent appartenir à un cône convexe éventuellement aléatoire, noté par $\mathcal{K}$. Ses sections temporelles sont adaptées et notées $\mathcal{K}_t$. Par exemple, le cas où $\mathcal{K}$ est un espace vectoriel exprime que seulement un nombre limité ($< d$) d'actifs (ou de portefeuilles d'actifs) sont accessibles au gestionnaire. C'est une manière de d'exprimer l'incomplètude du marché.
Nous préciserons au fur à mesure les hypothèses d'intégrabilité sur les portefeuilles et la richesse associée, ainsi que sur la forme de l'espace des contraintes.

Concavité de l'utilité

Avant de définir les utilités *progressives*, il est important de rappeler quelques notions de bases sur les préférences et l'aversion au risque étudiées en détail dans le premier chapitre. Pour cela, considérons une variable aléatoire discrète X prenant les valeurs x_i avec la probabilité p_i ; son espérance est donnée par $\mathbb{E}(X) = \sum_i p_i x_i = \overline{x}$. Comme $\overline{x}$ représente le gain espéré en jouant à une loterie décrite par le couple $(X, (p_i))$, il est logique de préférer le gain sûr $\overline{x}$ au gain aléatoire X, en d'autres termes nous préférons l'espérance du gain au gain aléatoire. Par conséquent nous attribuons au gain $\overline{x}$ une utilité espérée supérieure à celle que nous attribuons à la variable X, c-à-d

$$\mathbb{E}(U(X)) = \sum_i p_i U(x_i) \leq U(\overline{x}) \tag{4.2}$$

Ce raisonnement étant valable pour toute variable aléatoire X et à tout instant t (fixé), l'inégalité de (4.2) est satisfaite pour toute variable X, ce qui implique

que $U(t,.)$ est une fonction concave (à t fixé). En outre, le fait d'être sensible au niveau de la richesse se traduit par la stricte monotonie des utilités, c-à-d $U(x) > U(x')$ pour $x > x'$.

Donc il est tout à fait naturel d'imposer cette propriété comme une propriété nécessaire que doit satisfaire tout processus u destiné à représenter les préférences d'un agent sur un marché financier. C'est la raison de l'utilisation d'un critère d'utilité espérée dans le cas classique.
Ici on cherche à distinguer le risque à la date t, pour lequel on tirerait une richesse aléatoire $\mathcal{F}_t$ mesurable, d'espérance conditionnelle x à la place de x. C'est différent de regarder l'impact de l'utilité pour un risque futur, qui est plus lié à la programmation dynamique et à l'univers d'investissement.

4.2.2 Définition de l'utilité progressive

Rapellons dabord la définition d'une fonction d'utilité puis celle d'un portefeuille admissible.

Définition 4.1. *On appelle utilité classique toute fonction U strictement concave croissante.*

Définition 4.2. *Un vecteur $\pi \in \mathbb{R}^d$ est un portefeuille $\mathcal{K}$- admissible pour une richesse initiale x, c-à-d que $\pi \in \mathcal{A}(x,\mathcal{K})$, si le processus de richesse $X^{x,\pi}$ donné par (5.4) est tel que*

$$X_t^{x,\pi} \geq 0, \quad \forall t \geq 0$$

presque sûrement, et si

$$\pi_t \in \mathcal{K}_t, \ \forall t \geq 0, \quad p.s.$$

Les ensembles $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ et $\mathcal{A}$ sont définis de manière identique à 2.2.

La définition des utilités *progressives* associées à l'univers d'investissement décrit au début de cette section est légèrement différente de celle introduite par Musiela et Zariphopoulou [89, 85, 84] dans le sens où les portefeuilles que nous considérons dans notre définition et dans toute la suite sont des portefeuilles non actualisés. Cette différence ne change pas les assertions de la définition et peut paraitre peu importante mais elle jouera un rôle crucial dans la question des changements de numéraires que nous aborderons dans les exemples qui suivent et sera approfondie dans le chapitre 6 de ce manuscrit.

Définition 4.3. *Nous appelons utilité progressive, définie sur l'espace filtré* $(\Omega, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ *issue de la fonction d'utilité standard* U*, tout champ aléatoire* $\mathcal{F}$*-ment mesurable, et continu* $u : (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mapsto u(t,x)$ *vérifiant*

i) **Propriété de concavité :** *Pour tout* (t,ω)*,* $x \mapsto u(t,\omega,x)$ *est une utilité classique, strictement croissante et strictement concave. A l'instant* 0*,* $u(0,\omega,x) = U(x)$*.*

ii) **Consistance avec l'univers d'investissement :** *pour toute stratégie admissible* $\pi \in \mathcal{K}$*, de richesse* X^π*,*

$$\mathbb{E}\big(u(t, X_t^\pi)/\mathcal{F}_s\big) \leq u(s, X_s^\pi), \ \forall t \geq s \geq 0. \tag{4.3}$$

En d'autres termes, pour toute stratégie d'investissement admissible, $(u(t, X_t^\pi); t \geq 0)$ *est une surmartingale locale.*

iii) **Existence d'un optimum :** *Pour toute richesse initiale* x*, il existe une stratégie admissible, notée* $\pi^* \in \mathcal{K}$*, de processus de richesse* X^{x,π^*} *telle que*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(u(t, X_t^{x,\pi^*})/\mathcal{F}_r) = u(r, X_r^{x,\pi^*}), \ \forall t \geq r \geq 0. \tag{4.4}$$

En d'autres termes, $u(t, X_t^{x,\pi^*})$ *est une martingale continue.*

4.2.3 Interprétation

✓ **Consistance avec l'univers d'investissement**

Cette propriété explique que si π n'est pas la stratégie optimale, alors il vaut mieux ne pas faire d'investissement : soit on est optimal soit on n'a pas intérêt à investir. Il faut comprendre cette propriété comme suit : le fait qu'un investisseur fasse un investissement qui n'est pas optimal comparé avec ce qu'il aurait pu gagner s'il avait suivi la bonne stratégie correspondante à ses propres préférences constitue une perte. L'optimum dans ce raisonnement représente la référence pour un investisseur, c'est donc l'état où il faut se placer. Autrement il n'est pas cohérent avec son aversion au risque, il est donc perdant. C'est l'état d'équilibre naturel.

✓ **Propriété de surmartingale**

Comme les processus de richesse ne sont pas des surmartingales, (mais des sous-martingales sous la probabilité risque neutre), pour une utilité concave standard V, $V(X_t)$ n'est pas une surmartingale. Toutefois, dans les problèmes d'optimisation dynamique classique, on retrouve cette propriété pour la fonction de valeurs du problème (définition (2.19)), comme nous l'avons vu dans les rappels précédents, en liaison avec les notions de programmation dynamique. L'optimum est lui associé à la propriété de martingale.

Cette propriété peut être interprétée comme le fait qu'à tout date t, l'utilité est l'utilité maximale conditionnelle espérée d'un investissement dans le marché de référence.

Nous remarquons, dans le cadre classique d'optimisation de portefeuille à horizon T, et comme u est une simple fonction concave, que $u(X_T^\pi)$ ne peut être en général une surmartingale pour toutes les stratégies admissibles. En effet par une simple application du lemme d'Itô, nous avons

$$du(X_t^\pi) = \Big((r_t X_t^\pi + < \eta_t, \pi_t\sigma_t >)u'(X_t^\pi) + \frac{1}{2}u''(X_t^\pi)||\pi_t\sigma_t||^2\Big)dt + (*)dW_t$$

en particulier si le taux court est strictement positif et si la stratégie $\pi \equiv 0$ est admissible. Alors le processus $u(X_t^{\pi=0}) = u(xe^{\int_0^t r_s ds})$ ne peut être une surmartingale. Par contre, nous pouvons vérifier facilement pour tout $t < T$, que la fonction valeur v (définition (2.19)) vérifie cette propriété de consistance avec l'univers d'investissement. Nous avons vu aussi que s' il existe un portefeuille optimal, alors le processus $v(t, X^{\pi^*}),\ t \geq T$ est une martingale. Enfin, d'après les résultats des théorèmes 3.3 et 3.6, nous obtenons que U est strictement concave ce qui implique que cette fonction valeur est une utilité sur l'intervalle $[0, T[$.

Toutes ces remarques montrent que la propriété de surmartingale pour toutes les stratégies et martingale tout au long de la trajectoire optimale est naturelle, car comme nous venons de le voir c'est l'une des propriétés de base d'une fonction valeurs d'un problème d'optimisation de portefeuille classique.

✓ **Existence d'un unique optimum**
– Existence : cette propriété est une condition nécessaire, car nous pouvons nous demander quel intérêt nous porterons à une utilité si elle ne nous permet pas d'identifier la stratégie optimale.
– Unicité : Il faut comprendre par unicité : l'unicité de la richesse optimale et non de la stratégie, car il est possible de réaliser un même gain en suivant deux stratégies différentes.
En raisonnant par l'absurde nous supposons qu'il existe deux stratégies optimale π^1 et π^2 qui génèrent deux richesses optimales X^{π^1} et X^{π^2} différentes. Par convexité de l'ensemble des contraintes, nous savons que la stratégie $\bar{\pi} = (\pi^1 + \pi^2)/2$ est encore une stratégie admissible, ce qui implique par stricte convexité de $u(t, ., x)$, ainsi que par l'optimalité de π^1 et π^2, pour la même richesse initiale x, que

$$\mathbb{E}(u(t, X_t^{\bar{\pi}})) > \frac{1}{2}\Big(\mathbb{E}(u(t, X_t^{\pi^1})) + \mathbb{E}(u(t, X_t^{\pi^2}))\Big) = u(0, x) \tag{4.5}$$

ce qui est contradictoire.

✓ Le temps t joue un rôle important dans l'analyse des stratégies futures car l'évolution d'une utilité par rapport à ce paramètre n'est autre que l'évolution des préférences et de l'aversion au risque de l'agent au cours du temps et par conséquent, l'évolution de son processus de décision et d'investissement. De plus vu la stochasticité de ces utilités, le temps peut être aussi interprété comme facteur de risque.
Nous remarquons, enfin, que telles qu'elles sont définies, ces utilités sont indépendantes de tout horizon d'investissement, ce qui les rend *intertemporelles.*

4.3 Exemples simples d'utilités

La définition des utilités repose sur deux propriétés essentielles, d'une part qu'à toute date t l'utilité $u(t, x)$ est une utilité classique, d'autre part sur la compatibilité avec l'univers d'investissement. Les exemples que nous proposons ci-dessous sont basés sur des perturbations stochastiques simples de l'utilité initiale (classique) et vérifient automatiquement le fait d'être des utilités classiques. La question essentielle est donc d'étudier les conséquences de l'hypothèse de cohérence avec un univers d'investissement donné.

4.3.1 Exemple 1 : Changement de prix d'état dans une utilité classique

Dans cet exemple, par souci de simplicité, nous supposons que l'ensemble des contraintes $\mathcal{K}$ est un cône convexe fermé qui ne dépend pas de la richesse initiale x.
Nous nous donnons a priori l'utilité classique initiale $U = v$, que nous supposons déterministe, strictement concave et strictement croissante.
Vu l'importance des changements de probabilité dans l'activité de la banque d'investissement, il est naturel de se demander si un changement de probabilité composé avec un facteur "d'actualisation", que nous appellerons changement de prix d'état, suivant la terminologie de Bachelier [6] et de Samuelson [101] transforme une utilité classique en une utilité compatible avec l'univers d'investissement.
Le changement de prix d'état est décrit par l'intermédiaire d'une semimartingale strictement positive Z, qui évolue selon la dynamique

$$\frac{dZ_t}{Z_t} = \mu_t dt + \gamma_t dW_t, \quad Z_0 = 1 \tag{4.6}$$

où les processus adaptés μ et γ sont supposés bornés.
Définition : Soit $u(t,x)$ le processus d'utilité dynamique défini par sa condition initiale U, et pour tout $t > 0$, pour tout $x > 0$ par :

$$u(t,x) \stackrel{def}{=} Z_t\, U(x).$$

Par définition, quel que soit $t \geq 0$, l'application $x \mapsto u(t,x)$ est une fonction d'utilité strictement concave croissante. Nous privilégions donc la concavité et nous nous intéressons à établir les conditions nécessaires ou suffisantes sous lesquelles l'utilité dynamique u est compatible avec l'univers d'investissement, c'est-à-dire $u(t, X_t^\pi) = Z_t U(X_t^\pi)$ est une surmartingale quelque soit la stratégie admissible $\pi \in \mathcal{K}$.

Le cas du changement de probabilité

Pour commencer, nous supposons que le processus Z ci-dessus est une martingale exponentielle. Comme γ est supposé borné, il est bien connu que Z est une vraie martingale, qui peut être vue comme une densité de probabilité. Choisissons un horizon final de gestion T_H (en général très lointain) et définissons une nouvelle probabilité $\mathbb{Q}^Z$ sur la tribu $\mathcal{F}_{T_H}$, par

$$\frac{d\mathbb{Q}^Z}{d\mathbb{P}} := Z_{T_H}.$$

Alors, restreinte à la tribu $\mathcal{F}_t$, la densité est la variable aléatoire Z_t.
Le théorème de Girsanov permet de reformuler de manière très simple l'hypothèse de compatibilité avec l'univers d'investissement, puisque nous avons la caractérisation suivante des surmartingales sous la nouvelle probabilité :
Théorème de Girsanov Un processus adapté et continu J est une $\mathbb{Q}^Z$-surmartingale locale si et seulement si $(Z_t\, J_t)$ est une $\mathbb{P}$-surmartingale locale.
Critère de compatibilité L'utilité dynamique u est compatible avec l'univers d'investissement ($(u(t, X_t^\pi))_{t\geq 0}$ est une surmartingale sous la probabilité $\mathbb{P}$) si et seulement si les processus $U(X_t^\pi)$ sont des $\mathbb{Q}^Z$-surmartingales locales, et s'il existe une stratégie pour laquelle cette quantité est une vraie martingale.
Le problème est donc équivalent à montrer que l'utilité standard $U(x)$ est une utilité pour le même univers d'investissement, mais sous une nouvelle probabilité a priori, c'est à dire $\mathbb{Q}^Z$ au lieu de $\mathbb{P}$.
Puisque cette utilité ne dépend pas du temps, la stratégie constante (càd $\pi \equiv 0$), si elle est *admissible* est optimale. A priori, une condition suffisante pour que la condition de surmartingale soit satisfaite est que les portefeuilles admissibles soient des martingales sous $\mathbb{Q}^Z$; en d'autres termes le $\mathbb{Q}^Z$-nouveau marché doit être sans taux d'intérêt, et la prime de risque doit être nulle ou dans le noyau de $\sigma^\perp$. Si de plus les stratégies constantes sont admissibles, alors U est une $\mathbb{Q}^Z$-utilité .

Seconde étape : Dans la suite, nous ne supposons plus que le processus Z est une martingale. Notre objectif est de déterminer si les hypothèses faites dans le premier cas sont encore nécessaires dans le cas présent. Pour cela, nous avons besoin d'expliciter les différentes dynamiques. Pour simplifier l'écriture de la formule d'Itô, nous supposons la fonction concave U de classe $\mathcal{C}^2$. Sous cette hypothèse, d'après la formule d'Itô, la condition de surmartingale pour toute stratégie admissible s'écrit, pour presque tout (t,ω),

$$u(t,X_t^\pi)\mu_t + u'(t,X_t^\pi)\Big(r_t\, X_t^\pi + <\pi_t\sigma_t, \eta_t+\gamma_t>\Big) + \frac{1}{2}u''(t,X_t^\pi)\|\pi_t\sigma_t\|^2 \leq 0.$$

Nous faisons en plus l'hypothèse que nous pouvons partir, à chaque date t d'une richesse initiale x.
Il s'ensuit, en prenant le supremum sur toute les stratégies admissibles, que

$$u\mu_t + u'r_t x + \operatorname{ess\,sup}_{\pi\in\mathcal{A}(x)}\left\{u' <\pi_t\sigma_t, \eta_t+\gamma_t> + \frac{u''}{2}\|\pi_t\sigma_t\|^2\right\}(t,x) \leq 0. \quad (4.7)$$

Donc, en notons par $\mathcal{K}_t$ l'ensemble des stratégies admissibles à l'instant t et par $\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}$ l'opérateur de projection orthogonale sur l'espace $\mathcal{K}_t\sigma_t$ à la date t, alors la stratégie optimale est donnée par

$$\pi_t^*(x)\sigma_t = -\frac{u'}{u''}(t,x)\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}(\eta_t+\gamma_t).$$

Par conséquent, si u est une utilité progressive alors $u(t,X_t^{\pi^*})$ est une martingale, ce qui se traduit par l'identité suivante :

$$\left\{u\mu_t + u'r_t x - \frac{(u')^2}{2u''}\|\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}(\eta_t+\gamma_t)\|^2\right\}(t,x) = 0,\ t\geq 0. \quad (4.8)$$

En exprimant u ainsi que ses dérivées en fonction de U et ses dérivées, cette identité peut se réécrire, en divisant par $Z_t x U'(x)$ sous la forme suivante

$$\frac{U}{xU'}(x)\mu_t + r_t - \frac{U'}{2xU''}(x)\|\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}(\eta_t+\gamma_t)\|^2 = 0,\ \forall t\geq 0,\ \forall x>0. \quad (4.9)$$

À ce stade, le processus u est une utilité *progressive* si et seulement si cette équation est satisfaite. Comme les quantités μ, r, η et γ ne dépendent pas de x, nous remarquons que le choix des paramètres de diffusion de Z ne peuvent être quelconques (car sinon, si μ ou γ dépend de x, nous pouvons perdre la concavité de u). C'est pour cette raison que nous distinguons les deux cas suivants :

Premier cas : Pour commencer, nous nous intéressons au cas où U/xU' et U'/xU'' sont proportionnels. Il existe alors une constante $c < 0$ telle que

$$\frac{U''}{U'} = c\,\frac{U'}{U}$$

ce qui revient, en intégrant par rapport à x, à écrire qu'il existe une deuxième constante c_1 telle que $c_1 + \log(u') = \log(u^c)$ ou encore à $u'u^{-c} = c_2$.

- *U* **est une utilité puissance :** Si $c \neq 1$, par une simple intégration de cette dernière identité, on obtient que U ne peut être qu'une utilité puissance, c-à-d. il existe un réel $0 < \alpha < 1$ tel que $U(x) = x^\alpha/\alpha$. Par conséquent, l'équation (4.9) devient

$$\frac{1}{\alpha}\mu_t + r_t + \frac{1}{2(1-\alpha)}\|\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}(\eta_t + \gamma_t)\|^2 = 0,\ \forall t \geq 0, \tag{4.10}$$

ce qui implique que le choix du processus Z est fortement lié à l'univers d'investissement. Par contre, nous ne pouvons conclure ni que Z est une martingale , ni que $X^\pi Z$ l'est comme il est le cas ci-dessus. En revanche, ce qui est important à noter est que dans ce cas, les paramètres de diffusion de Z dépendent, outre l'univers d'investissement, de l'aversion au risque associée à U notée dans l'équation (4.14) ci-dessus par $1-\alpha$.

Remarque 4.1. *Dans la définition des utilités progressives : Zariphopoulou et al. [84], [89], [85], [92], [87]... Tehranchi et al [36] et G. Zitkovic [115], les auteurs ont supposé que l'on peut toujours se placer dans le cadre d'un marché où le taux court r est nul. Or dans cet exemple d'utilité puissance, le taux court joue un rôle important, nous permet d'élargir une famille d'utilités progressives certes, particulière (puissance), mais nous n'aurions pas remarqué si nous avons adopté la même définition que ces auteurs.*

- *U* **est une utilité exponentielle :** Si $c = 1$, alors $U(x) = 1 - \exp(-c_2 x)$ est une utilité exponentielle de paramètre c_2. Par conséquent, l'équation

(4.9) devient

$$xr_t = \frac{1}{c_2}\big(- \mu_t + \frac{1}{2}\| \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}(\eta_t + \gamma_t)\big\|^2\big), \ \forall t \geq 0, \ x > 0. \tag{4.11}$$

Comme le terme de droite est indépendant de x, cela implique qu'une condition nécessaire et suffisante sous laquelle u est une utilité progressive est que

$$r = 0 \ \text{ et } \mu_t = \frac{1}{2}\| \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}(\eta_t + \gamma_t)\big\|^2. \tag{4.12}$$

Second cas : Dans le cas contraire, si $U/x\,U'$ et $U'/x\,U''$ ne sont pas proportionnels, alors par le même raisonnement que dans le premier cas, on obtient que u est une utilité progressive si et seulement si $r = 0$ et $\mu = 0$. Ce qui est, encore, équivalent à

$$r \ \ = 0, \quad \eta + \gamma \in (\mathcal{K}\sigma)^*, \tag{4.13}$$

où $(\mathcal{K}\sigma)^*$ est le cône dual de $\mathcal{K}\sigma$ (voir définition B.14), dont l'une des propriétés est la suivante :

$$\nu \in (\mathcal{K}\sigma)^* \Leftrightarrow < \pi\sigma, \nu > \leq 0, \ \forall \pi \in \mathcal{K}.$$

Par conséquent, par une simple application du lemme d'Itô, et pour $\pi \in \mathcal{K}$, le processus ZX^π est une surmartingale. Nous en déduisons alors ce premier résultat.

Théorème 4.1. *Soit U une fonction d'utilité, et Z un processus positif tel que $dZ_t = Z_t(\mu_t + \gamma_t dW_t)$. Nous définissons l'utilité stochastique $u(t,x) = Z_tU(x)$.*

- *Si U n'est ni de type puissance ni exponentielle, alors $u(t,x)$ est une utilité progressive si et seulement si Z est une martingale, de volatilité γ telle que $\gamma+\eta$ appartienne à l'orthogonal de $\mathcal{K}\sigma$, et si le marché initial est sans taux d'intérêt. Alors la stratégie $\pi \equiv 0$, qui correspond à une richesse constante est optimale.*
- *Si U est une fonction d'utilité puissance $(0 < \alpha < 1)$, les paramètres de Z doivent satisfaire*

$$\frac{1}{\alpha}\mu_t + r_t + \frac{1}{2(1-\alpha)}\| \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}(\eta_t + \gamma_t)\|^2 = 0, \ dt \otimes d\mathbb{P}\ a.s, \tag{4.14}$$

la stratégie optimale est

$$\pi_t^*(X_t^{x,*})\sigma_t = \frac{X_t^{x,*}}{1-\alpha}\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}(\eta_t+\gamma_t).$$

– *Si U est une fonction exponentielle ($U(x) = 1 - e^{-\alpha x}/\alpha$), le marché doit être sans taux d'intérêt, et le drift de Z dépend de sa volatilité.*

$$r_t = 0 \quad et\ \mu_t = \frac{1}{2}\Big\|\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}(\eta_t+\gamma_t)\Big\|^2,\ dt\otimes d\mathbb{P}\ a.s, \tag{4.15}$$

la stratégie optimale est

$$\pi_t^*(X_t^{x,*})\sigma_t = \frac{1}{\alpha}\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}(\eta_t+\gamma_t).$$

Ce résultat n'est autre qu'une condition nécessaire et suffisante. Par contre, comme le marché est incomplet, nous remarquons d'après la dernière équation de (4.13) que le choix de la volatilité γ ainsi que la prime de marché ne sont pas uniques. Par contre, nous pouvons noter que, quelque soit le choix de Z, toutes les utilités considérées génèrent la même stratégie optimale $\pi^* \equiv 0$ et elles sont issues de la même condition initiale U, ce qui montre que la condition initiale est insuffisante pour avoir l'unicité de ces processus.

Remarque 4.2. *Si le marché est complet, alors $\pi^* = 0$ et par suite toutes les utilités construites ci-dessus sont identiques. Cependant, l'unicité reste encore une question ouverte.*

4.3.2 Exemple 2 : Utilité classique, changement de probabilité et changement de numéraire

Dans cet exemple, en plus des hypothèses faites dans l'exemple précédent, nous considérons un second processus Y qui évolue selon la dynamique

$$\frac{dY_t}{Y_t} = \alpha_t dt + \delta_t dW_t. \tag{4.16}$$

Comme dans l'exemple 4.3.1, le but est d'étudier sous quelles conditions le nouveau processus u défini par

$$u(t,x) = Z_t U(\frac{x}{Y_t}) \tag{4.17}$$

est une utilité progressive, et surtout dans quel univers.
Pour cela, l'idée est de se rapprocher le plus possible du cas de l'exemple précédent, en définissant un nouveau univers. En effet, pour $\pi \in \mathcal{K}$, la dynamique du processus X^π/Y est donnée, en appliquant le lemme d'Itô, par

$$d\frac{X_t^\pi}{Y_t} = (r_t - \alpha_t + < \delta_t, \eta_t >)\frac{X_t^\pi}{Y_t}dt + (\frac{\pi_t}{Y_t}\sigma_t - \frac{X_t^\pi}{Y_t}\delta_t)\big(dW_t + (\eta_t - \delta_t)dt\big).$$

Nous pouvons alors définir un nouvel univers d'investissement comme suit :

$$\begin{cases} \tilde{r} = r - \alpha + < \delta, \eta > \ : \textit{le nouveau taux court,} \\ \tilde{\eta} = \eta - \delta : \textit{la nouvelle prime de marché,} \\ \tilde{\pi} = \frac{\pi}{Y} - \frac{X^\pi}{Y}\delta\sigma^{-1} : \textit{les nouvelles stratégies,} \\ \tilde{X}^{\tilde{\pi}} = \frac{X^\pi}{Y} : \textit{les nouvelles richesses,} \\ \tilde{\mathcal{K}}(\tilde{x}) = \frac{\mathcal{K}(\tilde{x}Y)}{Y} - \tilde{x}\delta\sigma^{-1} : \textit{le nouvel espace de contraintes,} \end{cases} \tag{4.18}$$

ce qui implique que, pour tout $\tilde{\pi} \in \tilde{\mathcal{K}}$, on a

$$d\tilde{X}^{\tilde{\pi}} = \tilde{r}_t\tilde{X}^{\tilde{\pi}}dt + \tilde{\pi}_t\sigma_t\big(dW_t + \tilde{\eta}_t dt\big). \tag{4.19}$$

Considérons, par la suite, $\tilde{u}$ le processus défini par

$$\tilde{u}(t, \tilde{x}) \stackrel{def}{=} Z_t U(\tilde{x}).$$

L'équivalence suivante : *u est une utilité dans l'univers d'investissement* $(r, \eta, \mathcal{K})$ *si et seulement si $\tilde{u}$ est une utilité dans le nouveau univers* $(\tilde{r}, \tilde{\eta}, \tilde{\mathcal{K}})$ suggère que l'approche la plus naturelle est d'appliquer les résultats de l'exemple précédent à $\tilde{u}$ et en déduire, d'après cette dernière équivalence, les conditions nécessaires ou suffisantes pour que u soit une utilité progressive dans l'univers de départ. Malheureusement, ceci n'est pas possible car, contrairement à l'hypothèse faite au début de l'exemple précédent, le nouveau espace de contraintes $\tilde{\mathcal{K}}$ dépend de la richesse $\tilde{x}$, comme nous pouvons bien le voir dans (4.18). Cependant, par analogie entre les dynamiques des richesses dans les deux univers, nous pouvons appliquer le même raisonnement et ainsi obtenir la condition de compatibilité donnée par

$$u\mu_t + u'\tilde{r}_t x + essup_{\tilde{\pi}\in\tilde{\mathcal{K}}(x)}\left\{u' < \tilde{\pi}_t\sigma_t, \tilde{\eta}_t + \gamma_t > + \frac{u''}{2}\|\tilde{\pi}_t\sigma_t\|^2\right\}(t,x) = 0, \quad (4.20)$$

dont la stratégie optimale sera donnée par le théorème 6.5, et qui s'énonce :

Théorème 4.2. *La stratégie optimale au problème d'optimisation (4.20) est donnée par*

$$\tilde{\pi}^*_t(x) = -\frac{1}{u''}\Big(\prod_{\mathcal{K}\sigma}\big(-xu''\delta_t + u'(\tilde{\eta}_t + \gamma_t)\big) + xu''\delta_t\Big)(t,x). \qquad (4.21)$$

Remarque 4.3. *La preuve de ce résultat sera donnée dans le chapitre 6 paragraphe 6.3.2, quand nous étudierons la question du changement de numéraire en détails.*

Pour simplifier, nous supposons de plus que $\mathcal{K}$ est un sous espace vectoriel. Par conséquent, l'opérateur $\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}$ n'est autre que l'opérateur de projection orthogonale. En injectant (4.21) dans (4.20), nous trouvons que

$$u(t,\tilde{x})\mu_t + u'(t,\tilde{x})\tilde{r}_t\tilde{x} - \frac{(u')^2}{2u''}\Big\|\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}\big(\tilde{\eta}+\gamma_t\big)\Big\|^2 - \frac{\tilde{x}^2u''}{2}\Big\|\delta_t - \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}(\delta_t)\Big\|^2(t,\tilde{x}) = 0 \quad (4.22)$$

En réécrivant cette équation en terme de la fonction U, en simplifiant par $Z\tilde{x}U$ et en faisant le changement de variable $x = \tilde{x}Y_t$, nous obtenons que $\forall t \geq 0, x > 0$

$$\frac{U}{xU'}(x)\mu_t + \tilde{r}_t - \frac{U'}{2xU''}\|\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}\big(\tilde{\eta}+\gamma_t\big)\|^2 - \frac{xU''}{2U'}\|\delta_t - \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}(\delta_t)\|^2(t,x) = 0. \quad (4.23)$$

Nous retrouvons alors l'équation (4.9) avec un terme supplémentaire, qui est un terme purement dû au processus Y. Ceci explique encore une fois que le cadre de cet exemple ne peut être déduit directement de celui de l'exemple 4.3.1. Par contre, le raisonnement est identique. Ainsi, rappelons que les paramètres $\tilde{r}, \tilde{\eta}, \mu$ et γ sont indépendants de x, et par conséquent nous commençons par traiter les cas particuliers :

Premier cas : Si U/xU' et U'/xU'' sont proportionnels. Nous avons démontré ci-dessus que cela implique que U est soit de type puissance soit exponentielle.

* U **est une utilité puissance.** Alors $\exists a > 0$ tel que $U(x) = x^a/a$. Par conséquent, l'équation(4.23) devient, $\forall t \geq 0$

$$\frac{1}{a}\mu_t + \tilde{r}_t - \frac{1}{2(1-a)}\|\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}(\eta_t - \delta_t + \gamma_t)\|^2 - \frac{1-a}{2}\|\delta_t - \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}(\delta_t)\|^2 = 0 \quad (4.24)$$

* U **est une utilité exponentielle.** Donc $U(x) = -\frac{1}{c}e^{-cx},\ c > 0$. Cela induit que, $\forall t \geq 0,\ x > 0$, on a

$$x\tilde{r}_t + \frac{cx^2}{2}\|\delta_t - \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}(\delta_t)\|^2 - \frac{1}{c}\big(- \mu_t + \frac{1}{2}\|\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}(\eta_t - \delta_t + \gamma_t)\|^2\big) = 0.$$

Étant un polynôme de second degré identiquement nul, par conséquent, l'équation ci-dessus est équivalente à ce que tous ses coefficients soient nuls, c-à-d

$$\tilde{r} = 0, \quad \mu = \frac{1}{2}\|\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}(\eta - \delta + \gamma)\|^2, \quad \delta \in \mathcal{K}\sigma$$

ce qui est encore équivalent à,

$$\alpha = r + <\delta, \eta>, \quad \mu = \frac{1}{2}\|\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}(\eta - \delta + \gamma)\|^2, \quad \delta\sigma^{-1} \text{ est admissible.} \quad (4.25)$$

Deuxième cas : Si U n'est ni de type puissance ni exponentielle, les termes de l'identité (4.23) sont tous nuls, ce qui est équivaut à

$$\tilde{r} = 0, \quad \mu = 0, \quad \delta \in \mathcal{K}\sigma, \quad \eta - \delta + \gamma \in (\mathcal{K}\sigma)^{\perp}$$

en d'autres termes :

Z est une martingale, X^π/Y est une martingale locale positive sous la probabilité Q^Z donnée par : $d\mathbb{Q}^Z/d\mathbb{P} = Z,\ \ \delta\sigma^{-1}$ est une stratégie admissible

D'où le résultat suivant :

Théorème 4.3. *Soit U une fonction d'utilité.*

– *Si U n'est ni de type puissance ni exponentielle, alors le processus u défini par $u(t,x) = Z_tU(x/Y_t)$ est une utilité si et seulement si Z est une martingale, $ZX^\pi/Y, \pi \in \mathcal{K}$ est martingale et la stratégie $\delta\sigma^{-1}$ est admissible. Dans ce cas la stratégie optimale est $\delta\sigma^{-1}$ quelque soit le choix de U.*

– *Si U est une fonction d'utilité puissance ou exponentielle, alors la condition : "Z est une martingale, ZX est une surmartingale pour toute stratégie π admissible" n'est pas une condition nécessaire.*
  Dans le cas où U est une utilité puissance de paramètre α, il suffit de choisir Z tel que les conditions (4.24) soient satisfaites. Sinon, dans le cas où U est exponentielle, il suffit que Z vérifie (4.25).

Enfin, remarquons que dans ces exemples, le processus Z peut être interprété comme un changement de probabilité et Y comme un changement de numéraire. Une conséquence directe de ce théorème est le corollaire suivant :

Corollaire 4.1. *Sous les hypothèses du théorème précédent, si nous supposons que $Z = 1$, alors u défini par $u(t, x) = U(x/Y_t)$ est une utilité dans l'univers d'investissement $(r, \eta, \mathcal{K})$ si et seulement si $X^\pi/Y, \pi \in \mathcal{K}$ est une martingale locale et que la stratégie $\delta\sigma^{-1}$ est admissible.*

Nous remarquons aussi, d'après ce qui précède, que le fait de se placer dans un nouveau numéraire Y, nous permet de changer la prime de marché. En particulier, un bon choix de numéraire permettra de se placer dans un nouveau univers où la prime de risque est nulle. Nous aborderons cette question avec plus de détails dans le chapitre suivant.

4.3.3 Dynamique de l'utilité progressive u

Nous nous intéressons à la dynamique de l'utilité u dans le cas où la fonction d'utilité U n'est ni une utilité puissance ni exponentielle. Pour cela, nous utilisons la définition du processus $Z_t U(\frac{x}{Y_t})$ ainsi que le lemme d'Itô, en rappelant que dans ce cadre Z est une martingale ($\mu \equiv 0$). Il s'ensuit d'après les dynamiques (4.6) et (4.16) de Z et Y que

$$\begin{aligned} du(t,x) &= d\big(Z_t U(\frac{x}{Y_t})\big) = Z_t \frac{x}{Y_t}\Big(U\gamma_t - U'\delta_t\Big)(\frac{x}{Y_t})dW_t \qquad (4.26)\\ &+ \Big(Z_t \frac{x}{Y_t}U'(-\alpha_t + \|\delta_t\|^2 - < \gamma_t, \delta_t >) + \frac{1}{2}(\frac{x}{Y_t})^2 U'' \|\delta_t\|^2\Big)(\frac{x}{Y_t})dt \end{aligned}$$

Ainsi, et d'après ce qui précède, u est une utilité *progressive* si et seulement si

$$\begin{cases} r = \alpha - < \delta, \eta_t > \\ \eta - \delta + \gamma \in (\mathcal{K}\sigma)^\perp, \ \delta \in \mathcal{K}\sigma \end{cases}$$

ce qui implique que

$$-\alpha_t + \|\delta_t\|^2 - < \gamma_t, \delta_t >= -r_t.$$

Par suite le terme en dt dans la dynamique de u, ou encore le drift, est égal à

$$-r_t + \frac{1}{2}(\frac{x}{Y_t})^2 U''(\frac{x}{Y_t})\|\delta_t\|^2. \tag{4.27}$$

Soit Γ le coefficient de dW_t dans la dynamique de u. Alors

$$\Gamma(t,x) = \Big(Z_t \frac{x}{Y_t} U \gamma_t - Z_t \frac{x}{Y_t} U' \delta_t\Big)(\frac{x}{Y_t}). \tag{4.28}$$

En dérivant par rapport à x, nous obtenons

$$\Gamma'(t,x) = \Big(\frac{Z_t}{Y_t} U'(\gamma_t - \delta_t) - Z_t \frac{x}{Y_t} U'' \delta_t\Big)(\frac{x}{Y_t}) \tag{4.29}$$

ou encore

$$\Gamma'(t,x) + u'(t,x)\eta_t = \Big(\frac{Z_t}{Y_t} U'(\eta_t + \gamma_t - \delta_t) - Z_t \frac{x}{Y_t} U'' \delta_t\Big)(\frac{x}{Y_t}). \tag{4.30}$$

Comme $\eta - \delta + \gamma \in (\mathcal{K}\sigma)^\perp$ et que $\delta \in \mathcal{K}\sigma$, ceci implique que

$$\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} \big(\Gamma' + u'\eta_t\big)(t,x) = -Z_t \frac{x}{Y_t} U''(\frac{x}{Y_t})\delta_t. \tag{4.31}$$

Nous en déduisons par conséquent, en injectant cette identité dans (4.27) puis dans la dynamique (4.26), que

$$\begin{aligned} du(t,x) &= (\frac{1}{2u''}\|\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} \big(\Gamma' + u'\eta_t\big)\|^2 - r_t u')(t,x)dt + \Gamma(t,x)dW_t \quad (4.32)\\ \Gamma(t,x) &= \Big(u\gamma_t - xu'\delta_t\Big)(t,x). \end{aligned}$$

Cette représentation de la dynamique de u est importante dans le sens où elle met en évidence le rôle que joue la volatilité de cette utilité ainsi que sa dérivée pour décrire l'évolution de cette classe d'utilité. De plus, en adoptant ces notations, il est facile de voir que la stratégie optimale à son tour peut s'exprimer en fonction de cette volatilité comme suit :

$$\pi^*(t,x) = -\frac{1}{u''} \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} \big(\Gamma' + u'\eta_t\big)(t,x). \tag{4.33}$$

Nous reviendrons tout au long de notre étude sur cette équation aux dérivées partielles stochastique (EDPS), car nous montrerons dans la suite que toute utilité progressive est forcément solution de ce type d'EDPS. De même pour la richesse optimale.

Remarque 4.4. *D'une manière similaire, nous pouvons établir cette dynamique dans le cadre des utilités puissances ou exponentielles, mais ce n'est pas notre but ici.*

Notons qu'il existe plusieurs autres exemples d'utilités progressives qui ont été fournis dans les travaux de M. Musiela et T. Zariphopoulou, nous citons par exemple [87], [92] et [86]. Dans [86], les auteurs font remarquer que les utilités progressives qu'ils construisent obéissent à une dynamique très proche de celle de (4.32), établie ci-dessus (sans projection sur le cône $\mathcal{K}\sigma$) mais cette EDPS n'a jamais été étudiée, ce que nous ferons dans toute la suite. Par contre, les auteurs se sont intéressés très particulièrement au cadre des utilités progressives strictement décroissantes dans le temps ($\Gamma \equiv 0$) et ce dans [86] dans un premier temps puis de manière approfondie dans [87] et [88]. Nous reviendrons à ces utilités décroissantes et aux résultats établis par M. Musiela et T. Zariphopoulou ainsi que par Tehranchi et al. [36], dans le paragraphe 7.7 du chapitre 7.