Utilité progressive et équations aux dérivées partielles stochastiques

Sommaire

Résumé : Dans ce chapitre, nous traitons dans un premier temps le cadre particulier des utilités progressives markoviennes. Ces utilités sont alors solution d'équations de type Hamilton-Jacobi-Bellman identiques à celles étudiées dans le deuxième chapitre (voir le paragraphe 2.6, Théorème 2.2), à la seule différence que, dans le cadre des utilités progressives et contrairement au cadre du chapitre 2*, ces équations de* **HJB** *sont des équations avec condition initiale et non pas une condition finale. C'est pour cette raison et vu qu'il n'existe aucun théorème de comparaison établi dans ce cadre précis, que les techniques classiques d'EDP ne nous permettent pas de conclure ni à l'existence ni à l'unicité des solutions, voire même à leur concavité.*
Ensuite, nous montrons que ces utilités progressives markoviennes sont encore solution de l'EDP stochastique (4.32) établie dans le chapitre précédent et dont le drift est contraint à la fois par le marché et par la dérivée de la volatilité de ces utilités. Ceci constitue notre principale motivation pour mieux comprendre la dynamique de ces utilités et le rôle joué par la volatilité associée. Pour ce, nous allons nous intéresser à un cadre plus général qui consiste à supposer que les utilités progressives sont des champs aléatoires ou encore des semimartingales avec un paramètre spatial obéissant à une dynamique de la forme

$$du(t,x) = \beta(t,x)dt + \Gamma(t,x)dW_t. \tag{5.1}$$

Pour étudier ces processus d'Itô composés avec des richesses, c-à-d. $u(t, X_t^{x,\pi})$*, nous avons besoin d'un outil puissant et adéquat à la fois. En particulier, il s'agit d'une formule d'Itô généralisée appelée aussi formule d'Itô-Ventzel, lemme 5.1 (voir aussi Kunita [74], paragraphe* 3.3 *pour une preuve détaillée de ce résultat). Cette formule, à elle seule, étant insuffisante, nous faisons une hypothèse de recollement de stratégie appelée aussi hypothèse de bifurcation (voir le paragraphe 5.4.3 hypothèse 5.3 et le premier chapitre du cours de Saint Flour [20] par Nicole El Karoui pour la théorie générale). Nous montrons alors, comme dans les cadres des exemples du chapitre précédent et des utilités progressives markoviennes, que le drift* β *dans la dynamique (5.1) ne peut être quelconque : il est fortement contraint par l'univers d'investissement et la dérivée* Γ' *de la volatilité.*
Enfin nous donnons une interprétation financière de ce paramètre Γ *qui s'avère jouer un rôle fondamental dans toute notre étude, au niveau de l'utilité comme*

au niveau des processus de richesses optimales. Par contre, montrer l'existence d'un lien entre la concavité de ces utilités et leurs EDP stochastiques reste une question ouverte et un vrai challenge.

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous portons un grand intérêt aux équations aux dérivées partielles stochastiques du type (4.32) établies dans le chapitre précédent où nous avons rappelé que les dynamiques des utilités progressives n'ont jamais été développées ou approfondies dans les travaux existants, outre le cadre très particulier des utilités progressives décroissantes dans le temps ([86],[87], [88],[36]) ce qui revient à des équations aux dérivées partielles ordinaires. Le but de ce chapitre est d'étudier, dans un premier temps, le cadre des utilités progressives markoviennes puis de manière très générale des utilités progressives comme des semimartingales de paramètre spatial x qui obéissent à une dynamique de la forme

$$\begin{cases} du(t,x) = \beta(t,x)dt + \Gamma(t,x)dW_t \\ u(0,x) = u(x). \end{cases}$$

Nous montrons, à l'aide de quelques outils mathématiques indispensables comme la formule d'Itô généralisée (lemme 5.1) que le paramètre de diffusion β dans cette dernière équation ne peut être quelconque, il est complètement déterminé par le marché et la dérivée Γ' de la volatilité Γ par rapport à x, un paramètre qui s'avère fondamental dans ces questions d'utilités progressives.

5.2 Univers d'investissement

Dans la suite, nous avons besoin de donner plus de précisions sur l'univers d'investissement. C'est pour cette raison que dans tout ce qui suit, nous considérons un marché financier constitué de d actifs risqués et d'un actif sans risque. Les actifs risqués notés par $\xi^i,\ i = 1..d$ obéissent aux dynamiques suivantes

$$\frac{d\xi^i_t}{\xi^i_t} = b^i_t dt + (\sigma^i_t)^* dW_t, \text{ pour } 1 \le i \le d, \tag{5.2}$$

tandis que l'actif sans risque est donné par

$$\frac{d\xi_t^0}{\xi_t^0} = r_t dt. \tag{5.3}$$

Nous savons, par ailleurs, que la richesse d'un investisseur qui détient la quantité π^i/ξ^i de chaque actif ξ obéit à la dynamique suivante

$$\begin{cases} dX_t^{s,x,\pi} = r_t X_t^{s,x,\pi} dt + \pi_t^* \sigma_t (dW_t + \eta_t dt), \\ X_s^{s,x,\pi} = x \end{cases} \tag{5.4}$$

où η désigne la prime de risque appelée aussi prime de marché, r le taux court et σ la matrice carrée $(\sigma^i)_{i=1..d}$ supposée dans toute la suite inversible.

Définition 5.1. *Notons par $\mathcal{M}^{r,\eta}$ un tel marché financier.*

Nous supposons aussi que l'ensemble $\mathcal{K}$, dans lequel l'investisseur est contraint de choisir ses stratégies π, est un cône convexe fermé.
Partant du fait qu'il est tout à fait naturel qu'un investisseur peut décider, à tout instant $t \geq 0$, de redéfinir son espace de contraintes selon ses obligations, sa richesse ou encore sa manière d'interpréter et d'analyser l'état et l'évolution du marché financier dans lequel il investit, nous supposons dans toute la suite que l'ensemble dans lequel il est obligé de restreindre ses portefeuilles, noté ci-dessus par $\mathcal{K}$, n'est pas fixé pour toute la période de gestion mais au contraire peut évoluer dans le temps de manière stochastique. Nous le noterons alors dorénavant par $\mathcal{K}_t$, pour $t \geq 0$.

Définition 5.2. *Notons par $\mathcal{M}^{r,\eta}(\mathcal{K})$ le marché financier $\mathcal{M}^{r,\eta}$ dans le quel l' investisseur est contraint par l'ensemble $\mathcal{K}$.*

Nous désignons dans la suite par ∇_ξ et $\triangle_\xi$ respectivement les opérateurs gradient et laplacien en ξ, c-à-d. pour toute fonction w du vecteur ξ, fonction deux fois dérivable, on a

$$\nabla_\xi w = (\partial_{\xi^i} w)_{1 \leq i \leq d}, \; \triangle_\xi w = (\partial_{\xi^j} \partial_{\xi^i} w)_{1 \leq i,j \leq d} \text{ la matrice hessienne.} \tag{5.5}$$

Enfin, nous notons par $\mathcal{L}^\xi$ l'opérateur différentiel défini par

$$\mathcal{L}_t^\xi w = b(t,\xi).\nabla_\xi w + \frac{1}{2} tr(\sigma(t,\xi)\sigma'(t,\xi)\triangle_\xi w). \tag{5.6}$$

où tr désigne l'opérateur trace sur les matrices carrées. Nous obtenons en particulier, en appliquant le lemme d'Itô à $w(t,\xi_t)$, que

$$dw(t,\xi_t) = \big(\frac{\partial}{\partial t}w + \mathcal{L}_t^{\xi}w\big)(t,\xi_t)dt + < \nabla_{\xi}w, \sigma_t > (t,\xi_t)dW_t. \tag{5.7}$$

5.3 Cadre markovien : Programmation dynamique et EDP stochastiques

Dans ce paragraphe, nous traitons le cas markovien où nous supposons que tous les paramètres du modèle 5.2 sont simplement des fonctions du temps t et du cours des actifs ξ. Nous rappelons par ailleurs, d'après le chapitre 2, que de manière générale, il est très difficile d'avoir des propriétés de régularités des fonctions valeur. Ainsi, notre but n'est ni d'identifier les solutions ni de résoudre le problème d'optimisation de portefeuille, mais essentiellement de guider l'intuition en donnant un exemple assez clair par lequel nous mettons en valeur l'impact de l'univers d'investissement sur ces utilités ainsi que certains enjeux et difficultés que nous rencontrons tout au long de cette étude. Nous ferons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 5.1. *Le processus d'utilité progressive introduit dans la définition 4.3, est une fonction du temps t, de la richesse x et du cours des actifs ξ. Nous supposerons de plus que $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}_+$ est de classe $\mathcal{C}^{1,2,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$.*

Remarquons que cette hypothèse implique en particulier que la source d'incertitude de u est uniquement due à sa dépendance en ξ.
Dans le deuxième chapitre, nous avons montré que si la fonction valeur v d'un problème d'optimisation de portefeuille au sens classique est assez régulière, alors elle est solution du système d'équation (2.2), c-à-d.

$$\begin{cases} v_t(t,x,\xi_t) + r_t x v'(t,x,\xi_t) + \mathcal{L}^{\xi}v(t,x,\xi_t) + \mathbf{H}(t,x,\xi,v',v'',\triangle_{\xi,x}^{\sigma}v) = 0, \\ \triangle_{\xi,x}^{\sigma}v = \partial_x < \nabla_{\xi}v, \sigma >, \\ \mathbf{H}(t,x,\xi,p,p',w) = \sup\limits_{\pi\in\mathcal{A}(x,\mathcal{K}_t)} \Big(\frac{1}{2}\|\pi_t\sigma_t\|^2 p' + \langle \pi_t\sigma_t, p\eta_t + w\rangle\Big), \\ v(T,x,\xi_0) = U(x). \end{cases} \tag{5.8}$$

Rappelons ensuite que les fonctions valeur et les utilités progressives sont définies de manière identique à partir d'un problème d'optimisation de portefeuille, sauf que, pour les unes c'est la condition finale qui est donnée alors que pour les autres c'est la condition initiale qui est connue.
En se basant sur le fait que le principe de programmation dynamique est complètement adapté à cette notion d'inter-temporalité dans la définition des utilités progressives, nous pouvons alors nous demander si en remplaçant la condition terminale U par une condition initiale $u(0,.)$ dans ce dernier système, nous pouvons vérifier que v est alors une utilité progressive.
La réponse à cette question est donnée dans le paragraphe suivant.

5.3.1 Équations de Hamilton-Jacobi-Bellman

Théorème 5.1. *Soit $u(t,.,\xi_t)$ une fonction d'utilité markovienne (strictement concave croissante) de classe $\mathcal{C}^{1,2,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$. Si u est solution du système d'équations suivant*

$$\begin{cases} u_t(t,x,\xi_t) + r_t x u'(t,x,\xi_t) + \mathcal{L}^\xi u(t,x,\xi_t) + \sup\limits_{\pi \in \mathcal{A}(x,\mathcal{K}_t)} \mathcal{P}(t,\pi,u',u'',\triangle^\sigma_{\xi,x}u) = 0, \\ \triangle^\sigma_{\xi,x} u = \partial_x < \nabla_\xi u, \sigma >, \\ \mathcal{P}(t,\pi,u',u'',\triangle^\sigma_{\xi,x}u) = \Big(\dfrac{u''}{2} \|\pi_t\sigma_t\|^2 + \big\langle \pi_t\sigma_t, u'\eta_t + \triangle^\sigma_{\xi,x}u \big\rangle \Big), \\ u(0,x,\xi_0) = u(x), \end{cases} \tag{5.9}$$

alors u est une utilité progressive dans l'univers d'investissement décrit dans 5.2.

Rappelons que les opérateurs différentiels $\mathcal{L}^\xi$, ∇_ξ et $\triangle$ sont définis dans (5.6), (5.5).
Il faut bien noter dans ce résultat que contrairement aux résultats établis dans 2.2, nous n'avons ni l'existence ni l'unicité de la solution. En effet cette dernière équation de HJB est une équation avec une condition initiale (c'est une équation de HJB *forward*) et non pas avec une condition terminale (HJB *backward*). La théorie classique développée dans 2.5 ne nous permet pas de prouver l'existence ni l'unicité. Néanmoins, s'il existe une solution u connue à une date T, alors nous pouvons, par la théorie classique, affirmer qu'elle est unique sur l'intervalle

$[0,T]$ et possède toutes les propriétés d'une utilité progressive sur cet intervalle. Au delà, nous ne pouvons rien conclure, du moins par les techniques classiques. En particulier, comme les coefficients de cette équations aux dérivées partielles sont stochastiques nous ne pouvons pas appliquer la technique de retournement du temps.

Par ailleurs, l'équation de HJB (5.9) n'est pas forcément une condition suffisante que doit satisfaire cette utilité $u(t,.,\xi_t)$. À ce stade, ce n'est qu'une condition nécessaire qui peut traduire la condition de *consistance avec l'univers d'investissement* introduite dans la définition 4.3 et ainsi représente l'impact de l'univers d'investissement et notamment celui de l'espace des contraintes $\mathcal{K}$.

Démonstration. On va montrer que la solution de (5.9) satisfait les trois conditions que doit vérifier, par définition, l'utilité progressive :

(i) u est strictement concave croissante par hypothèse.

(ii) Pour montrer la consistance avec l'univers d'investissement il suffit d'appliquer le lemme d'Itô aux processus $u(t,X_t^\pi,\xi_t)$, il en suit en utilisant la notation $\triangle^\sigma_{\xi,x}u$ à la place de $\partial_x < \nabla_\xi u, \sigma >$

$$\begin{aligned} du(t,X_t^\pi,\xi_t) &= dM_t \\ &+\Big(u_t + r_t x u' + \mathcal{L}^\xi u + \tfrac{u''}{2}\|\pi_t\sigma_t\|^2 + < \pi_t\sigma_t, u'\eta_t + \triangle^\sigma_{\xi,x}u > \Big)(t,X_t^\pi,\xi_t)dt \end{aligned}$$

où M_t désigne une martingale locale. En utilisant l'opérateur $\mathcal{P}$ défini dans (5.9), cette équation est réécrite ainsi

$$\begin{aligned} du(t,X_t^\pi,\xi_t) &= dM_t \\ &+\Big(u_t + r_t x u' + \mathcal{L}^\xi u + \mathcal{P}(t,\pi,u',u'',\triangle^\sigma_{\xi,x}u)\Big)(t,X_t^\pi,\xi_t)dt. \end{aligned}$$

Or le terme en dt dans cette dynamique peut être majoré comme suit

$$\begin{aligned} &\Big(u_t + r_t x u' + \mathcal{L}^\xi u + \mathcal{P}(t,\pi,u',u'',\triangle^\sigma_{\xi,x}u)\Big)(t,X_t^\pi,\xi_t) \\ &\leq \Big(u_t + r_t x u' + \mathcal{L}^\xi u + \sup_{\pi\in\mathcal{A}(x,\mathcal{K}_t)} \mathcal{P}(t,\pi,u',u'',\triangle^\sigma_{\xi,x}u)\Big)(t,X_t^\pi,\xi_t) = 0 \end{aligned}$$

Ce qui implique que les processus $u(t,X_t^\pi,\xi_t)$ sont des surmartingales et ainsi nous obtenons la consistance avec l'univers d'investissement.

(iii) Vu la stricte concavité de u, il suffit de remarquer que l'application $\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K}_t) \mapsto \mathcal{P}(t, \pi, u', u'', \triangle^{\sigma}_{\xi,x} u)$ est strictement convexe et que

$$\mathcal{P}(t, \pi, u', u'', \triangle^{\sigma}_{\xi,x} u) \overset{||\pi|| \to \infty}{\longrightarrow} -\infty$$

car $u'' < 0$, ce qui induit l'existence d'une stratégie admissible. Nous expliciterons la forme de cette stratégie optimale et nous la commenterons dans le paragraphe suivant.

$\square$

5.3.2 Portefeuille optimal et EDP stochastiques

Nous nous intéressons à présent au terme

$$\frac{1}{2} \sup_{\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K}_t)} \left(\frac{1}{2} \|\pi\sigma\|^2 u'' + \left\langle \pi\sigma, u'\eta + \triangle^{\sigma}_{\xi,x} u \right\rangle \right)$$

dans l'équation (5.9) et particulièrement à l'existence d'une stratégie optimale. Pour cela, suivant la méthode explicitée dans la preuve du théorème 2.2, nous partons de l'identité

$$\|\pi\sigma\|^2 u'' + \left\langle \pi\sigma, u'\eta + \triangle^{\sigma}_{\xi,x} u \right\rangle = \frac{1}{2} u'' \|\pi\sigma + \frac{u'\eta + \triangle^{\sigma}_{\xi,x} u}{u''}\|^2 - \frac{1}{2} u'' \|\frac{u'\eta + \triangle^{\sigma}_{\xi,x} u}{u''}\|^2,$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sup_{\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K}_t)} \left(\frac{1}{2} \|\pi\sigma\|^2 u'' + 2 \left\langle \pi\sigma, u'\eta + \triangle^{\sigma}_{\xi,x} u \right\rangle \right) \\ = \;& -\frac{1}{2} u'' \|\frac{u'\eta + \triangle^{\sigma}_{\xi,x} u}{u''}\|^2 + \frac{1}{2} u'' \inf_{\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K}_t)} \|\Big(- \frac{u'\eta + \triangle^{\sigma}_{\xi,x} u}{u''}\Big) - \pi\sigma\|^2. \end{aligned}$$

Le passage du *supremum* à l'*infimum* est uniquement dû à l'hypothèse de stricte concavité de u (c-à-d. $u'' < 0$). Enfin, pour conclure, il suffit juste de remarquer que le terme en *inf* n'est autre que la définition même de la distance de $-u'\eta + \triangle^{\sigma}_{\xi,x} u / u''$ à l'ensemble convexe $\mathcal{A}(x, \mathcal{K}_t)\sigma_t = \mathcal{K}_t \sigma_t$ (t fixé). D'après les résultats du lemme B.5, nous rappelons que l'*inf* est atteint en un unique point (la stratégie optimale) de $\mathbb{R}^d$ que nous noterons par π^* :

$$\pi^*_t(x, \xi) = \prod_{\mathcal{K}_t \sigma_t} \Big(- \frac{u'\eta + \triangle^{\sigma}_{\xi,x} u}{u''} \Big)(t, x, \xi).$$

Par la suite, comme $\mathcal{K}\sigma$ est un cône, il est donc positivement homogène d'après le lemme B.5 (assertion ($a3$)), et comme $-u'' > 0$, nous pouvons en déduire que

$$\pi_t^*(x,\xi) = -\frac{1}{u''} \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} \Big(u'\eta + \triangle^{\sigma}_{\xi,x} u\Big)(t,x,\xi).$$

Ceci prouve le théorème suivant :

Théorème 5.2. *Soit $u(t,.,\xi_t)$ une fonction d'utilité progressive markovienne qui satisfait les hypothèses du théorème 5.1. Alors la stratégie optimale est donnée par*

$$\pi_t^*(x,\xi_t) = -\frac{1}{u''} \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} \Big(u'\eta + \triangle^{\sigma}_{\xi,x} u\Big)(t,x,\xi_t). \tag{5.10}$$

Il est clair que π^* vérifie

$$\pi_t^* \in \mathcal{K}_t, \ \forall t \geq O.$$

Par contre, il n'est pas immédiat que cette stratégie soit admissible. En effet, pour qu'elle le soit, il faut vérifier, en plus, que le portefeuille associé $X^{x,*}$ est positif à tout instant $t \geq 0$ (voir définition 4.2).
Nous ne vérifions pas ceci pour le moment car par définition des utilités progressive (définition 4.3, (iii)), nous avons supposé qu'il existe une stratégie admissible unique, donc $u(t, X_t^{x,*}, \xi_t)$ est une martingale. Comme π^* définie dans (5.10) vérifie cette dernière hypothèse, nous avons conclu par unicité que c'est la stratégie optimale, elle est donc admissible.

Ceci nous amène naturellement à la question suivante : sous quelles hypothèses la réciproque est-elle vraie ?
En d'autres termes, si u est une fonction du temps t, de la richesse x et des courts des actifs ξ vérifiant l'EDP (5.9), sous quelles hypothèses u est-elle une utilité progressive et ainsi π^* définie dans (5.10) est-elle une stratégie admissible ?
De toute façon, nous montrons dans un dernier paragraphe de ce chapitre qu'il n'existe aucun lien entre l'EDP et la propriété de concavité, ce sont deux problèmes de natures différentes.
Par contre, à ce stade et en combinant ce dernier résultat avec le théorème 5.1, nous obtenons le corollaire suivant

Corollaire 5.1. *Soit $u(t,.,\xi_t)$ une fonction d'utilité progressive qui satisfait les hypothèses du théorème 5.1. Alors, u est solution de l'EDP non linéaire suivante*

$$\begin{cases} u_t(t,x,\xi_t) + r_t x u'(t,x,\xi_t) + \mathcal{L}^\xi u(t,x,\xi_t) = \dfrac{1}{2u''} \| \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} \Big(u'\eta + \triangle^\sigma_{\xi,x} u \Big) \|^2 (t,x,\xi_t) \\ u(0,x,\xi_0) = u(x). \end{cases} \tag{5.11}$$

En plus des résultats que nous avons pu établir dans ce paragraphe, le cadre markovien que nous avons étudié ci-dessus guidera notre intuition vers une approche plus générale de cette nouvelle classe d'utilités. En effet, si nous notons par v le processus stochastique défini par

$$v(t,x) \overset{def}{=} u(t,x,\xi_t), \;\; t \geq 0 \tag{5.12}$$

alors, il est facile de vérifier que

– v est strictement concave croissante par rapport à la richesse x

$$v(0,x) = u(0,x,\xi).$$

– Pour toute stratégie admissible π, on a presque sûrement

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(v(T,X_T^{x,\pi})/\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}(u(T,X_T^{x,\pi},\xi_T)/\mathcal{F}_t) \\ &\leq u(t,x,\xi_t) = v(t,x), \quad \forall 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

– Il existe une stratégie optimale π^* telle que presque sûrement

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(v(T,X_T^{x,\pi^*})/\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}(u(T,X_T^{x,\pi^*},\xi_T)/\mathcal{F}_t) \\ &= u(t,x,\xi_t) = v(t,x), \quad \forall 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Ce qui implique que v est un processus d'utilité progressive issu de la condition initiale $v(0,x) = u(0,x,\xi)$.

Introduisons ensuite les paramètres β et Γ définis par

$$\beta(t,x) = u_t(t,x,\xi) + \mathcal{L}_t^\xi u(t,x,\xi),$$
$$\Gamma(t,x) = \sum_{i=1}^{i=d} u_i(t,x,\xi)\; \xi^i \sigma_t^i.$$

Il en suit, en appliquant le lemme d'Itô au processus $u(t,x,\xi_t)$ (x fixé), que le processus v obéit à la dynamique

$$dv(t,x) = \beta(t,x)dt + \Gamma(t,x)dW_t$$

D'autre part, d'après (5.9), nous savons que β est contraint par l'équation

$$\beta(t,x) = \frac{1}{2u''}\Big\| \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} \Big(u'\eta + \triangle^\sigma_{\xi,x}u\Big)\Big\|^2(t,x,\xi_t) - r_t x u'(t,x,\xi_t). \tag{5.13}$$

Rajoutons à cela les identités

$$\begin{aligned} v' &= \frac{\partial}{\partial x}u(t,x,\xi_t),\\ v'' &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x,\xi_t), \end{aligned}$$

et le fait que

$$\triangle^\sigma_{\xi,x}u(t,x,\xi_t) = \Gamma'(t,x),$$

nous montrons facilement que β est donné par la nouvelle formulation suivante :

$$\beta(t,x) = \frac{1}{2v''}\| \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} \Big(v'\eta + \Gamma'\Big)\|^2(t,x) - r_t x v'(t,x). \tag{5.14}$$

Nous concluons alors par ce résultat.

Théorème 5.3. *Soit u est une utilité progressive markovienne qui satisfait les hypothèses du théorème 5.1. En notant par v le nouveau champ aléatoire*

$$v(t,x) = u(t, x\xi_t),$$

alors v est une utilité progressive dans le même univers d'investissement 5.2. De plus v obéit à la dynamique

$$dv(t,x) = \Big(\frac{1}{2v''}\| \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} \big(v'\eta + \Gamma'\big)\|^2 - r_t x v'\Big)(t,x)dt + \Gamma(t,x)dW_t \tag{5.15}$$

où $\Gamma(t,x) = \sum_{i=1}^{i=d} u_i(t,x,\xi)\ \xi^i\sigma^i_t$. La stratégie optimale est donnée par

$$\pi^*_t(x) = -\frac{1}{v''}\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}\Big(v'\eta + \Gamma'\Big)(t,x). \tag{5.16}$$

Remarque 5.1. *Nous remarquons que les stratégies optimales dans (5.10) et (5.16) sont liées par*

$$\pi_t^*(x) = \pi_t^*(x, \xi_t). \tag{5.17}$$

Il est important de noter que ce cadre markovien est plus général que celui des exemples 4.3.1 et 4.3.2. La dynamique (5.15) ainsi que la formule de la stratégie optimale (5.16) sont identiques à la dynamique (4.32) et à l'identité (4.33) établies dans l'exemple 4.3.2. Ceci nous amène naturellement à la question suivante : si nous considérons, de manière encore plus générale, des champs aléatoires qui obéissent à une dynamique de la forme

$$du(t,x) = \beta(t,x)dt + \Gamma(t,x)dW_t, \tag{5.18}$$

est-ce que nous pouvons montrer que les utilités progressives de cette forme satisfont la dynamique (5.15) ? En d'autres termes pouvons-nous étendre les résultats précédents à une classe de paramètre Γ plus large ?
Ainsi le but dans les sections suivantes est le suivant :

- Étudier l'impact de l'univers d'investissements sur le paramètre β, à travers l équation (5.18), ainsi que l'existence d'une stratégie admissible.
- Généraliser le théorème 5.3 ainsi que les identités (5.15) et (5.16).

5.4 Utilités progressives d'Itô avec paramètres spatiaux

Comme il est déjà indiqué dans le paragraphe précédent, le but dans la suite est de considérer une classe plus générale d'utilités progressives où nous supposons que ce sont des processus $(u(t,x))_{t\geq 0}$ ou encore plus précisément des semimartingales avec un paramètre spatial x obéissant à la dynamique suivante

$$du(t,x) = \beta(t,x)dt + \Gamma(t,x)dW_t, \tag{5.19}$$

où β et Γ sont des processus $\mathcal{F}_t$-progressivement mesurables.
Nous avons vu par ailleurs, dans le cadre markovien, que le paramètre β ne peut être quelconque. Il existe un lien très étroit entre ce paramètre, l'ensemble des

contraintes (univers d'investissements) $\mathcal{K}$, la prime de marché η et la volatilité Γ, lien dont témoigne l'équation (5.14). Ainsi, ce sont les propriétés de ces paramètres qui vont nous intéresser dans toute la suite.
La première étape consiste à établir le lien entre les deux paramètres β et Γ en exploitant le rôle joué par le problème d'optimisation de portefeuille exposé dans la définition de ces utilités.
Mais avant de poursuivre nos investigations nous avons besoin d'un outil bien adapté pour pouvoir établir des résultats similaires à ceux du cadre markovien. Cet outil consiste en une formule d'Itô généralisée, appelée *formule d'Itô-Ventzel* dont l'énoncé est donné dans le paragraphe suivant.

5.4.1 Lemme d'Itô-Ventzel

Dans les exemples 4.3.1 et 4.3.2 ainsi que dans le cadre markovien, nous avons eu souvent recours à la formule d'Itô pour vérifier les assertions de la définition de ces processus. Il est clair que, dans le cadre de ce paragraphe, et si nous voulons étudier la dynamique des processus composés $u(t, X_t^{x,\pi})$, ce lemme n'est plus adapté pour la simple raison que l'intégrale stochastique

$$u(t,x) = u(0,x) + \int_0^t \beta(s,x)ds + \int_0^t \Gamma(s,x)dW_s \tag{5.20}$$

est bien définie pour $\omega \in \Omega \backslash N_x$, où N_x est un ensemble négligeable qui dépend de x. En d'autres termes cette intégrale n'est définie que pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ et $\omega \in (\cup_x N_x)^c$. Le problème qui se pose à ce niveau est le suivant : comme $\cup_x N_x$ n'est pas l'union dénombrable de négligeables, il n' est pas vrai en général qu'il soit de mesure nulle. Donc pour éviter ce genre de problèmes techniques et pour que l'intégrale stochastique soit bien définie presque sûrement pour tout (t,x) et continue en x pour tout t, des hypothèses sur β, Γ et u sont indispensables. Plus de détails sur ces problèmes techniques ainsi que leur cadre sont détaillés dans A.2, A.3 et dans [74]. Ces hypothèses ainsi que la formule d'Itô généralisée sont données dans le résultat suivant.

Lemme 5.1 (Formule d'Itô-Ventzel). *Soient $\mathcal{I}$ un intervalle quelconque de $\mathbb{R}^n$, $u(t,x)_{t\geq 0, x\in\mathcal{I}}$ un $\mathcal{C}^2$-processus et une $\mathcal{C}^1$-semimartingale de la forme (5.19) tel* *que ses caractéristiques locales (β, Γ) sont dans la classe $\mathcal{B}^{1,0}$ et S_t une semimartingale continue à valeurs dans $\mathcal{I}$. Alors, $u(t, S_t)$ est une semimartingale continue obéissant à la dynamique*

$$\begin{aligned} du(t,S_t) &= u'(t,S_t)dS_t + \frac{1}{2}u''(t,S_t)\|\sigma(t,S_t)\|^2 dt \\ &+ \beta(t,S_t)dt + \Gamma(t,S_t)dW_t \\ &+ < \Gamma'(t,S_t), \sigma_t > dt, \end{aligned} \tag{5.21}$$

où nous avons noté σ la volatilité de S.

La première ligne de cette dynamique n'est autre que la formule d'Itô classique, à laquelle nous rajoutons la partie stochastique due à u prise le long de S et enfin la variation jointe $< \Gamma'(t, S_t), \sigma_t >$.
La définition des classes $\mathcal{B}^{m,\delta}$, $\mathcal{C}^m$-processus et $\mathcal{C}^{m'}$ semimartingales sont fournies dans les sections A.2 et A.4, ainsi que celles des semi-normes $\|.\|_{m+\delta:K}$ et $\|.\|^{\sim}_{m+\delta:K}$ (K compact de $\mathbb{R}_+$).
Pour pouvoir appliquer ce lemme, l'hypothèse suivante est alors nécessaire dans toute la suite

Hypothèse 5.2. *Les caractéristiques locales (β, Γ) de la semi-martingale u sont dans la classe $\mathcal{B}^{1,0}$.*

Cette hypothèse implique que $\beta(t,x)$ (resp. $a(t,x,y) \stackrel{def}{=} < \Gamma(t,x), \Gamma(t,y) >$) admet une modification continue à valeurs dans $\mathcal{C}^{1,0}$, c-à-d continûment différentiable par rapport à x (resp. continûment différentiable par rapport à (x,y)) et que $\|\beta(t)\|^{\sim}_{1:K} \in L^1$ *p.s.* (resp. $\|a(t)\|^{\sim}_{1:K} \in L^1$ *p.s.*) pour tout compact K de $\mathbb{R}_+$.

5.4.2 Lemme d'Itô-Ventzel et consistance avec l'univers d'investissement

Soit u un processus d'utilité progressive de la forme (5.19) dans le marché $\mathcal{M}^{r,\eta}(\mathcal{K})$ (définition 5.2) vérifiant l'hypothèse (5.2). Alors, en appliquant le lemme d'Itô-Ventzel au processus $u(t, X_t^{x,\pi})$ pour $\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K})$, il s'en suit que

$$\begin{aligned} u(t, X_t^{x,\pi}) &= (\beta + u' r_t X_t^{x,\pi} + < \pi_t \sigma_t, u' \eta_t + \Gamma' > + \frac{1}{2} u'' \|\pi_t \sigma_t\|^2)(t, X_t^{x,\pi}) dt \\ &+ (\Gamma + u' \pi_t \sigma_t)(t, X_t^{x,\pi}) dW_t. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Comme u est une utilité progressive, par hypothèse, les propriétés de consistance avec l'univers d'investissement et d'existence d'une stratégie optimale se traduisent alors par :

– **Consistance avec l'univers d'investissement :** Pour toute stratégie admissible $\pi \in \mathcal{A}(\mathcal{K})$, on a $\forall t \geq 0,\ x > 0$

$$(\beta + u' r_t X_t^{x,\pi} + < \pi_t \sigma_t, u' \eta_t + \Gamma' > + \frac{1}{2} u'' \|\pi_t \sigma_t\|^2)(t, X_t^{x,\pi}) \leq 0.$$

– **Existence d'un optimum :** Il existe une stratégie admissible π^* telle que $\forall t \geq 0,\ x > 0$

$$(\beta + u' r_t X_t^{x,\pi^*} + < \pi_t^* \sigma_t, u' \eta_t + \Gamma' > + \frac{1}{2} u'' \|\pi_t^* \sigma_t\|^2)(t, X_t^{x,\pi^*}) = 0.$$

Pour conclure, le lemme d'Itô-Ventzel est largement suffisant pour traduire la propriété de surmartingale des processus $u(t, X_t^{x,\pi}),\ \pi \in \mathcal{A}(\mathcal{K})$ (exprimée par la première inégalité) ainsi que la propriété de martingale pour une richesse particulière (exprimée par la seconde équation ci-dessus). Nous notons qu'en particulier ces équations traduisent uniquement le comportement de u tout au long des trajectoires admissibles et qu'en aucun cas elles ne permettent de caractériser u par rapport à $x \in \mathbb{R}_+^*$, notamment la dernière identité qui n'est vraie que sur la trajectoire optimale.
La question que nous pouvons nous poser à ce niveau est la suivante : pouvons-nous remplacer X_t^{x,π^*} par x ? Car si c'est possible alors nous pouvons déduire que u satisfait l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman suivante

$$(\beta + x u' r_t + < \pi_t^* \sigma_t, u' \eta_t + \Gamma' > + \frac{1}{2} u'' \|\pi_t^* \sigma_t\|^2)(t, x) = 0,\ \forall t \geq 0,\ x > 0.$$

Or, en général, ceci n'est pas possible car il faudrait plus d'hypothèses sur l'univers d'investissement. Par exemple, il faut que

– la richesse optimale visite un ensemble assez riche en valeurs $x > 0$ et ce pour tout $t \geq 0$.

– ou tout simplement que nous pouvons, à tout instant $t \geq 0$, partir d'une richesse x.

C'est surtout cette dernière hypothèse qui nous intéresse. Dans le paragraphe suivant, nous donnons une condition, sur l'ensemble des stratégies admissibles, qui permettra de satisfaire cette hypothèse et par conséquent déduire des vraies équations de HJB.

5.4.3 Principe de la programmation dynamique

Le but dans la suite est d'établir l' équation du type Hamilton-Jacobi-Bellman que satisfait une utilité progressive dans l'univers d'investissement $(r, \eta, \mathcal{K})$ décrit dans le paragraphe 4.2, en utilisant essentiellement les résultats et les techniques que nous avons établis et développés dans le deuxième chapitre de ce manuscrit.

Pour cela, nous avons vu dans le paragraphe 2.5 que pour pouvoir appliquer le principe de la programmation dynamique, quelques hypothèses sont indispensables, notamment l'hypothèse appelée *hypothèse de recollement* 2.3, que nous rappelons ici :

Hypothèse 5.3. *Pour toutes stratégies π^1 admissible entre la date 0 et la date t_1 et π^2 admissible entre la date t_1 et la date t_2, la stratégie π associée au vecteur de proportions δ défini par $\delta = \delta^1 \mathbb{1}_{[0,t_1]} + \delta^2 \mathbb{1}_{]t_1,t_2]}$ est une stratégie admissible sur l'intervalle $[0, t_2]$ quels que soient t_1 et t_2 tels que $0 \leq t_1 \leq t_2$.*
δ^1 et δ^2 désignent les proportions (définition 2.3) associées aux stratégies π^1 et π^2.

Sous cette hypothèse, nous pouvons remarquer que les assertions (ii) et (iii) de la définition 4.3 des utilités progressives deviennent :

ii) **Consistance avec l'univers d'investissement :** pour toute stratégie admissible $\mathcal{P}$, et pour toute richesse initiale x à l'instant s, nous avons $\forall t \geq r \geq s$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(u(t, X_t^{s,x,\pi})/\mathcal{F}_r) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(u(t, X_t^{r,X_r^{s,x,\pi},\pi})/\mathcal{F}_r) \leq u(r, X_r^{s,x,\pi}). \quad (5.23)$$

iii) **Existence d'un optimum :** Pour toute richesse initiale x à la date s, il existe une unique stratégie admissible optimale, notée π^*, pour laquelle nous avons

$$\mathbf{E}(u(t, X_t^{r, X_r^{s,x,\pi^1}, \pi^*})/\mathcal{F}_r) = u(r, X_r^{s,x,\pi^*}), \ \forall t \geq r \geq s. \tag{5.24}$$

Nous remarquons que l'équation (5.24) peut se réécrire en tenant compte de l'optimalité de π^* sous la forme

$$u(t,x) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}(x, \mathcal{K}_t)} \mathbf{E}(u(T, X_T^{t,x,\pi})/\mathcal{F}_t) \quad \text{pour tout } T \geq t \geq s$$

où nous rappelons que $\mathcal{A}(x, \mathcal{K}_t)$ désigne l'ensemble des stratégies admissibles dans $\mathcal{K}$ pour une richesse initiale x à la date t. Il en suit que, sous l'hypothèse de recollement 5.3, une utilité progressive u n'est autre que sa propre fonction valeur.

En d'autres termes, si l'investisseur a choisi de suivre la stratégie π^1 dans l'intervalle de temps $[0, t_1]$, alors, quelle que soit la nouvelle stratégie qu'il considère entre t_1 et $t_1 + \varepsilon$, elle ne lui apportera pas plus de satisfaction sauf si la stratégie π^2 est optimale.

Cette remarque est fondamentale car elle met en valeur le rôle de la dimension temps dans ce genre de problème d'optimisation. En effet, nous pouvons réinterpréter ces nouvelles assertions comme suit : quelle que soit la stratégie π^1 que l'investisseur a suivi jusqu'a la date d'aujourd'hui "t_1", il a intérêt à retrouver *rapidement* sa stratégie optimale partant de la richesse réalisée jusque-là, c-à-d., $X_{t_1}^{s,x,\pi^1}$, sinon il vaudrait mieux s'arrêter tout de suite. En effet, dans le cas contraire, au fur et à mesure que le temps s'écoule les stratégies deviennent moins performantes (à l'exception de la stratégie optimale) et l'investisseur s'éloigne de plus en plus de ses objectifs. Par contre, ceci ne veut, en aucun cas, dire qu'en identifiant sa stratégie optimale à partir d'aujourd'hui (c-à-d., "t_1"), l'investisseur retrouve son état d'équilibre. Ceci n'est vrai que si π^1 était optimale. Par contre il ne s'éloignera pas davantage de son idéal et ne cumulera pas plus de pertes.

5.4.4 Équations de Hamilton-Jacobi-Bellman

Le but de ce paragraphe est de montrer, comme dans le cadre markovien, que u est solution d'une équation de type Hamilton-Jacobi-Bellman similaire à celle (5.1) étudiée dans le cadre markovien, et traduisant l'impact de la consistance avec l'univers d'investissement sur le drift β. Un premier résultat s'annonce alors comme suit :

Théorème 5.4. *Soit u un processus d'utilité progressive de la forme (5.19) dans le marché $\mathcal{M}^{r,\eta}$ vérifiant l'hypothèse (5.2). Alors, u est solution de l'équation aux dérivées partielles à coefficients stochastiques suivante*

$$\beta(t,x) + u' r_t x + \sup_{\pi \in \mathcal{K}_t} \mathcal{P}(t,x,\pi) = 0, \tag{5.25}$$

où $\mathcal{P}$ est l'opérateur défini par

$$\mathcal{P}(t,x,\pi) = \left[< \pi_t \sigma_t, u' \eta_t + \Gamma' > + \frac{1}{2} u'' \|\pi_t \sigma_t\|^2 \right](t,x). \tag{5.26}$$

En d'autres termes, le drift de cette utilité stochastique u ne peut être un simple paramètre vérifiant l'hypothèse (5.2). Le processus β est fortement contraint par l'univers d'investissement. Ceci implique en particulier que u doit être "adaptée" à cet univers de manière dynamique . Ceci se traduit par l'évolution, en temps, donnée par

$$du(t,x) = -\big(u' r_t x + \sup_{\pi \in \mathcal{K}_t} \mathcal{P}(t,x,\pi)\big)dt + \Gamma(t,x)dt.$$

Enfin, remarquons que cette dynamique décrit uniquement l'évolution par rapport au temps de ce processus d'utilité. Elle n'est pas donc suffisante pour traduire le comportement de u par rapport à la variable x, notamment la propriété de concavité.

Démonstration. (Théorème 5.4) En utilisant (5.4) et en appliquant le lemme d'Itô-Ventzel au processus composé $u(s, X_s^{t,x,\pi})$ où $\pi \in \mathcal{A}(x,\mathcal{K})$ est une stratégie admissible quelconque, entre les dates t et $t+h$, il en découle que, pour tout $t \geq s$, on a

$$u(t+h, X_{t+h}^{t,x,\pi}) = M_t + u(t,x) + \int_t^{t+h} (\beta(s, X_s^{t,x,\pi}) + u' r_t X_s^{t,x,\pi} + \mathcal{P}(s, X_s^{t,x,\pi}, \pi))ds$$

où on désigne par M une martingale locale, et par $\mathcal{P}$ l'opérateur défini par

$$\mathcal{P}(t,x,\pi) = \Big[< \pi_t\sigma_t, u'\eta_t + \Gamma'(t,x) > + \frac{1}{2}u''\|\pi_t\sigma_t\|^2 \Big]. \tag{5.27}$$

Vues les hypothèses de continuité portées sur u, β et Γ, nous pouvons faire le même raisonnement explicité dans le paragraphe 2.5 et les paragraphes précédents. Nous obtenons alors, en faisant tendre h vers 0, que la condition de compatibilité avec l'univers d'investissement est équivalente à

$$\beta(t,x) + u'r_t x + \mathcal{P}(t,x,\pi) \leq 0, \ p.s. \ \forall \pi \in \mathcal{K}_t. \tag{5.28}$$

Par conséquent

$$\beta(t,x) + u'r_t x + \sup_{\pi\in\mathcal{K}_t} \mathcal{P}(t,x,\pi) \leq 0, \ p.s. \tag{5.29}$$

D'après la définition 4.3 assertion (iii) de ces utilités, il existe une stratégie optimale notée π^* telle que $(u(s, X_s^{t,x,\pi^*})_{s\geq t})$ est une martingale. Cela se traduit par l'équation

$$\beta(t,x) + u'r_t x + \mathcal{P}(t,x,\pi^*) = 0, \ p.s. \tag{5.30}$$

ce qui, combiné avec (5.29), suggère que

$$\beta(t,x) + u'r_t x + \sup_{\pi\in\mathcal{K}_t} \mathcal{P}(t,x,\pi) = 0, \ p.s. \tag{5.31}$$

Ceci achève la démonstration. □

5.4.5 Stratégie optimale

Le but de cette sous-section est de donner une caractérisation explicite de la stratégie optimale, supposée exister et être unique. Par conséquent, nous nous intéressons au programme de maximisation suivant

$$\sup_{\pi\in\mathcal{K}_t} \mathcal{P}(t,x,\pi).$$

Pour cela, nous commençons par réécrire $\mathcal{P}(t,x,\pi)$ sous la forme plus simple suivante

$$\mathcal{P}(t,x,\pi) = \frac{u''}{2}\Big(\|\pi_t\sigma_t + \frac{u'\eta_t + \Gamma'}{u''}(t,x)\|^2 - \|\frac{u'\eta_t + \Gamma'}{u''}\|^2(t,x) \Big).$$

D'après la stricte concavité de u (voir la définition 4.3, assertion (i)), il en découle que

$$\sup_{\pi\in\mathcal{K}_t}\mathcal{P}(t,x,\pi)=-\frac{u''}{2}\|u'\eta_t+\Gamma'(t,x)\|^2+\frac{u''}{2}\inf_{\pi\in\mathcal{K}_t}\|\frac{-\big(u'\eta_t+\Gamma'\big)}{u''}(t,x)-\pi_t\sigma_t\|^2.$$

Pour conclure, nous remarquons enfin que le terme en l'*inf* dans cette dernière équation n'est autre que la distance au carré entre le point $-\big(u'\eta_t+\Gamma'\big)/u''(t,x)$ de $\mathbb{R}^d$ et le cône convexe $\mathcal{K}_t\sigma_t$, ce qui implique l'existence et l'unicité de la stratégie optimale. Elle est alors donnée par

$$\pi_t^*(x)=-\frac{1}{u''}\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}\big(u'\eta_t+\Gamma'\big)(t,x),$$

d'où le théorème suivant :

Théorème 5.5. *Soit u est une utilité progressive. Sous les mêmes hypothèses que le théorème 5.4, la stratégie optimale est donnée par*

$$\pi_t^*(x)=-\frac{1}{u''}\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}\big(u'\eta_t+\Gamma'\big)(t,x). \tag{5.32}$$

Nous noterons que cette identité est identique à (5.16) établie dans le théorème 5.3 dans le cas markovien et à celle de l'exemple 4.3.2, équation (4.33). Nous remarquons aussi, comme u est une utilité progressive, que le processus de richesse optimal noté par X^{x,π^*}, c-à-d. $\pi_t^*=\pi_t^*(X_t^{x,\pi^*})$, est unique.
Si nous réécrivons la formule (5.32) en mettant u' en facteur, il vient que

$$\pi_t^*(x)\sigma_t=-\frac{u'}{u''}\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}\left[\eta_t+\frac{\Gamma'}{u'}\right](t,x). \tag{5.33}$$

Cette formulation permet d' interpréter la quantité Γ'/u' comme une prime de risque supplémentaire purement générée par le processus d'utilité progressive u et dépendant de la richesse de l'agent ou encore comme une nouvelle direction optimale d'investissement.
Le fait que l'utilité d'un investisseur soit stochastique lui permet d'intégrer au mieux son comportement par rapport à toutes les informations dont il a accès et au nouvel état du marché. En outre, cette utilité va lui permettre de générer une prime de risque $\frac{\Gamma'}{u'}$ qui vient se rajouter à celle du marché, c-à-d. η. En d'autres termes, le fait de considérer une utilité mieux adaptée à

son univers d'investissement augmente le profil de l'investisseur et corrige de manière dynamique ses stratégies et ses positions dans le marché.

Remarquons que le terme u'/u'' n'est autre que la tolérance au risque définie comme l'inverse de l'aversion absolue au risque (1.12).
Le cas particulier $\eta \equiv 0$ implique que

$$\pi_t^*(x)\sigma_t = -\frac{\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}\Gamma'}{u''}(t,x),$$

et donc que le terme $\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}\Gamma'$ est proportionnel à la richesse optimale. Ce cas particulier montre qu'il est indispensable de mieux comprendre le rôle joué par le paramètre Γ.

Notons que nous n'avons pas eu à vérifier que cette stratégie optimale est admissible dans le sens où nous n'avons pas montré que presque sûrement, la richesse optimale associée est positive à tout instant pour la simple raison que par hypothèse (définition 4.3 (*iii*)), la stratégie optimale (admissible) est l'unique stratégie telle que $u(t, X_t^{x,\pi^*})$ soit une martingale. Comme π^* ci-dessus satisfait cette condition, nous avons pu conclure. Nous reviendrons dans la suite à la question d'admissibilité d'une telle stratégie de la forme (5.32).

Remarque 5.2. *Il est important de remarquer que la stricte concavité a joué un rôle décisif pour établir ce résultat. En effet, comme $u'' < 0$, l'opérateur $\mathcal{P}$ ci-dessus est strictement convexe par rapport à π, ce qui implique l'existence d'une stratégie admissible. Dans le cas contraire, le terme $\sup_{\pi\in\mathcal{K}}\mathcal{P}(t,x,\pi)$ peut exploser.*

Pour résumer, nous combinons ces deux derniers théorèmes pour en conclure que :

Théorème 5.6. *Soit u un processus d'utilité progressive de la forme (5.19) dans le marché $\mathcal{M}^{r,\eta}$ vérifiant l'hypothèse (5.2). Alors,*

(i) u est solution de l'équation aux dérivées partielles à coefficients stochastiques suivante

$$\beta(t,x) + u'r_tx - \frac{1}{2u''}\|\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}[u'\eta_t + \Gamma'(t,x)]\|^2 = 0. \tag{5.34}$$

(ii) La stratégie optimale est donnée par

$$\pi_t^*(x)\sigma_t = -\frac{1}{u''}\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}\left[u'\eta_t + \Gamma'\right](t,x). \tag{5.35}$$

Par conséquent, le processus de richesse optimale satisfait

$$\begin{cases} dX_t^{x,\pi^*} = -\dfrac{1}{u''}\displaystyle\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}\left[u'\eta_t + \Gamma'\right](t,X^{x,\pi^*}) \\ X_0^{x,\pi^*} = x \end{cases} \tag{5.36}$$

Ce théorème met en évidence que le couple formé de l'univers d'investissements $(\mathcal{M}^{r,\eta},\mathcal{K})$ et de la dérivée de la volatilité Γ par rapport à x décrit complètement l'évolution du processus d'utilité u par rapport à la variable temps. Le drift β s'interprète comme le meilleur compromis entre univers d'investissement et risque d'utilité représenté par le paramètre Γ. Il peut être encore interprété comme la meilleure combinaison entre prime de marché η et prime d'utilité Γ'/u'.
D'autre part, il est clair à partir de l'équation (5.35) que la dérivée de Γ par rapport à la richesse intervient aussi au niveau de la stratégie optimale, cela de manière très significative car c'est la volatilité Γ qui fixe la stratégie optimale dans ce marché. En effet, deux investisseurs qui n'ont pas la même volatilité Γ (utilités) n'ont pas la même stratégie optimale même dans le cas où la projection des dérivées en x de ces volatilités sur l'espace des contraintes est la même, puisque les utilités ne sont pas identiques, notamment les aversions au risque.
Pour mettre l'accent sur cette contrainte imposée sur le drift de l'utilité, une conséquence directe de ce théorème est donnée par le corollaire suivant :

Corollaire 5.2. *Sous les hypothèses du théorème précèdent, si u est une utilité progressive sur le marché $\mathcal{M}^{r,\eta}$, alors elle est solution de l'EDP stochastique suivante*

$$du(t,x) \;=\; \left\{\frac{1}{2u''}\Big\|\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}\left[u'\eta_t + \Gamma'\right]\Big\|^2 - u'r_tx\right\}(t,x)dt + \Gamma(t,x)dW_t. \tag{5.37}$$

Ainsi nous retrouvons la même dynamique établie dans le cadre markovien (théorème 5.3, équation (5.15)) et dans le cadre de l'exemple 4.3.2 (équation (4.32)).

Nous avons vu dans le cadre particulier des exemples 4.3.1 et 4.3.2 où la volatilité Γ est de la forme $au + xu'b$ (voir l'identité (4.28)) que nous pouvons résoudre cette EDP stochastique complètement non-linéaire. Cependant, nous avons vu aussi, dans ces exemples relativement simples, que la solution étant donnée une condition initiale n'est pas unique puisque le choix des paramètres de diffusion des processus Y et Z ne le sont pas. Le cadre de ce théorème est encore beaucoup plus compliqué pour les raisons suivantes :

— La forme de la volatilité Γ peut être quelconque.

— Il est très difficile de donner une interprétation financière, outre le fait que Γ'/u' joue le rôle d'une prime de marché, ce qui aurait pu nous permettre d'imposer plus de contraintes sur ce paramètre. Par exemple, avoir la forme $au + xu'b$, ou encore être un opérateur de u et de ses dérivées jusqu'à un ordre précis ...

— Il n'est pas évident, voir très difficile, de faire le lien entre cette dynamique (5.37) et la propriété de concavité. D'ailleurs, dans le paragraphe suivant, nous montrerons que cette dynamique en plus d'une condition initiale est insuffisante pour que u soit une utilité progressive. Nous donnerons un contre-exemple de processus vérifiant (5.37) alors qu'ils ne sont pas concaves.

— À cela se rajoute le fait que, contrairement aux cadres des exemples 4.3.1 et 4.3.2, l'ensemble des contraintes $\mathcal{K}$ est un cône convexe fermé qui évolue de manière stochastique et il peut, surtout, dépendre de la richesse. Donc outre la non-linéarité de l'opérateur $\prod_{\mathcal{K}_t(x)\sigma_t}$, il est assez compliqué, sauf dans des cas particuliers, d'expliciter le comportement de

$$\prod_{\mathcal{K}_t(x)\sigma_t} \big(\Gamma' + u'\eta\big)$$

par rapport à la variable x. Par exemple, si Γ' est dérivable, cela implique-t-il que $\prod_{\mathcal{K}_t(x)\sigma_t} \big(\Gamma' + u'\eta\big)$ le soit ?

— À notre connaissance, il n'existe pas de travaux sur ce type d'EDP stochastiques.

Pour toutes ces raisons, ainsi que pour les problèmes que nous venons de mettre en évidence, il devient crucial de mieux comprendre le rôle de Γ dans toutes ces questions. Le chapitre suivant sera dédié dans un premier temps à simplifier la dynamique (5.37) pour mettre plus en évidence le processus Γ.

Remarque 5.3. *Soit u un processus d'utilité progressive de la forme (5.19) dans le marché $\mathcal{M}^{r,\eta}$ vérifiant l'hypothèse (5.2). Alors, en combinant (5.37) et l'hypothèse 5.2, on obtient*

$$\begin{cases} \frac{1}{2u''}\| \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} [u'\eta_t + \Gamma'] \|^2 - u'r_t x \in \mathcal{B}^{1,0}, \\ \Gamma \in \mathcal{B}^{1,0}. \end{cases} \tag{5.38}$$

Cette hypothèse n'est que la condition nécessaire pour utiliser la formule d'Itô généralisée. Si cette hypothèse n'est pas satisfaite, nous ne pouvons composer u avec une richesse admissible quelconque. De plus, la définition 4.3 n'aura plus de sens.

La dynamique (5.37) est une condition nécessaire non suffisante. Soit u une semimartingale deux fois dérivable en x telle que ($u'' \neq 0$) et suivant la dynamique (5.37) et vérifie l'hypothèse, indispensable pour appliquer le lemme d'Itô-Ventzel, suivante :

Hypothèse 5.4.

$$\begin{cases} \frac{1}{2u''}\| \prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t} [u'\eta_t + \Gamma'(t,x)] \|^2 - u'r_t x \in \mathcal{B}^{1,0}, \\ \Gamma \in \mathcal{B}^{1,0}. \end{cases} \tag{5.39}$$

Le but de cette section est de répondre à la question suivante : u est-elle concave ?

La réponse à cette question est négative. Voici un contre-exemple :

En effet si nous reprenons l'exemple 4.3.2 avec $Z \equiv 1$ et sans faire l'hypothèse que v est une fonction d'utilité, c-à-d. v est une simple fonction deux fois dérivable, alors en appliquant le lemme d'Itô au processus $u(t,x) \stackrel{def}{=} v(xH_t^{r,\eta})$, nous obtenons

$$du(t,x) = \Big(-xu'r_t + \frac{1}{2}u''\|\eta_t\|^2\Big)(t,x)dt - xu'(t,x)\eta_t dW_t. \tag{5.40}$$

Notons $\Gamma(t,x) = -xu'(t,x)\eta_t$ et remarquons que

$$\Gamma'(t,x) + u'(t,x)\eta_t = -xu''(t,x)\eta_t.$$

Si, de plus, $\eta\sigma^{-1}$ est une stratégie admissible, alors

$$\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}\big(\Gamma'(t,x)+u'(t,x)\eta_t\big)=-xu''(t,x)\eta_t. \tag{5.41}$$

Par suite, la quantité $\frac{1}{2u''}\|\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}(\Gamma'+u'\eta_t)\|^2$ est bien définie, même si u'' s'annule car nous avons l'identité

$$\frac{1}{2u''}\|\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}(\Gamma'+u'\eta_t)\|^2=\frac{u''}{2}\|\eta_t\|^2.$$

Il en résulte que la dynamique (5.40) peut facilement se réécrire sous la forme (5.37) du corollaire 5.2, c-à-d.

$$du(t,x)=[\frac{1}{2u''}\|\prod_{\mathcal{K}_t\sigma_t}(\Gamma'+u'\eta_t)\|^2-xu'r_t](t,x)dt+\Gamma(t,x)dW_t. \tag{5.42}$$

Ceci prouve que le processus u obéit bien à la dynamique d'une utilité progressive, sans pour autant vérifier ni la concavité ni la monotonie. En d'autres termes, l'EDP stochastique (5.37) n'implique pas la concavité de la solution, si elle existe. Ceci est plutôt intuitif car cette EDP stochastique traduit uniquement l'évolution dans le temps de u, à x fixé. Donc de manière générale, l'équation (5.37) n'explique pas le comportement de u en x. Il faut donc séparer la question de concavité et celle de la dynamique car ce sont deux problèmes de nature différente.