Utilités progressives Dualité

Sommaire

Résumé : Comme dans le chapitre 3*, dans ce chapitre nous nous intéressons au processus dual convexe d'une utilité progressive de la forme (5.19). Pour simplifier, nous nous placerons dans le cadre du marché martingale décrit dans le paragraphe 6.4, mais nous donnons en plus les équivalents des principaux résultats dans le marché initial. Notre approche sera similaire à celle du chapitre précédent dans le sens où nous portons notre intérêt essentiellement à établir explicitement la dynamique du processus dual en fonction de celle de l'utilité.*

Dans une première section, nous établissons les conditions nécessaires d'optimalité puis la dynamique de la transformée de Fenchel d'une utilité progressive. Nous montrons que cette dynamique est très similaire à celle de l'utilité progressive (6.40). Encore une fois la volatilité Γ *joue un rôle très important dans la dynamique duale et fixe la mesure martingale locale optimale. Nous montrons, aussi, l'équivalent du théorème 3.6 établi dans [60] : c-à-d. que le dual convexe est, à son tour, solution d'un problème d'optimisation dual.*

Vues les grandes similitudes entre les utilités progressives et leur dual convexe, ainsi que la forte analogie entre les EDP stochastiques respectives, la technique de dualité ne nous permet pas de résoudre ces problèmes d'optimisation progressif. Par contre les techniques de changement de numéraire et de dualité nous permettent de mieux aborder les utilités progressives décroissantes dans le temps (paragraphe 7.7), étudiées par Zariphopoulou et al. [88] et M. Tehranchi et al. [36]. Nous donnons le principal théorème de ces auteurs et par changement de numéraire, nous donnons une interprétation assez importante de leurs résultats.

7.1 Introduction

Dans ce chapitre, comme dans le cadre classique d'optimisation de portefeuille (voir le chapitre 3), nous nous intéressons à la transformée de *Fenchel* $\tilde{u}$ d'une utilité progressive u et particulièrement au problème d'optimisation dual. Notre but est d'étudier l'EDP stochastique que vérifie $\tilde{u}$ et de déterminer une caractérisation des processus d'utilités progressives ainsi que des richesses optimales qu'elles génèrent à travers le dual. Pour ce, et afin de pouvoir utiliser les résultats du paragraphe 6.4, nous supposons, tout au long de ce chapitre ainsi que le chapitre suivant, qu'au moins l'une des deux hypothèses suivantes est satisfaite :

Hypothèse 7.1. *L'ensemble* $\mathcal{K}$ *des contraintes sur les stratégies admissibles est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^d$.

Hypothèse 7.2. *La prime de marché* η *satisfait :* $\eta\sigma^{-1} \in \mathcal{K} \cap (-\mathcal{K})$.

Sous l'une ou l'autre de ces hypothèses, nous avons vu qu'il est largement suffisant, d'après les résultats du paragraphe 6.4, de nous placer dans le cadre particulier du marché de numéraire $(H^{r,\eta})^{-1}$ défini dans (6.47). Nous avons établi que si dans cet univers, u est une utilité progressive de classe $\mathcal{C}^2$ obéissant à une dynamique de la forme (5.19) et vérifiant l'hypothèse 5.2, alors elle est solution de l'équation aux dérivées partielles stochastique suivante :

$$\begin{cases} du(t,x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{||\Gamma^{',\mathcal{K}}||^2}{u''}(t,x)dt + \Gamma(t,x)dW_t, \\ \Gamma^{',\mathcal{K}} \stackrel{def}{=} \prod_{\mathcal{K}\sigma}(\Gamma'), \\ (\dfrac{||\Gamma^{',\mathcal{K}}||^2}{u''}, \Gamma) \in \mathcal{B}^{1,0}, \end{cases} \tag{7.1}$$

et générant le portefeuille optimal suivant :

$$dX_t^{s,x,u} = -\frac{\Gamma^{',\mathcal{K}}}{u''}(t, X_t^{s,x,u})dW_t, \quad X_s^{s,x,u} = x. \tag{7.2}$$

La richesse optimale est indexée par u pour rappeler qu'elle est associée à cette utilité.
Rappelons enfin que l'hypothèse

$$(\frac{||\Gamma^{',\mathcal{K}}||^2}{u''}, \Gamma) \in \mathcal{B}^{1,0}$$

est une condition nécessaire pour pouvoir appliquer le lemme d'*Itô-Ventzel* (voir le théorème A.11). Si de plus, nous supposons que $\Gamma'/u'' \in \mathcal{B}_b^{0,1}$, alors nous montrons, d'après les théorèmes A.13 et A.16, que l'équation différentielle stochastique (7.2) admet une unique solution, cette solution admettant une modification continue.

7.2 Dual convexe : définition et hypothèses

Toujours dans le même marché de numéraire $\left(H^{r,\eta}\right)^{-1}$, nous nous intéressons dans ce paragraphe au dual convexe de l'utilité progressive, dont nous rappelons la définition :

Définition 7.1. *On appelle dual convexe , ou encore transformée de Fenchel de $u(t,.)$ (concave croissante) à tout instant $t \geq s$ la fonction définie par*

$$\tilde{u}(t,y) \stackrel{def}{=} \max_x(u(t,x) - xy). \tag{7.3}$$

Sachant que, par une simple dérivation, on montre que le maximum est atteint en $x_t^\star = I(t,y)$, $\tilde{u}$ est alors donnée par

$$\tilde{u}(t,y) = u(t, I(t,y)) - yI(t,y) \tag{7.4}$$

On remarquera ensuite que $\tilde{u}' = -I = -(u')^{-1}$.

Le but de cette section est d'établir la dynamique de ce dual $\tilde{u}$ en fonction des paramètres de celle de l'utilité u. Pour cela, remarquons que cette dynamique peut être établie par deux manières différentes :

- À partir de (7.4), où nous pouvons obtenir que

$$d\tilde{u}(t,y) = du(t, I(t,y)) - ydI(t,y).$$

- À partir de l'identité

$$\tilde{u}' = -I = -(u')^{-1}$$

  qui nous permet en particulier, et sous les bonnes hypothèses, de déterminer la dynamique de $\tilde{u}'$ et donc, par une intégration, nous permet d'établir celle de $\tilde{u}$.

Par contre, l'une où l'autre de ces deux méthodes nécessite de déterminer la dynamique de $I = (u')^{-1}$ avant de pouvoir poursuivre nos investigations.
Par conséquent, afin de prouver le résultat principal de ce chapitre, nous allons procéder comme suit ; dans un premier temps nous établirons les hypothèses nécessaires pour déduire la dynamique de la dérivée u' à partir de celle de u. Puis, en partant du fait que $du'(t, I(t,y)) = 0$, nous déduisons celle de I.

Pour déduire la dynamique de u', la méthode la plus naturelle est de dériver formellement, terme à terme, celle de u. Mais, de manière générale, ceci n'est pas possible, bien que les paramètres de diffusion de la dynamique de u sont dérivables. En effet, une hypothèse supplémentaire est nécessaire, voir H. Kunita [74]. Cette hypothèse est la suivante :

Hypothèse 7.3. *Supposons, en plus de l'hypothèse habituelle*

$$\Big(\frac{||\Gamma'^{,\mathcal{K}}||^2}{u''}, \Gamma\Big) \in \mathcal{B}^{1,0}$$

nécessaire pour appliquer le lemme d'Itô-Ventzel, qu'il existe $\delta > 0$ *tel que*

$$(\frac{||\Gamma'^{,\mathcal{K}}||^2}{u''}, \Gamma) \in \mathcal{B}^{1,\delta}.$$

En d'autres termes, l'hypothèse 5.2 est insuffisante. Il faut supposer de plus que les paramètres de diffusion de u sont δ-Hölderiennes, pour un certain réel $\delta > 0$. Alors, dans ce cadre, et d'après le théorème A.12 (*ii*), nous avons le résultat suivant :

Proposition 7.1. *La dérivée* u' *de l'utilité progressive (7.1) est un* $\mathcal{C}^1$*-processus et une* $\mathcal{C}^1$*-semimartingale qui obéit à la dynamique suivante :*

$$du'(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{||\Gamma'^{,\mathcal{K}}||^2}{u''})(t,x)dt + \Gamma'(t,x)dW_t. \tag{7.5}$$

En particulier, ses caractéristiques locales $(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{||\Gamma'^{,\mathcal{K}}||^2}{u''}), \Gamma')$ *sont dans la classe* $\mathcal{B}^{0,\delta}$.

Remarquons, d'après la deuxième partie de cette proposition, que u' ne satisfait pas l'hypothèse 5.2, nécessaire pour appliquer le lemme d'Itô-Ventzel. Or, comme nous l'avons expliqué ci-dessus, nous avons besoin de composer u' au moins avec son inverse pour pouvoir établir la dynamique de $\tilde{u}$. C'est pour cette raison que nous remplaçons l'hypothèse 7.3 par :

Hypothèse 7.4. *Supposons que* u *est un* $\mathcal{C}^3$*-processus et une* $\mathcal{C}^1$*-semimartingale telle que ses caractéristiques locales* $(\frac{||\Gamma'^{,\mathcal{K}}||^2}{u''}, \Gamma)$ *appartiennent à la classe* $\mathcal{B}^{2,\delta}$ *pour un certain* $\delta > 0$.

Par conséquent, nous obtenons le résultat suivant :

Proposition 7.2. *Si* u *est une utilité progressive vérifiant l'hypothèse 7.4, alors sa dérivée* u' *est une* $\mathcal{C}^1$*-semimartingale et un* $\mathcal{C}^2$ *processus qui obéit à la dynamique suivante :*

$$du'(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{||\Gamma'^{,\mathcal{K}}||^2}{u''})(t,x)dt + \Gamma'(t,x)dW_t. \tag{7.6}$$

En particulier, ses caractéristiques locales $(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{||\Gamma'^{,\mathcal{K}}||^2}{u''}), \Gamma')$ *sont dans la classe* $\mathcal{B}^{1,\delta}$.

Avant d'énoncer le résultat principal (théorème 7.3) de ce chapitre, nous allons établir quelques propriétés caractéristiques des utilités progressives qui nous permettront de simplifier de manière très significative la preuve du résultat principal (7.3) de ce chapitre.

7.3 Quelques propriétés des utilités progressives

Dans ce paragraphe, nous déduisons à partir de la définition 4.3 des utilités progressives, quelques propriétés importantes que nous pouvons aussi interpréter comme des conditions nécessaires. Ces propriétés nous seront d'une grande utilité dans le dernier chapitre de cette thèse, elles sont données par le théorème suivant.

Théorème 7.1. *Soit u une utilité progressive. Notons par $X^{x,*}$ le portefeuille optimal associé, partant d'un capital initial x. Alors*

(i) *Le processus $(X_t^{x,*}u'(t, X_t^{x,*}))_{t\geq 0}$ est une martingale.*

(ii) *Le processus $(u'(t, X_t^{x,*}))_{t\geq 0}$ est une martingale locale (positive), dont la volatilité est dans $\mathcal{K}^*$.*

(iii) *Pour toute stratégie admissible π et pour tout second capital initial x', le processus $(X_t^{x',\pi}u'(t, X_t^{x,*}))_{t\geq 0, x>0}$ est une surmartingale.*

Nous rappelons que $\mathcal{K}^*$ désigne le cône dual de $\mathcal{K}$, voir définition B.14. Cette notion, de cône dual, est très utilisée dans les problèmes d'optimisation de portefeuille. Pour faire le lien avec les travaux de I. Karatzas et al [55], $-\mathcal{K}^*$ correspond à l'ensemble $\tilde{\mathcal{K}}$ appelé aussi le cône barrière de $-\mathcal{K}$ (voir la définition dans Rockafellar, R. Tyrrell [98] p.114, (1970)).

Nous reviendrons à plusieurs reprises sur ce résultat tout au long de notre étude.

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$, π une stratégie admissible et $X^{x',\pi}$ la richesse associée partant d'un second capital x' en 0. Comme $\varepsilon > 0$, la richesse $\varepsilon X^{x',\pi} + X^{x,*}$ est une richesse admissible partant en 0 du capital $\varepsilon x' + x$, par conséquent et vu la non optimalité de ce processus

$$\mathbb{E}(u(t, \varepsilon X_t^{x',\pi} + X_t^{x,*})/\mathcal{F}_s) \le u(s, \varepsilon X_s^{x',\pi} + X_s^{x,*}), \ \forall t \ge s \ge 0$$

Par optimalité de la richesse $X^{x,*}$, nous pouvons déduire, pour tout $t \ge s \ge 0$, que

$$\mathbb{E}(u(t, \varepsilon X_t^{x',\pi} + X_t^{x,*}) - u(t, X_t^{x,*})/\mathcal{F}_s) \le u(s, \varepsilon X_s^{x',\pi} + X_s^{x,*}) - u(s, X_s^{x,*}), \quad (7.7)$$

Par conséquent, si nous divisons par $\varepsilon > 0$ de part et d'autre de cette inégalité et en faisant tendre ε vers 0, nous déduisons par le théorème de convergence monotone et la concavité de u,

$$\mathbb{E}(X_t^{x',\pi} u'(t, X_t^{x,*})/\mathcal{F}_s) \le X_s^{x',\pi} u'(s, X_s^{x,*}), \ \forall t \ge s \ge 0$$

ce qui prouve (iii). Montrons maintenant (i). En remplaçons $X^{x',\pi}$ par $X^{x,*}$ dans cette dernière inégalité nous obtenons

$$\mathbb{E}(X_t^{x,*} u'(t, X_t^{x,*})/\mathcal{F}_s) \le X_s^{x,*} u'(s, X_s^{x,*}).$$

Il suffit alors d'établir les inégalités dans l'autre sens. Pour cela en prenant cette fois-ci, $\varepsilon < 0$ mais assez petit, la richesse $(1+\varepsilon)X^{x,*}$ est encore une richesse admissible [1]. En remplaçant $X^{x',\pi}$ par $X^{x,*}$ dans (7.7), et en divisant par $\varepsilon < 0$, nous obtenons

$$\mathbb{E}(\frac{u(t, (1+\varepsilon)X_t^{x,*}) - u(t, X_t^{x,*})}{\varepsilon}/\mathcal{F}_s) \ge \frac{u(s, (1+\varepsilon)X_s^{x,*}) - u(s, X_s^{x,*})}{\varepsilon}, \ \forall t \ge s \ge 0$$

En passant à la limite, quand $\varepsilon \to 0$, il en découle

$$\mathbb{E}(X_t^{x,*} u'(t, X_t^{x,*})) \ge X_s^{x,*} u'(s, X_s^{x,*}), \ \forall t \ge s \ge 0$$

ce qui prouve (i). La preuve de (ii) est une simple conséquence du lemme suivant.

Lemme 7.1. *Soit $\mathcal{Y}$ une semimartingale positive continue, vérifiant*
- *$\forall \pi \in \mathcal{K}$, $\mathcal{Y}_t X_t^\pi$ est une surmartingale.*
- *Il existe $\pi^* \in \mathcal{K}$: $\mathcal{Y}_t X_t^{\pi^*}$ est une martingale.*

[1] atteignable par une stratégie admissible.

Alors $\mathcal{Y}$ est une martingale locale, dont la volatilité $\gamma \in \mathcal{K}^*$.

Démonstration. Supposons que $\mathcal{Y}$ obéit à la dynamique

$$d\mathcal{Y}_t = \mu_t dt + \gamma_t \sigma_t dW_t.$$

En appliquant le lemme d'Itô au processus $\mathcal{Y}X^\pi, \pi \in \mathcal{K}$,

$$\mathcal{Y}_t X_t^\pi - \mathcal{Y}_s X_s^\pi = \int_s^t (\mu_\alpha X_\alpha^\pi + < \gamma_\alpha \sigma_\alpha, \pi_\alpha \sigma_\alpha >) d\alpha + \int_s^t \gamma_\alpha dW_\alpha.$$

Par hypothèse, il existe $\pi^* \in \mathcal{K}$: $\mathcal{Y}_t X_t^{\pi^*}$ est une martingale, ce qui implique en passant à la limite $t \to s$

$$x\mu_t = - < \gamma_t \sigma_t, \pi_t^* \sigma_t >$$

et par conséquent,

$$\mathcal{Y}_t X_t^\pi - \mathcal{Y}_s X_s^\pi = \int_s^t < \gamma_\alpha \sigma_\alpha, (\pi - \pi^*)_\alpha \sigma_\alpha > d\alpha + \int_s^t \gamma_\alpha dW_\alpha.$$

Comme les processus $\mathcal{Y}X^\pi, \pi \in \mathcal{K}$ sont des surmartingale,

$$< \gamma_t \sigma_t, (\pi - \pi^*)_t \sigma_t > \leq 0, \forall t \geq 0$$

en particulier si $\pi = \varepsilon \pi^*$, $\varepsilon > 0$

$$(\varepsilon - 1) < \gamma_t \sigma_t, \pi_t^* \sigma_t > \leq 0, \forall t \geq 0.$$

Pour conclure, il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{1}{2}$ puis $\frac{3}{2}$, ce qui conduit à $\mu = - < \gamma_t \sigma_t, \pi_t^* \sigma_t >= 0$. Par suite, en rappelant que le cône dual $\mathcal{K}^*$ n'est autre que l'ensemble des ν, $< \nu, \pi > \leq 0$, $\pi \in \mathcal{K}$ (définition B.14), ceci implique en utilisant les hypothèses du lemme que $\gamma \in \mathcal{K}^*$. □

□

Remarque 7.1. *Dans le travail de M. Tehranchi et al. [36], les auteurs montrent un résultat très similaire au théorème 7.1, sauf qu' à la place de l'assertion (iii), les auteurs montrent que les processus $(X_t^{x',\pi} u'(t, X_t^{x,*}))_{t \geq 0, x > 0}$ sont des martingales pour des richesses $X_t^{x',\pi}$ bornées et des martingales locales si on remplace*

$X_t^{x',\pi}$ *par un actif quelconque* ξ^i. *Ceci est dû essentiellement au fait que les stratégies admissibles, dans [36], sont dans un espace vectoriel et les portefeuilles* X^π *ne sont pas forcément positifs. Par conséquent, si* $\varepsilon < 0$, *le portefeuille* $\varepsilon X_t^{x',\pi} + X_t^{x,*}$ *est admissible. Par le même raisonnement que la preuve ci-dessus les auteurs prouvent l'inégalité inverse de (7.7) ce qui permet de conclure. Ceci n'est pas vrai dans notre cas, il suffit d'appliquer le lemme d'Itô, à la richesse* $\varepsilon X_t^{x',\pi} + X_t^{x,*}$, *ce qui donne d'après les dynamiques (5.4),*

$$d(\varepsilon X_t^{x',\pi} + X_t^{x,*}) = r_t(\varepsilon X_t^{x',\pi} + X_t^{x,*})dt + (\varepsilon\pi_t + \pi^*)\sigma_t(dW_t + \eta_t).$$

Comme l'ensemble des contraintes $\mathcal{K}$ *est simplement un cône convexe (voir définition B.13 d'un cône), il n'est donc pas stable par multiplication par un réel strictement négatif, donc la stratégie* $\varepsilon\pi_t + \pi^*$ *n'est pas forcément dans* $\mathcal{K}$. *Par contre si* $\pi = \pi^*$ *et* $\varepsilon \leq -1$, *la stratégie* $(1+\varepsilon)\pi^*$ *est toujours dans* $\mathcal{K}$, *de même si* $\pi = 0$. *Dans le cas où* $\mathcal{K}$ *est un espace vectoriel, ceci est toujours vrai sans contraintes sur* ε, *par contre le portefeuille associé n'est pas forcément admissible.*

Notons que dans ce résultat aucune hypothèse supplémentaire sur les utilités progressives n'est faite. Par contre si l'hypothèse 7.4 est satisfaite alors nous pouvons établir les dynamiques des processus $u'(t, X_t^{s,x,u})$ et $(X_t^{s,x,u}u'(t, X_t^{s,x,u}))_{t\geq s\geq 0,x}$. En effet :

Proposition 7.3. *Dans le marché martingale* $\mathcal{M}^{r,\eta,H^{-1}}$, *et sous l'hypothèse 7.4, les assertions suivantes sont vraies :*

i) La dérivée par rapport à la richesse tout au long de la trajectoire optimale de l'utilité progressive u est une martingale évoluant selon l'équation suivante

$$du'(t, X_t^{s,x,u}) = \Gamma^{',\perp}(t, X_t^{s,x,u})dW_t, \tag{7.8}$$

où par définition

$$\Gamma^{',\perp} \stackrel{def}{=} \Gamma' - \Gamma^{',\mathcal{K}}.$$

ii) Le processus $(X_t^{s,x,u}u'(t, X_t^{s,x,u}))_{t\geq s\geq 0,x}$ *est une martingale dont la dynamiques est donnée par,* $\forall t \geq s,\ x > 0$,

$$dX_t^{s,x,u}u'(t, X_t^{s,x,u}) = \Big(X_t^{s,x,u}\Gamma^{',\perp} - \frac{u'}{u''}\Gamma^{',\perp}\Big)(t, X_t^{s,x,u})dW_t. \tag{7.9}$$

Ce résultat n'est autre qu'une condition nécessaire que doit vérifier la dérivée d'une utilité progressive. Il nous sera d'une grande utilité dans la suite, notamment pour établir le lien entre $u'(t, X_t^{s,x,u})$ et le processus optimal (mesure martingale minimale) d'un problème d'optimisation dual que nous définirons dans la section 7.5.

Démonstration. La preuve est basée essentiellement sur l'application du lemme d'*Itô-Ventzel* au processus $u'(t, X_t^{s,x,u})$, $X_t^{s,x,u}u'(t, X_t^{s,x,u})$, $t \geq s$. En effet, d'après le théorème précédent, nous savons que ces processus sont des martingales. Il suffit donc, d'après la proposition 7.2, d'écrire que

$$du'(t,x) = \frac{1}{2}\frac{2 < \Gamma'^{,\mathcal{K}}, (\Gamma'^{,\mathcal{K}})' > u'' - u'''||\Gamma'^{,\mathcal{K}}||^2}{(u'')^2}(t,x)dt + \Gamma'(t,x)dW_t, \quad (7.10)$$

d'appliquer le lemme d'Itô-Ventzel et de s'intéresser uniquement aux termes en dW_t. Nous obtenons, en utilisant la dynamique du portefeuille optimal $X^{s,x,u}$ donnée par (7.2), que

$$\begin{aligned} du'(t, X_t^{s,x,u}) &= \Big(\Gamma'(t, X_t^{s,x,u}) + u''(-\frac{\Gamma'^{,\mathcal{K}}}{u''})(t, X_t^{s,x,u})\Big)dW_t \\ &= \Gamma'^{,\perp}(t, X_t^{s,x,u})dW_t \end{aligned}$$

ce qui montre la première assertion. La seconde découle simplement de cette première assertion et de la dynamique (7.2) du du portefeuille optimal. □

Remarque 7.2. *Notons que nous pouvons démontrer ce résultat directement sans utiliser le théorème 7.1. Pour cela, toujours par la formule d'Itô-Ventzel, la dynamique de u' (proposition 7.2) et celle de la richesse optimale (7.2), nous obtenons*

$$\begin{aligned} du'(t, X_t^{s,x,u}) &= \frac{1}{2}\frac{2 < \Gamma'^{,\mathcal{K}}, (\Gamma'^{,\mathcal{K}})' > u'' - u'''||\Gamma'^{,\mathcal{K}}||^2}{(u'')^2}(t, X_t^{s,x,u})dt \\ &+ u''(-\frac{\Gamma'^{,\mathcal{K}}}{u''})(t, X_t^{s,x,u})dW_t + \frac{u'''}{2}\frac{||\Gamma'^{,\mathcal{K}}||^2}{(u'')^2}(t, X_t^{s,x,u})dt \\ &+ < \Gamma'', -\frac{\Gamma'^{,\mathcal{K}}}{u''} > (t, X_t^{s,x,u})dt + \Gamma'(t, X_t^{s,x,u})dW_t \\ &= \frac{< \Gamma'^{,\mathcal{K}}, (\Gamma'^{,\mathcal{K}})' - \Gamma'' >}{u''}(t, X_t^{s,x,u})dt + \Gamma'^{,\perp}(t, X_t^{s,x,u})dW_t. \end{aligned}$$

Finalement, par le lemme B.6, on obtient que

$$< \Gamma^{',\mathcal{K}}, (\Gamma^{',\mathcal{K}})' - \Gamma'' > (t, X_t^{s,x,u}) = 0,$$

ce qui montre à la fois que $u'(t, X_t^{s,x,u})$ est une martingale et satisfait la dynamique voulue. La deuxième assertion est alors triviale.

Une conséquence directe de la proposition 7.3 est le résultat suivant :

Corollaire 7.1. *Sous la même hypothèse 7.4 que dans la proposition précédente, dans le marché martingale, si, à tout instant t, $\Gamma'(t, X_t^{s,x,u})$ appartient à l'ensemble des contraintes, alors la dérivée de l'utilité prise au long de la trajectoire optimale est constante*

$$u'(t, X_t^{s,x,u}) = u'(s, x), \quad \forall t \geq s \quad p.s. \tag{7.11}$$

En d'autres termes, si la dérivée de la volatilité de l'utilité u est une stratégie admissible, alors la mesure martingale minimale (optimale) est identique à 1.

Nous reviendrons plus particulièrement sur cette notion de mesure martingale minimale dans la section suivante où nous étudierons le problème dual et nous montrerons que, sous cette hypothèse, le dual $\tilde{u}$ est une martingale. Nous reviendrons encore une fois sur ce résultat dans le chapitre suivant quand nous étudierons les classes d'équivalences des utilités progressives. En particulier, nous montrerons que le représentant de chaque classe vérifie l'hypothèse de ce corollaire.

Remarque 7.3. *Si nous prenons $s = 0$ dans l'équation (7.11), nous obtenons que*

$$u'(t, X_t^{x,u}) = u'(0, x), \quad \forall t \geq 0 \quad p.s.$$

Ceci ne nous laisse pas indifférent, car il revient à dire que si le flot stochastique $x \mapsto X^{x,u}$ est inversible, et si nous notons $\mathcal{Y}(x)$ son inverse, alors, par un changement de variable $y = \mathcal{Y}(x)$, il découle que

$$u'(t, x) = u(0, \mathcal{Y}_t(x)), \quad \forall t \geq 0 \quad p.s.$$

Ainsi, nous venons de montrer que le processus d'utilité progressive u est la composée de sa condition initiale et de l'inverse d'une martingale.

En particulier, ces utilités généralisent celles étudiées dans les exemples 4.3.1 et 4.3.2. En effet, si nous choisissons $\mathcal{Y}(t,x) = x/Y_t$ où $1/Y$ est une martingale (rappelons que $\mathcal{Y}$ est une martingale), en intégrant par rapport à x la formule $u'(t,x) = u(0, \mathcal{Y}_t(x))$, nous obtenons

$$u(t,x) = Y_t u\big(0, \frac{x}{Y_t}\big).$$

Ainsi, nous obtenons que X^π/Y_t est une martingale locale sous la probabilité $\mathbb{Q}^Y$ définie par $dQ^Y/d\mathbb{P} = Y$, ce qui n'est autre que la conditions nécessaire établie dans les principaux théorèmes 4.1 et 4.3 ainsi que le corollaire 4.1 dans les exemples 4.3.1 et 4.3.2.

Notations :

Pour toute utilité progressive u, sur le marché martingale, nous noterons $H^{x,u}$ le processus défini par

$$H^{x,u}_{s,t} = \frac{u'(t, X^{s,x,u}_t)}{u'(s,x)} > 0 \ p.s. \tag{7.12}$$

$H^{x,u}$ est appelé *processus de densité de la mesure martingale minimale* car, comme dans le cadre classique d'optimisation de portefeuille, nous verrons que $H^{\cdot,u}$ est le processus optimal qui minimise le problème dual. Il évolue suivant la dynamique

$$dH^{x,u}_{s,t} = \frac{\Gamma^{',\perp}(t, X^{s,x,u}_t)}{u'(s,x)} dW_t. \tag{7.13}$$

Remarque 7.4. *Nous notons, en particulier que le processus $(H^{x,u}_{s,t} X^{s,x,u}_t)_{t\geq s}$ est une martingale.*

Pour faire le lien avec les résultats des paragraphes suivants, nous allons réécrire cette dynamique, en utilisant l'identité (7.12) et en rappelant que $I(t,.)$ désigne $(u')^{-1}(t,.)$, sous la forme suivante :

$$dH^{x,u}_{s,t} = \frac{\Gamma^{',\perp}(t, I(t, u'(s,x) H^{x,u}_{s,t})}{u'(s,x)} dW_t. \tag{7.14}$$

$X^{s,x,u}$ est le processus de richesse optimale associée à u partant à la date s d'un capital x. Nous reviendrons sur cette dynamique dans la suite pour la réécrire sous une seconde forme plus au moins liée à un problème d'optimisation dual. Nous notons que H^u est une martingale, et nous remarquons qu'à tout instant $t \geq 0$, l'identité suivante

$$u'(t, X_t^{s,x,u}) = u'(s,x) H_{s,t}^{x,u} > 0 \ p.s. \tag{7.15}$$

est satisfaite, contrairement au cadre *classique* d'optimisation de portefeuille où cette égalité n'est en général vraie qu'à la date de maturité T.

7.3.1 Retour sur le marché de départ décrit dans 5.2

Sous l'hypothèse 7.4, l'équivalent du théorème 7.1 et de la proposition 7.3 dans l'univers d'investissement $\mathcal{M}^{r,\eta}$ décrit dans 5.2 où la prime de marché est notée par η et le taux court par r, sont donnés par les résultats suivants.

Théorème 7.2. *Soit v une utilité progressive dans l'univers d'investissement 5.2, notons par $\tilde{X}^{x,*}$ le portefeuille optimal associé, partant d'un capital initial x. Alors :*

(i) *Le processus $(\tilde{X}_t^{x,*} u'(t, \tilde{X}_t^{x,*}))_{t\geq 0}$ est une martingale.*

(ii) *Le processus $(u'(t, \tilde{X}_t^{x,*}))_{t\geq 0}$ est une sous-martingale (positive).*

(iii) *Pour toute stratégie admissible π et pour tout second capital initial x', le processus $(\tilde{X}_t^{x',\pi} u'(t, \tilde{X}_t^{x,*}))_{t\geq 0, x>0}$ est une surmartingale.*

Ici nous avons noté $\tilde{X}^{x',\pi}, \pi \in \mathcal{K}$ les processus de richesse dans ce marché, partant d'un capital x et suivant la stratégie π.

Nous énonçons ce résultat car nous reviendrons dans le chapitre suivant au cadre de ce marché financier où nous avons proposer d'étudier les utilités progressives. Nous notons que ce résultat ne tient compte de l'hypothèse $\eta\sigma^{-1} \in \mathcal{K} \cap (-\mathcal{K})$ faite au paragraphe 6.4. En d'autres termes, même si cette hypothèse n'est pas satisfaite, ce résultat est toujours vrai.

Démonstration. La preuve de (i) et (iii) est identique à celle de (i) et (iii) du théorème précédent.

La preuve de l'assertion (ii), repose sur le lemme suivant, qui se démontre de manière identique au lemme 7.1.

Lemme 7.2. *Soit $\mathcal{Y}_t$ une semimartingale positive, vérifiant :*
- *$\forall \pi \in \mathcal{K}$, $\mathcal{Y}_t X_t^\pi$ est une surmartingale.*
- *Il existe $\pi^* \in \mathcal{K}$: $\mathcal{Y}_t X_t^{\pi^*}$ est une martingale.*

Alors $\mathcal{Y}$ est une sous-martingale qui obéit à la dynamique

$$\frac{d\mathcal{Y}_t}{\mathcal{Y}_t} = -r_t dt + (\nu_t \sigma_t - \eta_t) dW_t, \ \nu_t \in \mathcal{K}_t^*. \tag{7.16}$$

□

Proposition 7.4. *Dans le marché $\mathcal{M}^{r,\eta}$, la dérivée de l'utilité progressive prise au long de la trajectoire optimale obéit à la dynamique suivante :*

$$du'(t, X_t^{s,x,u}) = -r_t u'(t, X_t^{s,x,u}) dt - (u'\eta_t - \Gamma^{',\perp})(t, X_t^{s,x,u}) dW_t. \tag{7.17}$$

En particulier, elle s'écrit sous la forme

$$u'(t, X_t^{s,x,u}) = u'(s,x) H_{s,t}^{r,\eta + \frac{\Gamma^{',\perp}}{u''}}. \tag{7.18}$$

En particulier, si Γ' est une stratégie admissible, c-à-d. $\Gamma^{',\perp} \equiv 0$,

$$u'(t, X_t^{s,x,u}) = u'(s,x) H_{s,t}^{r,\eta}, \quad \forall t \geq s \quad p.s. \tag{7.19}$$

où nous rappelons que les processus $H^{\alpha,\beta}$ sont définies par

$$H_{s,t}^{\alpha,\beta} = e^{-\int_s^t (\alpha_u + \frac{1}{2}||\beta_u||^2) du - \int_s^t \beta_u dW_u}, \ t \geq s \geq 0. \tag{7.20}$$

7.4 Dual convexe et EDP stochastiques

Le but de cette section est alors d'établir la dynamique du dual convexe d'une utilité progressive et par conséquent de démontrer le résultat suivant :

Théorème 7.3. *La transformée de Fenchel $\tilde{u}$ du processus d'utilité progressive u vérifiant l'hypothèse 7.4 dans le marché de numéraire H^{-1} est une sous-martingale obéissant à la dynamique*

$$\begin{aligned} d\tilde{u}(t,y) &= \frac{1}{2\tilde{u}''} ||\tilde{\Gamma}^{',\perp}||^2 (t,y) dt + \tilde{\Gamma}(t,y) dW_t & (7.21)\\ \text{où} \quad & \tilde{\Gamma}(t,y) = \Gamma(t, -\tilde{u}')(t,y). & (7.22) \end{aligned}$$

Sa dérivée est solution de

$$d\tilde{u}'(t,y) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}[\frac{||\tilde{\Gamma}'^{,\perp}||^2}{\tilde{u}''}](t,y)dt + \tilde{\Gamma}'(t,y)dW_t.$$

Dans la proposition 6.1 et le corollaire 6.2, nous avons montré qu'une utilité progressive u dans ce marché martingale est une surmartingale. D'après ce dernier résultat et vu que le drift $\tilde{u}'' > 0$ dans (7.33) est alors positif, ceci induit que dual convexe $\tilde{u}$ de u est une sous-martingale.

La dynamique du processus dual $\tilde{u}$ est très similaire à celle de u (équation (7.1)). La seule différence consiste au fait que dans le drift de $\tilde{u}$ est $\tilde{\Gamma}'^{,\perp}$, terme qui remplace $\Gamma'^{,\mathcal{K}}$ dans (7.1), et que $\tilde{\Gamma}$ remplace Γ en terme de volatilité. Nous remarquons aussi que la volatilité $\tilde{\Gamma}$ n'est qu'une transformation de la volatilité de l'utilité Γ. En effet, on a

$$\tilde{\Gamma}(t,.) = \Gamma\Big(t,(u')^{-1}(t,.)\Big).$$

Le paramètre Γ de la dynamique de l'utilité *progressive*, non seulement détermine la dynamique de u ainsi que celle de la richesse optimale, mais aussi celle du dual convexe $\tilde{u}$. Nous montrerons aussi dans la suite que Γ intervient de manière analogue et déterminera la dynamique de la *mesure martingale minimale*. En d'autres termes, Γ intervient à tous les niveaux : utilité, dual convexe, richesse optimale et mesure martingale, ceci de manière décisive au point de devenir *la clé* de toute cette étude.

Remarque 7.5. *Soit $\mathcal{Y}_u$ le processus défini par*

$$\mathcal{Y}_u(t,x) = u'(0,x)\ H^{x,u}_{0,t}. \tag{7.23}$$

En utilisant la définition de $\tilde{\Gamma}$ (7.35) ainsi que la dynamique du processus $H^{x,u}$ donnée par l'équation (7.14), on obtient que le processus $\mathcal{Y}_u$ obéit à la dynamique suivante

$$d(\mathcal{Y}_u(t,x)) = -\frac{\tilde{\Gamma}'^{,\perp}}{\tilde{u}''}(t,\mathcal{Y}_u(t,x))dW_t \tag{7.24}$$

ce qui est semblable à la dynamique du portefeuille optimal $X^{x,u}$ dans ce marché où nous remplaçons $\tilde{\Gamma}'^{,\perp}$ par $\Gamma'^{,\mathcal{K}}$ et $\tilde{u}''$ par u''.

De plus, d'après ce résultat et en utilisant la grande analogie entre la dynamique de u et celle de $\tilde{u}$, nous pouvons déduire que, comme dans le problème primal, le processus $\tilde{u}(t, u'(s,x)H^{x,u}_{s,t})$ est une martingale.
Par contre, la question que nous nous poserons dans la suite est la suivante : $\tilde{u}$ est-il défini à partir d'un certain problème d'optimisation comme c'est le cas pour l'utilité u ? Si oui, le processus $u'(s,x)H^{x,u}_{s,t}$ est-il l'optimum dans ce problème ?
La réponse à cette question est positive et sera détaillée dans le paragraphe 7.5.

Pour faire le lien avec le marché de départ $\mathcal{M}^{r,\eta}$, nous montrons le résultat analogue suivant :

Théorème 7.4. *La transformée de Fenchel $\tilde{u}$ du processus d'utilité progressive u dans le marché $\mathcal{M}^{r,\eta}$ vérifiant l'hypothèse 7.4 obéit à la dynamique suivante*

$$d\tilde{u}(t,y) = \left[\frac{1}{2\tilde{u}''}(\|\tilde{\Gamma}'\|^2 - \|\tilde{\Gamma}'^{,\mathcal{K}} - y\eta\|^2) + y\tilde{u}'r_t\right](t,y)dt + \tilde{\Gamma}(t,y)dW_t \qquad (7.25)$$
$$\tilde{\Gamma}(t,y) = \Gamma(t,-\tilde{u}')(t,y).$$

La première chose que nous pouvons remarquer dans ce résultat, comparé avec celui qui précède, est que la dynamique est beaucoup plus compliquée et loin d'être intuitive.
En plus, $\tilde{u}$ n'est pas forcément une sous-martingale tel qu'il est le cas dans la cadre du marché martingale. En effet, le signe du terme

$$(\|\tilde{\Gamma}'\|^2 - \|\tilde{\Gamma}'^{,\mathcal{K}} - y\eta\|^2 + y\tilde{u}'r)$$

n'est pas constant . Il peut être positif ou négatif selon le choix du paramètre $\tilde{\Gamma}'$, contrairement au cadre du théorème précédent. D'où, encore une fois, l'intérêt de nous placer sur le marché martingale où les équations sont à la fois plus simples et admettent une interprétation plus naturelle.
Cependant, ceci ne nous empêche pas de faire la même remarque sur le rôle joué par la volatilité Γ.

La preuve du théorème 7.4 peut être déduite de celle de 7.3. Nous commençons par démontrer le résultat dans le marché martingale $\mathcal{M}^{r,\eta,(H^{r,\eta})^{-1}}$. Ensuite, nous déduisons celle dans le marché $\mathcal{M}^{r,\eta}$ en remarquant que, dans ce nouveau marché, $\tilde{u}$ est donnée par

$$\tilde{u}(t,y) = \tilde{v}(t, yH_t^{r,\eta})$$

où $\tilde{v}$ est le dual convexe d'une utilité progressive v défénie sur le marché martingale.

Voici la preuve du Théorème 7.3.

Démonstration. (Théorème 7.3) L'idée de la preuve de ce théorème est, simplement, basée sur la définition même du dual convexe. En effet, par construction, nous savons que

$$\tilde{u}(t,y) = u(t, I(t,y)) - yI(t,y). \tag{7.26}$$

En dérivant par rapport à y, on a

$$\tilde{u}_y(t,y) = -I(t,y). \tag{7.27}$$

Le but alors est d'établir dans un premier temps la dynamique de I, et ensuite, celle de de $\tilde{u}$ en intégrant cette dernière par rapport à y.
Pour cela, nous commençons par rappeler les identités suivantes, dont nous aurons besoin tout au long de cette démonstration.

$$(I)\begin{cases} u'(t,I(t,y)) = y \\ \\ u''(t,I(t,y)) = \frac{1}{I'(t,y)} \\ \\ -\frac{u'''}{u''^2}(t,I(t,y)) = \frac{I''}{I'}(t,y) \text{ où encore } -u'''(t,I(t,y)) = \frac{I''}{(I')^3}(t,y). \end{cases}$$

Rappelons ensuite que, comme u satisfait l'hypothèse 7.4, d'après la proposition 7.2 ainsi que le théorème A.12 (ii), nous avons, d'une part, que la dynamique de u' est la dérivée terme à terme de la dynamique de u, c-à-d. ,

$$du'(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\|\Gamma^{',\mathcal{K}}\|^2}{u''})(t,x)dt + \Gamma'(t,x)dW_t, \tag{7.28}$$

d'autre part, que dans ce cas, les caractéristiques locales de u' données ci-dessus par le couple

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\|\Gamma^{',\mathcal{K}}\|^2}{u''}), \Gamma'\Big)$$

appartiennent à la classe $\mathcal{B}^{1,\delta}$, $\delta > 0$. Ainsi la condition nécessaire pour appliquer le lemme d'*Itô-Ventzel* est satisfaite.
Nous pouvons alors, dans ce contexte, considérer le processus composé $u'(t, I)$, et obtenir dans un premier temps que

$$du'(t, I(t, y)) = 0. \tag{7.29}$$

Par suite, en appliquant le lemme d'*Itô-Ventzel*, il en découle que le processus $u'(t, I(t, y)$ évolue selon la dynamique

$$\begin{aligned} du'(t, I(t, y)) &= \frac{1}{2}\frac{2 < \Gamma'^{,\mathcal{K}}, (\Gamma'^{,\mathcal{K}})' > u'' - u'''\|\Gamma'^{,\mathcal{K}}\|^2}{(u'')^2}(t, I(t, y))dt \\ &+ < u''(t, I(t, y)), I(t, y) >_t + u''(t, I)dI(t, y) + \frac{1}{2}u''' < I >_t (t, y) \\ &+ \Gamma'(t, I(t, y))dW_t. \end{aligned} \tag{7.30}$$

Et donc, en égalisant (7.29) et (7.30), et en notant par μ^I et V^I respectivement le drift et la volatilité de I, nous obtenons, en identifiant les termes en dW_t et ceux en dt, les équations suivantes :

$$\begin{cases} -u''(t, I)\mu_t^I = \left(\frac{1}{2}\frac{2<\Gamma'^{,\mathcal{K}},(\Gamma'^{,\mathcal{K}})'>u''-u'''\|\Gamma'^{,\mathcal{K}}\|^2}{(u'')^2} + < \Gamma'', V^I >_t + \frac{1}{2}u'''\|V^I\|^2\right)(t, I), \\ V^I(t, y) = -\Gamma'(t, I(t, y))I'(t, y). \end{cases}$$

D'après la deuxième identité de ce système, et en utilisant (I), on a

$$\begin{cases} < u''(t, I(t, y)), I(t, y) >_t = -I'(t, y) < \Gamma', \Gamma'' > (t, I(t, y)) \\ \\ \frac{<I>_t(t,y)}{I'(t,y)} = I'(t, y)\|\Gamma'\|^2(t, I(t, y)). \end{cases}$$

Injectons ces égalités dans l'expression de μ^I ci-dessus, ceci implique que

$$\mu^I(t, y) =$$
$$\left[\tfrac{-1}{2}I''(\|\Gamma'^{,\mathcal{K}}(t, I)\|^2 - \|\Gamma'(t, I)\|^2) - I'^2(< \Gamma', \Gamma'' > - < \Gamma'^{,\mathcal{K}}, (\Gamma'^{,\mathcal{K}})'>)\right](t, y)$$

que nous pouvons réécrire sous la forme suivante, plus simple et utile pour la suite,

$$\mu^I(t, y) = \frac{-1}{2}\frac{\partial}{\partial y}[I'(\|\Gamma'^{,\mathcal{K}}(t, I)\|^2 - \|\Gamma'(t, I)\|^2)](t, y). \tag{7.31}$$

Par conséquent, on a

$$dI(t,y) = \frac{-1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\Big[I'(\|\Gamma^{',\mathcal{K}}(t,I)\|^2 - \|\Gamma'(t,I)\|^2)\Big](t,y)dt. - \Gamma'(t,I(t,y))I'(t,y)$$

Finalement, en remarquant que

$$\|\Gamma^{',\mathcal{K}}(t,I)\|^2 - \|\Gamma'(t,I)\|^2 = -\|\Gamma^{',\perp}(t,I)\|^2,$$

nous obtenons que

$$dI(t,y) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\Big[I'\|\Gamma^{',\perp}(t,I)\|^2\Big](t,y)dt - \Gamma'(t,I(t,y))I'(t,y). \tag{7.32}$$

En intégrant cette équation par rapport à y, et en notant par $\tilde{\Gamma}(t,y)$ le vecteur $\Gamma(t,I(t,y))$, nous retrouvons bien la dynamique (7.33) de $\tilde{u}$. □

Donnons maintenant la preuve du Théorème 7.4.

Démonstration. (Théorème 7.4) Nous rappelons que, si $\tilde{u}$ est la transformée de Fenchel-Legendre d'une utilité progressive dans l'univers d'investissement 5.2, il existe $\tilde{v}$ tel que

$$\tilde{u}(t,y) = \tilde{v}(t, yH_t^{r,\eta})$$

où $\tilde{v}$ est le dual convexe d'une utilité progressive v sur le marché martingale. D'après le théorème 7.3, $\tilde{v}$ obéit à la dynamique

$$d\tilde{v}(t,y) = \frac{1}{2\tilde{v}''}\|\tilde{\Gamma}_v^{',\perp}\|^2(t,y)dt + \tilde{\Gamma}_v(t,y)dW_t \tag{7.33}$$

$$\text{où} \tag{7.34}$$

$$\tilde{\Gamma}_v(t,y) = \Gamma_v(t,-\tilde{v}')(t,y) \tag{7.35}$$

En appliquant le lemme d'*Itô-Ventzel*, $\tilde{u}$ admet pour dynamique

$$\begin{aligned}
d\tilde{u}(t,y) &= \tilde{v}(t,yH_t^{r,\eta}) \\
&= \frac{1}{2\tilde{v}''}\|\tilde{\Gamma}_v^{',\perp}\|^2(t,yH_t^{r,\eta})dt + \tilde{\Gamma}_v(t,yH_t^{r,\eta})dW_t \\
&- \tilde{v}'(t,yH_t^{r,\eta})yH_t^{r,\eta}(r_tdt + \eta_t dW_t) + \frac{(yH_t^{r,\eta})^2}{2}\tilde{v}''(t,yH_t^{r,\eta})\|\eta_t\|^2dt \\
&- yH_t^{r,\eta} < \Gamma_v', \eta_t > dt \\
&= \frac{1}{2\tilde{v}''}\Big(\|\tilde{\Gamma}_v^{',\perp}\|^2 - \|\tilde{\Gamma}_v'\|^2 + \|\tilde{\Gamma}_v' - yH_t^{r,\eta}\tilde{v}''\eta_t\|^2\Big)dt \\
&+ \Big(\tilde{\Gamma}_v - \tilde{v}'yH_t^{r,\eta}\eta_t\Big)(t,yH_t^{r,\eta})dW_t.
\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\tilde{\Gamma}_u(t,y) = \Big(\tilde{\Gamma}_v - \tilde{v}' y H_t^{r,\eta}\eta_t\Big)(t, yH_t^{r,\eta}),$$

ou encore

$$\tilde{\Gamma}'_u(t,y) = H_t^{r,\eta}\Big(\tilde{\Gamma}'_v - \tilde{v}' H_t^{r,\eta}\eta_t - y\tilde{v}'' H_t^{r,\eta}\eta_t\Big)(t, yH_t^{r,\eta}).$$

En injectant ces deux dernières identités dans la dynamique de $\tilde{u}$ ci-dessus, nous obtenons le résultat voulu. □

En guise de conséquence directe du théorème 7.3, nous énonçons les résultats suivants.

Théorème 7.5. *Supposons, en plus de l'hypothèse 7.4, que pour tout* $t \geq 0$, $x > 0$, *la dérivée* $\Gamma'(t,x)$ *est dans l'espace des contraintes* $\mathcal{K}_t\sigma_t$. *Alors, la transformée de Fenchel* $\tilde{u}$ *ainsi que sa dérivée* $\tilde{u}' = -I$ *sont des martingales suivant les dynamiques respectives*

$$d\tilde{u}(t,y) = -\Gamma(t, -\tilde{u}')(t,y)dW_t, \tag{7.36}$$

$$dI(t,y) = -I_y(t,y)\Gamma'(t, I(t,y))dW_t. \tag{7.37}$$

De plus, la mesure martingale minimale dans ce marché martingale est constante, c-à-d. $H^u = 1$.

En particulier, nous pouvons déduire les deux corollaires suivants

Corollaire 7.2. *Sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent, les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) u *est une utilité progressive.*

ii) $\tilde{u}$ *est une martingale de la forme (7.36).*

iii) $I = (u')^{-1}$ *est une martingale de la forme (7.37).*

ou encore

Corollaire 7.3. *Soit $v(.,x)$ une martingale quelconque, vérifiant :*

$$x \longmapsto v(t,x) \text{ est convexe décroissante pour tout } t \geq 0.$$

Notons $\check{v}$ le conjugué inverse de v défini par

$$\check{v}(t,x) = \inf_y (v(t,y) + xy).$$

Si de plus la dérivée de la volatilité de la martingale v est dans l'espace des contraintes $\mathcal{K}\sigma$, alors nous avons :

i) $\check{v}$ est une utilité progressive sur ce marché particulier $\mathcal{M}^{0,0}$.

ii) Soit Y un processus atteignable strictement positif, alors

$$u(t,\hat{x}) = \check{v}(t,\hat{x}Y_t)$$

est aussi une utilité progressive sur $\mathcal{M}^{0,0,Y}$, le marché de numéraire Y^{-1}.

Remarque 7.6. *On fera les deux remarques suivantes :*

- *L'hypothèse que $\Gamma'(t,x)$ soit dans l'espace des contraintes $\mathcal{K}_t\sigma_t$ est équivalente à dire que la dérivée de la volatilité Γ' de l'utilité est telle que $\Gamma'\sigma^{-1}$ soit une stratégie admissible dans $\mathcal{K}$.*
- *Si le marché est complet, c-à-d. $\mathcal{K} = \mathbb{R}^d$, alors l'hypothèse $\Gamma' \in \mathcal{K}\sigma$ est toujours vraie. Par conséquent, ces derniers résultats restent encore vrais.*

7.5 Dual progressif

Dans cette section, nous développons la nouvelle notion du *dual progressive* sur un marché financier $\mathcal{M}^{r,\eta}$, marché introduit dans 5.2. Dans ce but, nous avons besoin de rappeler quelques définitions nécessaires associées à ce marché.

Nous notons par $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ l'ensemble des martingales locales défini par

$$\mathcal{M}(\mathcal{K}) := \{L : LX^\pi \text{ une martingal local positive}, \forall \pi \in \mathcal{K}\}.$$

Dans l'article de Kramkov et al. [60] cet ensemble est souvent noté $\mathcal{Y}$. Avec la notation $\mathcal{M}(\mathcal{K})$, nous faisons référence à l'ensemble des contraintes $\mathcal{K}$, car dans le modèle de marché considéré dans notre étude, nous pouvons expliciter $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ (voir Karatzas et al [55], [54]), comme

$$\mathcal{M}(\mathcal{K}) := \{L^\nu : L^\nu_{s,t} \triangleq \exp\Big(\int_s^t \nu_r\sigma_r dW_r - \int_0^t ||\nu_r\sigma_r||^2 dr\Big),\ \nu \in \mathcal{K}^*\} \quad (7.38)$$

où $\mathcal{K}^*$ est le cône dual de $\mathcal{K}$ (définition B.14).

Remarque 7.7. *Dans les travaux de Karatzas et al [55] et [54], les auteurs étudient un problème d'optimisation de portefeuille classique à horizon T, tel que les proportions π/X^π investies sur le marché sont contraintes dans un convexe fermé indépendant du temps. Les auteurs montrent ([55] lemme* 5.6 *p. 287) que si*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T ||\nu_t\sigma_t||^2 dt\right) \to +\infty,$$

nécessairement $\tilde{u}(T, L^\nu_T) \to +\infty$, de sorte qu'on peut se limiter à considérer uniquement l'ensemble $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}(\mathcal{K})$ à la place de $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ dans le programme d'optimisation dual où $\mathcal{D}$ est défini par

$$\mathcal{D} := \{L^\nu : \mathbb{E}\left(\int_0^T ||\nu_t\sigma_t||^2 dt\right) < \infty\}.$$

Comme les utilités considérées dans notre étude sont stochastiques et comme la technique utilisée dans la preuve du lemme 5.6 *p. 287 de [55], ne peut être appliquée à notre cadre, il n'y a aucune raison de se restreindre à l'ensemble $\mathcal{D}$ comme dans [55] nous considérons, par conséquent, tout l'ensemble $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ comme l'espace dans lequel nous optimisons.*

Maintenant, nous associons à l'espace dual $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ la définition suivante.

Définition 7.2. *Nous appelons dual progressif issu de la condition initiale $\tilde{u}(0, y)$, tout processus stochastique $\tilde{u}(t, y)_{t,y}$ vérifiant*

(i) Propriété de Convexité : *Pour tout $t \geq$, $x \mapsto \tilde{u}(t, y)$ est un processus croissant strictement convexe en y.*

(ii) Consistance avec l'univers dual : *Pour toute martingale $L \in \mathcal{M}(\mathcal{K})$, l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\tilde{u}(s, y) \leq \mathbb{E}(\tilde{u}(t, yL_{s,t})/\mathcal{F}_s) \tag{7.39}$$

pour tout y et pour tout (s, t) tel que $t \geq s$.

(iii) Existence d'une mesure martingale optimale : *Il existe une mesure martingale, notée $L^{y,\tilde{u}} \in \mathcal{M}(\mathcal{K})$, pour laquelle nous avons l'identité*

$$\tilde{u}(s, y) = \mathbb{E}(\tilde{u}(t, yL^{y,\tilde{u}}_{s,t})/\mathcal{F}_s). \tag{7.40}$$

Le processus $L^{y,\tilde{u}}$ est appelé processus de mesure martingale équivalente optimale.

Remarquons qu' en particulier, tout processus *dual progressif* vaut sa propre fonction valeur, c-à-d.

$$\tilde{u}(s, y) = \inf_{L \in \mathcal{M}(\mathcal{K})} \mathbb{E}(\tilde{u}(t, yL_{s,t})/\mathcal{F}_s). \tag{7.41}$$

Cette définition est très similaire à celle des utilités progressives. Ce choix n'est pas quelconque car nous avons montré, dans le cadre classique à travers les théorèmes 3.3 et 3.6, que le dual convexe de la fonction valeur est à son tour la fonction valeur associée à un problème d'optimisation dual de type (7.41) (avec un horizon T). Ainsi, le but du paragraphe suivant est de généraliser ces résultats de manière à les étendre au cadre des utilités progressives, c-à-d. prouver que le dual convexe d'une utilité progressive est un *dual progressif*. Ceci sera le but du paragraphe suivant.

7.6 Dual d'une utilité progressive vs dual progressif

Comme nous l'avons déjà annoncé, le but de cette section est de montrer que le dual convexe d'une utilité progressive est un *dual progressif*, c-à-d. prouver le résultat suivant.

Théorème 7.6. *Le dual convexe $\tilde{u}$ d'une utilité progressive est un dual progressif. En particulier, si nous notons par $(L_t^{y,\tilde{u}})_{t,y}$ le processus de mesure martingale optimale équivalente, alors $L^{y,\tilde{u}}$ satisfait*

$$L_t^{u'(s,x),\tilde{u}} = H_{s,t}^{x,u} = \frac{u'(t, X_t^{s,x,*})}{u'(s,x)}, p.s. \text{ pour tout } x > 0,\ t \geq s.$$

Démonstration. La preuve consiste à vérifier que $\tilde{u}$ satisfait les trois conditions de la définition 7.2 :

(i) La convexité est une conséquence immédiate de la définition de la transformée de *Fenchel* d'un processus partout fini. Reste à vérifier les assertions de consistance avec l'univers dual et l'existence d'une martingale équivalente optimale au problème dual (7.41).

(ii) Ensuite par définition du dual convexe, il est facile de voir que, pour tout $L \in \mathcal{M}(\mathcal{K})$,

$$\tilde{u}(t, yL_{s,t}) \geq u(t, X_t^{s,x,u}) - yL_{s,t}X_t^{s,x,u}.$$

Or, par définition de l'ensemble $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ (équation (7.38)), le processus $L_{s,t}X_t^{s,x,u}$ est une surmartingale positive. Comme par optimalité de la richesse $X^{s,x,u}$ le processus $(u(t, X_t^{s,x,u}))_{t\geq 0}$ est une martingale, il s'ensuit en prenant l'espérance conditionelle

$$\mathbb{E}(\tilde{u}(t, yL_{s,t})/\mathcal{F}_s) \geq \mathbb{E}(u(t, X_t^{s,x,u})/\mathcal{F}_s) - y\mathbb{E}(L_{s,t}X_t^{s,x,u}/\mathcal{F}_s) \geq u(s,x) - yx.$$

En particulier si $x = -\tilde{u}'(s,y) = (u')^{-1}(s,y)$, cette dernière inégalité se réécrit, par définition du dual convexe $\tilde{u}$ (définition 7.1, équation (7.4)), comme suit

$$\mathbb{E}(\tilde{u}(t, yL_{s,t})/\mathcal{F}_s) \geq u(s, (u')^{-1}(s,y)) - y(u')^{-1}(s,y) = \tilde{u}(s,y) \tag{7.42}$$

qui n'est autre que la propriété duale de la consistance avec l'univers d'investissement.

Considérons maintenant, le processus H^u défini dans (7.12) par

$$H_{s,t}^{x,u} = \frac{u'(t, X_t^{s,x,u})}{u'(s,x)} > 0 \ p.s.$$

et désignons par $L^{y,\tilde{u}}$ le processus défini par $L_t^{y,\tilde{u}} = H_{s,t}^{(u')^{-1}(s,y),u}$. En particulier nous avons l'identité,

$$(u')^{-1}(t, yL_t^{y,\tilde{u}}) = X_t^{s,(u')^{-1}(s,y),u}$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\tilde{u}(t, yL_t^{y,\tilde{u}}) = u(t, X_t^{s,(u')^{-1}(s,y),u}) - L_t^{y,\tilde{u}} X_t^{s,(u')^{-1}(s,y),u}.$$

Comme $(H_{s,t}^{x,u} X_t^{s,x,u})_{t\geq s}$ est une martingale, il en est de même pour

$$(L_t^{(u')^{-1}(s,y),\tilde{u}} X_t^{s,(u')^{-1}(s,y),u})_{t\geq s}.$$

Rajoutons à cela le fait que $u(t, X_t^{s,(u')^{-1}(s,y),u})$ est une martingale par optimalité de $X_t^{s,(u')^{-1}(s,y),u}$, on déduit que la processus $\tilde{u}(t, yL_t^{y,\tilde{u}})$ est une martingale. Combinons ceci avec l'inégalité (7.42), il s'ensuit

$$\mathbb{E}(\tilde{u}(t, yL_{s,t})/\mathcal{F}_s) \geq \tilde{u}(s,y) = \mathbb{E}(\tilde{u}(t, yL_{s,t}^{y,\tilde{u}})/\mathcal{F}_s), \ \forall L \in \mathcal{M}(\mathcal{K})$$

ce qui prouve l'optimalité du processus $L^{y,\tilde{u}}$ et achève la démonstration.

$\square$

Ainsi, nous avons montré que le processus H^u défini dans (7.12) est bien la mesure martingale minimale du problème d'optimisation (7.41). Nous pouvons alors facilement établir, à l'aide de la proposition 7.3, que les assertions (iv) et (v) du théorème 3.6 établi par Kramkov *et al.* [60] restent vraies dans le cadre étudié ici, c-à-d. :

Proposition 7.5. *Sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent, on a*

- *Le processus* $(X_t^{s,x,u} H_{s,t}^{x,u})_{t\geq s}$ *tel que* $u'(s,x)H_{s,t}^{x,u} = u'(t, X_t^{s,x,u})$ *est une martingale, c-à-d.*
$$\mathbb{E}(X_t^{s,x,u} H_{s,t}^{x,u}/\mathcal{F}_s) = x.$$
- *De manière équivalente à la deuxième assertion de la proposition 7.3, le processus* $(H_{s,t}^{y,u} \tilde{u}'(s, yH_{s,t}^{y,u}))_{t\geq s}$ *est une martingale, c-à-d.*

$$\tilde{u}'(s,y) = \mathbb{E}(H_{s,t}^{y,u} \tilde{u}'(s, yH_{s,t}^{y,u})/\mathcal{F}_s).$$

Dans la suite, nous nous intéressosns à un cas particulier des utilités progressives, celui des utilités progressives décroissantes dans le temps. Nous présenterons les résultats existants, puis nous donnerons une interprétation assez intéressante de ce cas.

7.7 Utilités décroissantes

7.7.1 Utilités décroissantes : résultats existants

Nous étudions dans ce paragraphe le cas particulier des utilités progressives décroissantes dans le temps. D'après la décomposition de *Doob-Meyer*, la volatilité Γ de ces utilités est nulle, il s'ensuit, d'après la dynamique (5.37) corollaire 5.2, qu' elles sont solutions de l'équation

$$dv(t,x) = \frac{v'^2}{2v''}(t,x)\|\eta_t\|^2 dt, \tag{7.43}$$

ce qui est équivalent à

$$v_t(t,x) = \frac{v'^2}{2v''}(t,x)\|\eta_t\|^2. \tag{7.44}$$

Comme v est strictement concave, v_t est alors négative, d'où la décroissance dans le temps.

C'est un cas assez particulier des utilités progressives, car tout simplement c'est le cas d' utilité progressive dont le paramètre Γ est nul.

Ces utilités ont été étudiées pour la première fois par Hobson et Henderson dans [43], Musiela et Zariphopoulou dans [88] et enfin par Tehranchi [36].
Les auteurs supposent que le marché est incomplet dans le sens où la filtration $\mathcal{F}$ n'est pas forcément celle générée par le mouvement brownien W. Afin d'établir leurs principaux résultats, quelques hypothèses leur ont été nécessaires :

Hypothèse 7.5. *La stratégie $\eta\sigma^{-1}$ est une stratégie admissible.*

Dans le contexte de marché incomplet qu'on considère, cette hypothèse est équivalente à supposer que $\eta\sigma^{-1} \in \mathcal{K}$.

Hypothèse 7.6. *La fonction $v : [0,+\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est telle que :*

- *$x \mapsto u(t,x)$ satisfait les conditions d'Inada.*
- *Les dérivées partielles u_t, u', u'', u''' et $u_{tx} = u_{xt}$ sont bien définies et continues dans $[0,+\infty) \times (0,+\infty)$.*

Sous ces hypothèses, les auteurs montrent les deux résultats qui suivent :

Théorème 7.7. *Soit $(t,x) \mapsto v(t,x,\omega)$ solution de (7.43) vérifiant l'hypothèse 7.6. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) v est une utilité progressive, il existe une variable aléatoire scalaire C telle que la stratégie optimale π^* s'écrit

$$\pi^*_t \sigma_t = C_t \eta_t.$$

ii) Il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ et une mesure finie ν à support dans $[0,+\infty)$ avec $\nu(0) = 0$ dont la transformée de Laplace est partout finie et telles que

$$\tilde{v}(t,y,\omega) = \int_{(0,+\infty)} \frac{1}{1-r}(1 - y^{1-r} e^{\frac{r(1-r)}{2} \int_0^t \|\eta_s\|^2 ds})\nu(dr) + C, \quad p.s. \tag{7.45}$$

où $\tilde{v}$ désigne la transformée duale de v.

Rappelons que l'implication $i) \Rightarrow ii)$ a été prouvée d'abord par Henderson et Hobson [43].

Une des conséquences directes de ce dernier résultat est le corollaire suivant.

Corollaire 7.4. *Soit v^0 une fonction d'utilité de $(0,+\infty)$ dans $\mathbb{R}$. Alors, il existe une utilité progressive v solution de (7.43), vérifiant l'hypothèse 7.6 avec $v(0,x,w) = v^0(x)$ si et seulement si il existe une mesure finie ν telle que*

$$(v^0_x)^{-1}(y) = -\int_{(0,+\infty)} y^{-r} \nu(dr). \tag{7.46}$$

Dans ce cas, elle est unique et donnée par (7.45). En particulier le portefeuille optimal est donné par

$$X^x_{s,t} = \int_{(0,+\infty)} (v'(s,x))^{-r} \mathcal{E}(r \int_s^t \eta_s(dW_s + \eta_s ds))\nu(dr) \tag{7.47}$$

où $\mathcal{E}(\int_s^t \nu_s dW_s) = e^{\int_s^t \nu_s dW_s - \frac{1}{2}\int_s^t ||\nu_s||^2 dW_s}$.

Ce résultat est très important car il montre que si v est une utilité progressive, décroissante dans le temps, alors sa condition initiale v^0 ne peut être quelconque, elle est forcément de la forme (7.46).

Remarque 7.8. – *Il est important de noter que cette richesse optimale, donnée par (7.47), est strictement croissante par rapport à la condition initiale x. De plus comme u est de classe $\mathcal{C}^3$ par rapport à cette variable, il s'ensuit que la richesse optimale est deux fois différentiable par rapport à sa condition initiale.*

– *En dérivant (7.45) par rapport à y, et en considérant le changement de variable $\lambda = log(y)$ pour $y > 0$, on obtient que*

$$\tilde{v}'(t,y) = -\int_{(0,+\infty)} y^{-r} e^{\frac{r(1-r)}{2}\int_0^t \|\eta_s\|^2 ds} \nu(dr). \tag{7.48}$$

Donc $\tilde{v}'(t,e^{\lambda})$ est la transformée de Laplace de la mesure $e^{\frac{r(1-r)}{2}\int_0^t \|\eta_s\|^2 ds}\nu(.)$.

Dans le cas où le processus η ne s'annule pas, Musiela et Zariphopoulou dans [88] interprètent le terme $\int_0^t \|\eta_s\|^2 ds$ (strictement positif par hypothèse et strictement croissant) comme un changement de temps.
Convaincu que ce terme est plutôt lié à un changement de numéraire et ceci essentiellement par la présence de la prime de risque du marché η qui est encore la volatilité du numéraire du marché $(H^{r,\eta})^{-1}$, le paragraphe suivant sera dédié à comprendre ce lien éventuel.
NB : La preuve de ces deux résultats est fournie dans [36], nous ne la reprenons pas dans notre développement.

7.7.2 Utilités décroissantes et changement de numéraire

Les utilités décroissantes, décrites dans le paragraphe précédent, sont des processus d'utilités progressives définis sur le marché $\mathcal{M}^{0,\eta}$. Dans le but de mieux comprendre la formule (7.45) du théorème et plus particulièrement le terme

$$\exp\Big(\frac{r(1-r)}{2}\int_0^t \|\eta_s\|^2 ds\Big),$$

on se placera sur le marché martingale associé en utilisant un changement de numéraire appliqué à ces utilités.

Le numéraire qu'on va considérer dans toute la suite est le numéraire du marché donné par

$$L_t^\eta = \exp\Big(- \int_0^t \eta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|\eta_s\|^2 ds\Big). \tag{7.49}$$

Nous définissons alors l'utilité progressive u, dans ce nouveau marché, par

$$u(t,x) = v(t, \frac{x}{L_t^\eta}). \tag{7.50}$$

Le but, dans la suite, est donc de montrer la proposition suivante :

Proposition 7.6. *Ainsi défini, dans le nouveau numéraire, le processus d'utilité progressive u est tel que son dual convexe $\tilde{u}$ est une martingale donnée par*

$$\tilde{u}(t,y) = \int_{(0,+\infty)} \frac{1}{1-r}(1 - y^{1-r} L_t^{(1-r)\eta})\nu(dr) + C, \tag{7.51}$$

où C désigne une constante.
La mesure martingale introduite dans les sections précédentes de ce chapitre (voir équation 7.14) est constante et vaut 1, et ce quelle que soit la mesure ν.

Démonstration. Le fait que u soit une utilité progressive sur le marché $\mathcal{M}^{0,\eta,L^\eta}$ est une conséquence des résultats établis dans les sections précédentes.
Ensuite, on a

$$\tilde{u}(t,y) = \inf_{x>0}\{u(t,x) - xy\} = \inf_{x>0}\{v(t,\frac{x}{L_t^\eta}) - xy\}. \tag{7.52}$$

Donc, en faisant le changement de variable $x = x/L$, on obtient que

$$\tilde{u}(t,y) = \inf_{x>0}\{v(t,x) - xyL_t^\eta\} = \tilde{v}(t, yL_t^\eta). \tag{7.53}$$

Donc, dans un premier temps, on a

$$\tilde{u}(t,y) = \int_{(0,+\infty)} \frac{1}{1-r}\Big(1 - y^{1-r}(L_t^\eta)^{1-r} e^{\frac{r(1-r)}{2}\int_0^t \|\eta_s\|^2 ds}\Big)\nu(dr) + C, \tag{7.54}$$

où C désigne une constante. Ensuite, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}
(L_t^\eta)^{1-r} e^{\frac{r(1-r)}{2}\int_0^t \|\eta_s\|^2 ds} &= e^{-(1-r)\int_0^t \eta_s dW_s - (1-r)\frac{1}{2}\int_0^t \|\eta_s\|^2 ds} e^{\frac{r(1-r)}{2}\int_0^t \|\eta_s\|^2 ds} \\
&= e^{-(1-r)\int_0^t \eta_s dW_s - \frac{(1-r)^2}{2}\int_0^t \|\eta_s\|^2 ds} \\
&= L_t^{(1-r)\eta},
\end{aligned} \tag{7.55}$$

ce qui prouve l'expression (7.51).
Puis, par une simple application du lemme d'*Itô* à l'équation (7.51), il s'ensuit que $\tilde{u}$ est martingale dont la volatilité est proportionelle à η. Or, d'après l'hypothèse 7.5, η est une stratégie admissible, alors nous en déduisons, enfin, par le théorème 7.6, que la mesure martingale minimale (optimale) générée par $\tilde{u}$ est constante et vaut 1. $\square$

Remarque 7.9. *En remarquant que $\Gamma_u(t,x) = xu'(t,x)\eta_t \in \mathcal{K}_t\sigma_t$, par une simple application de la formule d'Itô généralisée, ceci nous permet de déduire directement que $\tilde{u}$ est une martingale d'après le théorème 7.3.*

Notons que, d'après ce résultat, si $\tilde{u}$ est la transformée de *Laplace* à la date $t = 0$ d'une mesure ν, alors à tout instant t, elle est la transformée de *Laplace* d'une mesure stochastique martingale donnée par

$$\nu_t(dr) = L_t^{(1-r)\eta}\nu(dr).$$

7.7.3 Une famille de problèmes d'optimisation auxiliaires

En utilisant les résultats du théorème 7.7.2, dû à M. Tehranchi et al. [36], nous avons montré dans la proposition 7.6 que le dual convexe $\tilde{u}$ d'une utilité progressive u, issue par un changement de numéraire $(L^\eta = H^{0,\eta})^{-1}$ d'une seconde utilité progressive décroissante, est une martingale de la forme (7.51), c-à-d.

$$\tilde{u}(t,y) = \int_{(0,+\infty)} \frac{1}{1-r}(1 - y^{1-r}L_t^{(1-r)\eta})\nu(dr) + Cte.$$

Remarquons que l'intégrant dans cette équation, défini par

$$\tilde{u}(t,y,r) = \frac{1}{1-r}(1 - y^{1-r}L_t^{(1-r)\eta}) \tag{7.56}$$

est non seulement une martingale, mais aussi le dual convexe d'une utilité progressive que nous noterons $u(t,x,r)$. En effet, il suffit de prendre $\nu = \delta_r$ dans l'équation (7.51) pour s'en convaincre.
Comme $v(.,.,r)$ est de type puissance, il est simple de montrer que le primal $u(t,x,r)$ est une utilité puissance dont l'aversion au risque est donnée par $1/r$ et telle que

$$u(t,x,r) = \frac{1}{1-\frac{1}{r}}x^{1-\frac{1}{r}}(L_t^{(1-r)\eta})^{-\frac{1}{r}}. \tag{7.57}$$

Le but de la suite est de comprendre si le fait que ces utilités soient toutes de même type, notamment assez particulier, à savoir puissance, a joué un rôle fondamental dans l'établissement de la formule (7.51).
Pour cela, nous allons étudier les portefeuilles optimaux X_t^r que génèrent ces utilités. L'idée, par la suite, est de verifier que l'integrale par rapport à r de ces richesses optimales est bien la richesse optimale associée à u, donnée par la formule (7.47).

Dans cette étude, nous partons, contrairement à ce que nous avons l'habitude de faire, du processus dual $\tilde{u}(t, y, r)$ et nous étudions le processus primal $u(t, x, r)$. Nous ferons de même pour les richesses initiales : y étant fixée, le capital initial au problème d'optimisation associé à $u(t, ., r)$ sera donné par

$$x_r = -\tilde{u}'(0, y, r) = (u'(0, x))^{-r}$$

Une fois que nous avons fixé la richesse initiale x_r relative au problème d'optimisation de portefeuille associé à l'utilité progressive $u(., ., r)$, nous pouvons étudier la richesse optimale qu'elle génère à partir de ce capital de départ.
Pour cela, nous allons utiliser la proposition 7.6. En effet, dans la deuxième partie de ce résultat, nous avons montré que la mesure martingale minimale associée à $\tilde{u}$ est identique à 1 quelle que soit la mesure ν que nous choisissons, en particulier ceci est encore vrai pour un choix de $\nu = \delta_r$, où δ_r désigne la mesure de *Dirac* au point r. En d'autres termes, ceci nous permet de conclure que la mesure martingale, que nous noterons $Y^{y,r}$, associée au problème dual $\tilde{u}(., y, r)$ est constante et vaut 1 (la même que celle de $\tilde{u}$ notée Y^y).

Par ailleurs, nous savons que les mesures martingales minimales et les richesses optimales sont liées par

$$\begin{cases} X_t^{x_r,r} = \tilde{u}'_y(t, yY^{y,r}, r), \\ X_t^{x,u} = \tilde{u}'_y(t, yY^y), \end{cases} \tag{7.58}$$

où nous avons noté $X^{x_r,r}$ (respectivement $X^{x,u}$) les richesse optimales associées au problème en $u(., x_r, r)$ (respectivement en u).

Remarque 7.10. *Remarquons que la richesse initiale associée au problème d'optimisation en u est $x \neq x_r$. En effet, x est donné par $x = -\tilde{u}'(t, y)$. Elle* *s'écrit par conséquent, en utilisant l'identité $x_r = -\tilde{u}'(t,y,r)$ et la définition même de $\tilde{u}(t,y,r)$, sous la forme*

$$x = \int_{(0,+\infty)} x_r \nu(dr). \tag{7.59}$$

Comme les mesures martingales minimales sont toutes égales à 1, il s'ensuit que

$$X_t^{x_r,r} = y^{-r} L_t^{(1-r)\eta}, \; y = u'(0,x). \tag{7.60}$$

De même, la richesse optimale $X^{x,u}$, associée au problème général en u, est donnée par conséquent à partir de (7.51) par

$$X_t^{x,*} = -\tilde{v}(t, Y^{t,y,*}) = \int_{(0,+\infty)} ((y^{-r} L_t^{(1-r)\eta})\nu(dr), \; y = u'(0,x). \tag{7.61}$$

Finalement, d'après (7.60), elle se réécrit sous

$$X_s^{t,x,*} = \int_{(0,+\infty)} X_s^{t,x_r,r} \nu(dr), \quad t \leq s \leq T, \tag{7.62}$$

d'où le lemme suivant :

Lemme 7.3. *Dans ce cadre particulier de fonction d'utilité, la richesse optimale associée au problème, où l'utilité est u, s'exprime en fonction de celles des problèmes auxiliaires en $u(.,.,r)$ de la manière suivante,*

$$X_s^{t,x,*} = \int_{(0,+\infty)} X_s^{t,x_r,r} \nu(dr), \quad t \leq s \leq T, \tag{7.63}$$

$$x_r = (u'(0,x))^{-r} \tag{7.64}$$

Interprétation :

L'égalité (7.61) est équivalente à dire que la richesse optimale au problème d'optimisation de portefeuille, avec u comme utilité, est égale à la somme pondérée par la mesure ν de toutes les richesses optimales associées aux problèmes d'optimisation auxiliaires (7.57) et ce en faisant varier l'aversion au risque relative $1/r$ entre 0 et $+\infty$.

La richesse $X_t^{x_r,r}\nu(dr)$ s'interprète, alors, comme la proportion optimale que l'investisseur doit investir si son aversion au risque relative (aléatoire) vaut $1/r$ à l'instant t avec une densité $\nu(dr)$.