Utilités progressives et changement de numéraire

Sommaire

Résumé : Nous avons vu dans le chapitre précédent, comment les EDP stochastiques que satisfont les utilités progressives sont difficiles à étudier, car com-

plètement non linéaires et non intuitives. Dans ce chapitre, nous approfondissons la question du changement de numéraire abordée dans l'exemple 4.3.2 du chapitre 4. Nous montrons comment notre définition des utilités progressives 4.3, contrairement à celle de Zariphopoulou et al., laisse cette nouvelle notion invariante par changement de numéraire. Nous montrons uniquement par vérification qu'il existe une équivalence entre les utilités progressives d'un marché et celles d'un second, obtenu à partir du premier par un changement de numéraire dans le théorème 6.1. Dans la section 6.3, nous établissons les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman et les EDP stochastiques que satisfont les utilités progressives d'un nouveau marché de numéraire Y (un processus d'Itô). Ces équations peuvent êtres beaucoup plus compliquées que celles du chapitre précédent, si le numéraire est quelconque : les contraintes sur les portefeuilles dans le nouveau monde ne sont pas en général des cônes convexes et les opérateurs de projection sont plus compliqués et perdent beaucoup de leurs propriétés essentielles. Dans le dernier paragraphe de ce chapitre, nous nous plaçons dans le cadre d'un numéraire très particulier et qui est le numéraire de marché noté $(H^{r,\eta})^{-1}$. Le nouvel univers d'investissement est alors un univers où les richesses admissibles sont des martingales locales, c-à-d. que le taux court et la prime de marché sont nulles ($\tilde{r} = 0, \tilde{\eta} = 0$). Par contre les contraintes $\tilde{\mathcal{K}}$ ne sont pas des cônes sauf si les contraintes de départ $\mathcal{K}$ sont soit des espaces vectoriels soit $\eta\sigma^{-1} \in \mathcal{K} \cap (-\mathcal{K})$. Les EDP stochastiques sont alors beaucoup plus simples et intuitives. Ce qui nous permet de simplifier les calculs et surtout, avec beaucoup moins de paramètres, de mieux comprendre les enjeux et le rôle de la volatilité Γ.

6.1 Introduction

Nous avons vu dans le cas particulier de l'exemple 4.3.2 du chapitre précédent où $Z = 1$, que toute fonction d'utilité v est une utilité progressive dans un univers d'investissement où les processus de richesses sont des martingales locales sous la probabilité $\mathbb{P}$ et dans lequel la stratégie $\pi \equiv 0$ est une stratégie admissible. Nous avons vu aussi que si nous considérons un processus strictement positif Y dont la volatilité δ est telle que $\delta\sigma^{-1}$ est une stratégie admissible, alors le nouveau processus u défini par

$$u(t,x) = v(\frac{x}{Y_t})$$

est une utilité progressive dans un nouveau univers d'investissement déduit du premier (voir 4.13) et dans lequel les processus de richesses sont donnés par

$$\frac{X^\pi}{Y}, \text{ pour } \pi \in \mathcal{K}.$$

Nous avons vu aussi dans le même exemple 4.3.2 qu'un changement de numéraire modifie les primes de risque, le taux court ainsi que l'ensemble des contraintes $\mathcal{K}$ (voir 4.13 pour plus de détails).

Une première partie de ce chapitre sera alors dédiée à la généralisation de ce résultat. Dans une seconde partie, nous étudierons la possibilité de se placer dans un numéraire particulier dans lequel, à la fois, le taux court et la prime de marché sont nuls. En effet, ceci va nous permettre de simplifier de manière très significative la dynamique (5.37) d'une utilité progressive ainsi que l'expression (5.35) de la stratégie optimale pour devenir simplement de la forme :

$$du(t,x) = \frac{1}{2u''}||\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}\Gamma'||^2(t,x)dt + \Gamma(t,x)dW_t, \tag{6.1}$$

$$\pi_t^*(x)\sigma_t = -\frac{1}{u''}\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}\Gamma'(t,x), \tag{6.2}$$

ceci dans un nouveau univers d'investissement que nous décrirons dans le paragraphe qui suit.

6.2 Changement de numéraire

Comme nous l'avons déjà évoqué dans l'introduction, le but de cette première section est de généraliser le résultat établi dans un cas particulier ; celui de l'exemple 4.3.2. Pour cela, nous considérons, à la place d'une simple fonction d'utilité classique v, une fonction $(v(t,.))_{t\geq 0}$ qui peut être éventuellement un processus stochastique. Cette fonction doit vérifier la condition minimale suivante :

$$\forall t \geq 0, \quad x \mapsto v(t,x) \text{ est un processus strictement concave croissante.}$$

Nous définissons alors le nouveau processus u de la manière suivante

$$u(t,x) \stackrel{def}{=} v(t, \frac{x}{Y_t}). \tag{6.3}$$

Nous ne considérons que des processus Y continus et strictement positifs et ce afin de garder les propriétés de la stricte monotonie et de la concavité de u. La question qui se pose alors est la suivante : la propriété de concavité portée sur v est-elle suffisante pour que les assertions (ii) et (iii) de la définition 4.3 soient satisfaites par le nouveau processus u défini par (6.3) ?
La réponse à cette question est donnée par le résultat suivant :

Théorème 6.1. *Le processus u défini dans (6.3) est une utilité progressive sur le marché $\mathcal{M}^{r,\eta}$ si et seulement si v est une utilité progressive dans un marché où les richesses sont donnés par*

$$\tilde{X}^{\tilde{\pi}} = \frac{X^{\pi}}{Y}, \quad pour \quad \pi \in \mathcal{K}. \tag{6.4}$$

Notons $X^{x,u}$ et $\tilde{X}^{x,v}$ respectivement les processus de richesses optimales générés par u et v. Alors, on a

$$\tilde{X}^{x,v} = \frac{X^{x,u}}{Y_t}.$$

Démonstration. La preuve de ce théorème est basée sur le fait que la définition 4.3 est invariante par changement de numéraire. En effet, supposons que u est une utilité progressive sur le marché de départ $\mathcal{M}^{r,\eta}$. Il est alors facile de vérifier que

(i) **Concavité :** L'application : $x \mapsto v(t,x) \stackrel{def}{=} u(t, xY_t)$ est strictement concave croissante ($Y > 0$).

(ii) **Consistance avec l'univers d'investissement :** Comme u est une utilité progressive, alors pour toute stratégie admissible π et $\forall s \geq t \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}\Big(u(s, X_s^{t,x,\pi})/\mathcal{F}_t\Big) \leq u(t,x),$$

ce qui est encore équivalent, $\forall s \geq t \geq 0$ et $\forall \tilde{\pi}$ admissible, à

$$\begin{aligned} v(t, \frac{x}{y}) = u(t,x) &\geq \mathbb{E}\Big(u(s, X_s^{t,x,\pi} Y_s^{t,y}) \frac{1}{Y_s^{t,y}} / \mathcal{F}_t\Big) \\ &= \mathbb{E}\Big(u(s, \tilde{X}_s^{t,x,\tilde{\pi}}) \frac{1}{Y_s^{t,y}} / \mathcal{F}_t\Big) \\ &= \mathbb{E}\Big(v(s, \tilde{X}_s^{t,\frac{x}{y},\tilde{\pi}}) / \mathcal{F}_t\Big) \end{aligned}$$

où $(Y_s^{t,y})_{s \geq t}$ désigne le processus Y partant du nombre y à la date t. Ceci prouve la consistance du processus v avec le nouvel univers d'investissement.

(iii) **Existence d'un optimum :** Comme u est une utilité progressive, la richesse optimale existe et est notée par X^u. Par conséquent, il est facile de voir que le processus $\tilde{X}^v \overset{def}{=} X^u Y$ est optimal pour le problème d'optimisation associé à v.

$\square$

Remarque 6.1. *Le fait que la définition 4.3 soit invariante par changement de numéraire est essentiellement dû au fait que, contrairement à la définition donnée par M. Marek et T. Zariphopoulou [84], nous n'actualisons pas les richesses. En effet, nous avons remarqué qu'un changement de numéraire modifie le taux court en particulier, donc la définition dans [84] n'est pas adaptée à ce type d'opération, ce qui n'est pas le cas de la définition 4.3 proposée ici.*

À ce stade, le résultat 6.1 que nous venons d'établir est un résultat assez général. Dans le but d'établir les nouvelles dynamiques des utilités progressives dans de nouveaux univers d'investissement, quelques précisions sont nécessaires. Pour commencer, nous supposons que le numéraire Y obéit à la dynamique suivante :

$$\frac{dY_t}{Y_t} = \mu_t dt + \gamma_t dW_t, \ Y_0 = 1. \tag{6.5}$$

Ceci va nous permettre en particulier de définir l' univers d'investissement à partir de celui présenté dans le paragraphe 5.2 et du processus Y comme suit.

6.2.1 Le nouvel univers d'investissement :

L'idée du changement de numéraire est simplement inspirée du théorème 6.1 qui consiste à considérer les mêmes richesses X^π du marché initial et de les exprimer en unités de Y. C'est cette idée qui nous intéresse et non pas de se placer dans un nouveau marché complètement différent avec des nouveaux actifs. Dans ce sens, les richesses sont ainsi formulées

$$\frac{X^\pi}{Y}, \text{ pour } \pi \in \mathcal{K}.$$

Pour se rapprocher du cadre du marché de départ, nous commençons par établir la dynamique du processus X^π/Y. En appliquant le lemme d'Itô, nous obtenons la dynamique suivante :

$$d\frac{X_t^\pi}{Y_t} = (r_t - \alpha_t + < \delta_t, \eta_t >)\frac{X_t^\pi}{Y_t}dt + (\frac{\pi_t}{Y_t}\sigma_t - \frac{X_t^\pi}{Y_t}\delta_t)\big(dW_t + (\eta_t - \delta_t)dt\big). \quad (6.6)$$

En se basant sur cette équation, nous pouvons alors définir un nouvel univers d'investissement comme suit :

$$\begin{cases} \tilde{r} = r - \alpha + < \delta, \eta > \; : \textit{le nouveau taux court,} \\ \tilde{\eta} = \eta - \delta \; : \textit{la nouvelle prime de marché,} \\ \tilde{\pi} = \dfrac{\pi}{Y} - \dfrac{X^\pi}{Y}\delta\sigma^{-1} \; : \textit{les nouvelles stratégies,} \\ \tilde{X}^{\tilde{\pi}} = \dfrac{X^\pi}{Y} \; : \textit{les nouvelles richesses,} \\ \tilde{\mathcal{K}} = \dfrac{\mathcal{K}}{Y} - \tilde{x}\delta\sigma^{-1} \; : \textit{le nouvel espace de contraintes,} \end{cases} \quad (6.7)$$

ce qui implique que

$$d\tilde{X}^{\tilde{\pi}} = \tilde{r}_t\tilde{X}^{\tilde{\pi}}dt + \tilde{\pi}_t\sigma_t\big(dW_t + \tilde{\eta}_t dt\big), \; \tilde{\pi} \in \tilde{\mathcal{K}}. \quad (6.8)$$

Comme la propriété d'autofinancement est invariante par changement de numéraire, ces nouvelles richesses ainsi formulées sont admissibles dans ce nouveau marché.

Définition 6.1. *Un tel marché, défini à partir de $\mathcal{M}^{r,\eta}$ par le changement de numéraire Y, sera noté $\mathcal{M}^{\tilde{r},\tilde{\eta},Y}$.*

Remarque 6.2. *Il est important de noter, à ce niveau, que le nouvel espace des contraintes $\tilde{\mathcal{K}}$ est une multiplication positive suivie d'une translation du cône $\mathcal{K}$. Il est par conséquent un ensemble convexe fermé. Cependant, et en général, $\tilde{\mathcal{K}}$ n'est pas un cône pour la simple raison qu'il n'est pas stable par multiplication positive. L'opérateur de projection sur cet ensemble, s'il est défini, ne peut alors avoir les mêmes propriétés que celui de la projection sur un cône convexe fermé (voir lemme B.5). Nous reviendrons en détail sur cette remarque dans la suite et nous verrons en quoi ceci est important.*

6.2.2 Stabilité de la notion des utilités progressives par changement de numéraire

Nous supposons, dans la suite, que u et v obéissent aux dynamiques respectives suivantes

$$du(t,x) = \beta_u(t,x)dt + \Gamma_u(t,x)dW_t. \tag{6.9}$$

$$dv(t,x) = \beta_v(t,x)dt + \Gamma_v(t,x)dW_t. \tag{6.10}$$

Comme c'était le cas dans le chapitre précèdent, et afin de pouvoir appliquer le lemme d'Itô-Ventzel, l'hypothèse suivante est requise.

Hypothèse 6.1. *Les caractéristiques locales (β_v, Γ_v) de v, vérifient l' hypothèse 5.2, c-à-d $(\beta_v, \Gamma_v) \in \mathcal{B}^{1,0}$.*

Sous cette dernière hypothèse, nous établissons le résultat suivant :

Théorème 6.2. *Si v est une $\mathcal{C}^1$-semimartingale et un $\mathcal{C}^2$-processus vérifiant l'hypothèse 6.1, alors le processus u défini par*

$$u(t,x) = v(t, \frac{x}{Y_t})$$

est une $\mathcal{C}^1$-semimartingale et un $\mathcal{C}^2$-processus qui évolue selon la dynamique

$$du(t,x) = \beta_u(t,x)dt + \Gamma_u(t,x)dW_t, \tag{6.11}$$

où

$$\begin{cases} \beta_u(t,x) = \Big(\beta_v - \dfrac{x}{Y_t} < \Gamma'_v, \delta_t > + \dfrac{x}{Y_t} v'\big(||\delta_t||^2 - \alpha_t\big) \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{2}(\dfrac{x}{Y_t})^2 v'' ||\delta_t||^2\Big)(t, \dfrac{x}{Y_t}) \\ \Gamma_u(t,x) = \Big(- \dfrac{x}{Y_t} v'\delta_t + \Gamma_v\Big)(t, \dfrac{x}{Y_t}). \end{cases} \tag{6.12}$$

De plus, ses caractéristiques locales (β_u, Γ_u) vérifient l'hypothèse 5.3.

Démonstration. Nous commençons par établir les identités (6.12). Pour cela, et comme v satisfait les hypothèses requises pour appliquer le lemme d'Itô-Ventzel, en utilisant la dynamique (6.5) et lemme 5.1, on obtient

$$\begin{aligned} du(t,x) &= dv(t, \frac{x}{Y_t}) \\ &= \Big(\beta_v - \frac{x}{Y_t} < \Gamma'_v, \delta_t > + \frac{x}{Y_t} v'\big(||\delta_t||^2 - \alpha_t\big) + \frac{1}{2}(\frac{x}{Y_t})^2 v'' ||\delta_t||^2\Big)(t, \frac{x}{Y_t})dt \\ &+ \Big(- \frac{x}{Y_t} v'\delta_t + \Gamma_v\Big)(t, \frac{x}{Y_t})dW_t. \end{aligned}$$

En notant, enfin, par $\beta_u(t,x)$ le terme en dt dans cette dynamique et par $\Gamma_u(t,x)$ celui en dW_t, les identités (6.12) en découlent.
Comme le processus Y est par hypothèse continu, nous déduisons par définition que u est une $\mathcal{C}^1$-semimartingale et un $\mathcal{C}^2$-processus. Rajoutons à cela l'identité exprimant Γ_u en fonction de Γ_v dans (6.12) et le lemme A.4, il en résulte que $\Gamma_u \in \mathcal{B}^{1,0}$. Pour conclure, il suffit d'écrire que

$$u(t,x) - \int_0^t \Gamma_u(s,x)dW_s - u(0,x) = \int_0^t \beta_u(s,x)ds. \tag{6.13}$$

En utilisant le lemme A.3, nous déduisons que les caractéristiques locales de u, (β_u, Γ_u) satisfont l'hypothèse 5.3.
Enfin, le système d'équations (6.12) est obtenu par une simple application du lemme d'Itô-Ventzel 5.1. □

En particulier, nous pouvons déduire des théorèmes 6.2 et 6.1 le résultat suivant :

Théorème 6.3. *La classe des utilités progressives de la forme 5.19 est stable par changement de numéraire.*

Conclusion 6.1. *Nous concluons que, dans le cas général, si nous connaissons une utilité progressive u dans un marché donné, nous pouvons toujours déterminer une fonction d'utilité progressive v^Y dans n'importe quel numéraire y. Il suffit juste de considérer la transformation suivante :*

$$v^Y(t, \tilde{x}) \overset{déf}{=} u(t, \tilde{x}Y).$$

Il est important de noter que, dans ce paragraphe, nous n'avons pas fait l'hypothèse que la volatilité γ du numéraire Y appartient à l'espace $\mathcal{K}\sigma$ et ce contrairement à l'exemple 4.3.2. En effet, dans l'exemple 4.3.2, en appliquant le lemme d' Itô, nous avons montré que u est solution de l'EDP stochastique

$$du(t, x) = \Big(\frac{||u'\eta_t + \Gamma'_u||^2}{2u''} - r_t x u'\Big)(t, x)dt + \Gamma_u(t, x)dW_t.$$

où nous rappelons l'identité $u'\eta + \Gamma'_u = xu''\eta$. Donc pour que u soit une utilité progressive et satisfait l'EDP caractéristique de cette classe il fallait que le terme $u'\eta + \Gamma'_u$ s'écrit sous la forme d'une projection sur le cône $\mathcal{K}\sigma$ ce qui est équivalent à supposer que $\eta\sigma^{-1}$ est une stratégie admissible.

6.3 Équations de Hamilton-Jacobi-Bellman et EDPS

Nous nous plaçons dans cette section dans le nouveau univers d'investissement dans le but d'y établir les EDPS que vérifient les utilités progressives.

6.3.1 Équations de Hamilton-Jacobi-Bellman

L'idée est similaire à celle du chapitre précédent. Il s'agit d'établir l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman que doit satisfaire une utilité progressive dans le nouveau univers d'investissement décrit au début du paragraphe 6.2. En se basant essentiellement sur l'équivalence entre l'univers de départ et le nouveau, nous déduisons sans faire de calcul, à partir du théorème 5.4.4 un premier résultat qui s'annonce comme suit :

Théorème 6.4. *Soit v un processus d'utilité progressive dans le marché $\mathcal{M}^{\tilde{r},\tilde{\eta},Y}$ décrit dans (6.7), vérifiant l'hypothèse 5.2. Alors, v est solution de l'équation aux dérivées partielles stochastique (EDPS) suivante*

$$\beta(t,\tilde{x}) + v'\tilde{r}_t\tilde{x} + \sup_{\tilde{\pi}\in\mathcal{K}_t} \tilde{\mathcal{P}}(t,\tilde{x},\tilde{\pi}) = 0, \tag{6.14}$$

où $\tilde{\mathcal{P}}$ est l'opérateur défini par

$$\tilde{\mathcal{P}}(t,x,\tilde{\pi}) = \left[< \tilde{\pi}_t\sigma_t, v'\tilde{\eta}_t + \Gamma'_v(t,x) > + \frac{1}{2}v''||\tilde{\pi}_t\sigma_t||^2 \right]. \tag{6.15}$$

Signalons que nous avons noté $\tilde{x}$ les richesses initiales dans le nouveau numéraire pour rappeler que nous ne sommes pas dans le cadre initial où les richesses sont notées x.

6.3.2 Stratégie optimale

En ce qui concerne la stratégie optimale ainsi que l'EDP stochastique, les résultats sont de nature différente et ne peuvent êtres déduits par analogie. Ceci est dû essentiellement, comme nous l'avons déjà signalé dans la remarque 6.2, au fait que le nouvel espace de contraintes $\mathcal{K}$ défini dans le système (6.7) n'est plus un cône convexe, et par conséquent, que certaines propriétés fondamentales de l'opérateur de projection sur un cône convexe fermé ne sont plus satisfaites. C'est pour cette raison que nous détaillerons les calculs dans ce cadre général, le principe étant toujours le même que celui exposé dans les chapitres 2 et 4.

Considérons le problème d'optimisation suivant

$$\sup_{\tilde{\pi}\in\tilde{\mathcal{K}}_t} \mathcal{P}(t,\tilde{x},\tilde{\pi})$$

où nous remplaçons les stratégies $\tilde{\pi}$ par leur définition, à savoir

$$\tilde{\pi} = \frac{\pi}{Y} - x\delta\sigma^{-1}.$$

On obtient

$$\mathcal{P}(t,\tilde{x},\pi) = \frac{v''}{2}\Big(||\frac{\pi_t}{Y_t}\sigma_t - \tilde{x}\delta_t + \frac{v'\tilde{\eta}_t + \Gamma'_v}{v''}(t,\tilde{x})||^2 - ||\frac{v'\tilde{\eta}_t + \Gamma'_v}{v''}||^2(t,\tilde{x})\Big).$$

D'après la stricte concavité de v (définition 4.3, assertion (i)), il en découle que

$$\sup_{\pi \in \mathcal{K}_t} \mathcal{P}(t, \tilde{x}, \pi) = -\frac{v''}{2} ||v'\tilde{\eta}_t + \Gamma'_v(t, \tilde{x})||^2 \tag{6.16}$$

$$+ \quad \frac{v''}{2(Y_t)^2} \inf_{\pi \in \mathcal{K}} || \frac{-Y_t\big(- \tilde{x}v''\delta_t + v'\tilde{\eta}_t + \Gamma'_v\big)}{v''}(t, \tilde{x}) - \pi_t\sigma_t||^2. \tag{6.17}$$

Ainsi, la stratégie optimale n'est autre que la projection du terme

$$\frac{-Y_t\big(- \tilde{x}v''\delta_t + v'\tilde{\eta}_t + \Gamma'_v\big)}{v''}(t, \tilde{x})$$

sur le cône $\mathcal{K}_t\sigma_t$, et donc est donnée par

$$\pi^*_t(\tilde{x}) = -\frac{Y_t}{v''} \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} \Big(- \tilde{x}v''\delta_t + v'\tilde{\eta}_t + \Gamma'_v\Big)(t, \tilde{x}) \tag{6.18}$$

d'où le théorème suivant :

Théorème 6.5. *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème 5.4, la stratégie optimale est donnée par*

$$\pi^*_t(\tilde{x}) = -\frac{Y_t}{v''} \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} \Big(- \tilde{x}v''\delta_t + v'\tilde{\eta}_t + \Gamma'_v\Big)(t, \tilde{x}) \tag{6.19}$$

ou encore, exprimée en fonction de la stratégie optimale dans le nouvel univers d'investissement

$$\tilde{\pi}^*_t(\tilde{x}) = -\frac{1}{v''}\Big(\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} \big(- \tilde{x}v''\delta_t + v'\tilde{\eta}_t + \Gamma'_v\big) + \tilde{x}v''\delta_t\Big)(t, \tilde{x}). \tag{6.20}$$

La présence dans ces équations du processus Y et de son paramètre de diffusion δ dans le terme en xu'' ainsi que dans la formule établie de la nouvelle prime de marché $\tilde{\eta}$ met en évidence l'impact du changement de numéraire sur les stratégies optimales dans le nouveau marché financier $\mathcal{M}^{\tilde{r},\tilde{\eta},Y}$.
Par contre, nous rappelons que ce numéraire ne doit en aucun cas affecter les stratégies optimales dans le marché de départ $\mathcal{M}^{r,\eta}$. Or, remarquons que dans l'équation (6.19), le paramètre δ est présent, bien qu'il s'agisse de la stratégie optimale dans le marché de départ. Ceci n'est pas, en effet, en contradiction avec ce que nous venons de dire. Il faut juste se rappeler que Γ_v est la volatilité d'une utilité progressive v dans le nouvel univers. Par conséquent, d'après le théorème

6.2 (équation (6.12)), l'utilité correspondante u définie dans le marché initial par

$$u(t,x) = v(t, \frac{x}{Y_t})$$

est telle que sa volatilité Γ_u soit donnée par

$$\Gamma_u(t,x) = \Big(-\frac{x}{Y_t} v' \delta_t + \Gamma_v \Big)(t, \frac{x}{Y_t}).$$

En dérivant cette quantité et en faisant le changement de variable $x = \tilde{x} Y_t$, nous obtenons, puisque $\tilde{\eta} = \eta - \delta$, l'identité suivante

$$Y_t\big(-\tilde{x} v'' \delta_t + v' \tilde{\eta}_t + \Gamma'_v \big)(t, \tilde{x}) = (u' \eta_t \Gamma'_u)(t,x).$$

Injections cette identité dans (6.19), on a alors

$$\pi_t^*(x) \;=\; -\frac{1}{u''} \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} \Big(u'\eta_t + \Gamma'_u \Big)(t,x).$$

Ceci n'est autre que l'équation (6.19) établie dans le théorème 5.5 dans le cadre du marché de départ $\mathcal{M}^{r,\eta}$. D'ailleurs, ce théorème pourrait être démontré en partant de cette identité et en remontant les calculs dans l'autre sens.

Remarque 6.3. *Il est important de noter que l'unicité de la stratégie optimale, présentée ci-dessus comme le vecteur meilleure approximation de la distance entre $u'\eta_t + \Gamma'_u$ et le cône $\mathcal{K}\sigma$, n'implique pas l'unicité de la richesse optimale.*

6.3.3 EDP stochastiques

D'après les résultats du paragraphe précédent, nous déduisons la condition nécessaire que doit vérifier le drift β_v de toute utilité progressive v dans le nouvel univers d'investissement que nous avons introduit dans le paragraphe 6.2. Cette condition nécessaire est donnée dans le théorème suivant.

Théorème 6.6. *Soit v un processus d'utilité progressive dans l'univers $\mathcal{M}^{\tilde{r},\tilde{\eta},Y}$ de la forme (6.10) vérifiant l'hypothèse 5.2. Alors, elle est solution de l'équation aux dérivées partielles stochastique (EDPS) suivante*

$$\begin{aligned} &\beta_v(t,\tilde{x}) + \tilde{x} v' \tilde{r}_t \\ &+\frac{1}{2v''}\Big(||\Big(I_d - \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}\Big)\big(v'\tilde{\eta}_t + \Gamma'_v - \tilde{x} v'' \delta_t\big)||^2 - ||v'\tilde{\eta}_t + \Gamma_v||^2\Big)(t,\tilde{x}) = 0 \qquad (6.21)\end{aligned}$$

où nous avons noté par I_d l'identité de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$.

Démonstration. Pour démontrer ce théorème il suffit d'injecter l' identité (6.18) dans l'équation (6.16), le résultat est alors immédiat. □

Remarque 6.4. *Le terme* $\left(I - \prod_{\mathcal{K}\sigma}\right)$ *n'est autre que l'opérateur de projection sur le cône dual* $(\mathcal{K}\sigma)^*$ *(voir la définition B.14). Nous préférons cette notation à celle de* $\prod_{(\mathcal{K}\sigma)^*}$ *pour mettre en évidence le fait que nous projetons sur le dual et pour marquer le lien entre les deux projecteurs.*

Corollaire 6.1. *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème précèdent, et si* v *est une utilité progressive dans l'univers* $\mathcal{M}^{\tilde{r},\tilde{\eta},Y}$*, elle est solution de l'EDP stochastique suivante*

$$dv(t,\tilde{x}) = \Gamma_v(t,\tilde{x})dW_t \tag{6.22}$$
$$+\left\{\frac{1}{2v''}\Big(||v'\tilde{\eta}_t + \Gamma'_v||^2 - ||\Big(I_d - \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}\Big)\big(v'\tilde{\eta}_t + \Gamma'_v - \tilde{x}v''\delta_t\big)||^2\Big) - \tilde{x}v'\tilde{r}_t\right\}(t,\tilde{x})dt.$$

Dans ces deux derniers résultats, nous remarquons que les EDP stochastiques sont plus compliquées que celles associées à l'univers de départ, à savoir (5.34), (5.35) et (5.37). Ceci est naturel pour la simple raison que les résultats que nous venons d'établir dans ce chapitre ne sont qu'une généralisation de toutes les équations établies dans le chapitre précédent. En effet, il faut juste remplacer δ et α par zéro pour retrouver les théorèmes et les corollaires du chapitre 4.

Cependant, il est important de signaler que la forme du drift dans les équations (6.21) et (6.22) est différente de celle du drift dans (5.37) qui s'écrit tout simplement sous la forme

$$\frac{1}{2u''}\|\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}\left[u'\eta_t + \Gamma'(t,x)\right]\|^2 - u'r_t x. \tag{6.23}$$

Cela est dû uniquement au fait que

$$\left\|\Big(I_d - \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}\Big)\big(a - \tilde{x}v''\delta_t\big)\right\|^2 - \left\|a\right\|^2 \neq \left\|\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}(a)\right\|^2, \tag{6.24}$$

contrairement au cadre du chapitre précédent où $\delta \equiv 0$.

6.3.4 Équations de HJB par rapport au nouvel espace de contraintes $\tilde{\mathcal{K}}$

Jusque-là, nous avons choisi de représenter les équations de HJB ainsi que les EDP stochastiques dans ce nouvel univers par rapport à l'opérateur de projection sur le cône convexe fermé $\mathcal{K}\sigma$. Nous avons vu aussi que les équations obtenues deviennent plus compliquées. Cependant, nous pouvons simplifier ces résultats uniquement en remarquant que, bien que $\tilde{\mathcal{K}}$ ne soit pas un cône, il est convexe et fermé, et donc vérifie le lemme suivant :

Lemme 6.1. *Pour tout point a de $\mathbb{R}^d$, il existe un unique vecteur de meilleure approximation dans $\tilde{\mathcal{K}}\sigma$ noté $\prod_{\tilde{\mathcal{K}}\sigma}(a)$ tel que*

$$||a - \prod_{\tilde{\mathcal{K}}\sigma}(a)|| = \inf_{b\in\tilde{\mathcal{K}}} ||a - b||. \tag{6.25}$$

De plus ce point vérifie

$$\prod_{\tilde{\mathcal{K}}\sigma}(a) = \prod_{\mathcal{K}\sigma}\left(a - x\delta\sigma^{-1}\right) + x\delta\sigma^{-1}. \tag{6.26}$$

Pour la preuve de ce lemme, voir B.7 et B.8. Ceci nous permet alors de réécrire le théorème 6.6 ainsi que le corollaire 6.1 dans le nouveau espace de contraintes comme suit :

Théorème 6.7. *Soit v un processus d'utilité progressive dans l'univers $\mathcal{M}^{\tilde{r},\tilde{\eta},Y}$ de la forme (6.10) vérifiant l'hypothèse 5.2. Alors,*

(i) v est solution de l'équation aux dérivées partielles stochastique (EDPS) suivante

$$\begin{aligned} dv(t,\tilde{x}) &= \Gamma_v(t,\tilde{x})dW_t \\ &+\Big(\frac{v''}{2}\Big[\|\frac{v'\tilde{\eta}_t+\Gamma_v'}{v''}\|^2 - \|\big(I_d - \prod_{\tilde{\mathcal{K}}_t\sigma_t}\big)\big(-\frac{v'\tilde{\eta}_t+\Gamma_v'}{v''}\big)\|^2\Big] - \tilde{x}v'\tilde{r}_t\Big)(t,\tilde{x}). \end{aligned} \tag{6.27}$$

(ii) La stratégie optimale notée par $\tilde{\pi}^*$ est unique et elle est donnée par

$$\tilde{\pi}_t^*(\tilde{x})\sigma_t = \prod_{\tilde{\mathcal{K}}_t\sigma_t}\big(-\frac{v'\tilde{\eta}_t+\Gamma_v'}{v''}\big)(t,\tilde{x}). \tag{6.28}$$

Dans cette nouvelle représentation, l'hypothèse 5.2 devient :

Hypothèse 6.2.

$$\begin{cases} \Big(\frac{v''}{2}\Big[\|\frac{v'\tilde{\eta}_t+\Gamma'_v}{v''}\|^2 - \|\big(I_d - \prod_{\tilde{\mathcal{K}}_t\sigma_t}\big)\big(-\frac{v'\tilde{\eta}_t+\Gamma'_v}{v''}\big)\|^2\Big] - \tilde{x}v'\tilde{r}_t\Big) \in \mathcal{B}^{1,0} \\ \Gamma_v \in \mathcal{B}^{1,0}. \end{cases} \tag{6.29}$$

Rappelons que, comme $\tilde{\mathcal{K}}$ n'est pas un cône convexe, l'opérateur de meilleure approximation $\prod_{\tilde{\mathcal{K}}\sigma}$ ne vérifie pas certaines propriétés de la projection orthogonale, notamment

$$< \big(I_d - \prod_{\tilde{\mathcal{K}}\sigma}\big)(a), \prod_{\tilde{\mathcal{K}}\sigma}(a) > \neq 0. \tag{6.30}$$

En particulier,

$$\|a\|^2 - \|\big(I_d - \prod_{\tilde{\mathcal{K}}\sigma}\big)(a)\|^2 \neq \|\prod_{\tilde{\mathcal{K}}\sigma}(a)\|^2,$$

ce qui implique une différence par rapport aux résultats des théorèmes 5.2 et 5.6. Par contre, il existe des cas non triviaux et assez importants pour lesquels nous retrouvons des représentations identiques à celles de ces deux derniers théorèmes 5.2 et 5.6 .

À ce stade, nous venons d'étudier de manière générale la question du changement de numéraire appliqué à des utilités progressives . Nous avons vu par conséquent que l'ensemble des contraintes $\tilde{\mathcal{K}}$ joue un rôle important au niveau du drift de ces utilités. Donc, comme le but dans la suite est de simplifier les équations établies, nous commençons par étudier sous quelles conditions le projecteur de meilleure approximation $\prod_{\tilde{\mathcal{K}}\sigma}$ satisfait

$$\|a\|^2 - \|\big(I_d - \prod_{\tilde{\mathcal{K}}\sigma}\big)(a)\|^2 \neq \|\prod_{\tilde{\mathcal{K}}\sigma}(a)\|^2, \forall a \in \mathbb{R}^d.$$

Voici un exemple important :

Exemple : le cas où $\delta\sigma^{-1} \in \mathcal{K} \cap (-\mathcal{K})$:

Nous supposons dans ce cas particulier que la volatilité δ du numéraire Y est telle que $\delta\sigma^{-1} \in \mathcal{K} \cap (-\mathcal{K})$.

Sous cette hypothèse, il est facile de vérifier que le nouvel ensemble de contraintes

$$\tilde{\mathcal{K}} = \frac{\mathcal{K}}{Y} - x\delta\sigma^{-1}$$

est stable par multiplication positive et par addition et est donc un cône convexe fermé. De plus, ce cône n'est autre que l'ensemble des contraintes de départ, c-à-d $\tilde{\mathcal{K}} = \mathcal{K}$. Dans ce cas, nous avons l'identité suivante en terme de projecteur de meilleure approximation :

$$\prod_{\tilde{\mathcal{K}}\sigma} \equiv \prod_{\mathcal{K}\sigma}$$

ce qui implique que les résultats des paragraphes précédents deviennent simplement :

Théorème 6.8. *Soit v un processus d'utilité progressive dans l'univers $\mathcal{M}^{\tilde{r},\tilde{\eta},Y}$ de la forme (6.10) vérifiant l'hypothèse 5.2. Alors,*

(i) v est solution de l'équation aux dérivées partielles stochastique (EDPS) suivante

$$dv(t,\tilde{x}) = \Big(\frac{1}{2v''}\|\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}\big(v'\tilde{\eta}_t + \Gamma'_v\big)\|^2 - \tilde{x}v'\tilde{r}_t\Big)(t,\tilde{x}) + \Gamma_v(t,\tilde{x})dW_t. \quad (6.31)$$

(ii) La stratégie optimale notée par $\tilde{\pi}^*$ est unique et elle est donnée par

$$\tilde{\pi}^*_t(\tilde{x})\sigma_t = -\frac{1}{v''}\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}\big(v'\tilde{\eta}_t + \Gamma'_v\big)(t,\tilde{x}). \quad (6.32)$$

Ces équations sont alors identiques à celles du théorème 5.6 et au corollaire 5.2 établies dans l'univers d'investissement initial, à la seule différence que $(\tilde{r},\tilde{\eta})$ remplace (r,η). Par contre, l'ensemble des contraintes est le même, c-à-d $\mathcal{K}$. Ceci est dû au fait que le numéraire affecte le taux court et la prime de marché mais pas l'ensemble des contraintes.

6.4 Utilités progressives et Portefeuilles Martingales

D'après les résultats du théorème 6.2, nous avons montré qu'à partir d'une utilité progressive définie sur un marché donné, il est possible de construire,

dans tout nouveau marché, un nouveau processus d'utilité progressive par la simple transformation décrite dans ce théorème. Nous avons vu aussi dans le théorème 6.8 qu'un bon choix du numéraire et particulièrement de sa volatilité nous permet de simplifier de manière considérable les EDP stochastiques que vérifie une utilité progressive dans un nouvel univers défini par Y.
Notre but est alors de simplifier encore plus les équations aux dérivées partielles que doit satisfaire une utilité progressive, mieux comprendre l'impact de la volatilité Γ de l'utilité sur le choix de la stratégie optimale et d'étudier l'équation aux dérivées partielles stochastique que satisfait une utilité progressive dans un univers d'investissement de la forme 5.2. La question qui se pose est alors la suivante : existe-t-il un numéraire particulier dans lequel les EDPS sont beaucoup plus simples ?
Pour répondre à cette question, nous allons distinguer deux cas :

- Le cas où $\eta\sigma^{-1} \in \mathcal{K} \cap (-\mathcal{K})$
- Le cas où $\mathcal{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$.

6.4.1 Le cas où $\eta\sigma^{-1} \in \mathcal{K} \cap (-\mathcal{K})$

Pour commencer, nous nous intéressons dans ce paragraphe uniquement aux numéraires Y tels que leurs volatilités, notées dans les sections précédentes par δ, vérifient $\delta\sigma^{-1} \in \mathcal{K} \cap (-\mathcal{K})$.
Ceci nous permet de nous placer en particulier dans le contexte du théorème 6.8, où nous avons montré qu'un processus d'utilité progressive dans le marché $\mathcal{M}^{r,\eta,Y}$ est solution de l'EDP stochastique suivante

$$dv(t,x) = \Big(\frac{1}{2v''}\| \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} [v'\tilde{\eta}_t + \Gamma'_v] \|^2 - xv'\tilde{r}_t\Big)(t,x)dt + \Gamma_v(t,x)dW_t. \quad (6.33)$$

où nous rappelons que $\tilde{\eta} = \eta - \delta$ et que $\tilde{r} = r - \alpha - <\eta, \delta>$ (δ et α sont les paramètres de diffusion de Y, voir 6.5). Le but par la suite est de simplifier le plus possible cette dynamique, l'idéal serait de pouvoir annuler les termes $\tilde{r}$ et $\tilde{\eta}$. Pour cela, nous faisons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 6.3. $\eta\sigma^{-1} \in \mathcal{K} \cap (-\mathcal{K})$

Remarque 6.5. *Il est important de noter que cette hypothèse est introduite uniquement pour simplifier la compréhension du rôle joué par la volatilité de* *l'utilité progressive et pour alléger les calculs. Nous noterons que toutes les idées qui seront développées dans la suite peuvent êtres appliquées sans cette hypothèse en particulier la technique introduite au dernier chapitre de ce manuscrit. Nous reviendrons à cette remarque dans la dernière section du chapitre* 8 *où nous allons relaxer cette hypothèse.*

Sous cette hypothèse, si nous choisissons $\delta = \eta$, alors $\tilde{\eta} = 0$. Si de plus le drift α est choisi tel que $\alpha = r + \|\eta\|^2$, nous concluons que si $\delta = \eta, \ \alpha = r + \|\eta\|^2$, donc (6.33) est équivalente à

$$dv(t,x) \ = \ \frac{1}{2v''}\| \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} \Gamma'_v\|^2(t,x)dt + \Gamma_v(t,x)dW_t. \tag{6.34}$$

Dans ce cas, il est simple de remarquer que

$$\frac{dY_t}{Y_t} = (r_t + \|\eta_t\|^2)dt + \eta_t dW_t. \tag{6.35}$$

Ceci est encore équivalent à

$$\frac{d\left(\frac{1}{Y_t}\right)}{\left(\frac{1}{Y_t}\right)} = -r_t dt - \eta_t dW_t, \tag{6.36}$$

qui n'est autre que le processus $H^{r,\eta}$, le numéraire du marché.
Nous remarquons que, dans ce numéraire très particulier qui est le numéraire du marché, les richesses définies par $\tilde{X}_t = H_t^{r,\eta} X_t$ sont des martingales sous la probabilité risque-neutre, et donc il n' y a pas de prime de risque. Ceci nous amène, en notant par v le processus d'utilité progressive dans ce numéraire, au résultat suivant, conséquence immédiate de la proposition 4 :

Proposition 6.1. *Si v est un processus d'utilité progressive de la forme de (5.19) vérifiant l'hypothèse 5.2 dans le marché $\mathcal{M}^{r,\eta,(H^{r,\eta})^{-1}}(\tilde{\mathcal{K}})$ issu de $\mathcal{M}^{r,\eta}$ par le changement de numéraire $(H^{r,\eta})^{-1}$, alors v est solution de l'EDP stochastique suivante*

$$\beta(t,x) + \boldsymbol{H}(t,x,\Gamma',v'') = 0 \tag{6.37}$$

où on a

$$\boldsymbol{H}(t,x,\Gamma',v'') = -\frac{1}{2v''}\| \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} \Gamma'\|^2(t,x) \tag{6.38}$$

et la stratégie optimale est donnée par :

$$\pi^*(t,x).\sigma_t = -\frac{1}{v''} \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} \Gamma'(t,x). \tag{6.39}$$

A partir de ce résultat, il est facile de déduire le corollaire suivant :

Corollaire 6.2. *Sous les mêmes hypothèses que dans la proposition précédente, si v est un processus d'utilité progressive dans le marché $\mathcal{M}^{r,\eta,(H^{r,\eta})^{-1}}(\mathcal{K})$ de numéraire $(H^{r,\eta})^{-1}$, alors v est une surmartingale obéit à la dynamique*

$$dv(t,x) = \frac{1}{2v''} \| \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} \Gamma'(t,x)\|^2 dt + \Gamma(t,x)dW_t. \tag{6.40}$$

Remarquons que dans l'une ou l'autre des deux équations (6.37) et (6.39), seule la volatilité Γ intervient. Ceci exprime mieux et de manière plus naturelle le rôle de la volatilité Γ de l'utilité stochastique. En effet, d'après la dynamique (6.40), il existe une certaine équivalence entre l'utilité progressive et sa volatilité. De plus, d'après l'équation (6.39), il est évident que la dérivée de la volatilité de l'utilité Γ' joue le rôle de la direction optimale d'investissement (le rôle joué *classiquement* par η).

Dans le cadre *classique* d'optimisation de portefeuille, nous savons bien démontrer que, si les richesses sont des martingales, la stratégie optimale est la stratégie "*rien faire*" ($\pi^* = 0$), alors que dans ce cadre progressif, la stratégie optimale ne consiste plus à tout placer en *cash* jusqu'à maturité, mais elle devient proportionelle à Γ' (équation (6.39)) : paramètre de stochasticité de u.

Par la suite, il est très important de noter que le fait de se placer dans un marché où la dynamique des richesses est donnée par :

$$dX_t^{s,x,\pi} = r_t X_t^{\tilde{\pi}} dt + \pi_t^* \sigma_t (dW_t + \eta_t dt) \tag{6.41}$$

et où les utilités progressives sont telles que :

$$\beta_u(t,x) + u'(t,x)\tilde{r}_t x - \frac{1}{2u''(t,x)} \| \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} [\eta_t u' + \Gamma'_u] \|^2 (t,x) = 0, \tag{6.42}$$

implique que, d'après le théorème 6.2, le problème initial est équivalent au problème où les richesses $\tilde{X}^{x,\pi} = X^{x,\pi} H^{r,\eta}$ sont des martingales, c-à-d que les richesses sont telles que :

$$d\tilde{X}_t^{\tilde{\pi}} = (\tilde{\pi}_t^* \sigma_t - \tilde{X}_t^{\pi} \eta_t) dW_t \tag{6.43}$$

et où les utilités sont solutions de

$$\beta_v(t,x) - \frac{1}{2v''}\|\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}\Gamma'_v\|^2(t,x) = 0. \tag{6.44}$$

Ceci s'interprète, simplement, par le fait que le rôle joué par le numéraire (c-à-d le drift r et la prime de risque) est complètement intégré dans l'utilité stochastique (c-à-d dans Γ_v et β_v), comme nous pouvons le voir facilement dans le système d'équations (6.12) en remplaçant Y par $(H^{r,\eta})^{-1}$.

C'est donc une nouvelle vision des problèmes d'optimisation de portefeuille où le drift et la prime de risque ne sont plus propres au marché financier en question mais aux utilités stochastiques qui peuvent contenir de l'information, générer du risque et du rendement.
À partir de cette nouvelle vision des marchés financiers, nous concluons qu'il est largement suffisant de se placer sous le numéraire H^{-1} (sans perte de généralité), autrement dit de considérer que les richesses sont martingales, à la seule condition de modifier ces utilités et d'accepter qu'elles soient stochastiques.
Les équations établies sont alors beaucoup plus simples dans ce marché martingale. Par contre, elles restent toujours très difficiles à étudier et à en déduire une caractérisation générale de ces processus d'utilités progressives. Dans le but de faire une étude complète de ces processus, nous allons dans le chapitre qui suit nous intéresser au dual convexe de ces utilités progressives.

6.4.2 Le cas où $\mathcal{K}$ est un sous-espace linéaire de $\mathbb{R}^d$

Dans ce paragraphe, nous ne faisons pas l'hypothèse 6.3, nous supposons uniquement que l'ensemble des contraintes $\mathcal{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$ par exemple :$\mathcal{K} = \mathbb{R}^{d-p} \times \{0\}^p$. L'intérêt de considérer ce cadre est que l'opérateur de projection n'est autre que l'opérateur de projection orthogonale dont les principales propriétés sont la linéarité et le fait que pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ et $b \in \mathcal{K}\sigma$, on a $< a - \prod_{\mathcal{K}\sigma} a, b >= 0$. Par ailleurs, nous remarquons que dans l'univers d'investissement de départ où les richesses obéissent à la dynamique (5.4), on a

$$dX_t^{s,x,\pi} = r_t X_t^{s,x,\pi} dt + \pi_t^* \sigma_t (dW_t + \eta_t dt). \tag{6.45}$$

Comme $\mathcal{K}$ est un sous-espace vectoriel, alors

$$< \pi\sigma, \eta > = < \pi\sigma, \prod_{\mathcal{K}\sigma} \eta >$$

ce qui implique que cette dernière dynamique devient

$$dX_t^{s,x,\pi} = r_t X_t^{s,x,\pi} dt + \pi_t^* \sigma_t (dW_t + \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} \eta_t dt). \tag{6.46}$$

Dans ce contexte, nous pouvons remplacer η par sa projection $\prod_{\mathcal{K}\sigma} \eta$ dans tous les résultats du paragraphe 6.3. De plus, il aussi important de noter dans ce cadre que

$$\prod_{\mathcal{K}\sigma} \eta \in \mathcal{K} = \mathcal{K} \cap (-\mathcal{K}).$$

Donc, si nous choisissons

$$\delta = -\prod_{\mathcal{K}\sigma} \eta \ \text{ et } \alpha = r + \| \prod_{\mathcal{K}\sigma} \eta \|^2,$$

ce qui implique que $Y^{-1} = H^{r, \prod_{\mathcal{K}\sigma} \eta}$, nous retrouvons tous les résultats du paragraphe précédent, c-à-d la proposition 6.1, où nous rappelons que les processus $H^{\alpha,\delta}$ sont les processus définis dans (6.47) par

$$\begin{cases} H_t^{\alpha,\delta} = e^{-\int_0^t (\alpha_s + \frac{1}{2} ||\delta_s||^2) ds - \int_0^t \delta_s dWs} \\ H_{s,t}^{\alpha,\delta} = \dfrac{H_t^{\alpha,\delta}}{H_s^{\alpha,\delta}}. \end{cases} \tag{6.47}$$