CONSTRUCTION DE FRACTALS

Considérons une famille de transformations du plan complexe $f_1, f_2, \dots, f_p$ qui sont contractantes, c.a.d :

$$\forall\, i, \exists\, k_i \in [0,1[\,, \forall\,(z,z') \in \mathbb{C}^2, |f_i(z) - f_i(z')| \leq k_i |z - z'|$$

Etant donné une partie K du plan complexe, fermée et bornée (c'est le cas d'une ligne polygonale, d'un cercle, …), on définit la suite récurrente $(K_n)_n$ suivante dont les termes sont des parties du plan complexe,

$$\begin{cases} K_0 = K \\ K_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{p} f_i(K_n) \end{cases}$$

On peut démontrer que si $f_i(K) \subset K$ pour tout i, alors la suite $(K_n)_n$ “converge“ (dans un sens qui restera ici intuitif) vers une partie K_∞ du plan complexe, qui ne dépend pas du choix d'un tel K et qu'on appelle *attracteur* de la famille $f_1, f_2, \dots, f_p$. On a alors la relation

$$K_\infty = \bigcup_{i=1}^{p} f_i(K_\infty)$$

On prendra pour les f_i principalement des similitudes, c.a.d les transformations pour lesquelles $|f_i(z) - f_i(z')| = k_i |z - z'|$ et qui s'écrivent $z \mapsto az + b$ ou bien $z \mapsto a\bar{z} + b$.

La définition des K_n étant récursive, on utilisera de façon préférentielle des procédures récursives (voir chapitre 10).

1) **Un exemple simple** On considère ici les deux homothéties $f_1(z) = \frac{1}{2}z$ et $f_2(z) = 1 + \frac{1}{2}(z-1)$. Vérifier que $K_\infty = [0,1]$.

2) **Utilitaire** Ecrire deux fonctions *aff* et *pt* : aff(M) = z_M application qui à un point M donné sous forme de liste associe son affixe et pt l'application réciproque de aff.
Cela permettra d'énoncer les transformations sous leur forme complexe mais de travailler sur les points du plan.

3) **Triangle de Serpinski** On prend ici $K = ABC$ un triangle équilatéral et h_A, h_B, h_C les homothéties de centres respectifs A, B et C et de rapport 1/2. Construire la liste des triangles composant K_n (on pourra faire une procédure récursive).
Dessiner K_n .

4) **Courbe de Koch** On considère un segment $[AB]$ et les points C, D, E tels que $\begin{cases} C, E \in [AB] \\ AC = EB = CD = DE \end{cases}$.
On pose $k = AC/AB \in\ ]1/4,1/2[$.
On prend ici $A = (0,0)$ et $B = (1,0)$. Déterminer, sous la forme $z \mapsto az + b$, les expressions des transformations f_1 , f_2 , f_3 , f_4 , satisfaisant respectivement $f_1([AB]) = [AC]$, $f_2([AB]) = [CD]$, $f_3([AB]) = [DE]$ et $f_4([AB]) = [EB]$.
Construire, pour un entier n donné et $K = [AB]$, la ligne polygonale K_n .
Réunir trois copies de la courbe de Koch construites sur les côtés d'un triangle équilatéral pour former un **flocon de Koch** (on ne calculera en fait qu'un seul K_n et on lui appliquera des transformations convenables).

5) **Arbres fractals**
Soit $[AB]$ un segment vertical. On considère les deux similitudes $z \mapsto 0.6e^{i\pi/4}z + iAB$ et $z \mapsto 0.6e^{-i\pi/4}z + iAB$; construire et afficher sur un même graphique la suite de tous les segments $(K_n)_{n \leq 5}$ avec $K = [AB]$. On obtient un arbre binaire (en rajoutant la similitude $z \mapsto z$ dans la liste des transformations, on obtient directement $K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 \cup K_5$ à la 5-ième étape).

On obtient des formes d'arbres variées en modifiant les paramètres : $z \mapsto k_1 e^{i\theta_1} z + i\, q_1 AB$ et $z \mapsto k_2 e^{i\theta_2} z + i\, q_2 AB$, où k_1 et k_2 sont les facteurs de réduction des branches gauches et droites respectivement (par rapport à la longueur du tronc); q_1 (resp. q_2) désigne la proportion du tronc d'où surgit, à droite (resp. à gauche), une nouvelle branche (au sommet du tronc dans l'exemple précédent puisque $q_1 = 1$).
Rien n'empêche ensuite de provoquer des départs de branches supplémentaires en rajoutant des similitudes appropriées.

6) **(encore) le dragon !**

Il s'agit d'utiliser les techniques de ce TD pour donner une autre construction de la courbe du dragon (cf exercices chapitre 9). Pour cela, on considère les deux similitudes $z \mapsto rz$ et $z \mapsto 1 + irz$ où $r = 1/2(1 + i)$. Déterminer la liste de segments K_n correspondant à $K = [AB]$, où $A = (0,0)$ et $B = (1,0)$ pour diverses valeurs de n.

Dessiner sur un même graphique K_9, l'image de K_9 par la symétrie centrale de centre (1/2,0) et l'image de K_9 par la translation de vecteur $\vec{i}$. Que constate-t-on ?

7) **Une autre méthode de construction**